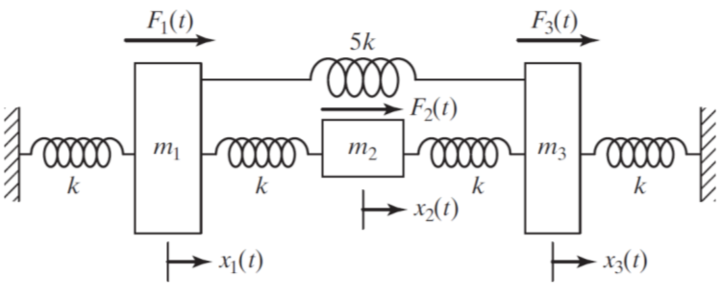
Ejemplos de los capítulos V, VI, y VII

1. Derive las ecuaciones de movimiento del sistema de tres grados de libertad mostrado a continuación por medio de:
a) La Segunda Ley de Newton.
b) Las ecuaciones de Lagrange.



Suposiciones: El sistema es de tres grados de libertad y está compuesto de tres masas puntuales, las coordenadas generalizadas a emplear son x_1, x_2, x_3, las únicas fuerzas no conservativas actuando sobre el sistema son F_1, F_2, F_3, los resortes del sistema se comportan de forma lineal.

Ecuaciones básicas:

$$\sum \vec{F} = [m]\ddot{\vec{r}}, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial v_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \dot{v}_i} = Q_{i,otro}, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

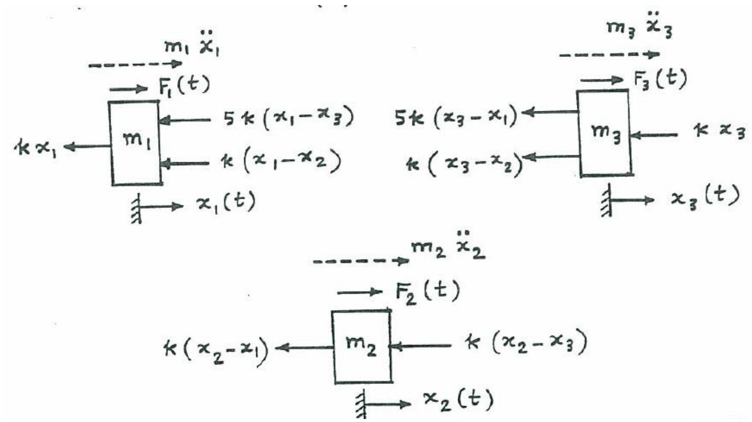
Ejemplos de los capítulos V, VI, y VII

1. Derive las ecuaciones de movimiento del sistema de tres grados de libertad mostrado a continuación por medio de:
a) La Segunda Ley de Newton.
b) Las ecuaciones de Lagrange.

Desarrollo:

a) Deducción de las ecuaciones de movimiento por medio de la segunda ley de Newton.

A partir de los diagramas de cuerpo libre se pueden deducir las ecuaciones de movimiento:



$$m_1\ddot{x}_1 = -kx_1 + 5k(x_3 - x_1) + k(x_2 - x_1) + F_1$$

$$m_1\ddot{x}_1 + 7kx_1 - kx_2 - 5kx_3 = F_1$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) + F_2$$

$$m_2\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 - kx_3 = F_3$$

$$m_3\ddot{x}_3 = -5k(x_3 - x_1) - k(x_3 - x_2) - kx_3 + F_3$$

$$m_3\ddot{x}_3 - 5kx_1 - kx_2 + 7kx_3 = F_3$$

b) Deducción de las ecuaciones de movimiento por medio de las ecuaciones de Lagrange:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i {\dot{x}_i}^2 \rightarrow T = \frac{1}{2}\left[m_1{\dot{x}_1}^2 + m_2{\dot{x}_2}^2 + m_3{\dot{x}_3}^2\right]$$

$$V = \frac{1}{2}\left[k{x_1}^2 + 5k(x_3 - x_1)^2 + k(x_2 - x_1)^2 + k(x_3 - x_2)^2 + k{x_3}^2\right]$$

Ejemplos de los capítulos V, VI, y VII

1. Derive las ecuaciones de movimiento del sistema de tres grados de libertad mostrado a continuación por medio de:
a) La Segunda Ley de Newton.
b) Las ecuaciones de Lagrange.

Desarrollo:

b) Deducción de las ecuaciones de movimiento por medio de las ecuaciones de Lagrange:

$$L = T - V \qquad\qquad Q_{i,otro} = F_i, \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \dot{v}_i} = 0$$

$$L = \frac{1}{2}\left[m_1\dot{x}_1{}^2 + m_2\dot{x}_2{}^2 + m_3\dot{x}_3{}^2 - \{kx_1{}^2 + 5k(x_3 - x_1)^2 + k(x_2 - x_1)^2 + k(x_3 - x_2)^2 + kx_3{}^2\}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial v_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \dot{v}_i} = Q_{i,otro}, \qquad i = 1,2,3$$

Para $i = 1$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = Q_{1,otro}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\cdot 2m_1\dot{x}_1\cdot\frac{d\dot{x}_1}{\partial \dot{x}_1}\right) + \frac{1}{2}\left\{2kx_1\cdot\frac{dx_1}{dx_1} + 10k(x_3 - x_1)\cdot\frac{d(x_3 - x_1)}{dx_1} + 2k(x_2 - x_1)\cdot\frac{d(x_2 - x_1)}{dx_1}\right\} = F_1$$

$$m_1\ddot{x}_1 + kx_1 - 5k(x_3 - x_1) - k(x_2 - x_1) = F_1$$

$$m_1\ddot{x}_1 + 7kx_1 - kx_2 - 5kx_3 = F_1$$

Ejemplos de los capítulos V, VI, y VII

1. Derive las ecuaciones de movimiento del sistema de tres grados de libertad mostrado a continuación por medio de:
a) La Segunda Ley de Newton.
b) Las ecuaciones de Lagrange.

Desarrollo:

b) Deducción de las ecuaciones de movimiento por medio de las ecuaciones de Lagrange:

Análogamente para $i = 2$ e $i = 3$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = Q_{2,otro}$$

$$m_2\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 - kx_3 = F_3$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_3} = Q_{3,otro}$$

$$m_3\ddot{x}_3 - 5kx_1 - kx_2 + 7kx_3 = F_3$$

Por lo tanto la ecuación de movimiento en forma matricial puede ser expresada como:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{m}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{m}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_2 \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_3 \end{Bmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{bmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 \\ \boldsymbol{F}_3 \end{Bmatrix}$$

Ejemplos de los capítulos V, VI, y VII

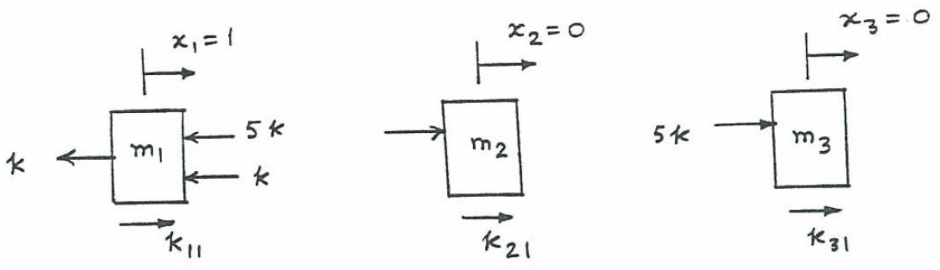
2. Para el problema del ejemplo 1, determine los coeficientes de influencia de rigidez.

Suposiciones: Vea las suposiciones del problema 1. Para encontrar los coeficientes de influencia de rigidez se considerará que las fuerzas externas son iguales a cero.

Ecuación básica:

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j \,, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Desarrollo:



Para $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$

Las ecuaciones de equilibrio estarían dadas por:

$$k_{11}x_1 - kx_1 + 5k(x_3 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 0$$

$$k_{11} - k - 5k - k = 0 \rightarrow k_{11} = 7k$$

$$k_{21}x_1 - k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) = 0$$

$$k_{21} + k = 0 \rightarrow k_{21} = -k$$

$$k_{31}x_1 - 5k(x_3 - x_1) - k(x_3 - x_2) - kx_3 = 0$$

$$k_{31} + 5k = 0 \rightarrow k_{31} = -5k$$

Ejemplos de los capítulos V, VI, y VII

2. Para el problema del ejemplo 1, determine los coeficientes de influencia de rigidez.

Desarrollo:

Para $x_2 = 1, x_1 = x_3 = 0$

Las ecuaciones de equilibrio estarían dadas por:

$$k_{12}x_2 - kx_1 + 5k(x_3 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 0$$

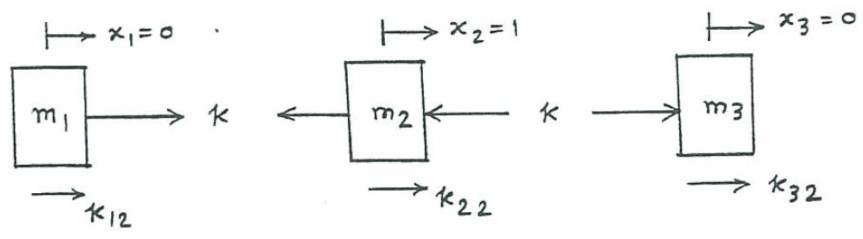
$$k_{12} + k = 0 \rightarrow k_{21} = k_{12} = -k$$

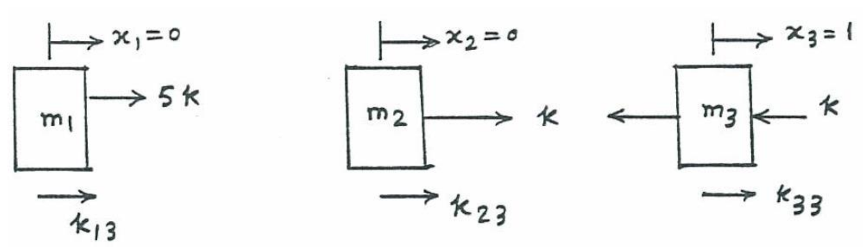
$$k_{22}x_2 - k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) = 0$$

$$k_{22} - 2k = 0 \rightarrow k_{22} = 2k$$

$$k_{32}x_2 - 5k(x_3 - x_1) - k(x_3 - x_2) - kx_3 = 0$$

$$k_{32} + k = 0 \rightarrow k_{32} = -k$$





Para $x_3 = 1, x_1 = x_2 = 0$

Las ecuaciones de equilibrio estarían dadas por:

$$k_{13}x_3 - kx_1 + 5k(x_3 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 0$$

$$k_{13} + 5k = 0 \rightarrow k_{31} = k_{13} = -5k$$

$$k_{23}x_2 - k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) = 0$$

$$k_{23} + k = 0 \rightarrow k_{32} = k_{23} = -k$$

$$k_{33}x_3 - 5k(x_3 - x_1) - k(x_3 - x_2) - kx_3 = 0$$

$$k_{33} - 7k = 0 \rightarrow k_{33} = 7k$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{k}] = \boldsymbol{k}\begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-1} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-1} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

Ejemplos de los capítulos V, VI, y VII

3. Para el problema del ejemplo 1, determine las frecuencias naturales y los modos de vibración cuando $\boldsymbol{m_1 = m_2 = m_3 = m}$.

Suposiciones: Vea las suposiciones del problema 1. Para encontrar las frecuencias naturales se considerará que las fuerzas externas son iguales a cero.

Ecuaciones básicas:

$$\left[[k]-\omega^2[m]\right]\vec{X}=0, \Delta = \left|\left[[k]-\omega^2[m]\right]\right|=0$$

Desarrollo:

a) Determinación de frecuencias naturales.

$$\Delta = \left|\left[k\begin{bmatrix}7 & -1 & -5\\ -1 & 2 & -1\\ -5 & -1 & 7\end{bmatrix} - \omega^2\begin{bmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & m\end{bmatrix}\right]\right| = 0$$

$$\Delta = \left|\left[k\begin{bmatrix}7 & -1 & -5\\ -1 & 2 & -1\\ -5 & -1 & 7\end{bmatrix} - \omega^2 m\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right]\right| = 0$$

$$\Delta = \left|\left[\begin{bmatrix}7 & -1 & -5\\ -1 & 2 & -1\\ -5 & -1 & 7\end{bmatrix} - \frac{\omega^2 m}{k}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right]\right| = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix}7-\dfrac{\omega^2 m}{k} & -1 & -5\\ -1 & 2-\dfrac{\omega^2 m}{k} & -1\\ -5 & -1 & 7-\dfrac{\omega^2 m}{k}\end{vmatrix} = 0$$

$$7-\frac{\omega^2 m}{k}\left[\left(2-\frac{\omega^2 m}{k}\right)\left(7-\frac{\omega^2 m}{k}\right)-(1)\right]$$
$$+1\left[(-1)\left(7-\frac{\omega^2 m}{k}\right)-(5)\right]-5\left[(1)-\left(2-\frac{\omega^2 m}{k}\right)(-5)\right]=0$$

Lo que es igual a:

$$\left(\frac{\omega^2 m}{k}\right)^3-16\left(\frac{\omega^2 m}{k}\right)^2+50\left(\frac{\omega^2 m}{k}\right)-24=0$$

Ejemplos de los capítulos V, VI, y VII

3. Para el problema del ejemplo 1, determine las frecuencias naturales y los modos de vibración cuando $\boldsymbol{m_1 = m_2 = m_3 = m}$.

Desarrollo:

Y cuyas raíces están dada por:

$$\frac{{\omega_1}^2 m}{k} = 0.585786 \rightarrow \boldsymbol{\omega_1 = 0.765367}\left(\sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}}\right)$$

$$\frac{{\omega_2}^2 m}{k} = 3.414214 \rightarrow \boldsymbol{\omega_2 = 1.847759}\left(\sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}}\right)$$

$$\frac{{\omega_3}^2 m}{k} = 12 \rightarrow \boldsymbol{\omega_3 = 2\sqrt{3}}\left(\sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}}\right)$$

b) Determinación de los modos de vibración.

<u>Primer modo, $\omega = \omega_1$:</u>

$$\left[k\begin{bmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 7 \end{bmatrix} - \left(0.585786\frac{k}{m}\right)m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} {X_1}^{(1)} \\ {X_2}^{(1)} \\ {X_3}^{(1)} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 7-0.585786 & -1 & -5 \\ -1 & 2-0.585786 & -1 \\ -5 & -1 & 7-0.585786 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} {X_1}^{(1)} \\ {X_2}^{(1)} \\ {X_3}^{(1)} \end{Bmatrix} = 0$$

Lo cual representa un sistema de tres ecuaciones que ha de ser resuelto de forma simultánea y en donde ${X_2}^{(1)}$ y ${X_3}^{(1)}$ pueden ser expresadas en términos de ${X_1}^{(1)}$:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} {X_1}^{(1)} \\ {X_2}^{(1)} \\ {X_3}^{(1)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{{X_1}^{(1)}}\begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1.414213} \\ \mathbf{1} \end{Bmatrix}$$

Segundo modo, $\omega = \omega_2$:

$$\left[k\begin{bmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 7 \end{bmatrix} - \left(3.414214\frac{k}{m}\right)m\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} {X_1}^{(2)} \\ {X_2}^{(2)} \\ {X_3}^{(2)} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 7-3.414214 & -1 & -5 \\ -1 & 2-3.414214 & -1 \\ -5 & -1 & 7-3.414214 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} {X_1}^{(2)} \\ {X_2}^{(2)} \\ {X_3}^{(2)} \end{Bmatrix} = 0$$

Lo cual representa un sistema de tres ecuaciones que ha de ser resuelto de forma simultánea y en donde ${X_2}^{(2)}$ y ${X_3}^{(2)}$ pueden ser expresadas en términos de ${X_1}^{(2)}$:

Ejemplos de los capítulos V, VI, y VII

3. Para el problema del ejemplo 1, determine las frecuencias naturales y los modos de vibración cuando $\boldsymbol{m_1 = m_2 = m_3 = m}$.

Desarrollo:

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1{}^{(2)} \\ X_2{}^{(2)} \\ X_3{}^{(2)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{X_1}{}^{(\mathbf{2})} \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1.414213} \\ \mathbf{1} \end{Bmatrix}$$

Tercer modo, $\omega = \omega_3$:

$$\left[k \begin{bmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 7 \end{bmatrix} - \left(12 \frac{k}{m} \right) m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1{}^{(3)} \\ X_2{}^{(3)} \\ X_3{}^{(3)} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 7-12 & -1 & -5 \\ -1 & 2-12 & -1 \\ -5 & -1 & 7-12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1{}^{(3)} \\ X_2{}^{(3)} \\ X_3{}^{(3)} \end{Bmatrix} = 0$$

Lo cual representa un sistema de tres ecuaciones que ha de ser resuelto de forma simultánea y en donde $X_2{}^{(3)}$ y $X_3{}^{(3)}$ pueden ser expresadas en términos de $X_1{}^{(3)}$:

$$\vec{X}^{(3)} = \begin{Bmatrix} X_1{}^{(3)} \\ X_2{}^{(3)} \\ X_3{}^{(3)} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{X_1}{}^{(\mathbf{3})} \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{Bmatrix}$$

Ejemplos de los capítulos V, VI, y VII

4. Para el problema del ejemplo 1, determine las amplitudes de movimiento del sistema de tres masas cuando se tiene vibración libre ($\mathbf{F_1 = F_2 = F_3 = 0}$) y $\mathbf{m = 1}$ kg y $\mathbf{k = 1000}$ N/m. Tome de igual forma que: $\mathbf{x_1 = 1}$, $\mathbf{x_2 = x_3 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0}$.

Suposiciones: Vea las suposiciones del problema 1.

Ecuaciones básicas:

$$\vec{x}(t) = [X]\vec{q}(t), [X] = \left[\vec{X}^{(1)}\ \vec{X}^{(2)} \ldots \vec{X}^{(n)}\right], [I]\ddot{\vec{q}}(t) + \omega_i{}^2[I]\vec{q}(t) = [X]^T\vec{F},\ [X]^T[m]\vec{x}(0) = \vec{q}(0), [X]^T[m]\dot{\vec{x}}(0) = \dot{\vec{q}}(0)$$

Desarrollo:

En primer lugar se normalizará la matriz de masa:

$$\vec{X}^{(1)^T}[m]\vec{X}^{(1)} = 1$$

$$X_1{}^{(1)^2}\{1 \quad 1.414213 \quad 1\}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1.414213\\1\end{Bmatrix}\right\} = 1$$

Entonces:

$$X_1{}^{(1)^2}\{1 \quad 1.414213 \quad 1\}\begin{Bmatrix}1\\1.414213\\1\end{Bmatrix} = 1$$

$$X_1{}^{(1)^2} = \frac{1}{4} \rightarrow X_1{}^{(1)} = 0.5$$

$$\vec{X}^{(2)^T}[m]\vec{X}^{(2)} = 1$$

$$X_1{}^{(2)^2}\{1 \quad -1.414213 \quad 1\}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-1.414213\\1\end{Bmatrix}\right\} = 1$$

Entonces:

$$X_1{}^{(2)^2}\{1 \quad -1.414213 \quad 1\}\begin{Bmatrix}1\\-1.414213\\1\end{Bmatrix} = 1$$

$$X_1{}^{(2)^2} = \frac{1}{4} \rightarrow X_1{}^{(2)} = 0.5$$

Ejemplos de los capítulos V, VI, y VII

4. Para el problema del ejemplo 1, determine las amplitudes de movimiento del sistema de tres masas cuando se tiene vibración libre ($\mathbf{F_1 = F_2 = F_3 = 0}$) y $\mathbf{m = 1\ kg}$ y $\mathbf{k = 1000\ N/m}$. Tome de igual forma que: $\mathbf{x_1 = 1}$, $\mathbf{x_2 = x_3 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0}$.

Desarrollo:

$$\vec{X}^{(3)^T}[m]\vec{X}^{(3)} = 1$$

$$X_1^{(3)^2}\{1 \quad 0 \quad -1\}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{Bmatrix}\right\} = 1$$

Entonces:

$$X_1^{(3)^2}\{1 \quad 0 \quad -1\}\begin{Bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{Bmatrix} = 1$$

$$X_1^{(3)^2} = \frac{1}{2} \rightarrow X_1^{(3)} = 0.707107$$

Por lo que la matriz modal:

$$[X] = \left[\vec{X}^{(1)}\ \vec{X}^{(2)}\ \vec{X}^{(3)}\right]$$

$$[X] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.707107\\ 0.707107 & -0.707107 & 0\\ 0.5 & 0.5 & -0.707107\end{bmatrix}$$

Ahora se han de determinar las funciones dependientes del tiempo.

$$[I]\ddot{\vec{q}}(t) + \omega_i^2[I]\vec{q}(t) = [X]^T\vec{F} = 0$$

Lo que de forma escalar puede ser expresado como:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t) = 0, \qquad i = 1,2,3$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$s^2 Q_i(s) - sQ_i(0) - \dot{Q}_i(0) + \omega_i^2 Q_i(s) = 0$$

$$Q_i(s)\{s^2 + \omega_i^2\} = sQ_i(0) + \dot{Q}_i(0)$$

$$Q_i(s) = \frac{sQ_i(0)}{s^2 + \omega_i^2} + \frac{\dot{Q}_i(0)}{s^2 + \omega_i^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Q_i(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sQ_i(0)}{s^2 + \omega_i^2} + \frac{\dot{Q}_i(0)}{s^2 + \omega_i^2}\right\}$$

$$q_i(t) = q_i(0)\cos\omega_i t + \frac{\dot{q}_i(0)}{\omega_i}\operatorname{sen}\omega_i t\,, \qquad i = 1,2,3$$

Donde las condiciones iniciales $q_i(0)$ y $\dot{q}_i(0)$ están dadas por:

$$[X]^T[m]\vec{x}(0) = \vec{q}(0)$$

Ejemplos de los capítulos V, VI, y VII

4. Para el problema del ejemplo 1, determine las amplitudes de movimiento del sistema de tres masas cuando se tiene vibración libre ($\mathbf{F_1 = F_2 = F_3 = 0}$) y $\mathbf{m = 1\ kg}$ y $\mathbf{k = 1000\ N/m}$. Tome de igual forma que: $\mathbf{x_1 = 1}$, $\mathbf{x_2 = x_3 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0}$.

Desarrollo:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.707107 & 0.5 \\ 0.5 & -0.707107 & 0.5 \\ 0.707107 & 0 & -0.707107 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ q_3(0) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.707107 & 0.5 \\ 0.5 & -0.707107 & 0.5 \\ 0.707107 & 0 & -0.707107 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ q_3(0) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.707107 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ q_3(0) \end{Bmatrix}$$

$$[X]^T[m]\dot{\vec{x}}(0) = \dot{\vec{q}}(0)$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.707107 & 0.5 \\ 0.5 & -0.707107 & 0.5 \\ 0.707107 & 0 & -0.707107 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \\ \dot{q}_3(0) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \\ \dot{q}_3(0) \end{Bmatrix}$$

$$q_1(t) = q_1(0)\cos\omega_1 t + \frac{\dot{q}_1(0)}{\omega_1}\operatorname{sen}\omega_1 t$$

$$q_1(t) = 0.5\cos\left(0.765367\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t\right)$$

$$q_1(t) = 0.5\cos\left(0.765367\left(\sqrt{\frac{1000}{1}}\right)t\right)$$

$$q_1(t) = 0.5\cos(24.20t)$$

De igual forma:

$$q_2(t) = 0.5\cos(58.43t)$$

$$q_3(t) = 0.707107\cos(109.54t)$$

Consecuentemente la respuesta del sistema estará dada por:

$$\vec{x}(t) = [X]\vec{q}(t)$$

Por lo tanto:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x_1(t)} \\ \boldsymbol{x_2(t)} \\ \boldsymbol{x_3(t)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} & \mathbf{0.707107} \\ \mathbf{0.707107} & \mathbf{-0.707107} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} & \mathbf{-0.707107} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0.5}\,\boldsymbol{cos}(\mathbf{24.20}\boldsymbol{t}) \\ \mathbf{0.5}\,\boldsymbol{cos}(\mathbf{58.43}\boldsymbol{t}) \\ \mathbf{0.707107}\,\boldsymbol{cos}(\mathbf{109.54}\boldsymbol{t}) \end{Bmatrix}$$