Universidad Tecnológica de Panamá
Facultad de Ingeniería Mecánica
Departamento de Diseño de Sistemas y Componentes Mecánicos

Mecanismos
Parcial # 2: "Análisis cinemático de levas y diseño de trenes de engranes"

Nombre: **CLAVE** | Fecha: 28 de junio de 2016
Cédula: ______________________ | Profesor: Arturo Arosemena
Grupo: 1N131

I. Resuelva los siguientes problemas (100 puntos). Lea atentamente, siga las siguientes instrucciones, y enuncie sus suposiciones*.

Problema # 1 (60 puntos).
Considere un seguidor en línea cuyo esquema de movimiento debe cumplir con lo siguiente:
-$D(0°) = 0$ in.
-$D(60°) = 2.2$ in.
-$D(150°) = 0$ in.

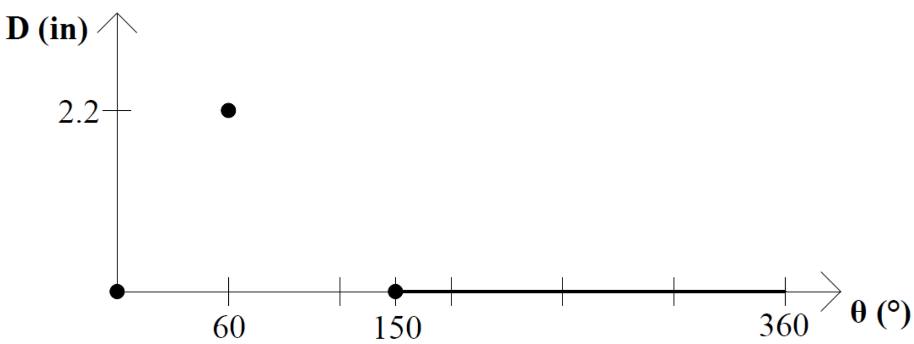


Figura # 1. D (in) vs. θ(°) para el seguidor en línea correspondiente al problema # 1.

Tenga presente que el desplazamiento D máximo del seguidor será de 2.2 pulgadas, que parte del reposo cuando se está en la posición inicial ($\theta = 0°$), y que regresa al reposo una vez se ha terminado el periodo de caída ($\theta \geq 150°$). También considere que el ciclo total de movimiento (desde $\theta = 0°$ hasta $\theta = 360°$) debe demorar 2 segundos. Emplee un esquema de movimiento para el seguidor cuya función de desplazamiento este dada por:

$$D = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5 + C_6 x^6 + C_7 x^7$$

Aquí x es la posición angular normalizada de la leva y está dada por:

$$x = \frac{\theta}{\beta}$$

Donde β representa el desplazamiento total de la leva una vez termina el periodo de subida/caída y esta regresa al reposo. En este caso $\beta = 150°$.

Para el problema anterior, haga lo siguiente:
a. Determine la función de posición, velocidad, aceleración, y de cambio de aceleración para el seguidor en línea.
b. Determine la posición [in], velocidad [in/s], aceleración [in/s^2], y el cambio de aceleración [in/s^3] del seguidor tras pasar 0.15 segundos.
c. A partir de la función de desplazamiento del seguidor y considerando se trata de un seguidor en línea con borde afilado (tipo cuchillo), describa como diseñaría gráficamente el perfil de leva.

Suposición: La leva presenta una velocidad angular constante.

Desarrollo:

a. En primer lugar se deducirán los coeficientes de las funciones (40 puntos: 5 puntos cada coeficiente).

Las condiciones que se deben cumplir son las siguientes:

$$\theta = 0° \rightarrow x = 0, \qquad D(0°) = 0, \frac{dD(0°)}{d\theta} = 0, \frac{d^2D(0°)}{d\theta^2} = 0$$

$$\theta = 60° \rightarrow x = 0.4, \qquad D(60°) = 2.2, \frac{dD(60°)}{d\theta} = 0$$

$$\theta = 150° \rightarrow x = 1, \qquad D(150°) = 0, \frac{dD(150°)}{d\theta} = 0, \frac{d^2D(150°)}{d\theta^2} = 0$$

Donde:

$$\boldsymbol{D = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6 + C_7x^7}$$

$$\boldsymbol{V = \frac{dD}{d\theta} = \frac{1}{\beta}\left[C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + 6C_6x^5 + 7C_7x^6\right]}$$

$$\boldsymbol{A = \frac{d^2D}{d\theta^2} = \frac{1}{\beta^2}\left[2C_2 + 6C_3x + 12C_4x^2 + 20C_5x^3 + 30C_6x^4 + 42C_7x^5\right]}$$

Consecuentemente:

$$\boldsymbol{C_0 = 0, C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 318.287, C_4 = -1352.720, C_5 = 2148.437,}$$

$$\boldsymbol{C_6 = -1511.863, C_7 = 397.859}$$

Adicionalmente:

$$\boldsymbol{J = \frac{d^3D}{d\theta^3} = \frac{1}{\beta^3}[6C_3 + 24C_4x + 60C_5x^2 + 120C_6x^3 + 210C_7x^4]}$$

b. Puede re escribir las expresiones anteriores como funciones del tiempo o bien buscar el desplazamiento angular de la leva correspondiente a 0.15 segundos, evaluar las funciones para dicho desplazamiento, y luego llevar las respuestas a las unidades requeridas (10 puntos).

Recordando que:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}, \tau = 2 \text{ seg}$$

$$\omega = \pi \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \text{ (2 puntos)}$$

$$\omega t_1 = \theta_1 \rightarrow \theta_1 = 0.15\pi \text{ rad } (27°)$$

$$D(\theta_1) \cong 0.7932\ in, V(\theta_1) \cong 3.4525 \frac{in}{rad},$$

$$A(\theta_1) \cong 3.4945 \frac{in}{rad^2}, J(\theta_1) \cong -40.5620\ \frac{in}{rad^3}$$

Lo cuál en las unidades requeridas da (2 puntos cada respuesta):

$$\boldsymbol{D(t_1) \cong 0.7932\ in, V(t_1) \cong 10.8463 \frac{in}{seg},}$$

$$\boldsymbol{A(t_1) \cong 34.4893 \frac{in}{seg^2}, J(t_1) \cong -1257.6766 \frac{in}{seg^3}}$$

c. Para diseñar gráficamente el perfil de leva si el seguidor fuese en línea con borde afilado se podrían seguir los pasos comentados en clase (10 puntos: 2 puntos cada numeral):

1. Se dibuja el círculo base. Su tamaño suele ser función de restricciones espaciales presentes en la aplicación. No se tiene información de la aplicación así que no se puede especificar.
2. Se dibuja el seguidor en la posición inicial.
3. Se dibujan líneas radiales desde el centro de leva, correspondientes a los ángulos de leva identificados en el diagrama de desplazamiento. Este último puede ser obtenido a partir de la función D cuyos coeficientes fueron deducidos en la parte a.

4. Se transfieren los desplazamientos del diagrama de desplazamientos a las líneas radiales. Los desplazamientos se miden desde el círculo base.
5. Se dibuja el perfil de leva a través de estos desplazamientos prescritos.

Problema # 2 (40 puntos).
Diseñe un tren compuesto, revertido, con engranes rectos para una razón de 75:1 y un paso diametral de 12 dientes por pulgada. Especifique el diámetro de paso y el número de dientes de cada engrane. Haga el esquemático del tren de engranes. Considere una razón por etapa máxima de 10:1 y un número de dientes mínimo de 12.

Ecuaciones básicas:

$$n_L = en_F, \qquad e = \frac{producto\ de\ dientes\ impulsores}{producto\ de\ dientes\ impulsados}, \qquad P = \frac{N}{d}$$

Desarrollo:

1. Determine el número de etapas que se tendrá (5 puntos). El inverso del valor de tren será igual al producto de las diferentes razones de diente por etapas que se tenga.

Sí inicialmente se probara una razón de dientes por etapa constante (r_j) para 2, 3, y 4 etapas se tendría:

$$2 \text{ etapas} \rightarrow r_2, \qquad 3 \text{ etapas} \rightarrow r_3, \qquad 4 \text{ etapas} \rightarrow r_4$$

$$\frac{1}{e} = (r_2)(r_2) = 75 \rightarrow r_2 \cong 8.66$$

$$\frac{1}{e} = (r_3)(r_3)(r_3) = 75 \rightarrow r_3 \cong 4.22$$

$$\frac{1}{e} = {r_4}^4 = 75 \rightarrow r_4 \cong 2.94$$

En vista de que para cualquiera de los casos se tiene una razón de dientes por etapa inferior a 10:1 se decide tomar el primer caso. Se tendrán dos etapas.

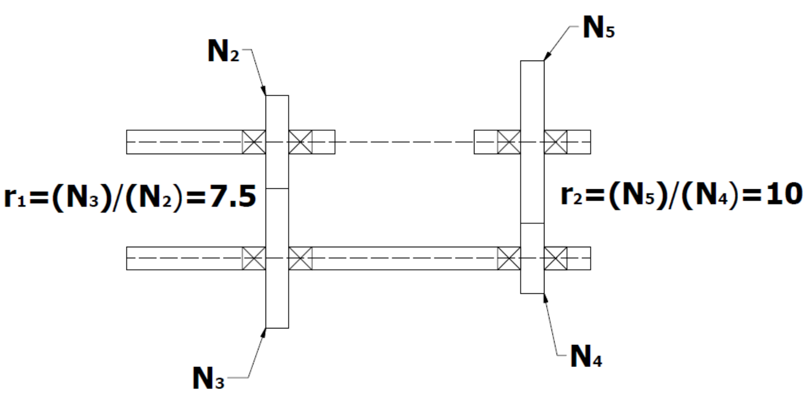
2. Decidida la razón de número de dientes por etapa (5 puntos).

$$\frac{1}{e} = (r_1)(r_2) = 75 = (7.5)(10) = (8.3\bar{3})(9) = (9.375)(8)$$

Se decide seleccionar las siguientes razones de número de dientes por etapa:

$$r_1 = 7.5, r_2 = 10$$

3. Hacer un esquemático rápido del tren (10 puntos).



4. Se determina el número de dientes (10 puntos: 2.5 cada respuesta).

$$(1) \quad r_1 = \frac{N_3}{N_2} = 7.5$$

$$(2) \quad r_2 = \frac{N_5}{N_4} = 10$$

$$\frac{d_2}{2}+\frac{d_3}{2}=\frac{d_4}{2}+\frac{d_5}{2}\rightarrow\frac{N_2}{2P}+\frac{N_3}{2P}=\frac{N_4}{2P}+\frac{N_5}{2P}$$

$$(3) \quad N_2+N_3=N_4+N_5$$

Donde K es una constante.

Aquí se tienen 3 ecuaciones y 4 incógnitas. Y una posible solución podría ser encontrada al arbitrariamente decidir el valor de una de las incógnitas.

Otro enfoque en tanto, sería emplear la última ecuación para resolver de forma independiente, 2 de las 4 incógnitas.

$$N_2+N_3=N_4+N_5=K, \qquad K=constante$$

$$(4) \quad N_2+N_3=K\rightarrow N_2(1+r_1)=K$$

$$(5) \quad N_4+N_5=K\rightarrow N_4(1+r_2)=K$$

Cuando las ecuaciones (4) y (5) se hacen compatibles se abra encontrado los valores que satisfacen a la ecuación (3).

Y el valor mínimo que puede tomar K para satisfacer las ecuaciones anteriores sería:

$$K_{min}=(1+r_1)(1+r_2)$$

$$K_{min}=(1+7.5)(1+10)=93.5$$

Para este valor se tendrían los siguientes valores para N_2 y N_4:

$$N_2=\frac{K}{(1+r_1)}=11, N_4=\frac{K}{(1+r_2)}=8.5$$

Lo cual está por debajo del número de dientes mínimo. Consecuentemente se empleará el primer múltiplo de K_{min} que lleve a valores de N_2 y N_4 mayores a 12.

Sea $K=2K_{min}=187$:

$$\boldsymbol{N_2=22, N_4=17}$$

Una vez se conocen los valores de los engranes impulsores se puede determinar los valores de los engranes impulsados a partir de las ecuaciones (1) y (2):

$$N_3=N_2r_1=(22)(7.5)$$

$$\boldsymbol{N_3=165}$$

$$N_5=N_4r_2=(17)(10)$$

$$\boldsymbol{N_5=170}$$

5. Se determinan los diámetros de paso (<u>10 puntos</u>: 2.5 cada respuesta).

$$P=\frac{N}{d}, P=12\frac{dientes}{in}$$

$$\boldsymbol{d_2=1.8\overline{3}\ in, d_3=13.75\ in\ , d_4\cong 1.42\ in, d_5\cong 14.17\ in}$$