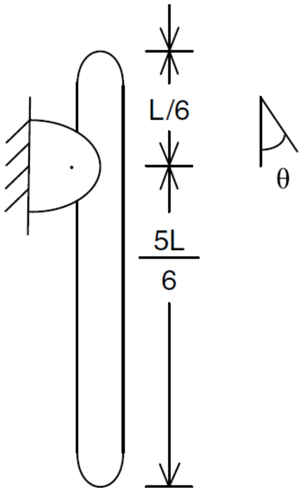
Ejemplos de los capítulos I, II, III y IV

1. Considere el péndulo compuesto mostrado a continuación. Dicho péndulo consiste de una barra esbelta de longitud L, masa m, pivotada en el punto O. Utilizando el desplazamiento angular de la barra θ como coordenada generalizada derive la ecuación diferencial de movimiento empleando:
a) El método de diagrama de cuerpo libre.
b) El método del principio de conservación de energía para sistemas conservativos.



Suposiciones: La barra tiene una distribución de masa uniforme y se puede modelar como un cuerpo rígido, el sistema solo tiene un grado de libertad y la coordenada generalizada a emplear es el desplazamiento angular θ, sobre el sistema no actúa ninguna fuerza no conservativa.

Ecuaciones básicas:

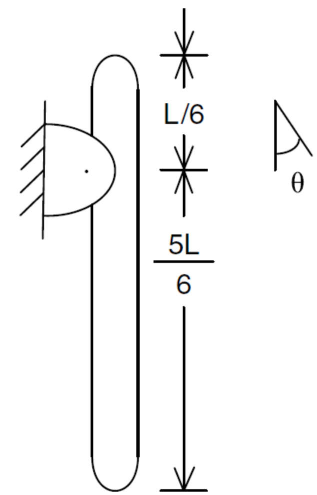
$$\sum \vec{M}_o = \bar{\vec{r}} \times m\ddot{\bar{\vec{r}}} + \dot{\vec{H}}_G, \dot{\vec{H}}_G = \bar{I}_z \dot{\omega}\mathbf{k} = \bar{I}_z \ddot{\theta}\mathbf{k},$$

$$\frac{d(E.C.+E.P.)}{dt} = 0, E.P. = mg\Delta y, E.C. = \frac{1}{2}\left[m\dot{\bar{\vec{r}}}^2 + \omega^2 \bar{I}_z\right], \vec{\omega} = \left(\frac{\vec{r} \times \dot{\vec{r}}}{r^2}\right)$$

Ejemplos de los capítulos I, II, III y IV

1. Considere el péndulo compuesto mostrado a continuación. Dicho péndulo consiste de una barra esbelta de longitud L, masa m, pivotada en el punto O. Utilizando el desplazamiento angular de la barra θ como coordenada generalizada derive la ecuación diferencial de movimiento empleando:
a) El método de diagrama de cuerpo libre.
b) El método del principio de conservación de energía para sistemas conservativos.

Desarrollo:

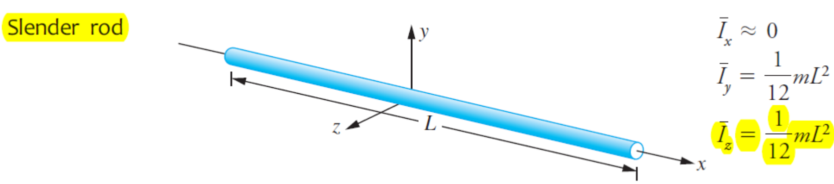


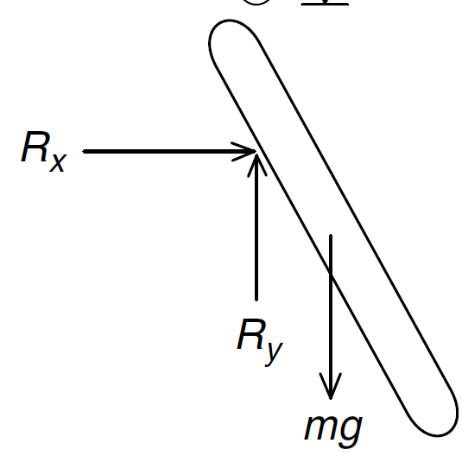
a) La coordenada generalizada seleccionada es θ, a continuación se hará el diagrama de cuerpo libre, y se aplicará la segunda ley de Newton para cuando se tiene movimiento rotatorio en un cuerpo rígido.

$$\sum \vec{M}_o = \vec{\bar{r}} \times m\ddot{\vec{\bar{r}}} + \dot{\vec{H}}_G$$

$$\vec{\bar{r}} = \frac{L}{3}(\sin\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j})$$

$$\ddot{\vec{\bar{r}}} = \frac{L}{3}\left[(-\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j})\dot{\theta}^2 + (\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j})\ddot{\theta}\right]$$



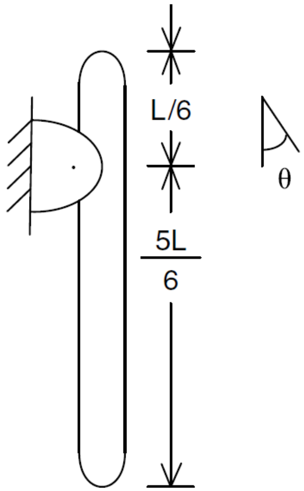


$$\dot{\vec{H}}_G = \bar{I}_z\ddot{\theta} = \frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta}$$

Ejemplos de los capítulos I, II, III y IV

1. Considere el péndulo compuesto mostrado a continuación. Dicho péndulo consiste de una barra esbelta de longitud L, masa m, pivotada en el punto O. Utilizando el desplazamiento angular de la barra θ como coordenada generalizada derive la ecuación diferencial de movimiento empleando:
a) El método de diagrama de cuerpo libre.
b) El método del principio de conservación de energía para sistemas conservativos.

Desarrollo:



$$\sum \vec{M}_o = -mg\frac{L}{3}\sin\theta\,\mathbf{k} = \left[\frac{L}{3}(\sin\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j})\right] \times m\frac{L}{3}$$

$$\left[(-\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j})\dot{\theta}^2 + (\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j})\ddot{\theta}\right] + \frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta}$$

$$-mg\frac{L}{3}\sin\theta\,\mathbf{k} = \mathrm{m}\frac{L^2}{9}\ddot{\theta}\mathbf{k} + \frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta}\mathbf{k}$$

$$\frac{7}{36}L^2\ddot{\theta} + \frac{L}{3}g\sin\theta = 0$$

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{12g}{7L}\sin\theta = 0}$$

b) Se definirán los términos de energía potencial y cinética del sistema conservativo.

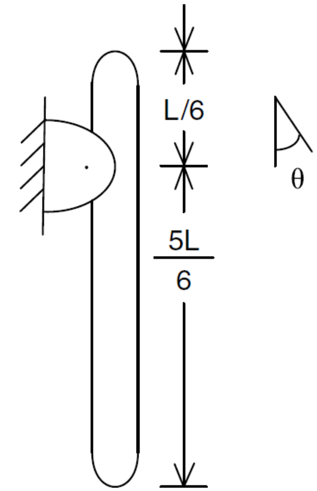
$$E.P. = mg\left(\frac{L}{3} - \frac{L}{3}\cos\theta\right)$$

$$\frac{d(E.P.)}{dt} = \left(mg\frac{L}{3}\sin\theta\right)\dot{\theta}$$

Ejemplos de los capítulos I, II, III y IV

1. Considere el péndulo compuesto mostrado a continuación. Dicho péndulo consiste de una barra esbelta de longitud L, masa m, pivotada en el punto O. Utilizando el desplazamiento angular de la barra θ como coordenada generalizada derive la ecuación diferencial de movimiento empleando:
a) El método de diagrama de cuerpo libre.
b) El método del principio de conservación de energía para sistemas conservativos.

Desarrollo:



$$E.C. = \frac{1}{2}\left[m\dot{\vec{r}}^2 + \omega^2 \bar{I}_z\right]$$

$$\frac{d(E.C.)}{dt} = \left[m\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}} + \omega\dot{\omega}\bar{I}_z\right]$$

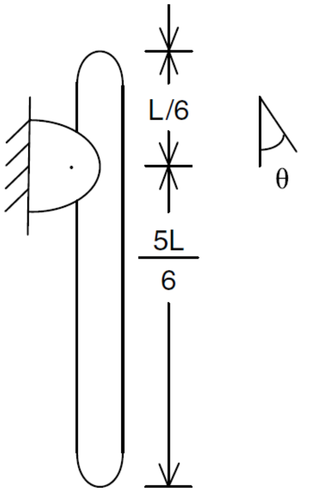
$$\frac{d(E.C.)}{dt} = \left[\begin{array}{c} m\frac{L}{3}\left((\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j})\dot{\theta}\right)\frac{L}{3}\left[\begin{array}{c}(-\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j})\dot{\theta}^2 + \\ (\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j})\ddot{\theta}\end{array}\right] + \\ \left(\frac{\frac{L}{3}(\sin\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j}) \times \frac{L}{3}(\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j})\dot{\theta}}{\left(\frac{L}{3}(\sin\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j})\right)^2}\right)\ddot{\theta}\bar{I}_z \end{array}\right]$$

$$\frac{d(E.C.)}{dt} = m\left(\frac{L}{3}\right)^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}\ddot{\theta}\bar{I}_z = m\left(\frac{L}{3}\right)^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}\ddot{\theta}\left(\frac{1}{12}mL^2\right)$$

$$\frac{d(E.C. + E.P.)}{dt} = 0$$

Ejemplos de los capítulos I, II, III y IV

1. Considere el péndulo compuesto mostrado a continuación. Dicho péndulo consiste de una barra esbelta de longitud $\boldsymbol{L}$, masa $\boldsymbol{m}$, pivotada en el punto $\boldsymbol{O}$. Utilizando el desplazamiento angular de la barra $\boldsymbol{\theta}$ como coordenada generalizada derive la ecuación diferencial de movimiento empleando:
a) El método de diagrama de cuerpo libre.
b) El método del principio de conservación de energía para sistemas conservativos.



Desarrollo:

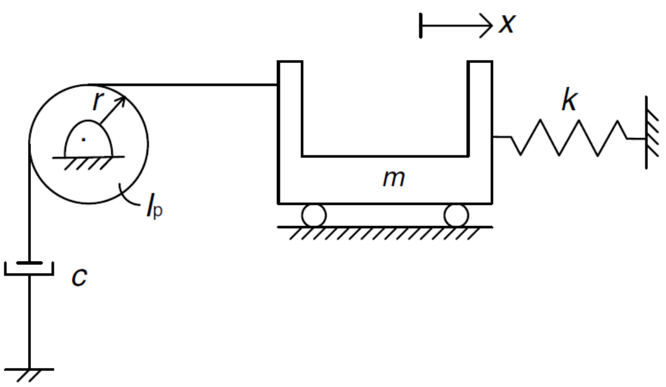
$$m\left(\frac{L}{3}\right)^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+\dot{\theta}\ddot{\theta}\left(\frac{1}{12}mL^2\right)+\left(mg\frac{L}{3}\sin\theta\right)\dot{\theta}=0$$

$$\frac{7}{36}L^2\ddot{\theta}+\frac{L}{3}g\sin\theta=0$$

$$\boldsymbol{\ddot{\theta}+\frac{12g}{7L}\sin\theta=0}$$

Ejemplos de los capítulos I, II, III y IV

2. Considere el sistema mostrado a continuación. La polea mostrada tiene un momento de inercial de masa centroidal I_p, el cuál está en dirección perpendicular al plano mostrado. Sí x es el desplazamiento del carro (tomado como positivo hacía la derecha desde la posición de equilibrio), derive la ecuación de movimiento usando a x como coordenada generalizada.



Suposiciones: La polea se puede modelar como un cuerpo rígido que está rotando en torno a su centro de gravedad y con un momento de inercia de masa I_p, el elemento disipador presenta amortiguamiento viscoso, el carrito se puede modelar como una masa puntual, la fricción entre las ruedas del carrito y la superficie sobre el cuál estas se apoyan, al darse el movimiento es despreciable, el resorte se comporta de forma lineal, el sistema solo tiene un grado de libertad y la coordenada generalizada a emplear es el desplazamiento x, el cable que conecta carrito-polea-amortiguador es rígido y de masa despreciable, no existe deslizamiento entre el cable y la polea.

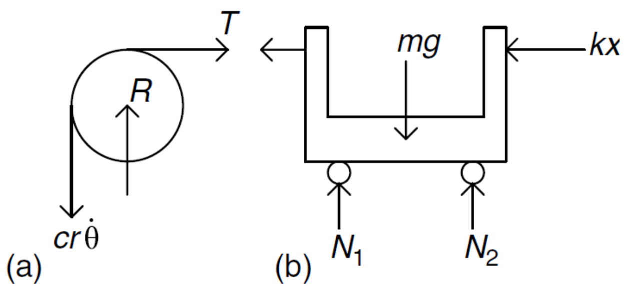
Ecuaciones básicas:

$$\sum \vec{M}_o = \vec{\bar{r}} \times m\ddot{\vec{\bar{r}}} + \vec{\dot{H}}_G, \vec{\dot{H}}_G = \bar{I}_z\dot{\omega}\mathrm{k} = I_p\ddot{\theta}\mathbf{k}, \sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

Ejemplos de los capítulos I, II, III y IV

2. Considere el sistema mostrado a continuación. La polea mostrada tiene un momento de inercial de masa centroidal I_p, el cuál está en dirección perpendicular al plano mostrado. Sí x es el desplazamiento del carro (tomado como positivo hacía la derecha desde la posición de equilibrio), derive la ecuación de movimiento usando a x como coordenada generalizada.

Desarrollo:



Para la polea de radio r se tendrá la siguiente expresión para la sumatoria de momento en torno a su centro de masa (punto 0):

$$\sum \vec{M}_o = \vec{\bar{r}} \times m\ddot{\vec{\bar{r}}} + \dot{\vec{H}}_G$$

$$\vec{\bar{r}} = 0$$

$$\sum \vec{M}_o = \dot{\vec{H}}_G = I_p\ddot{\theta}\mathbf{k}$$

$$\sum \vec{M}_o = \left(-c\dot{\theta}r^2 + Tr\right)\mathbf{k} = I_p\ddot{\theta}\mathbf{k}$$

$$T = \frac{I_p}{r}\ddot{\theta} + c\dot{\theta}r$$

Observando la figura se ve claramente que $x = r\theta$, por lo tanto:

$$\dot{x} = r\dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

$$T = \frac{I_p}{r^2}\ddot{x} + c\dot{x}$$

Para el carro modelado como masa puntual, se tendría la siguiente ecuación de movimiento:

$$\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{\bar{r}}} \rightarrow -T - kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + T + kx = 0$$

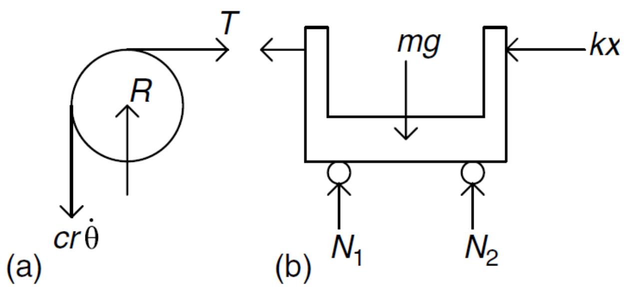
$$m\ddot{x} + \left(\frac{I_p}{r^2}\ddot{x} + c\dot{x}\right) + kx = 0$$

$$\left(\boldsymbol{m} + \frac{\boldsymbol{I_p}}{\boldsymbol{r}^2}\right)\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{k}\boldsymbol{x} = 0$$

Ejemplos de los capítulos I, II, III y IV

2. Considere el sistema mostrado a continuación. La polea mostrada tiene un momento de inercial de masa centroidal I_p, el cuál está en dirección perpendicular al plano mostrado. Sí x es el desplazamiento del carro (tomado como positivo hacía la derecha desde la posición de equilibrio), derive la ecuación de movimiento usando a x como coordenada generalizada.

Desarrollo:



Para la polea de radio r se tendrá la siguiente expresión para la sumatoria de momento en torno a su centro de masa (punto 0):

$$\sum \vec{M}_o = \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{H}}_G$$

$$\vec{r} = 0$$

$$\sum \vec{M}_o = \dot{\vec{H}}_G = I_p\ddot{\theta}\mathbf{k}$$

$$\sum \vec{M}_o = \left(-c\dot{\theta}r^2 + Tr\right)\mathbf{k} = I_p\ddot{\theta}\mathbf{k}$$

$$T = \frac{I_p}{r}\ddot{\theta} + c\dot{\theta}r$$

Observando la figura se ve claramente que $x = r\theta$, por lo tanto:

$$\dot{x} = r\dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

$$T = \frac{I_p}{r^2}\ddot{x} + c\dot{x}$$

Para el carro modelado como masa puntual, se tendría la siguiente ecuación de movimiento:

$$\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \rightarrow -T - kx = m\ddot{x}$$

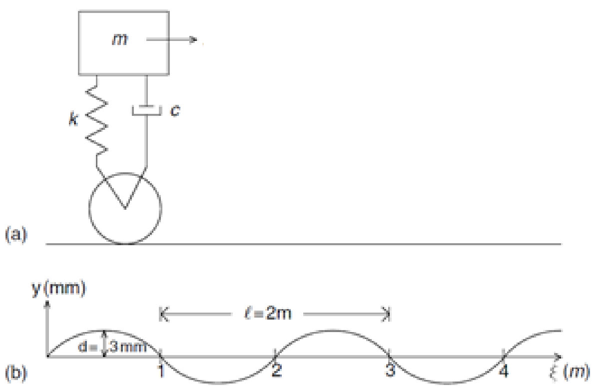
$$m\ddot{x} + T + kx = 0$$

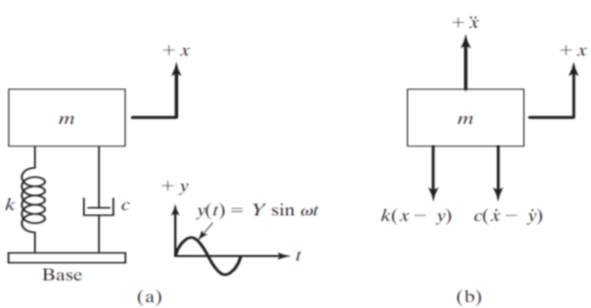
$$m\ddot{x} + \left(\frac{I_p}{r^2}\ddot{x} + c\dot{x}\right) + kx = 0$$

$$\boldsymbol{\left(m + \frac{I_p}{r^2}\right)\ddot{x} + c\dot{x} + kx} = 0$$

Ejemplos de los capítulos I, II, III y IV

3. El sistema de la suspensión de un vehículo es simplificado y modelado como un sistema de un grado de libertad, tal como se observa en la siguiente figura. Suponiendo que el vehículo se desplace con una velocidad horizontal constante v sobre una carretera de contorno sinusoidal, haga lo siguiente:
a) Determine la amplitud de la respuesta del vehículo X, en estado estable, en término de la velocidad horizontal v.
b) Determine la amplitud de la fuerza transmitida F_T al resorte y al amortiguador, en estado estable, en términos de la velocidad horizontal v.
c) Determine la amplitud de la aceleración A, en estado estable, en función de la velocidad horizontal v.





Suposiciones: Suspensión de auto que puede ser modelado como un sistema de un grado de libertad de masa-resorte-amortiguador, donde la masa es puntual, hay amortiguamiento viscoso, y el resorte se comporta de forma lineal; el camino recorrido por el sistema de suspensión presenta el contorno sinusoidal que se observa en la figura; la coordenada generalizada a emplear para describir el desplazamiento vertical del sistema de suspensión será x.

Ecuaciones básicas:

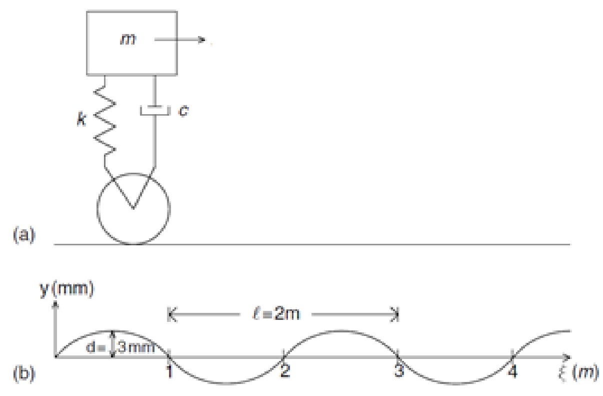
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky, \frac{X}{Y} = \frac{\left[1 + (2\zeta r)^2\right]^{1/2}}{\left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{1/2}},$$

$$\frac{F_T}{kY} = r^2 \frac{\left[1 + (2\zeta r)^2\right]^{1/2}}{\left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{1/2}}, A = X\omega^2$$

Ejemplos de los capítulos I, II, III y IV

3. El sistema de la suspensión de un vehículo es simplificado y modelado como un sistema de un grado de libertad, tal como se observa en la siguiente figura. Suponiendo que el vehículo se desplace con una velocidad horizontal constante v sobre una carretera de contorno sinusoidal, haga lo siguiente:
a) Determine la amplitud de la respuesta del vehículo X, en estado estable, en término de la velocidad horizontal v.
b) Determine la amplitud de la fuerza transmitida F_T, al resorte y al amortiguador, en estado estable, en términos de la velocidad horizontal v.
c) Determine la amplitud de la aceleración A, en estado estable, en función de la velocidad horizontal v.

Desarrollo:



a) En primer lugar se determinará la expresión para la excitación del sistema:

$$y(t) = Y \sin \omega t = d \sin\left[\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)t\right]$$

Donde τ es el periodo de oscilación y es igual a:

$$\tau = \frac{l}{v} \qquad\qquad y(t) = d \sin\left[\left(\frac{2\pi v}{l}\right)t\right]$$

$$\frac{X}{Y} = \frac{\left[1 + (2\zeta r)^2\right]^{1/2}}{\left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{1/2}}$$

$$\boldsymbol{X = d\,\frac{\left[1 + (2\zeta r)^2\right]^{1/2}}{\left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{1/2}}}$$

Donde:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\left(\frac{2\pi v}{l}\right)}{\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)} \qquad\qquad \frac{c}{2m} = \left(\frac{c}{c_c}\right)\left(\frac{c_c}{2m}\right) = \zeta\omega_n$$

Ejemplos de los capítulos I, II, III y IV

3. El sistema de la suspensión de un vehículo es simplificado y modelado como un sistema de un grado de libertad, tal como se observa en la siguiente figura. Suponiendo que el vehículo se desplace con una velocidad horizontal constante v sobre una carretera de contorno sinusoidal, haga lo siguiente:
a) Determine la amplitud de la respuesta del vehículo X, en estado estable, en término de la velocidad horizontal v.
b) Determine la amplitud de la fuerza transmitida F_T, al resorte y al amortiguador, en estado estable, en términos de la velocidad horizontal v.
c) Determine la amplitud de la aceleración A, en estado estable, en función de la velocidad horizontal v.

Desarrollo:

b)

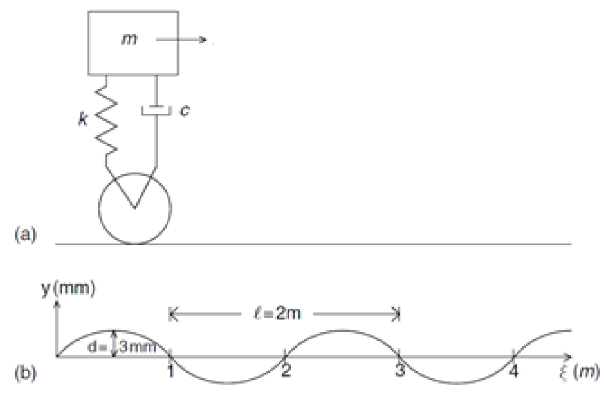
$$\frac{F_T}{kY} = r^2 \frac{\left[1+(2\zeta r)^2\right]^{1/2}}{\left[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2\right]^{1/2}}$$

$$\boldsymbol{F_T = kdr^2 \frac{\left[1+(2\zeta r)^2\right]^{1/2}}{\left[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2\right]^{1/2}}}$$

c)

$$A = X\omega^2$$

$$\boldsymbol{A = d\omega^2 \frac{\left[1+(2\zeta r)^2\right]^{1/2}}{\left[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2\right]^{1/2}}}$$

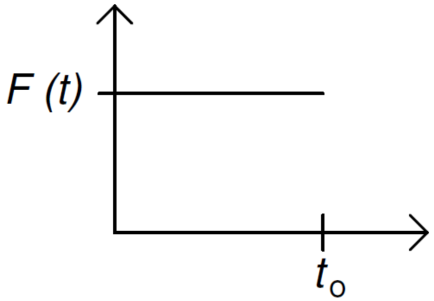


La expresión anterior también puede expresarse de forma adimensional:

$$\frac{A}{d\omega_n^{\,2}} = r^2 \frac{\left[1+(2\zeta r)^2\right]^{1/2}}{\left[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2\right]^{1/2}}$$

Ejemplos de los capítulos I, II, III y IV

4. Determine la respuesta en estado estable de un sistema de un grado de libertad masa-resorte no amortiguado, cuando está sujeto a la fuera de excitación de la figura siguiente.



Suposiciones: Sistema masa-resorte de un grado de libertad sujeto a la siguiente ecuación diferencial $m\ddot{x} + kx = F(t)$, el resorte se comporta de forma lineal.

Ecuación básica:

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

Desarrollo:

Como se ve en la figura el sistema está sujeto a un escalón unitario:

$$F(t) = F_0[H(t) - H(t - t_0)]$$

Donde:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$H(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{m\ddot{x} + kx\} = \mathcal{L}\{F_0[H(t) - H(t - t_0)]\}$$

$$m[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + \ kX(s) = F_0\left(\frac{1 - e^{-t_0 s}}{s}\right)$$

La respuesta en estado estable se encuentra cuando $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$X(s) = F_0\left(\frac{1 - e^{-t_0 s}}{s}\right)\left(\frac{1}{ms^2 + k}\right) = \frac{F_0}{m}\left(\frac{1 - e^{-t_0 s}}{s(s^2 + {\omega_n}^2)}\right)$$

Cuando se expande en fracciones parciales:

$$X(s) = \frac{F_0}{m}\left[\frac{a}{s} + \frac{bs + c}{s^2 + {\omega_n}^2}\right](1 - e^{-t_0 s})$$

Donde:

$$a = -b = \frac{1}{{\omega_n}^2}$$

$$c = 0$$

Ejemplos de los capítulos I, II, III y IV

4. Determine la respuesta en estado estable de un sistema de un grado de libertad masa-resorte no amortiguado, cuando está sujeto a la fuera de excitación de la figura siguiente.

$$X(s) = \frac{F_0}{m{\omega_n}^2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + {\omega_n}^2}\right](1 - e^{-t_0 s})$$

$$x_p(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F_0}{m{\omega_n}^2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + {\omega_n}^2}\right](1 - e^{-t_0 s})\right\}$$

$$\boldsymbol{x_p(t)} = \left(\frac{\boldsymbol{F}_0}{\boldsymbol{m\omega_n}^2}\right)\left\{[1 - \mathbf{cos}(\boldsymbol{\omega_n t})] - \left[1 - \mathbf{cos}\big(\boldsymbol{\omega_n}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}_0)\big)\right]\boldsymbol{H}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}_0)\right\}$$