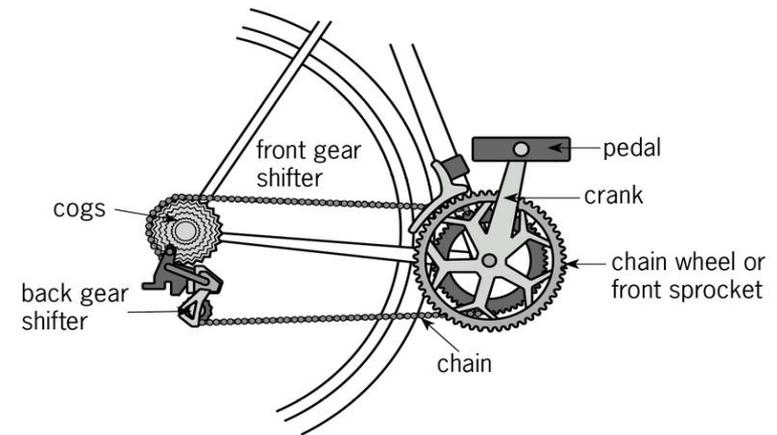


# VII. Engranés en general

## Objetivos:

1. Definir que es un engrane.
2. Mencionar los tipos de engrane.
3. Ver la nomenclatura de los engranes rectos.
4. Discutir algunos fundamentos teóricos relacionados a los engranes rectos.
5. Discutir acerca de los dientes y los trenes de engranes.
6. Ver la terminología y el análisis de fuerza en engranes rectos, cónico, helicoidales, y de tornillo sinfín.



[dreamstime.com](http://dreamstime.com)

# VII. Engranés en general

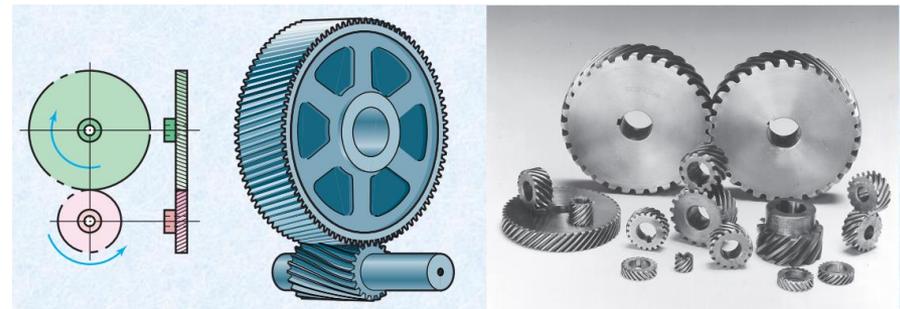
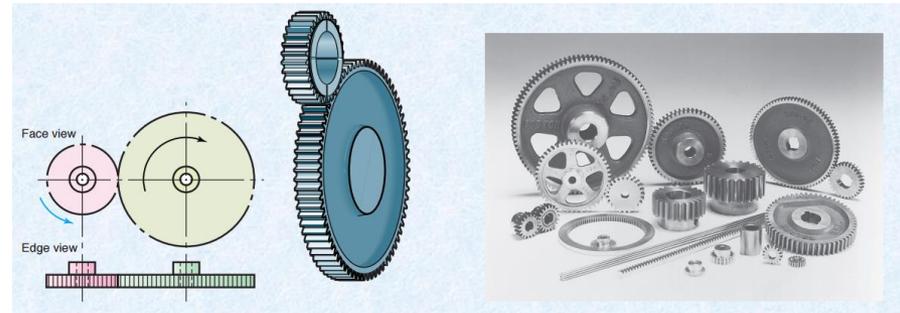
## 1. Definición y tipos de engranes

*¿Qué es un engrane?*

Es un elemento rotatorio dentado, el cuál está en contacto con otro componente de máquinas dentado (generalmente otro engrane), usado para transmitir torque.

*¿Cuáles son los tipos de engranes?*

- Engranés rectos. Son los tipos de engranes más simples. Los dientes son paralelo al eje de rotación. Se emplean para transmitir movimiento rotatorio de un eje paralelo a otro.
- Engranés helicoidales. En estos los dientes están inclinados con respecto al eje de rotación. También transmiten movimiento rotatorio entre ejes paralelos, pero con menor ruido que los engranes rectos. Esto último producto de que el contacto entre los dientes es más gradual. Debido a que los dientes están inclinados, se desarrolla carga de empuje.



# VII. Engranés en general

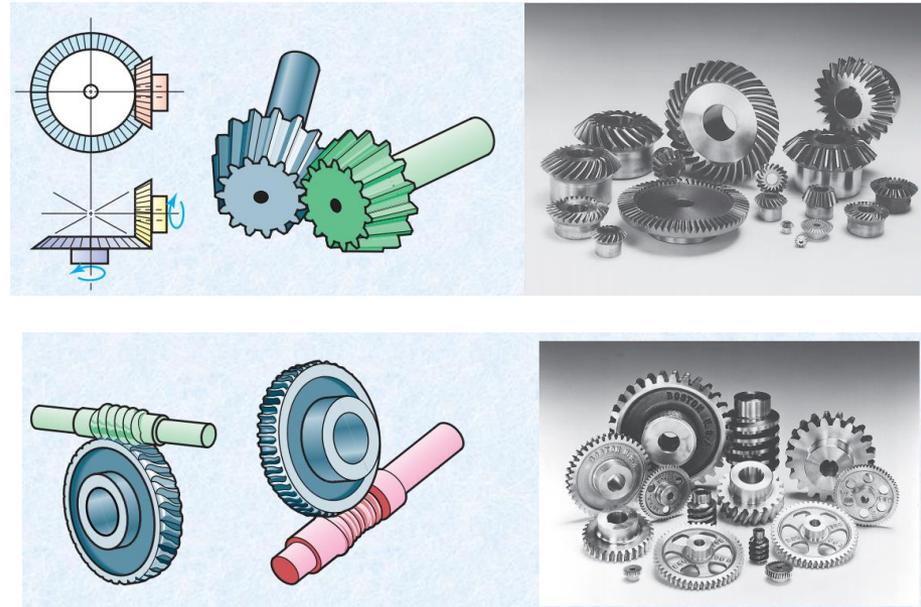
## 1. Definición y tipos de engranes

*¿Cuáles son los tipos de engranes?*

- Engranés cónicos. Los dientes están formados en una superficie cónica. Se transmite movimiento rotatorio entre ejes que se interceptan.
- Tornillos sin fin. Transmiten movimiento entre ejes que se interceptan. Son similares a un tornillo como su nombre lo indica. Son usados cuando se tienen relaciones de velocidad entre los dos ejes altas (3 o más). En estos tipos de engranes se transmite el movimiento rotatorio del tornillo al engrane y no al revés.

## 2. Nomenclatura

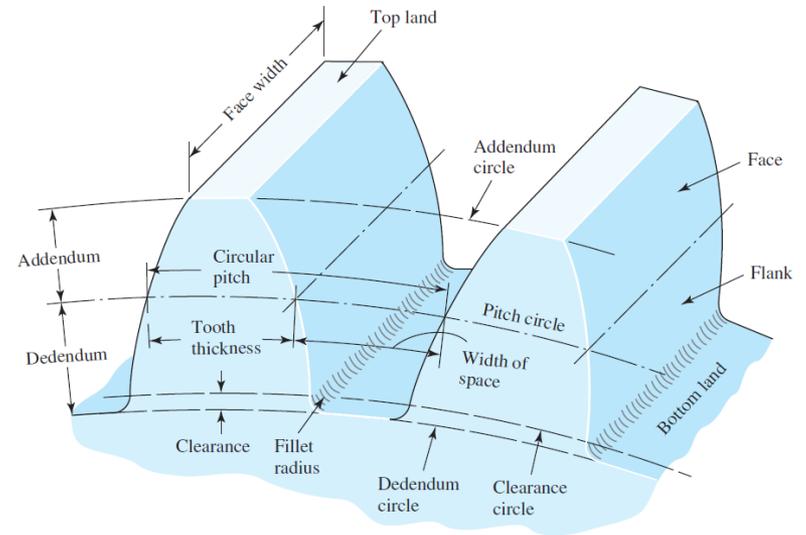
Al ser los engranes rectos los más simples, serán empleados para desarrollar las relaciones cinemáticas básicas relacionadas con la forma de los dientes.



# VII. Engranés en general

## 2. Nomenclatura

- Circulo de paso. Es el círculo teórico sobre el cuál se basan los cálculos y su diámetro es llamado “diámetro de paso”. Los círculos de paso de engranes acoplados son tangentes entre sí. El engrane de menor tamaño es llamado piñón, y el de mayor tamaño es llamado rueda.
- Paso circular  $p$ . Es la distancia medida en el círculo de paso de un punto en un determinado diente al mismo punto en el diente adyacente. El paso circular es igual a la suma del espesor del diente y del ancho de espacio entre los dientes.
- Circulo de la raíz (*dedendum circle*) y de la cabeza (*addendum circle*). Los círculos que definen la superficie del fondo y la superior (cresta) del diente, respectivamente.
- Cabeza (*addendum*)  $a$ . Es la distancia radial medida desde el círculo de paso a la cresta del diente.



- Raíz (*dedendum*)  $b$ . Es la distancia radial medida desde el círculo de paso a la superficie del fondo del diente.
- Circulo de holgura o de claro. Círculo tangente al círculo de la cabeza del engrane acoplado.

# VII. Engranés en general

## 2. Nomenclatura

- Holgura o claro  $c$ . Distancia entre la cresta del engrane y la raíz del engrane acoplado. Es decir es la cantidad por la que la raíz de un engrane dado excede la cabeza de su engrane acoplado.
- Paso diametral  $P$ . Es la razón del número de dientes  $N$  de un engrane a su diámetro de paso. Debe tenerse presente que los engranes acoplados deben tener el mismo paso diametral.

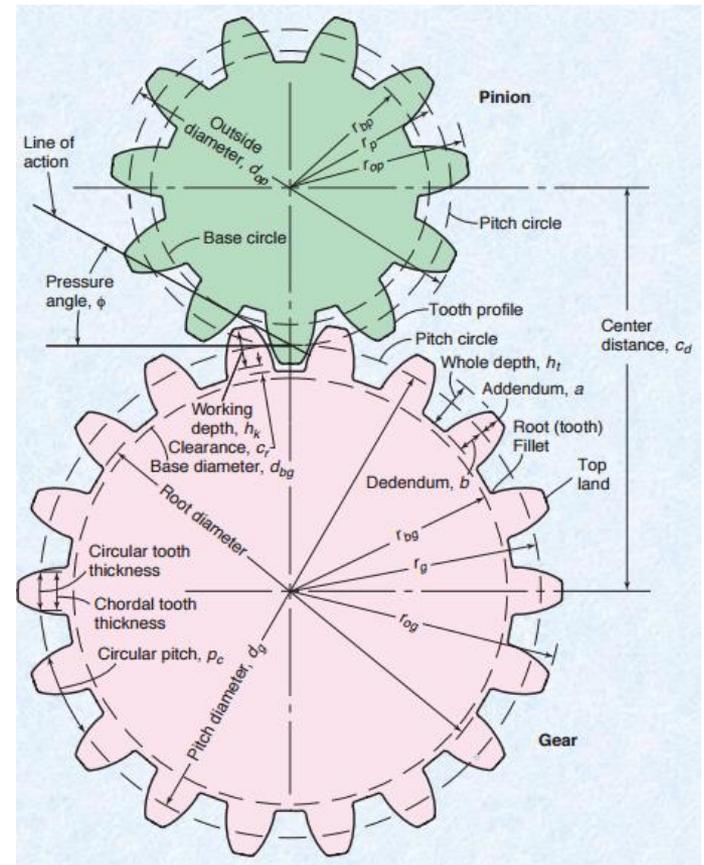
$$P = \frac{N}{d}$$

El paso circular puede ser escrito en términos del paso diametral.

$$p = \frac{\pi d}{N} = \frac{\pi}{P}$$

- Módulo  $m$ . Es el inverso del paso diametral.

$$m = \frac{1}{P} = \frac{d}{N} \rightarrow p = \pi m$$



# VII. Engranajes en general

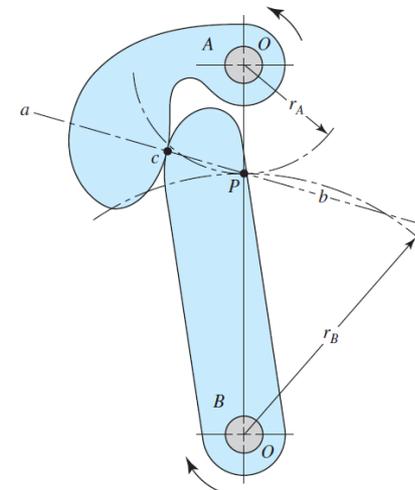
## 3. Fundamentos teóricos

### Acción conjugada

El perfil de los dientes de un engranaje es diseñado de manera tal que produzca una relación constante de velocidad angular durante el acoplamiento. A esto último se le conoce como acción conjugada.

Cuando una superficie curva es presionada contra otra, tal como se observa en la figura, el punto de contacto ocurre cuando las dos superficies son tangentes una con respecto a la otra (punto  $c$ ) y las fuerzas en cualquier instante están dirigidas a lo largo de una normal común  $ab$  a las dos superficies curvas. La línea  $ab$ , representanta la dirección de acción de las fuerzas y es llamada línea de acción o línea de presión.

La línea de acción se intersectará con la línea de los centros  $O-O$  en algún punto  $P$  el cuál también define el punto de tangencia entre los círculos de paso de los dos engranes acoplados y es llamado punto de paso.



# VII. Engranés en general

## 3. Fundamentos teóricos

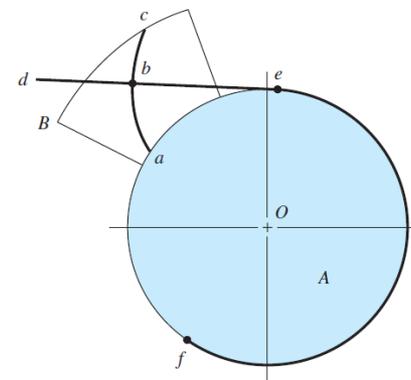
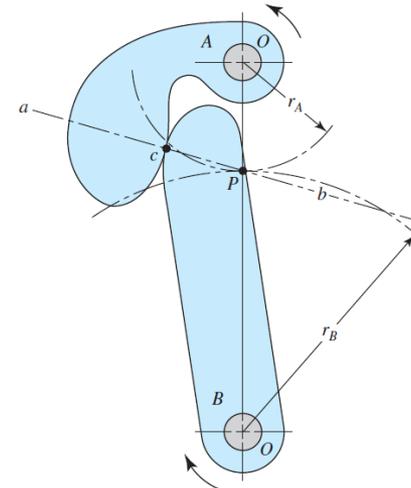
### Acción conjugada

Para transmitir movimiento rotatorio a velocidad angular constante el punto de paso debe permanecer fijo, es decir todas las líneas de acción debe pasar a través del mismo punto  $P$ . En teoría, es posible seleccionar de forma arbitraria cualquier perfil para un diente, y luego determinar un perfil para los dientes de acoplamiento que producirá acción conjugada. Una de estas soluciones es el perfil de involuta (que se usa de manera universal para dientes de engranes).

Con el perfil de involuta todos los puntos de contacto ocurren a través de la misma línea, la cuál es la línea de acción.

### Propiedades de la involuta

El círculo en torno al cual la involuta es generada es llamado círculo base. Una curva involuta puede ser generada empleando una cuerda enrollada en torno al círculo base.



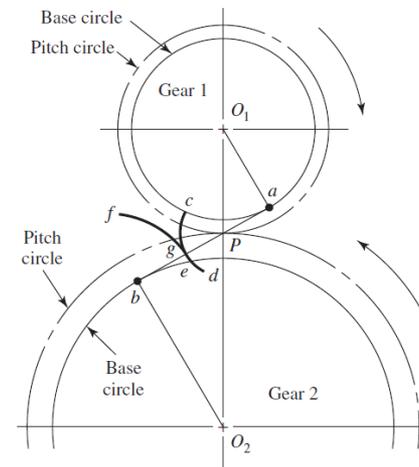
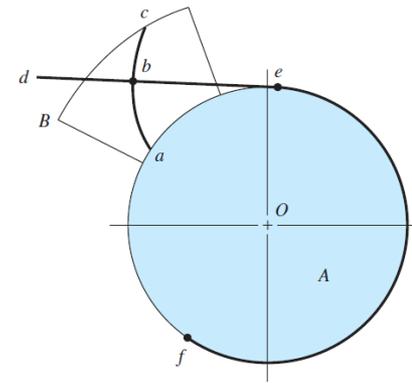
# VII. Engranés en general

## 3. Fundamentos teóricos

### Propiedades de la involuta

Considere una brida parcial  $B$  la cuál esta sujeta al cilindro  $A$ , entorno al cuál está enrollada la cuerda  $def$  que está en tensión. El punto  $b$  en la cuerda trazará la curva de involuta al ser enrollada y desenrollada la cuerda. Aquí la línea generatriz  $de$  es siempre normal a la curva de involuta en todos los puntos de intersección y a su vez es siempre tangente al cilindro  $A$ .

Considere ahora dos engranes con centro fijos  $O_1$  y  $O_2$ , y cuyos radios de círculo base están dados por  $O_1a$  y  $O_2b$  de forma respectiva. Imagine ahora que una cuerda es sujeta en sentido horario alrededor del círculo base de centro  $O_1$  y en sentido antihorario alrededor del círculo base de centro  $O_2$ ; de manera tal de que cuando los engranes giren en sentidos contrarios dicha cuerda se mantenga en tensión. Las involutas entonces son generadas de forma simultánea por el de trazo, el cual representa el punto de contacto, y la cuerda  $ab$  es la línea generatriz. El punto de contacto se mueve a lo largo de la línea generatriz, pero dicha línea no cambia de posición ya que es siempre tangente a los círculos base.



# VII. Engranajes en general

## 3. Fundamentos teóricos

### Dibujo de dientes

Es necesario que sea capaz de dibujar los dientes en un par de engranes que buscan acoplarse. La sección 13-5 de su libro de Diseño Mecánico (Shigley) ilustra lo anterior, favor leerla.

### Relación de contacto

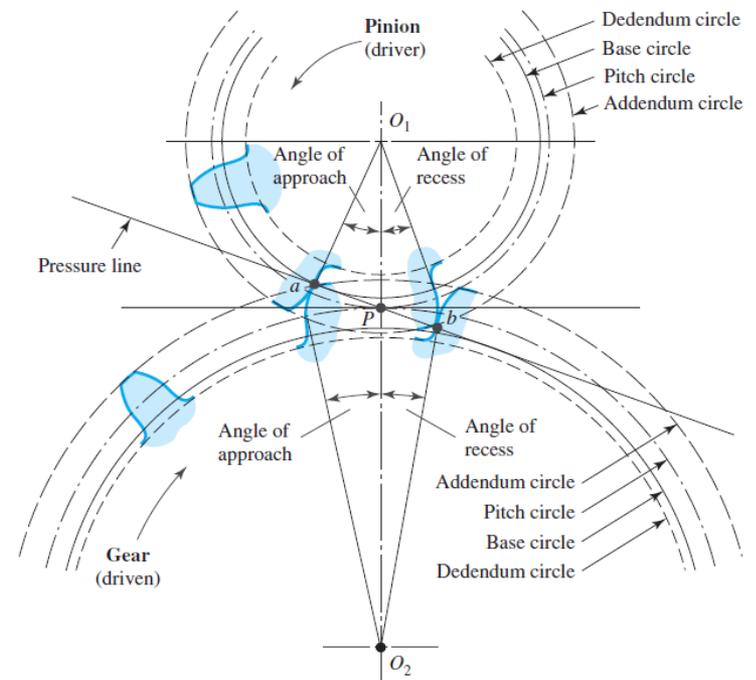
La relación de contacto  $m_c$  define el número promedio de pares de dientes en contacto durante el acoplamiento. Sí  $m_c = 1$  solo existe un par de dientes en contacto. Para reducir la posibilidad de impacto se recomienda que  $m_c \geq 1.2$ .

Ver la sección 13-6 de su libro de Diseño Mecánico (Shigley).

### Interferencia

El contacto de partes de los perfiles de dientes que no están conjugados es llamado interferencia.

Esta situación suele suceder cuando el círculo de la raíz está por debajo del círculo base.



# VII. Engranajes en general

## 3. Fundamentos teóricos

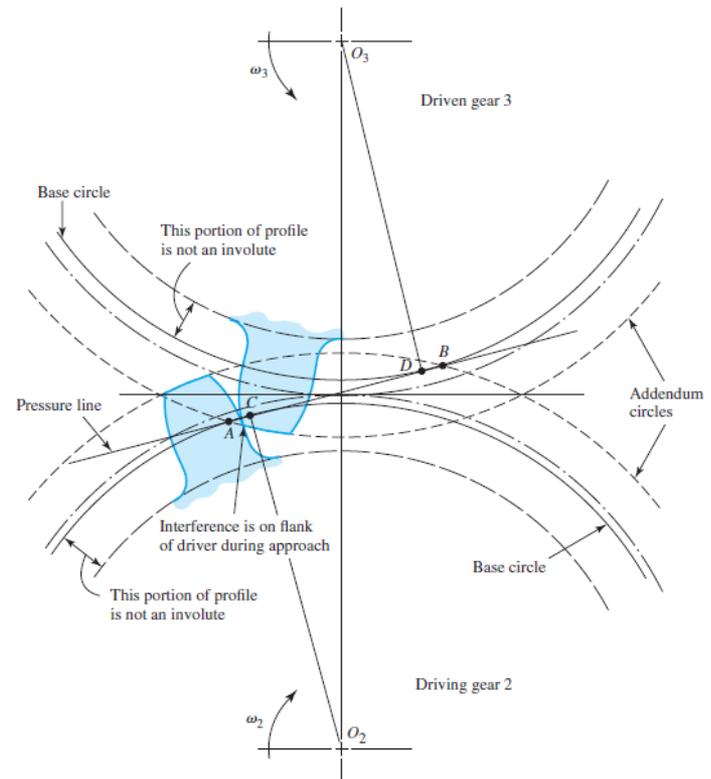
### Interferencia

Los puntos iniciales y finales de contacto son designados como  $A$  y  $B$ , respectivamente, en la segunda figura, y están localizados en la línea de presión (también llamada línea de acción). Observe que aquí los puntos en donde se da tangencia entre los círculos base y la línea de presión ( $C$ ,  $D$ ) difieren de  $A$ ,  $B$ . En este caso el flanco del diente impulsor primero hace contacto con el diente impulsado en el punto  $A$ , lo cual ocurre antes de que la parte de la involuta del diente impulsor entre en acción (tenga presente que la involuta se dibuja a partir del círculo base, y aquella porción por debajo de dicho círculo no forma parte del perfil de involuta).

Para reducir la interferencia se suele utilizar ángulos de presión de  $20^\circ$ ,  $22.5^\circ$ , o  $25^\circ$  (esto hace que el círculo base sea menor).

## 4. Sistemas de dientes

Un sistema de dientes es una norma o estándar que especifica las relaciones entre los parámetros del engrane tal como cresta, raíz, espesor del diente ángulo de presión, entre otros.



# VII. Engranés en general

## 4. Sistemas de dientes

En principio las normas fueron desarrolladas para que existiera la posibilidad de intercambiar engranes con cualquier número de dientes, pero con el mismo ángulo de presión y paso.

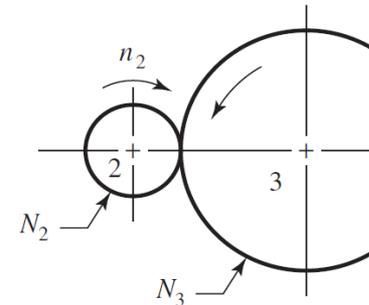
- ✓ La tabla 13-1 del Shigley contiene los estándares más usados para engranes rectos. La tabla 13-2 del Shigley es útil para realizar la selección del paso diametral (sistema inglés) o el módulo (sistema internacional) de un engrane.
- ✓ La tabla 13-3 del Shigley presenta las proporciones estándar de dientes de engranes cónicos rectos (ver nomenclatura en la figura 13-20 del Shigley).
- ✓ La tabla 13-4 del Shigley enuncia las proporciones estándar para los dientes de engranes helicoidales.

En el caso de los engranes de tornillos sin fin, ha de decirse que los mismos no han sido altamente estandarizados. La tabla 13-5 del Shigley, en tanto, resume lo que se considera como buena práctica en lo que respecta a los ángulos de presión y a la profundidad del diente para este tipo de engranes.

## 5. Trenes de engranes

Un tren de engranes consiste de dos o más engranes. En general, pueden haber varios engranes impulsores (entradas) y varios siendo impulsados (salidas). Cualquier engrane que no dé ni tome torque se conoce como engrane libre o loco.

Considere el piñón 2 que impulsa a la rueda 3, tal como se muestra a continuación.



Aquí la velocidad lineal en el punto de contacto es la misma, por lo tanto:

$$V = |\omega_2 r_2| = |\omega_3 r_3|$$

# VII. Engranajes en general

## 5. Trenes de engranes

Recordando que:  $\omega = 2\pi n$ ,  $r = d/2$ ,  $P = N/d$ . Donde  $d$  es el diámetro de paso,  $n$  el número de revoluciones por unidad de tiempo,  $N$  el número de dientes, y  $P$  el paso diametral (que ha de ser el mismo para engranes acoplados); la expresión anterior podría re escribirse como:

$$|n_2 d_2| = |n_3 d_3|$$

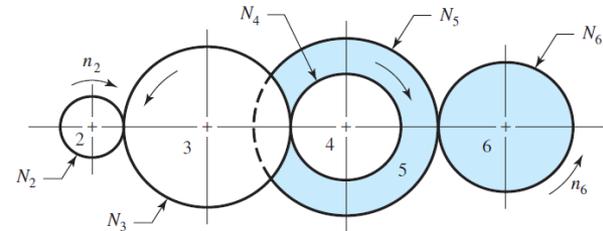
ó

$$|n_2 N_2| = |n_3 N_3|$$

Las expresiones anteriores son válidas para todo tipo de engranes (rectos, cónicos, helicoidales o de tornillo sin fin).

El valor absoluto es para dar libertad a la hora de seleccionar la dirección positiva o negativa. La convección de signos típica es que contra el reloj se toma como + la rotación.

Como ejemplo considere el siguiente tren de engranes.



$$n_6 = -\frac{N_2 N_3 N_5}{N_3 N_4 N_6} n_2$$

Observe aquí que los engranes 2, 3, 5 son impulsores y los engranes 3, 4, y 6 son impulsados.

Sí definimos el valor del tren  $e$  como la razón del producto de dientes impulsores a dientes impulsados, la expresión anterior podría re escribirse como:

$$n_6 = e n_2$$

Donde el signo de  $e$  es positivo cuando el último engrane ( $n_L$ ) gire en la misma dirección que el primer engrane  $n_F$ ; y negativo de lo contrario.

# VII. Engranajes en general

## 5. Trenes de engranes

$$n_L = en_F$$

$$e = \frac{\text{producto de dientes impulsores}}{\text{producto de dientes impulsados}}$$

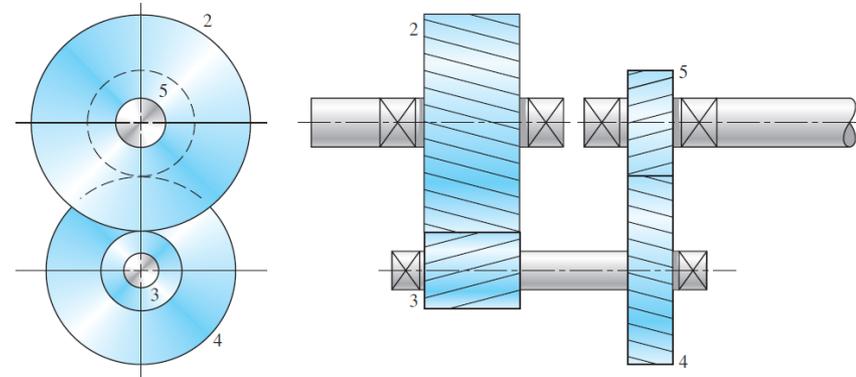
Ha de decirse, que en ocasiones es deseable que el eje de entrada y el de salida de un tren de engranes compuesto de dos etapas estén en línea, tal como se observa en la siguiente figura. A esta configuración se le denomina tren de engranes compuesto inverso, y requiere que las distancias entre los ejes sean las mismas para ambas etapas, lo que implica que exista la siguiente limitante:

$$\frac{d_2}{2} + \frac{d_3}{2} = \frac{d_4}{2} + \frac{d_5}{2}$$

Lo cual, asumiendo que exista un paso diametral constante  $P$  entre las dos etapas, podría re escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{N_2}{2P} + \frac{N_3}{2P} = \frac{N_4}{2P} + \frac{N_5}{2P}$$

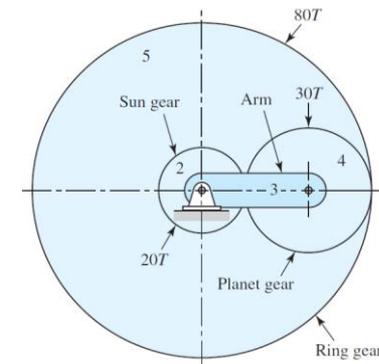
$$N_2 + N_3 = N_4 + N_5$$



### Trenes de engranes planetarios o epicíclicos

Los trenes planetarios incluyen: un engrane sol, un portador planetario o brazo, y uno o más engranes planetarios.

Los trenes planetarios tienen dos o más grados de libertad.

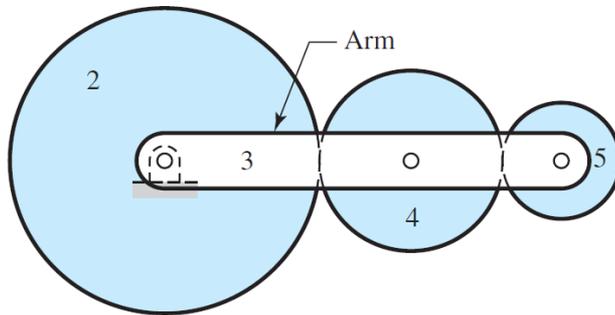


# VII. Engranajes en general

## 5. Trenes de engranes

### Trenes de engranes planetarios o epicíclicos

La figura mostrada a continuación muestra un tren planetario compuesto de un engrane sol 2, un brazo 3, y dos engranes planetarios 4 y 5.



La velocidad angular del engrane 2 relativa al brazo 3 está dada por:

$$n_{23} = n_2 - n_3$$

Similarmente la velocidad angular del engrane 5 relativa al brazo 3 está dada por:

$$n_{53} = n_5 - n_3$$

Dividendo las expresiones anteriores obtenemos la razón de la velocidad relativa del engrane 5 al 2 con respecto al brazo 3:

$$\frac{n_{53}}{n_{23}} = \frac{n_5 - n_3}{n_2 - n_3}$$

Esta razón es proporcional al número de dientes ya sea que el brazo este o no rotando y representa el valor del tren  $e$ :

$$e = \frac{n_L - n_A}{n_F - n_A}$$

Donde:  $n_L$  es la velocidad angular en rev/min del último engrane,  $n_A$  es la velocidad angular en rev/min del brazo, y  $n_F$  es la velocidad angular en rev/min del primer engrane.

# VII. Engranés en general

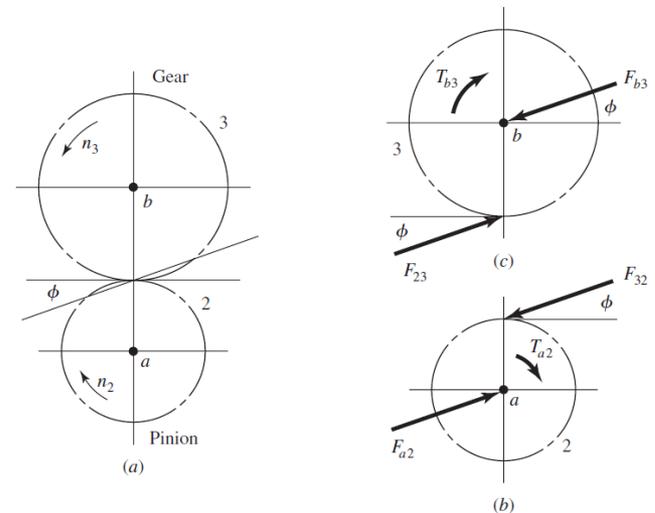
## 6. Terminología

### Engranés rectos

Antes de iniciar el análisis de trenes de engranes, se debe mencionar la notación a emplear:

- ✓ El número 1 corresponde al marco de la máquina.
- ✓ El número 2 al primer engrane de entrada o impulsor. El resto de los engranes son numerados sucesivamente 3, 4, etc.
- ✓ Los ejes son designados utilizando letras minúsculas:  $a, b, c$ , etc.
- ✓ La fuerza que ejerce el engrane 2 sobre el 3 es denotada como  $F_{23}$  por ejemplo.
- ✓ Similarmente, la fuerza que ejerce el engrane 2 sobre el eje  $a$  es denotada como  $F_{2a}$ .
- ✓ Los superíndices indican la dirección, y las direcciones son indicadas usando las coordenadas  $x, y, z$  para los ejes, y  $r$  y  $t$  para las reacciones radiales y tangenciales de los dientes, respectivamente. Por ejemplo  $F_{43}^t$  es la componente tangencial de la fuerza ejercida por el engrane 4 sobre el engrane 3.

Considere ahora un engrane 2 montado sobre un eje  $a$  el cuál rota a una velocidad  $n_2$  y que impulsa al engrane 3 el cual está montado sobre un eje  $b$  y que consecuentemente girará a una velocidad  $n_3$ . Aquí las reacciones entre los dientes acoplados ocurren a lo largo de la línea de presión. En la figura (b) el piñón ha sido separado del engrane y de eje y sus efectos ha sido remplazado por fuerzas y torques.



# VII. Engranés en general

## 6. Terminología

### Engranés cónicos

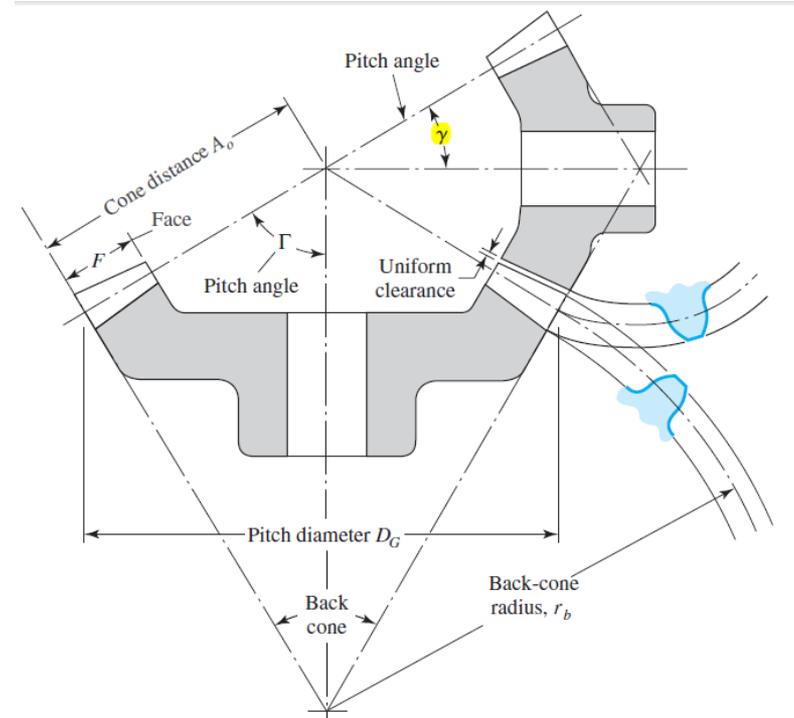
Los engranes cónicos son usados para transmitir movimiento entre eje que se interceptan. Los ejes usualmente presentan un ángulo de  $90^\circ$  entre ellos pero otros ángulos también son posibles.

La figura mostrada a continuación ilustra la terminología en el engranes cónicos.

De la imagen anterior se pueden hacer algunas observaciones:

- ✓ El diámetro de paso  $D_G$  es medido en el extremo mayor del diente.
- ✓ Aquí el paso circular  $p$  y el diámetro de paso se calculan igual de la misma manera que en los engranes rectos.
- ✓ Los ángulos de paso son definidos tal como se observa en la figura y esta relacionados al número de dientes de la siguiente forma:

$$\text{Piñon} \rightarrow \tan \gamma = \frac{N_{\text{piñon}}}{N_{\text{rueda}}}$$



$$\text{Rueda} \rightarrow \tan \Gamma = \frac{N_{\text{rueda}}}{N_{\text{piñon}}}$$

Aquí  $N$  representa el número de dientes.

Los engranes cónicos de dientes rectos estándares se cortan de manera tal que se garantice un ángulo de presión de  $20^\circ$ .

# VII. Engranés en general

## 6. Terminología

### Engranés helicoidales paralelos

Los engranes helicoidales son usados principalmente para transmitir movimiento entre ejes paralelos (aunque también pudiesen ser usados para ejes que se interceptan).

En el caso de los engranes helicoidales es importante hacer algunas observaciones:

- ✓ Ambos engranes deben tener el mismo ángulo de hélice, pero uno debe ser estar orientado a la derecha y el otro a la izquierda.
- ✓ La forma del diente es una involuta helicoidal. Esta puede ser producida al cortar una pieza de papel con la forma de un paralelogramo y al enrollarla entorno a un cilindro base (ver figura 13-21 del Shigley).
- ✓ El contacto inicial entre dientes comienza como un punto y después se extiende a una línea diagonal que se extiende a través de la cara del diente a medida que se desarrolla el acople.
- ✓ Producto del acople gradual de los dientes, los engranes helicoidales pueden transmitir cargas pesadas a altas velocidades.

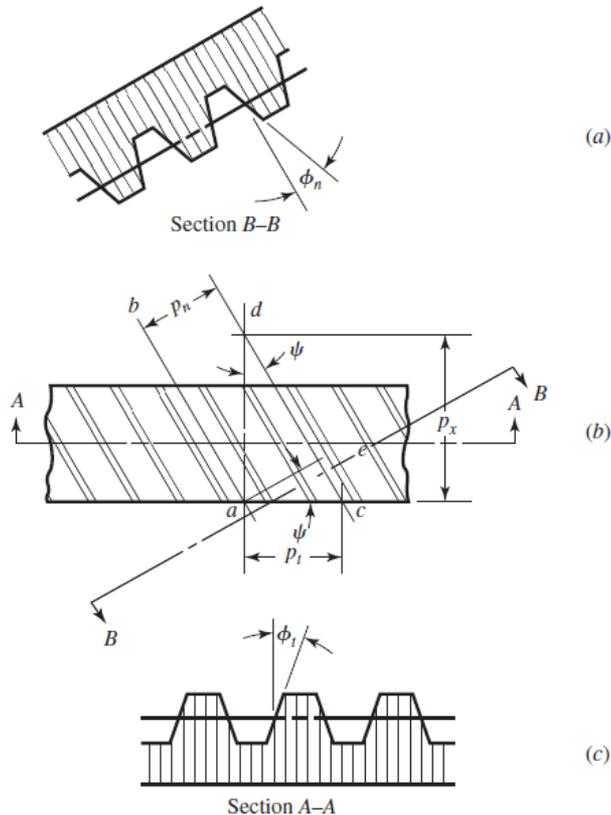
- ✓ Los engranes helicoidales producen tanto cargas radiales como de empuje en el eje.
- ✓ Cuando se tienen engranes helicoidales montados lado a lado en el mismo eje, pero cuyas hélices tienen sentidos opuestos, estos desarrollarán cargas de empuje opuestas que se cancelarán.

La figura mostrada a continuación muestra la nomenclatura a emplear en engranes helicoidales. Esta es una vista de planta de una cremallera helicoidal. Las líneas  $ab$  y  $cd$  representan las líneas centrales de dos dientes helicoidales adyacentes, tomadas en el mismo plano de paso. El ángulo  $\psi$  es el ángulo de la hélice y la distancia  $ac$  representa el paso circular transversal  $p_t$  en el plano de rotación (usualmente llamado simplemente paso circular). La distancia  $ae$  en tanto se denomina como paso circular normal  $p_n$ .

# VII. Engranés en general

## 6. Terminología

### Engranés helicoidales paralelos



$$p_n = p_t \cos \psi$$

Y la distancia  $ad$  es conocida como paso axial  $p_x$  y está dada por:

$$p_x = \frac{p_t}{\tan \psi}$$

Con respecto a los ángulos de presión normal y transversal,  $\phi_n$  y  $\phi_t$  los mismos están relacionados con el ángulo de la hélice por medio de la siguiente expresión:

$$\cos \psi = \frac{\tan \phi_n}{\tan \phi_t}$$

De la trigonometría se puede ver que  $p_n$  esta dado por:

$$\cos \psi = \frac{ae}{ac} \rightarrow ae = ac \cos \psi$$

# VII. Engranés en general

## 6. Terminología

### Engranés de tornillo sin fin

Algunas observaciones importantes con respecto a la terminología de los tornillos sin fin se listan a continuación:

- ✓ El tornillo sin fin y el engrane o corona que se acopla a este tienen el mismo sentido de la hélice, pero con ángulos que suelen ser diferentes.
- ✓ El ángulo de hélice del sin fin,  $\psi_W$ , es grande y usualmente se especifica el ángulo de avance  $\lambda$ . Ver la siguiente figura.
- ✓ El ángulo de avance del sin fin es igual al ángulo de la hélice de la corona  $\psi_G$  para ejes que se interceptan a  $90^\circ$ .
- ✓ Típicamente, el paso axial del sin fin  $p_x$  y el paso transversal circular de la corona  $p_t$  son especificados. Y el paso transversal de la corona se relaciona con el diámetro de paso de esta  $d_G$  y con el número de dientes  $N_G$  a partir de la siguiente expresión:

$$\pi d_G = N_G p_t$$

- ✓ El avance y el paso axial del sin fin están relacionados por medio de la siguiente expresión:

$$L = p_x N_W$$

- ✓ Y el ángulo de avance y el avance está relacionados por:

$$\tan \lambda = \frac{L}{\pi d_W}$$

