IX. Análisis dinámico de fuerzas

Objetivos:

1. Comprender la diferencia entre masa y peso.
2. Comprender como calcular el momento de masa de inercia de un objeto.
3. Recordar el teorema de ejes paralelos.
4. Emplear el enfoque de dinámica inversa para hacer el análisis de fuerzas de un mecanismo.

1. Introducción.

Para máquinas con aceleraciones significativas, un análisis dinámico de fuerzas es necesario.

Como se comentó en el capítulo anterior existen fuerzas internas y externas. Estas últimas son las que causan el movimiento, el cual puede ser determinado al formular y resolver la ecuación diferencial que describe el equilibrio dinámica de un mecanismo en cualquier instante de tiempo. A esto se le conoce como dinámica directa y se estudia a través de la teoría de vibraciones mecánicas.

Un enfoque alterno, en tanto, es asumir que el movimiento es conocido como resultado del análisis cinemático.

Aquí las aceleraciones de todos los eslabones son conocidas y consecuentemente las fuerzas inerciales. Estas fuerzas inerciales entonces pueden ser tratadas como fuerzas externas y el análisis se reduce a resolver las ecuaciones de equilibrio para el mecanismo en una determinada posición.

A este enfoque se le conoce como dinámica inversa y es lo que se tratará en este capítulo.

2. Masa y peso.

La masa m es una medida de la cantidad de materia de un objeto. Presenta unidades de kilogramo (kg) en el sistema internacional y de libra masa (lbm) en el inglés.

El peso W es la fuerza que actúa sobre un objeto producto del campo gravitatorio. La aceleración gravitatoria g se supone tiene un valor de $9.81\ \mathrm{m/s^2}$ lo que es igual a $32.2\ \mathrm{ft/s^2}$.

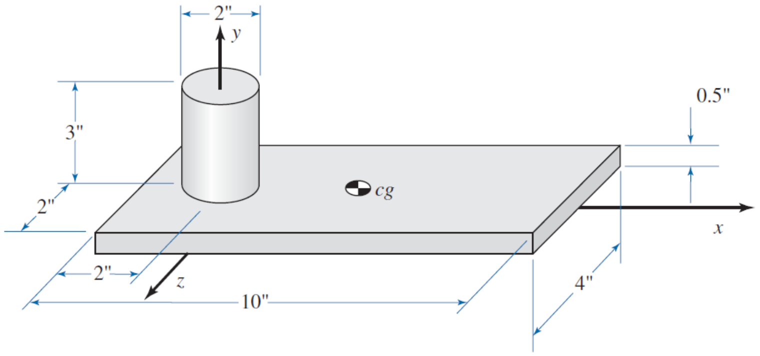
$$W = mg$$

IX. Análisis dinámico de fuerzas

3. Centro de gravedad de un objeto.

El centro de gravedad de un objeto es un punto en donde se supone actúa la fuerza de gravedad o el peso de un cuerpo. En el análisis dinámica de fuerzas, cualquier efecto inercial producto de la aceleración también actuará a través de este punto.

Un método común para determinar el centro de gravedad consiste en dividir un cuerpo complejo en formas geométricas simples, cuyo centro de gravedad es aparente. La posición del centro de gravedad cg puede ser determinada entonces a partir de la posición del centro de gravedad de cada una de estas formas geométricas simples.



Por ejemplo, si se buscará la componente en x del centro de gravedad x_{cg} en un sistema de coordenadas cartesiano se tendría:

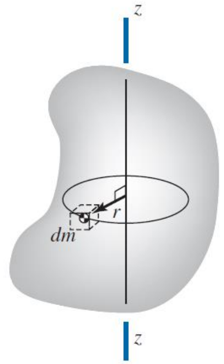
$$x_{cg} = \frac{m_1 x_{cg1} + m_2 x_{cg2} + m_3 x_{cg3} + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_{cgi}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

4. Momento de inercia de masa.

El momento de inercia de masa I, de un componente es una medida de su resistencia a la aceleración rotacional. Entre mayor sea más difícil será de girar.

El momento de inercia depende de la masa del objeto y de su geometría.



IX. Análisis dinámico de fuerzas

4. Momento de inercia de masa.

$$I_z = \int r^2 dm$$

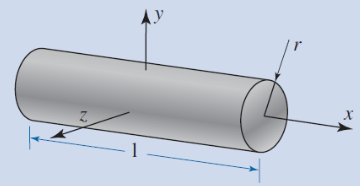
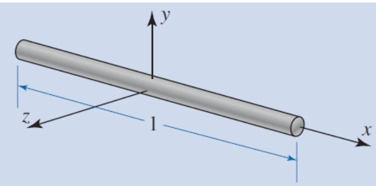
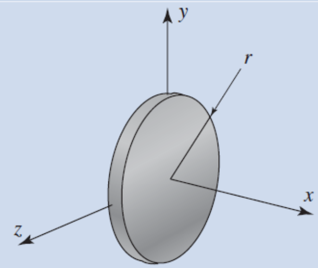
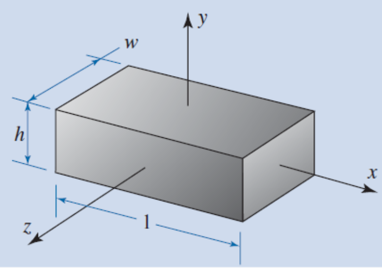
Producto de que el momento de inercia es función de la distancia r al eje de referencia, se tendrá un momento diferente para cada eje. La unidad del momento de inercia en el sistema internacional suele ser kilogramo-metro cuadrado ($\mathrm{kg \cdot m^2}$).

<u>Momento de inercia de geometrías básicas.</u>

IX. Análisis dinámico de fuerzas

4. Momento de inercia de masa.

TABLE 14.2 Mass Moments of Inertia

Shape Name	Rendering	Mass Moment of Inertia
Cylinder		$I_x = \frac{1}{2}[mr^2]$ $I_y = \frac{1}{12}[m(3r^2 + l^2)]$ $I_z = \frac{1}{12}[m(3r^2 + l^2)]$
Slender rod		$I_x = 0$ $I_y = \frac{1}{12}[ml^2]$ $I_z = \frac{1}{12}[ml^2]$
Thin disk		$I_x = \frac{1}{2}[mr^2]$ $I_y = \frac{1}{4}[mr^2]$ $I_z = \frac{1}{4}[mr^2]$
Rectangular block		$I_x = \frac{1}{12}[m(w^2 + h^2)]$ $I_y = \frac{1}{12}[m(w^2 + l^2)]$ $I_z = \frac{1}{12}[m(h^2 + l^2)]$

IX. Análisis dinámico de fuerzas

4. Momento de inercia de masa.

Radio de giro

Ocasionalmente el momento de inercia de un componente sobre un eje específico es expresado en término del radio de giro k:

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

Teorema de ejes paralelos

El momento de inercia es expresado relativo a un eje. Ocasionalmente, el momento de inercia de masa es deseado relativo a un eje paralelo alternativo.

Para llevar el momento de inercia de masa de un eje x a un eje paralelo x' ubicado a una distancia perpendicular d se emplea el teorema de ejes paralelos:

$$I_{x'} = I_x \pm md^2$$

El signo $\pm$ en la expresión anterior atiende si la traslación es hacia el centro de gravedad o en dirección contraria.

Sí la traslación es hacia el centro de gravedad el signo será negativo, de lo contrario positivo.

Cuerpos compuestos

Para partes complejas, el momento de inercia se determina a través de la división de la parte en geometrías simples.

El momento de inercia de cada una de las geometrías simples es determinado con respecto al eje de interés, y el momento de inercia total será igual a la suma de los momentos de inercia individuales.

5. Fuerzas y momentos inerciales.

Las fuerzas inerciales son causadas por aceleraciones traslacionales y los momentos inerciales por aceleraciones angulares.

De acuerdo a la segunda ley de Newton las ecuaciones de movimiento de un eslabón j modelado como un cuerpo libre son:

IX. Análisis dinámico de fuerzas

5. Fuerzas y momentos inerciales.

$$\boxed{\begin{gathered}\sum \mathbf{F}_{\mathbf{ext}} = m_j \ddot{\mathbf{r}}_{\mathbf{cj}} \\[2ex] \sum \mathbf{M}_{\mathbf{ext}} = I_j \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{cj}}\end{gathered}}$$

Donde:

$\sum \mathbf{F}_{\mathbf{ext}}$ es la sumatoria de las fuerzas externas (incluyendo las reacciones que actúan sobre el eslabón).

$\sum \mathbf{M}_{\mathbf{ext}}$ es la sumatoria de los momentos externos.

$\mathbf{r}_{\mathbf{cj}}$ es el vector posición del centro de masa del eslabón j en el sistema coordenado global.

$\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{cj}}$ la posición angular del eslabón j.

m_j es la masa del eslabón j

I_j es el momento de inercia de masa del eslabón j.

Si se aplica un enfoque de dinámica inversa y se supone se conocen las aceleraciones del análisis cinemático las expresiones anteriores podrían re escribirse como:

$$\boxed{\begin{gathered}\sum \mathbf{F}_{\mathbf{ext}} + \mathbf{F}_{\mathbf{iner}} = 0 \\[2ex] \sum \mathbf{M}_{\mathbf{ext}} + \mathbf{M}_{\mathbf{iner}} = 0\end{gathered}}$$

Donde:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{iner}} = -m_j \ddot{\mathbf{r}}_{\mathbf{cj}}, \mathbf{M}_{\mathbf{iner}} = -I_j \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{cj}}$$

Aquí el problema de encontrar las reacciones involucradas en el mecanismo es reducido a un problema de equilibrio estático que involucra fuerzas y momentos inerciales adicionales los cuales son tratados como fuerzas externas. Esto último es conocido como el principio de D'Alembert y es la base del enfoque de dinámica inversa.