Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería Mecánica
Departamento de Diseño de Sistemas y Componentes Mecánicos

Dinámica Aplicada
Parcial # 2: “Sistemas de múltiples grados de libertad”

Nombre: ___________________________ Fecha: 11 de noviembre de 2015
Cédula: ___________________________ Profesor: Arturo Arosemena
Grupo: 1IE142

I. Resuelva el siguiente problema. Lea atentamente, siga las siguientes instrucciones, y enuncie sus suposiciones*.

Problema # 1 (100 puntos)

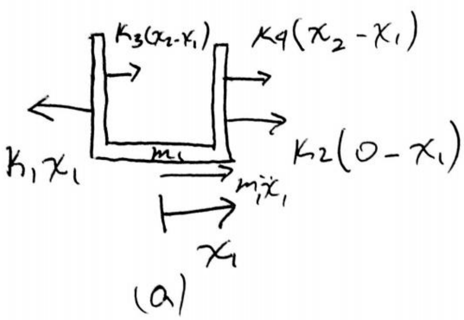
Considere el sistema de múltiples grados de libertad mostrado en la figura # 1. Este sistema está compuesto de tres masas puntuales m_1, m_2, m_3 y de cuatro resortes k_1, k_2, k_3, k_4 de masa despreciable y cuyo comportamiento es lineal. Aquí la masa puntual m_3 está sujeta al extremo de una barra rígida de masa despreciable y longitud l tal como se observa en la figura. Sí las masas puntuales son perturbadas de su posición de equilibrio producto de la aplicación de una fuerza no conservativa F_1 sobre la masa puntual m_1, haga lo siguiente:

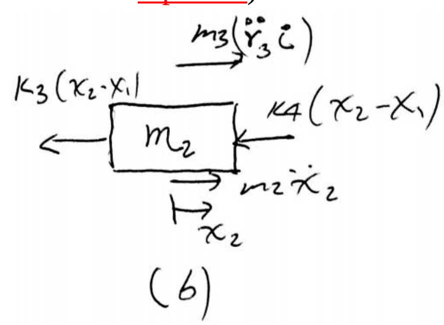
a) Diga de cuantos grados de libertad es el sistema mostrado en la figura # 1 (3 puntos).

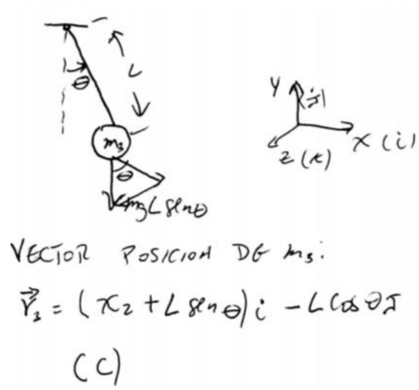
El sistema es de tres grados de libertad.

b) Deduzca las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema empleando:

b.1) El método de diagrama de cuerpo libre (15 puntos: dibujar diagramas de cuerpo libre 9 puntos, deducir las ecuaciones diferenciales de movimiento 6 puntos).







Tres puntos cada diagrama.

Dos puntos cada ecuación deducida.

$$\sum F_{x,m_1} = m_1\ddot{x}_1$$
$$F_1 - k_1x_1 + k_3(x_2 - x_1) + k_4(x_2 - x_1) - k_2x_1 = m_1\ddot{x}_1$$
$$\boldsymbol{m_1\ddot{x}_1 + x_1(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + x_2(-k_3 - k_4) = F_1}$$

$$\sum F_{x,m_2} = m_2\ddot{x}_2 + m_3(\ddot{x}_2 + L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta)$$
$$-k_3(x_2 - x_1) - k_4(x_2 - x_1) \cong m_2\ddot{x}_2 + m_3(\ddot{x}_2 + L\ddot{\theta})$$
$$\boldsymbol{\ddot{x}_2(m_2 + m_3) + \ddot{\theta}(m_3L) + x_1(-k_3 - k_4) + x_2(k_3 + k_4) \cong 0}$$

$$\sum M \cong m_3L^2\ddot{\theta} + m_3L\ddot{x}_2$$
$$-m_3gL\sin\theta \cong m_3L^2\ddot{\theta} + m_3L\ddot{x}_2$$
$$\boldsymbol{\ddot{x}_2(m_3L) + \ddot{\theta}(m_3L^2) + \theta(m_3gL) = 0}$$

b.2) Las ecuaciones de Lagrange (19 puntos: plantear correctamente la expresión para la energía cinética del sistema 5 puntos, plantear correctamente la expresión para la energía potencial del sistema 5 puntos, deducir las ecuaciones diferenciales de movimiento 9 puntos).

$$\boldsymbol{T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2{}^2 + \frac{1}{2}m_3\left[\left(\dot{x}_2 + L\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(L\dot{\theta}\sin\ \theta\right)^2\right]}$$
$$\boldsymbol{V = \frac{1}{2}k_1x_1{}^2 + \frac{1}{2}k_2x_1{}^2 + \frac{1}{2}k_3(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_4(x_2 - x_1)^2 + m_3gL(1 - \cos\theta)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v_i}}\right) - \frac{\partial L}{\partial v_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \dot{v_i}} = Q_{i,otro}, \quad i = 1,2,\dots,n$$

Donde

$$L = T - V$$

Para $v_1 = x_1$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_1}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = F_1$$

$$m_1\ddot{x}_1 + [k_1x_1 + k_2x_1 - k_3(x_2 - x_1) - k_4(x_2 - x_1)] = F_1$$

$$\boldsymbol{m_1\ddot{x}_1 + x_1(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + x_2(-k_3 - k_4) = F_1}$$

Para $v_2 = x_2$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x_2}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + m_3\left(\ddot{x}_2 + L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta\right) + k_3(x_2 - x_1) + k_4(x_2 - x_1) = 0$$

$$\boldsymbol{\ddot{x}_2(m_2 + m_3) + \ddot{\theta}(m_3 L) + x_1(-k_3 - k_4) + x_2(k_3 + k_4) \cong 0}$$

Para $v_3 = \dot{\theta}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$m_3\left\{\left[-L\dot{\theta}\sin\theta\left(\dot{x}_2 + L\dot{\theta}\cos\theta\right) + L\cos\theta\left(\ddot{x}_2 - L\dot{\theta}^2\sin\theta + L\ddot{\theta}\cos\theta\right)\right] + L^2(\sin\theta)^2\ddot{\theta} + 2L^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta\right\} + m_3 gL\sin\theta = 0$$

$$\boldsymbol{\ddot{x}_2(m_3 L) + \ddot{\theta}(m_3 L^2) + \theta(m_3 gL) \cong 0}$$

<u>Nota:</u> Una vez deduzca las ecuaciones de movimiento, expréselas en forma matricial (<u>3 puntos</u>).

$$\boldsymbol{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & m_3 L \\ 0 & m_3 L & m_3 L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 & -k_3 - k_4 & 0 \\ -k_3 - k_4 & k_3 + k_4 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 gL \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

c) Determine las frecuencias naturales (valores característicos) del sistema de múltiples grados de libertad. Aquí tome que $L = 5\ cm, m_3 = m = 1\ kg, m_2 = 2m, m_1 = 3m$ y que $k_4 = k_3 = k = 1000\frac{N}{m}, k_2 = k_1 = 2k$ (<u>9 puntos</u>).

Con lo anterior las ecuaciones de movimiento de forma matricial estarían dadas por:

$$\begin{bmatrix} 3m & 0 & 0 \\ 0 & 3m & mL \\ 0 & mL & mL^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6k & -2k & 0 \\ -2k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & mgL \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Cuya ecuación característica está dada por:

$$\left[[k] - \omega^2[m]\right]\vec{X} = 0$$

Los valores característicos de este sistema se encuentran por medio de:

$$\Delta = \left|\left[[k] - \omega^2[m]\right]\right| = 0$$

$$\Delta = \left|\begin{bmatrix} 6k & -2k & 0 \\ -2k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & mgL \end{bmatrix} - \omega^2\begin{bmatrix} 3m & 0 & 0 \\ 0 & 3m & mL \\ 0 & mL & mL^2 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\Delta = \left|\begin{bmatrix} 6k - 3m\omega^2 & -2k & 0 \\ -2k & 2k - 3m\omega^2 & -mL\omega^2 \\ 0 & -mL\omega^2 & mgL - mL^2\omega^2 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$-6L^2m^3(\omega^2)^3+(18L^2km^2+9gLm^3)(\omega^2)^2+(-8L^2k^2m-24gLkm^2)\omega^2+8gLk^2m$$
$$=$$

Remplazando para $L=5\ cm, k=\frac{1000N}{m}, m=1\ kg$:

$$-0.015(\omega^2)^3+49.4145(\omega^2)^2-31772\omega^2+3924000=0$$

Lo cual da que:

$$\omega^2{}_1=162.590929\rightarrow \boldsymbol{\omega_1=12.751115\ rad/s}$$

$$\omega^2{}_2=647.728956\rightarrow \boldsymbol{\omega_2=25.450520\ rad/s}$$

$$\omega^2{}_3=2483.980115\rightarrow \boldsymbol{\omega_3=49.839544\ rad/s}$$

d) Determine las formas modales (vectores característicos) del sistema de múltiples grados de libertad mostrado en la figura # 1. Aquí tome que $L=5\ cm, m_3=m=1\ kg, m_2=2m, m_1=3m$ y que $k_4=k_3=k=1000\frac{N}{m}, k_2=k_1=2k$ (15 puntos).

Primer modo, $\omega=\omega_1$:

$$\left[\begin{bmatrix}6k & -2k & 0\\ -2k & 2k & 0\\ 0 & 0 & mgL\end{bmatrix}-\omega^2{}_1\begin{bmatrix}3m & 0 & 0\\ 0 & 3m & mL\\ 0 & mL & mL^2\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}X_1{}^{(1)}\\ X_2{}^{(1)}\\ \Theta^{(1)}\end{Bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}5512.227213 & -2000 & 0\\ -2000 & 1512.227213 & -8.129546\\ 0 & -8.129546 & 0.084023\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1{}^{(1)}\\ X_2{}^{(1)}\\ \Theta^{(1)}\end{Bmatrix}=0$$

$$\vec{X}^{(1)}=\begin{Bmatrix}X_1{}^{(1)}\\ X_2{}^{(1)}\\ \Theta^{(1)}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{X_1{}^{(1)}}\begin{Bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{2.756114}\\ \mathbf{266.665568}\end{Bmatrix}$$

Segundo modo, $\omega=\omega_2$:

$$\left[\begin{bmatrix}6k & -2k & 0\\ -2k & 2k & 0\\ 0 & 0 & mgL\end{bmatrix}-\omega^2{}_2\begin{bmatrix}3m & 0 & 0\\ 0 & 3m & mL\\ 0 & mL & mL^2\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}X_1{}^{(2)}\\ X_2{}^{(2)}\\ \Theta^{(2)}\end{Bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}4056.813132 & -2000 & 0\\ -2000 & 56.813132 & -32.386448\\ 0 & -32.386448 & -1.128822\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1{}^{(2)}\\ X_2{}^{(2)}\\ \Theta^{(2)}\end{Bmatrix}=0$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1{}^{(2)} \\ X_2{}^{(2)} \\ \Theta^{(2)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{X_1{}^{(2)}} \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2.028407} \\ \mathbf{-58.195943} \end{Bmatrix}$$

Tercer modo, $\omega = \omega_3$:

$$\left[\begin{bmatrix} 6k & -2k & 0 \\ -2k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & mgL \end{bmatrix} - \omega^2{}_3 \begin{bmatrix} 3m & 0 & 0 \\ 0 & 3m & mL \\ 0 & mL & mL^2 \end{bmatrix}\right] \begin{Bmatrix} X_1{}^{(3)} \\ X_2{}^{(3)} \\ \Theta^{(3)} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1451.940345 & -2000 & 0 \\ -2000 & -5451.940345 & -124.199006 \\ 0 & -124.199006 & -5.719450 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1{}^{(3)} \\ X_2{}^{(3)} \\ \Theta^{(3)} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\vec{X}^{(3)} = \begin{Bmatrix} X_1{}^{(3)} \\ X_2{}^{(3)} \\ \Theta^{(3)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{X_1{}^{(3)}} \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-0.725970} \\ \mathbf{15.764587} \end{Bmatrix}$$

e) Empleando análisis modal, encuentre la respuesta al problema de vibración forzada. Tome que $m = 1\ kg, k = 1000\frac{N}{m}, F_1(t) = 2500t\ N/s$, y que $x_1(0) = 0.1\ m, \theta(0) = 0.035\ rad, x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ (27 puntos: orto normalizar los modos normales con respecto a la matriz de masa 9 puntos, determinar las funciones dependientes del tiempo 9 puntos, determinar la respuesta del sistema 9 puntos).
Nota: Una vez deduzca la respuesta al problema de vibración forzada, exprésela en forma matricial (3 puntos).

Orto normalizar los modos normales con respecto a la matriz de masa 9 puntos

$$\vec{X}^{(1)T}[m]\vec{X}^{(1)} = 1$$

$$X_1{}^{(1)^2}\{1 \quad 2.756114 \quad 266.665568\} \left\{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 0.0025 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.756114 \\ 266.665568 \end{Bmatrix}\right\} = 1$$

Entonces:

$$X_1{}^{(1)^2}\{1 \quad 2.756114 \quad 266.665568\} \begin{Bmatrix} 3 \\ 21.601620 \\ 0.804470 \end{Bmatrix} = 1$$

$$X_1{}^{(1)^2} = \frac{1}{277.060877} \rightarrow \boldsymbol{X_1{}^{(1)}} = \mathbf{0.060078}$$

$$\vec{X}^{(2)T}[m]\vec{X}^{(2)} = 1$$

$$X_1^{(2)^2}\{1 \quad 2.028407 \quad -58.195943\}\left\{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 0.0025 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2.028407 \\ -58.195943 \end{Bmatrix}\right\} = 1$$

Entonces:

$$X_1^{(2)^2}\{1 \quad 2.028407 \quad -58.195943\}\begin{Bmatrix} 3 \\ 3.175424 \\ -0.044070 \end{Bmatrix} = 1$$

$$X_1^{(2)^2} = \frac{1}{12.005719} \rightarrow \boldsymbol{X_1^{(2)} = 0.288606}$$

$$\vec{X}^{(3)^T}[m]\vec{X}^{(3)} = 1$$

$$X_1^{(3)^2}\{1 \quad -0.725970 \quad 15.764587\}\left\{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 0.0025 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-0.725970} \\ \mathbf{15.764587} \end{Bmatrix}\right\} = 1$$

Entonces:

$$X_1^{(3)^2}\{1 \quad -0.725970 \quad 15.764587\}\begin{Bmatrix} 3 \\ -1.389681 \\ 0.003113 \end{Bmatrix} = 1$$

$$X_1^{(3)^2} = \frac{1}{4.057941} \rightarrow \boldsymbol{X_1^{(3)} = 0.496418}$$

Por lo que la matriz modal:

$$[X] = \left[\vec{X}^{(1)}\ \vec{X}^{(2)}\ \vec{X}^{(3)}\right]$$

$$[\boldsymbol{X}] = \begin{bmatrix} \mathbf{0.060078} & \mathbf{0.288606} & \mathbf{0.496418} \\ \mathbf{0.165582} & \mathbf{0.585410} & \mathbf{-0.360385} \\ \mathbf{16.020734} & \mathbf{-16.795698} & \mathbf{7.825825} \end{bmatrix}$$

Determinar las funciones dependientes del tiempo 9 puntos

$$[I]\ddot{\vec{q}}(t) + \omega_i^2[I]\vec{q}(t) = [X]^T\vec{F} = 0$$

Lo que de forma escalar puede ser expresado como:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = F_i(t), \quad i = 1,2,3$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t)\} = \mathcal{L}\{F_i(t)\}$$

$$s^2 Q_i(s) - sQ_i(0) - \dot{Q}_i(0) + {\omega_i}^2 Q_i(s) = F_i(s)$$

$$Q_i(s)\{s^2 + {\omega_i}^2\} = F_i(s) + sQ_i(0) + \dot{Q}_i(0)$$

$$Q_i(s) = \frac{F_i(s)}{s^2 + {\omega_i}^2} + \frac{sQ_i(0)}{s^2 + {\omega_i}^2} + \frac{\dot{Q}_i(0)}{s^2 + {\omega_i}^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Q_i(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F_i(s)}{s^2 + {\omega_i}^2} + \frac{sQ_i(0)}{s^2 + {\omega_i}^2} + \frac{\dot{Q}_i(0)}{s^2 + {\omega_i}^2}\right\}$$

$$q_i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F_i(s)}{s^2 + {\omega_i}^2}\right\} + q_i(0)\cos\omega_i t + \frac{\dot{q}_i(0)}{\omega_i}\operatorname{sen}\omega_i t\,, \quad i = 1,2,3$$

Para q_2 $F_2(s) = 0$ y para q_3 $F_3(s) = 0$, en tanto que para q_1 $F_1(s) = \mathcal{L}\{F_1(t)\} = \mathcal{L}\{2500t\} = 2500/s^2$ por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2500}{s^2(s^2 + {\omega_1}^2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2500}{{\omega_1}^2 s^2} - \frac{2500}{{\omega_1}^2(s^2 + {\omega_1}^2)}\right\} = \frac{2500}{{\omega_1}^2}\left(t - \frac{\operatorname{sen}\omega_1 t}{\omega_1}\right)$$

Donde las condiciones iniciales $q_i(0)$ y $\dot{q}_i(0)$ están dadas por:

$$[X]^T[m]\vec{x}(0) = \vec{q}(0)$$

$$\begin{bmatrix} 0.060078 & 0.165582 & 16.020734 \\ 0.288606 & 0.585410 & -16.795698 \\ 0.496418 & -0.360385 & 7.825825 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 0.0025 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.035 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ q_3(0) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0.019715 \\ 0.086137 \\ 0.148979 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ q_3(0) \end{Bmatrix}$$

$$[X]^T[m]\dot{\vec{x}}(0) = \dot{\vec{q}}(0)$$

$$\begin{bmatrix} 0.060078 & 0.165582 & 16.020734 \\ 0.288606 & 0.585410 & -16.795698 \\ 0.496418 & -0.360385 & 7.825825 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 0.0025 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \\ \dot{q}_3(0) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \\ \dot{q}_3(0) \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$q_1(t) = \frac{2500}{{\omega_1}^2}\left(t - \frac{\operatorname{sen}\omega_1 t}{\omega_1}\right) + q_1(0)\cos\omega_1 t + \frac{\dot{q}_1(0)}{\omega_1}\operatorname{sen}\omega_1 t$$

$$\boldsymbol{q_1(t) = 15.376012\left(t - \frac{\mathrm{sen}(12.751115\,)t}{12.751115}\right) + (0.019715)\cos(12.751115\,)t}$$

$$\boldsymbol{q_2(t) = (0.086137)\cos(25.450520)t}$$

$$\boldsymbol{q_3(t) = (0.148979)\cos(49.839544)t}$$

Determinar la respuesta del sistema 9 puntos

$$\begin{aligned} x_1(t) = 0.060078 &\left[15.376012\left(t - \frac{\mathrm{sen}(12.751115\,)t}{12.751115}\right)\right. \\ &\left. + (0.019715)\cos(12.751115\,)t\right] \\ &+ 0.288606[(0.086137)\cos(25.450520)t] \\ &+ 0.49641[(0.148979)\cos(49.839544)t] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_1(t)} &= \boldsymbol{\left[0.923760\left(t - \frac{\mathrm{sen}(12.751115\,)t}{12.751115}\right) + (0.001184)\cos(12.751115\,)t\right]} \\ &\boldsymbol{+ [(0.024860)\cos(25.450520)t] + [(0.073955)\cos(49.839544)t]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = 0.165582 &\left[15.376012\left(t - \frac{\mathrm{sen}(12.751115\,)t}{12.751115}\right)\right. \\ &\left. + (0.019715)\cos(12.751115\,)t\right] \\ &+ 0.585410[(0.086137)\cos(25.450520)t] \\ &- 0.360385[(0.148979)\cos(49.839544)t] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_2(t)} &= \boldsymbol{\left[2.545991\left(t - \frac{\mathrm{sen}(12.751115\,)t}{12.751115}\right) + (0.003264)\cos(12.751115\,)t\right]} \\ &\boldsymbol{+ [(0.050425)\cos(25.450520)t] - [(0.053690)\cos(49.839544)t]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(t) = 16.020734 &\left[15.376012\left(t - \frac{\mathrm{sen}(12.751115\,)t}{12.751115}\right)\right. \\ &\left. + (0.019715)\cos(12.751115\,)t\right] \\ &- 16.795698[(0.086137)\cos(25.450520)t] \\ &+ 7.825825[(0.148979)\cos(49.839544)t] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta(t)} &= \boldsymbol{\left[246.33500\left(t - \frac{\mathrm{sen}(12.751115\,)t}{12.751115}\right) + (0.315849)\cos(12.751115\,)t\right]} \\ &\boldsymbol{- [(1.446731)\cos(25.450520)t] + [(1.165884)\cos(49.839544)t]} \end{aligned}$$

Nota: Una vez deduzca la respuesta al problema de vibración forzada, exprésela en forma matricial (3 puntos)

$$\vec{x}(t) = [X]\vec{q}(t)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.060078 & 0.288606 & 0.496418 \\ 0.165582 & 0.585410 & -0.360385 \\ 16.020734 & -16.795698 & 7.825825 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 15.376012\left(t - \frac{\text{sen}(12.751115\,)t}{12.751115}\right) + (0.019715)\cos(12.751115\,)t \\ (0.086137)\cos(25.450520)t \\ (0.148979)\cos(49.839544)t \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \theta(t) = &\left[246.33500\left(5 - \frac{\text{sen}(12.751115 * 5\,)}{12.751115}\right)\right. \\ &\left. + (0.315849)\cos(12.751115 * 5\,)\right] \\ &- [(1.446731)\cos(25.450520 * 5)] \\ &+ [(1.165884)\cos(49.839544 * 5)] \end{aligned}$$

f) Determine la respuesta del sistema cuando han pasado 5 segundos (6 puntos).

$$\begin{Bmatrix} x_1(5\,seg) \\ x_2(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.5220 \\ 12.6002 \\ 1215.9 \end{Bmatrix}$$

Para el problema anterior tome como coordenadas generalizadas, medidas desde la posición de equilibrio, a los desplazamiento lineales x_1, x_2 y al desplazamiento angular θ. De igual forma considere que la única fuerza no conservativa actuando sobre el sistema es F_1. También suponga que las fuerzas de fricción que experimentan la masa puntual m_1 y la masa puntual m_2 al desplazarse son despreciables, y que el desplazamiento angular θ es sumamente pequeño.

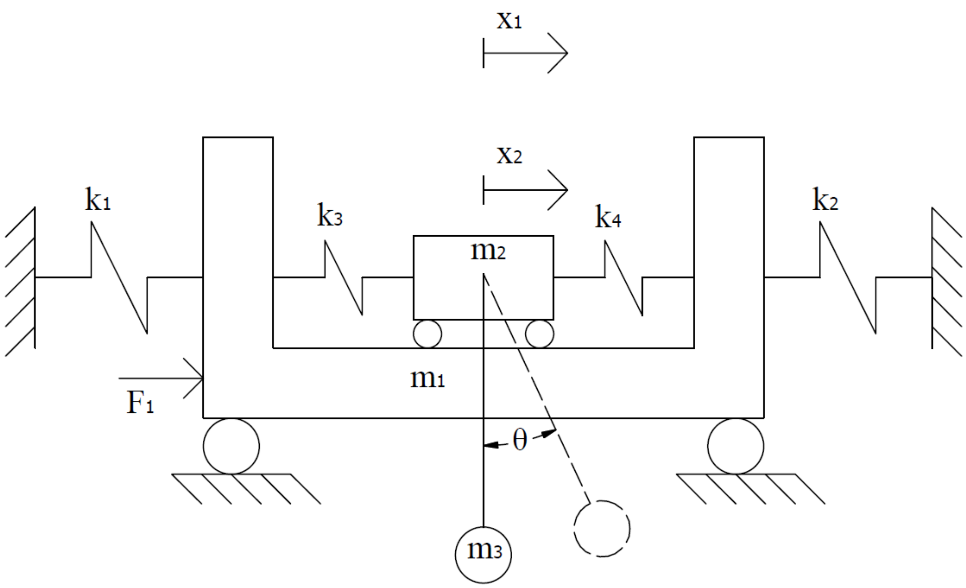


Figura # 1

***Sí requiere hacer alguna suposición (adicional a aquellas que aparecen en el enunciado del problema), el hecho de enunciarla le ameritará un punto adicional.**