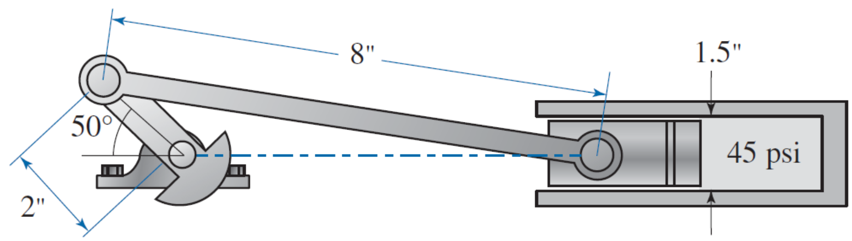
Ejemplo (Clase VIII Y IX)

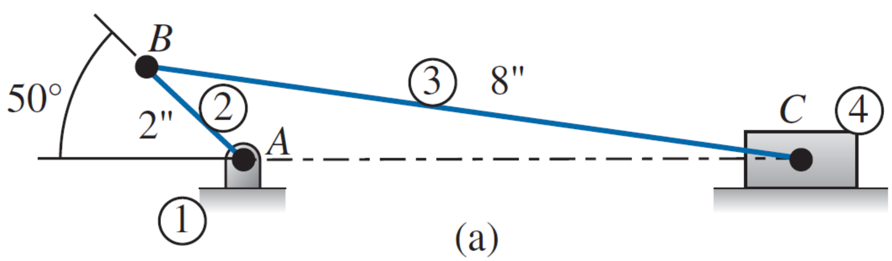
1. Considere el mecanismo mostrado a continuación. Este es impulsado por un motor eléctrico DC que opera a 600 RPM lo que hace que rote en sentido horario. En la posición mostrada, la presión del cilindro es de 45 psia. El pistón pesa 0.5 lbf y el coeficiente de fricción entre el pistón y el cilindro es de 0.1. Suponga que el peso de todos los otros eslabones es despreciable. En el instante mostrado, determine el torque requerido por el motor para operar este sistema de compresión.

Suposición: El pistón es de sección transversal circular.



Desarrollo:

<u>Análisis cinemático</u>



(a)

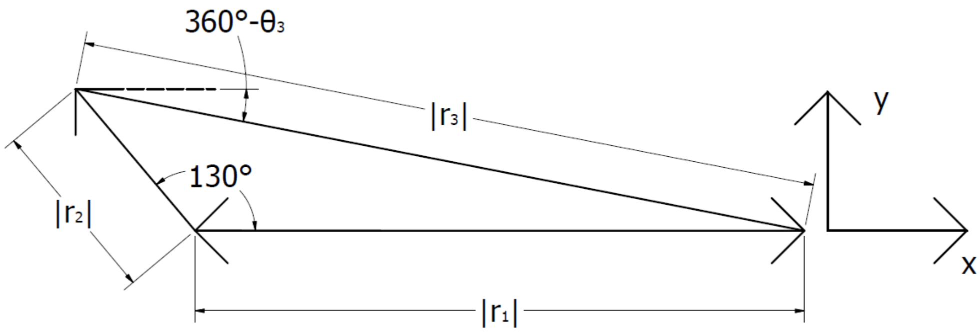
En vista de que el pistón no presenta masa despreciable, su aceleración lineal es requerida para el cálculo de su correspondiente fuerza inercial.

$$\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{r_i} = 0$$

$$|r_1|(\cos\theta_1, \sin\theta_1)^T + |r_2|(\cos\theta_2, \sin\theta_2)^T + |r_3|(\cos\theta_3, \sin\theta_3)^T = 0$$

$$|r_1|(\cos\theta_1, \sin\theta_1)^T + |r_3|(\cos\theta_3, \sin\theta_3)^T = -|r_2|(\cos\theta_2, \sin\theta_2)^T$$

Se tiene como incógnitas a $|r_1|$ y θ_3, segundo caso ($|r_j|$ y θ_k):



Si la expresión anterior se multiplica primero por el vector unitario perpendicular a $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{u_1} = (-\sin\theta_1, \cos\theta_1)^T$, y luego por el vector unitario paralelo a $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{u_2} = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)^T$, se tendrán las siguientes expresiones:

$$|r_3|\sin(\theta_3 - \theta_1) = -|r_2|\sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$|r_1| + |r_3|\cos(\theta_3 - \theta_1) = -|r_2|\cos(\theta_2 - \theta_1)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anteriores se tendrá que:

$$\text{Solución 1} \rightarrow |r_1| \cong -9.137, \theta_3 \cong 191°$$

Lo que es físicamente imposible ($|r_1| > 0$)

$$\text{Solución 2} \rightarrow |r_1| \cong 6.566, \theta_3 \cong 348.96°$$

A partir de lo anterior y sabiendo el motor impulsa al eslabón 2 a 600 RPM se puede efectuar el análisis de velocidad.

$$\dot{\theta}_2 = 2\pi n_2$$

$$\dot{\theta}_2 = 2\pi\left(\frac{600\,rev}{min}\cdot\frac{1\,min}{60\,s}\right) \cong 62.83\frac{rad}{s}, \text{en sentido horario}$$

De la clase 4, para el segundo caso:

$$\left(b_x, b_y\right)^T = -[|r_2|(\cos\theta_2, \sin\theta_2)^T]$$

$$\left(b_x, b_y\right)^T = [|b|(\cos\alpha, \sin\alpha)^T]$$

Donde:

$$|b| = 2, \alpha = 310°, \dot{\alpha} = \dot{\theta}_2$$

$$\left(\dot{b}_x, \dot{b}_y\right)^T = \frac{d}{dt}[|b|(\cos\alpha, \sin\alpha)^T]$$

Por lo tanto:

$$\dot{b}_x = \left(\left|\dot{b}\right|\cos\alpha - |b|\dot{\alpha}\sin\alpha\right) = -|b|\dot{\alpha}\sin\alpha$$

$$\dot{b}_x = -|2|(-62.83)\sin(310°) \cong -96.26\frac{in}{s}$$

$$\dot{b}_y = \left(\left|\dot{b}\right|\sin\alpha + |b|\dot{\alpha}\cos\alpha\right) = |b|\dot{\alpha}\cos\alpha$$

$$\dot{b}_y = |2|(-62.83)\cos(310°) \cong -80.77\frac{in}{s}$$

$$\dot{\theta}_3 = -\frac{\dot{b}_x\sin\theta_1 - \dot{b}_y\cos\theta_1 + |r_1(t)|\dot{\theta}_1 + |\dot{r_3}(t)|[\sin(\theta_3 - \theta_1)]}{|r_3|[\cos(\theta_3 - \theta_1)]}$$

$$\dot{\theta}_3 = -\frac{\dot{b}_x\sin\theta_1 - \dot{b}_y\cos\theta_1}{|r_3|[\cos(\theta_3 - \theta_1)]}$$

$$\dot{\theta}_3 = -\frac{(-96.26)\sin(180°) - (-80.77)\cos(180°)}{8[\cos(348.96 - 180)]} \cong -10.29\frac{rad}{s}$$

$$|\dot{r_1}| = \frac{\dot{b}_x\cos\theta_3 + \dot{b}_y\sin\theta_3 - |r_1|[\sin(\theta_3 - \theta_1)]\dot{\theta}_1 - |\dot{r_3}|}{[\cos(\theta_3 - \theta_1)]}$$

$$|\dot{r_1}| = \frac{\dot{b}_x\cos\theta_3 + \dot{b}_y\sin\theta_3}{[\cos(\theta_3 - \theta_1)]}$$

$$|\dot{r_1}| = \frac{(-96.26)\cos(348.96°) + (-80.77)\sin(348.96°)}{[\cos(348.96° - 180°)]} \cong 80.50\frac{in}{s}$$

Finalmente puede ser efectuado el análisis de aceleración.

Aquí solo se buscará $|\ddot{r_1}|$ que se encuentra relacionada a la fuerza inercial.

$$|\ddot{r_1}| = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{b}_x\cos\theta_3 + \dot{b}_y\sin\theta_3}{[\cos(\theta_3 - \theta_1)]}\right) = \frac{df_1}{dt} + \frac{df_2}{dt}$$

$$\ddot{b}_x = -|b|\dot{\alpha}^2\cos\alpha - |b|\ddot{\alpha}\sin\alpha = -|b|\dot{\alpha}^2\cos\alpha$$

$$\ddot{b}_x = -|b|\dot{\alpha}^2 \cos\alpha = -(2)(-62.83)^2 \cos(310°) \cong -5074.95 \frac{m}{s^2}$$

$$\ddot{b}_y = -|b|\dot{\alpha}^2 \sin\alpha$$

$$\ddot{b}_y = -(2)(-62.83)^2 \sin(310°) \cong 6048.09 \frac{in}{s^2}$$

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{\left(\ddot{b}_x \cos\theta_3 - \dot{\theta}_3 \dot{b}_x \sin\theta_3\right)\cos(\theta_3 - \theta_1) + \left(\dot{b}_x \cos\theta_3\right)\sin(\theta_3 - \theta_1)\left(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1\right)}{[\cos(\theta_3 - \theta_1)]^2}$$

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{\left(\ddot{b}_x \cos\theta_3 - \dot{\theta}_3 \dot{b}_x \sin\theta_3\right)\cos(\theta_3 - \theta_1) + \left(\dot{b}_x \cos\theta_3\right)\sin(\theta_3 - \theta_1)\left(\dot{\theta}_3\right)}{[\cos(\theta_3 - \theta_1)]^2}$$

$$\frac{df_1}{dt} \cong 5074.95 \ \frac{in}{s^2}$$

$$\frac{df_2}{dt} = \frac{\left(\ddot{b}_y \sin\theta_3 + \dot{b}_y \dot{\theta}_3 \cos\theta_3\right)\cos(\theta_3 - \theta_1) + \left(\dot{b}_y \sin\theta_3\right)\sin(\theta_3 - \theta_1)(\dot{\theta}_3)}{[\cos(\theta_3 - \theta_1)]^2}$$

$$\frac{df_2}{dt} \cong 317.25 \ \frac{in}{s^2}$$

$$|\ddot{r}_1| \cong 5392.2 \ \frac{in}{s^2}$$

Análisis dinámico (enfoque de dinámica inversa)

Para poder determinar el torque requerido por el motor se requiere de todas las fuerzas interactuando con la manivela. A continuación se presentan los diagramas de cuerpo libre.

Diagrama de cuerpo libre de manivela (el ángulo de 11.04° es deducido empleando la ley del seno).

Ecuaciones de movimiento:

$$\sum F_x = F^x{}_{21} - F_{23} \cos 11° = 0$$

$$\sum F_y = F^y{}_{21} + F_{23} \sin 11° = 0$$

$$\sum M_A = -T_{21} + (F_{23} \cos 11°)(2'' \sin 50\,°) - (F_{23} \sin 11°)(2'' \cos 50\,°) = 0$$

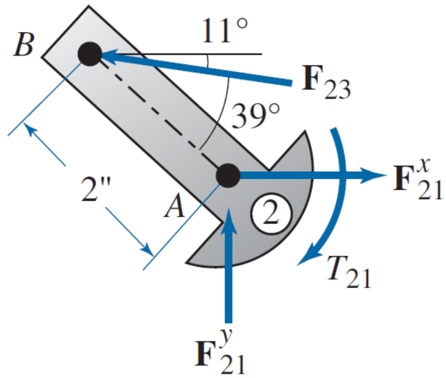
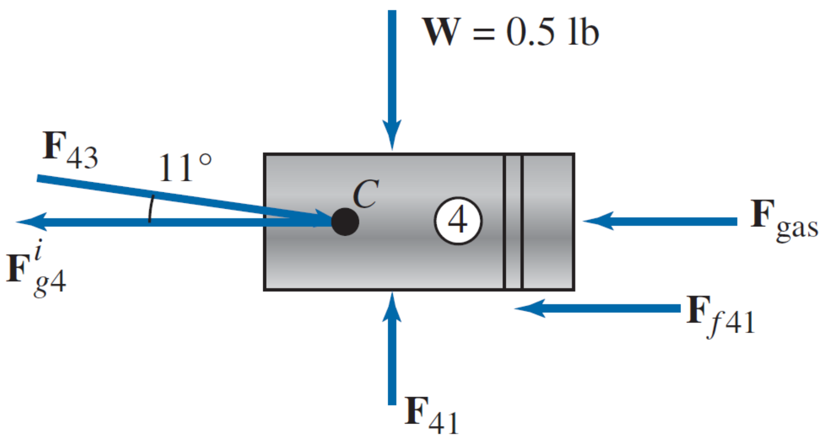


Diagrama de cuerpo libre de pistón.



$$\sum F_y = -0.5\text{ lbf} + F_{41} - F_{43}\sin 11° = 0$$

$$\sum F_x = -F_{gas} - F_{f41} - {F^i}_4 + F_{43}\cos 11° = 0$$

Donde:

$${F^i}_4 = m_{pistón}\ddot{r}_C$$

$${F^i}_4 = \left(\frac{0.5\ lbf}{32.2\ ft/s^2}\right)\left(\frac{1\ ft}{12\ in}\right)\left(5392.2\ \frac{in}{s^2}\right) \cong 6.98\ lbf$$

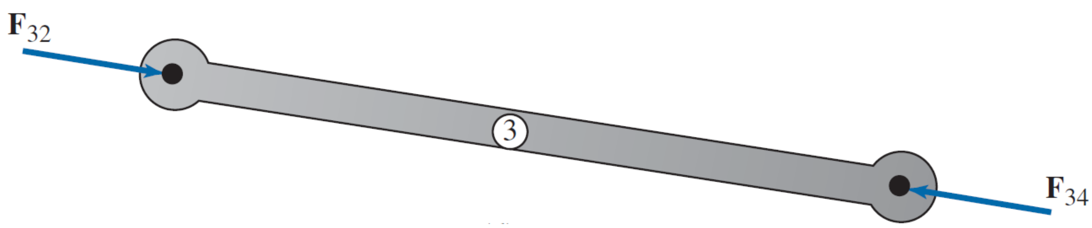
$$F_{gas} = (p_{gas})\left(\frac{\pi {d_{pistón}}^2}{4}\right)$$

$$F_{gas} = \left(45\ \frac{lbf}{in^2}\right)\frac{(\pi)(1.5\ in)^2}{4} \cong 79.52\ lbf$$

$$F_{f41} = \mu F_{41}$$

$$F_{f41} = 0.1 F_{41}$$

Diagrama de cuerpo libre de eslabón conector.



$$\sum F = 0$$

$$F_{32} = F_{34}$$

Adicional a lo anterior se sabe que:

$$F_{43} = F_{34}, F_{23} = F_{32}$$

Consecuentemente se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones simultáneas:

$$(1)\ F^x{}_{21} - F_{23}\cos 11° = 0$$

$$(2)\ F^y{}_{21} + F_{23}\sin 11° = 0$$

$$(3) - T_{21} + (F_{23}\cos 11°)(2''\cos 50\,°) - (F_{23}\sin 11°)(2''\sin 50\,°) = 0$$

$$(4) - 0.5\ \text{lbf} + F_{41} - F_{43}\sin 11° = 0$$

$$(5) - 79.52\ lbf - 0.1F_{41} - 6.98\ lbf + F_{43}\cos 11° = 0$$

$$(6)\ F_{32} = F_{34}$$

$$(7)\ F_{43} = F_{34}$$

$$(8)\ F_{23} = F_{32}$$

En donde las incógnitas son: $F^x{}_{21}, F_{23},\ F^y{}_{21}, T_{21}, F_{41}, F_{43}, F_{32}, F_{34}$.

Resolviendo de forma simultánea se encuentra que:

$$F^{x}{}_{21} = 88.27\ lbf, \qquad F_{23} = 89.94\ lbf,$$

$$F^{y}{}_{21} = -17.22\ lbf, T_{21} = 113.1\ lbf \cdot in,$$

$$F_{41} = 17.72\ lbf$$