Determinación de parámetros Pi adimensionales involucrados en la resistencia al movimiento para lograr similitud cinemática y dinámica de buques geométricamente similares.

En primer lugar se hace prudente recordar acerca de la metodología empleada para determinar parámetros adimensionales a partir del Teorema Π de Buckingham. En la tabla 1 se aprecia dicha información.

Paso 1	Haga una lista de los parámetros (variables y constantes) y cuéntelos. n, denotara al número total de parámetros (aquí también se debe contar a la variables dependiente de interés). Debe cerciorarse de que cualquier parámetro de la lista sea hecho independiente de los demás.
Paso 2	Haga una lista con las dimensiones primarias para cada uno de los n parametros.
Paso 3	Suponga la reducción j. Como primera suposición, haga j igual al número de dimensiones primarias presentadas en el problema. El numero esperado de Π (k) será $k = n - j$ $(teorema\ Pi\ de\ Buckingham)$.
Paso 4	Elija los j parámetros repetitivos que usará para construir cada Pi. Siga las recomendaciones presentes en la tabla 7-3 del texto que aparece en la bibliografía.
Paso 5	Genere las Π, una a la vez mediante el agrupamiento de los j parámetros repetitivos con uno de los parámetros restantes, y fuerce el producto a ser adimensional. De esta manera construya todas las pi esperadas (k). La primera pi designada como Π_1 es la Π dependiente.
Paso 6	Verifique que todas las Π de hecho sean adimensionales

Tabla 1. Pasos a seguir en el método de repetición de variables.

A partir de la información anterior se pueden determinar los parámetros pi que garantizan similitud cinemática y dinámica entre buques geométricamente similares.

Sí se observan las ecuaciones de Navier-Stokes y las diferentes condiciones de frontera de los flujos de modelos con superficies libres (como es el caso de los buques) se puede ver que los parámetros a tomar en cuenta son los siguientes: la velocidad de flujo libre (U_∞), la longitud del modelo, típicamente se toma la eslora entre perpendiculares (L_{pp}), la densidad (ρ), la viscosidad dinámica (μ), la presión del aire (p_a), la aceleración gravitatoria (g), y la tensión superficial (γ). Se seguirán los pasos listados en la tabla 1 para encontrar los parámetros adimensionales.

✓ Paso 1.

Parámetros a tomar en cuenta: $U_\infty, L_{pp}, \rho, \mu, p_a, g, \gamma$. Por lo tanto el número de parámetros (n) que se tienen es de 7.

$$n = 7$$

✓ Paso 2.

$$U_\infty = \left\{\frac{L}{t}\right\}, L_{pp} = \{L\}, \rho = \left\{\frac{m}{L^3}\right\}, \mu = \left\{\frac{m}{L \cdot t}\right\}, p_a = \left\{\frac{m \cdot L}{t^2 \cdot L^2}\right\}, g = \left\{\frac{L}{t^2}\right\}, \gamma = \left\{\frac{m \cdot L}{t^2 \cdot L}\right\}$$

Aquí L, t, m hacen referencia a las dimensiones primarias: longitud, tiempo y masa respectivamente.

- ✓ Paso 3.

En vista de que son tres dimensiones primarias, como primera aproximación se hará $j = 3$. Por lo tanto el número de parámetros Π que se espera encontrar será igual a $k = n - j = 4$.

- ✓ Paso 4.

Aquí se observa rápidamente que en vista de que $j = 3$ deben existir 3 parámetros repetitivos. Aquí de forma arbitraria se tomará que el parámetro dependiente a seleccionar será la presión del aire (p_a). De igual forma siguiendo las recomendaciones del texto de referencia se tomará que los parámetros repetitivos han de ser la longitud entre perpendiculares (L_{pp}), la densidad (ρ), y la velocidad de flujo libre (U_∞).

- ✓ Paso 5.

$$\Pi_1 = p_a {U_\infty}^{a_1} \rho^{b_1} {L_{pp}}^{c_1}$$

$$\{\Pi_1\} = \{m^1 \cdot t^{-2} \cdot L^{-1}\}\{L^1 \cdot t^{-1}\}^{a_1}\{m^1 \cdot L^{-3}\}^{b_1}\{L^1\}^{c_1}$$

Longitud:

$$-1 + a_1 - 3b_1 + c_1 = 0$$

Tiempo:

$$-2 - a_1 = 0$$

Masa:

$$1 + b_1 = 0$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores se encuentra que

$$a_1 = -2, b_1 = -1, c_1 = 0$$

Consecuentemente

$$\boldsymbol{\Pi_1 = \frac{p_a}{{U_\infty}^2 \rho}}$$

$$\Pi_2 = g {U_\infty}^{a_2} \rho^{b_2} {L_{pp}}^{c_2}$$

$$\{\Pi_2\} = \{L^1 \cdot t^{-2}\}\{L^1 \cdot t^{-1}\}^{a_2}\{m^1 \cdot L^{-3}\}^{b_2}\{L^1\}^{c_2}$$

Longitud:

$$1 + a_2 - 3b_2 + c_2 = 0$$

Tiempo:

$$-2 - a_2 = 0$$

Masa:

$$b_2 = 0$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores se encuentra que

$$a_2 = -2, b_2 = 0, c_2 = 1$$

Consecuentemente

$$\boldsymbol{\Pi_2} = \frac{\boldsymbol{g L_{pp}}}{\boldsymbol{U_\infty}^2}$$

$$\Pi_3 = \mu {U_\infty}^{a_3} \rho^{b_3} {L_{pp}}^{c_3}$$

$$\{\Pi_3\} = \{m^1 \cdot t^{-1} \cdot L^{-1}\}\{L^1 \cdot t^{-1}\}^{a_3}\{m^1 \cdot L^{-3}\}^{b_3}\{L^1\}^{c_3}$$

Longitud:

$$-1 + a_3 - 3b_3 + c_3 = 0$$

Tiempo:

$$-1 - a_3 = 0$$

Masa:

$$1 + b_3 = 0$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores se encuentra que

$$a_3 = -1, b_3 = -1, c_3 = -1$$

Consecuentemente

$$\boldsymbol{\Pi_3} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{U_\infty \rho L_{pp}}}$$

$$\Pi_4 = \gamma {U_\infty}^{a_4} \rho^{b_4} {L_{pp}}^{c_4}$$

$$\{\Pi_4\} = \{m^1 \cdot t^{-2}\}\{L^1 \cdot t^{-1}\}^{a_4}\{m^1 \cdot L^{-3}\}^{b_4}\{L^1\}^{4}$$

Longitud:

$$a_1 - 3b_4 + c_4 = 0$$

Tiempo:

$$-2 - a_4 = 0$$

Masa:

$$1 + b_4 = 0$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores se encuentra que

$$a_4 = -2, b_4 = -1, c_4 = -1$$

Consecuentemente

$$\boldsymbol{\Pi_4} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{U_\infty}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{\rho L_{pp}}}$$

- ✓ Paso 6.

$$\Pi_1 = \frac{\left\{\frac{m \cdot L}{t^2 \cdot L^2}\right\}}{\left\{\frac{L}{t}\right\}^2 \left\{\frac{m}{L^3}\right\}} = 1, \Pi_2 = \frac{\left\{\frac{L}{t^2}\right\}\{L\}}{\left\{\frac{L}{t}\right\}^2} = 1, \Pi_3 = \frac{\left\{\frac{m}{L \cdot t}\right\}}{\left\{\frac{L}{t}\right\}\left\{\frac{m}{L^3}\right\}\{L\}} = 1, \Pi_4 = \frac{\left\{\frac{m \cdot L}{t^2 \cdot L}\right\}}{\left\{\frac{L}{t}\right\}^2 \left\{\frac{m}{L^3}\right\}\{L\}} = 1$$

Como se pueden ver en efecto los cuatro parámetros pi son adimensionales. Estos parámetros adimensionales se pueden re escribir en número adimensionales conocidos y de uso común.

$$\boldsymbol{En} = \boldsymbol{\Pi_1} = \frac{\boldsymbol{p_a}}{\boldsymbol{U_\infty}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{\rho}}$$

$$\boldsymbol{Fn} = \boldsymbol{\Pi_2}^{-\mathbf{1}} = \left[\frac{\left(\boldsymbol{gL_{pp}}\right)^{\mathbf{1/2}}}{\left(\boldsymbol{U_\infty}^{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{1/2}}}\right]^{-\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{U_\infty}^{\mathbf{2}}}{\sqrt{\boldsymbol{gL_{pp}}}}$$

$$\boldsymbol{Rn} = \boldsymbol{\Pi_3}^{-\mathbf{1}} = \left(\frac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{U_\infty \rho L_{pp}}}\right)^{-\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{U_\infty \rho L_{pp}}}{\boldsymbol{\mu}}$$

$$\boldsymbol{Wn} = \boldsymbol{\Pi_4}^{-\mathbf{1}} = \left(\frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{U_\infty}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{\rho L_{pp}}}\right)^{-\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{U_\infty}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{\rho L_{pp}}}{\boldsymbol{\gamma}}$$

Donde En es el número de Euler, Fn es el número de Froude, Rn es el número de Reynolds, y Wn es el número de Weber. El número de Euler incluso puede modificarse para obtener el número de cavitación σ, si este es multiplicado por dos y se remplaza la presión del aire por la sustracción de la presión del aire y la presión de vapor (p_v) del fluido.

$$\boldsymbol{En} = \boldsymbol{\Pi_1} \propto \boldsymbol{\sigma} = \frac{\boldsymbol{p_a} - \boldsymbol{p_v}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{U_\infty}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{\rho}}$$