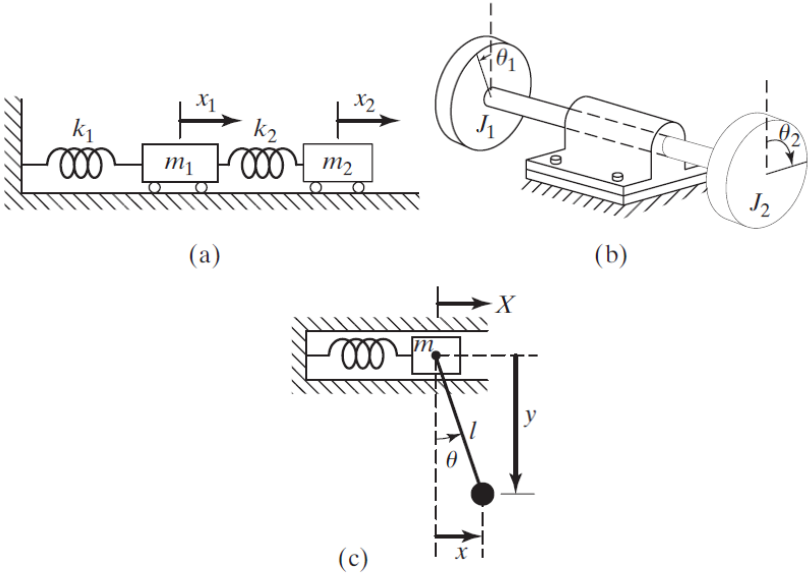
VI. Sistemas de dos grados de libertad

Objetivos:

1. Describir que es un sistema de dos grados de libertad.
2. Deducir las ecuaciones diferenciales de movimiento para un sistema de dos grados de libertad masa-resorte-amortiguador, con amortiguamiento viscoso y excitación externa.
3. Discutir el análisis de vibración libre para un sistema de dos grados de libertad no amortiguado.
4. Mencionar los diferentes tipos de acoplamiento que pueden darse entre las ecuaciones diferenciales de movimiento de un sistema de dos grados de libertad masa-resorte- amortiguador, con amortiguamiento viscoso y excitación externa.
5. Comprender que son las coordenadas principales.
6. Discutir brevemente el método de transformada de Laplace para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales de movimiento de un sistema de dos grados de libertad masa-resorte-amortiguador, con amortiguamiento viscoso y excitación externa general.



1. Introducción

Los sistemas que requieren dos coordenadas independientes para describir su movimiento son llamados sistemas de dos grados de libertad. En la figura mostrada a continuación se muestran algunos ejemplos de estos sistemas.

Una regla general para determinar el número de grados de libertad, es la siguiente:

$$\text{Números de grados de libertad de un sistema} = \text{Número de masas en el sistema} \times \text{Número de posibles tipos de movimiento de cada masa}$$

VI. Sistemas de dos grados de libertad

1. Introducción

Se tendrán dos ecuaciones de movimiento para un sistema de dos grados de libertad, una por cada masa (más precisamente, una por cada grado de libertad). Dichas ecuaciones diferenciales generalmente están acopladas (cada ecuación involucra todas las coordenadas). Sí una solución harmónica es supuesta para cada coordenada, la ecuación de movimiento lleva a una ecuación que permite determinar dos frecuencias naturales para el sistema. Aquí si consideramos condiciones iniciales apropiadas, el sistema vibrará a alguna de estas frecuencias naturales. Durante la vibración libre a alguna de estas frecuencias naturales, las amplitudes del sistema de dos grados de libertad están relacionadas de una manera específica y la configuración es llamada *modo normal, modo principal, o modo natural de vibración*. Un sistema de dos grados de libertad tiene dos modos normales de vibración que corresponden a las dos frecuencias naturales.

Si por el contrario se considera una excitación inicial arbitraria (condiciones iniciales arbitrarias), la vibración libre resultante será una superposición de los dos modos normales de vibración. En tanto, sí el sistema vibra bajo la acción de una fuerza harmónica externa, la vibración harmónica resultante se da a la frecuencia de la fuerza aplicada. Bajo movimiento harmónico, ocurre resonancia (las amplitudes alcanzarán un máximo) cuando la frecuencia de excitación sea igual a alguna de las frecuencias naturales del sistema.

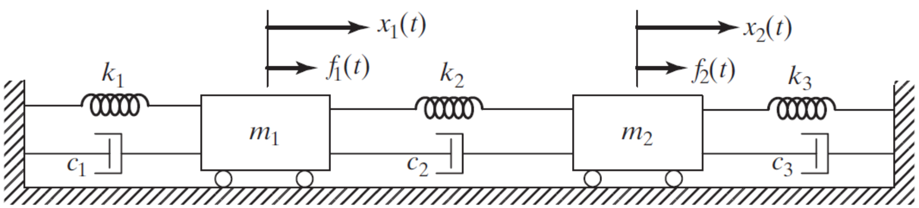
VI. Sistemas de dos grados de libertad

1. Introducción

Ha de decirse que a pesar que las ecuaciones de un sistema de dos grados de libertad están generalmente acopladas, es siempre posible determinar algún conjunto particular de coordenadas de manera tal que las ecuaciones de movimiento no estén acopladas y puedan ser resueltas de forma independiente. A este conjunto de coordenadas se les llama coordenadas principales.

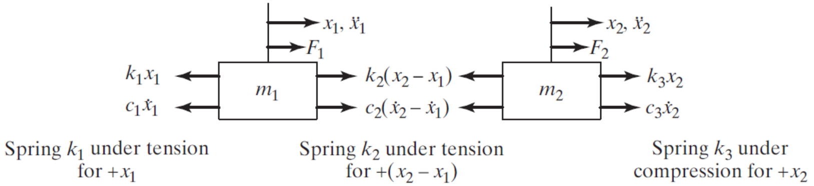
2. Ecuaciones de movimiento para vibración forzada

Considere un sistema masa-resorte-amortiguador de dos grados de libertad, en donde el amortiguamiento es viscoso.



Aquí el movimiento del sistema está completamente descrito por las coordenadas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, las cuales definen la posición de las masas m_1 y m_2 en cualquier tiempo t desde sus respectivas posiciones de equilibrio.

Las fuerzas externas $F_1(t)$ y $F_2(t)$ actúan en las masa m_1 y m_2, respectivamente. El diagrama de cuerpo libre de las masas m_1 y m_2 se muestra a continuación.



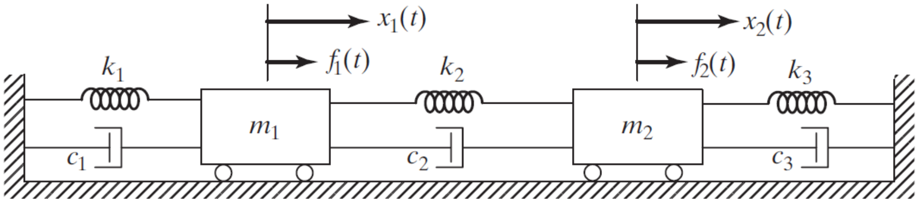
Aplicando la segunda ley de Newton para cada masa da las ecuaciones diferenciales de movimiento:

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = F_2$$

VI. Sistemas de dos grados de libertad

2. Ecuaciones de movimiento para vibración forzada



Las ecuaciones anteriores también pueden ser obtenidas a partir de la ecuación de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial v_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \dot{v}_i} = Q_{i,otro}, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$$L = T - V$$

$$T = \frac{1}{2}m_1{\dot{x}_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{\dot{x}_2}^2$$

$$V = \frac{1}{2}k_1{x_1}^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3{x_2}^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1{\dot{x}_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{\dot{x}_2}^2 - \left(\frac{1}{2}k_1{x_1}^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3{x_2}^2\right)$$

$$P = c_1{\dot{x}_1}^2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + c_3{\dot{x}_2}^2$$

$$v_1 = x_1, v_2 = x_2, Q_{1,otro} = F_1, Q_{2,otro} = F_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \dot{x}_1} = Q_{1,otro}$$

$$m_1\ddot{x}_1 - \{-[k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1)]\} + \frac{1}{2}\{(2c_1\dot{x}_1) - 2c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\} = F_1$$

$$\boxed{m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \dot{x}_2} = Q_{2,otro}$$

$$m_2\ddot{x}_2 - \{-[k_2(x_2 - x_1) + k_3x_2]\} + \frac{1}{2}\{2c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + 2c_3\dot{x}_2\} = F_2$$

$$\boxed{m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = F_2}$$

En todo caso, las ecuaciones de este sistema de dos grado de libertad están acopladas. Lo anterior implica que el movimiento de la masa m_1 influenciará el movimiento de la masa m_2, y viceversa.

VI. Sistemas de dos grados de libertad

2. Ecuaciones de movimiento para vibración forzada

Las expresiones anteriores pueden ser escritas de forma matricial de la siguiente manera:

$$\boxed{[m]\,\ddot{\vec{x}}(t) + [c]\,\dot{\vec{x}}(t) + [k]\,\vec{x}(t) = \vec{f}(t)}$$

Donde $[m], [c], [k]$ son llamadas las matrices de masa, amortiguamiento, y rigidez, de forma respectiva. Y para la situación estudiada están dadas por:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

Y $\vec{x}(t)$ es llamado el vector desplazamiento, en tanto que $\vec{f}(t)$ es llamado el vector fuerza:

$$\vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\vec{f}(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix}$$

Se puede ver de lo anterior que las matrices de masa, amortiguamiento, y rigidez son todas matrices 2×2 simétricas, es decir las traspuestas de las matrices son iguales a dichas matrices.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Observe también que las ecuaciones diferenciales se desacoplarían solo cuando $c_2 = k_2 = 0$, lo que implica que las dos masas no estarían conectadas. En este caso las matrices de masa, amortiguamiento, y rigidez sería diagonales.

La soluciones a las ecuaciones de movimiento para las fuerzas arbitrarias $F_1(t)$ y $F_2(t)$ son difíciles de obtener, principalmente producto del acoplamiento de las variables $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en las ecuaciones.

VI. Sistemas de dos grados de libertad

2. Ecuaciones de movimiento para vibración forzada

Adicionalmente estas ecuaciones involucran cuatro constantes de integración (cuatro condiciones iniciales, dos por cada ecuación). Usualmente lo que se específica es el desplazamiento y velocidad inicial de las dos masas.

3. Análisis de vibración libre de un sistema de dos grados de libertad no amortiguado

Considere que en el sistema mostrado previamente $F_1(t) = F_2(t) = c_1 = c_2 = c_3 = 0$; es decir que se tiene un sistema masa-resorte no amortiguado en vibración libre. Bajo estas consideraciones las ecuaciones diferenciales de movimiento se reducen a:

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0$$

Aquí estamos interesados en saber si m_1 y m_2 pueden oscilar harmónicamente con la misma frecuencia y ángulo de fase pero con diferentes amplitudes.

Asumiendo que lo anterior es posible, supondremos las siguientes soluciones:

$$x_1(t) = X_1\cos(\omega t + \phi)$$

$$x_2(t) = X_2\cos(\omega t + \phi)$$

Donde X_1 y X_2 representan las máximas amplitudes de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ y ϕ es el ángulo de fase. Remplazando lo anterior en las ecuaciones diferenciales se obtendría:

$$\{[(-m_1\omega^2) + (k_1 + k_2)]X_1 - k_2X_2\}\cos(\omega t + \phi) = 0$$

$$\{-k_2X_1 + [(-m_2\omega^2) + (k_2 + k_3)]X_2\}\cos(\omega t + \phi) = 0$$

En vista de que las expresiones anteriores deben ser satisfechas para cualquier tiempo arbitrario, para cumplir con las igualdades los términos entre corchetes deben ser iguales a cero:

$$\{[(-m_1\omega^2) + (k_1 + k_2)]X_1 - k_2X_2\} = 0$$

$$\{-k_2X_1 + [(-m_2\omega^2) + (k_2 + k_3)]X_2\} = 0$$

Lo cual representa un sistema de dos ecuaciones algebraicas que han de ser resueltas de forma simultanea para determinar a X_1 y a X_2.

VI. Sistemas de dos grados de libertad

3. Análisis de vibración libre de un sistema de dos grados de libertad no amortiguado

Para la solución no trivial ($X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$), el determinante de los coeficientes X_1 y X_2 debe ser igual a cero:

$$\det\begin{bmatrix}(-m_1\omega^2)+(k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (-m_2\omega^2)+(k_2+k_3)\end{bmatrix} = 0$$

$$(m_1 m_2)\omega^4 - [m_2(k_1+k_2)+m_1(k_2+k_3)]\omega^2 + \left[(k_1+k_2)(k_2+k_3)-{k_2}^2\right] = 0$$

La expresión anterior es llamada la ecuación característica o de frecuencia porque su solución da las frecuencias o valores característicos del sistema. Tras ser resuelta la expresión anterior, da las siguientes raíces:

$${\omega_1}^2, {\omega_2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$a = m_1 m_2, b = -[m_2(k_1+k_2)+m_1(k_2+k_3)],$$

$$c = \left[(k_1+k_2)(k_2+k_3)-{k_2}^2\right]$$

La solución de la ecuación característica demuestra que es posible que el sistema no tenga soluciones triviales cuando ω es igual a ω_1 o a ω_2.

Aquí ω_1 y ω_2 representan las frecuencias naturales del sistema. Los valores de X_1 y de X_2 deben ser determinados. Estos valores dependen de las frecuencias naturales. Denotaremos los valores de X_1 y de X_2 correspondientes a la frecuencia natural ω_1 como ${X_1}^{(1)}$ y ${X_2}^{(1)}$ y los valores correspondientes a ω_2 como ${X_1}^{(2)}$ y ${X_2}^{(2)}$.

De igual forma, se definen las razones $r_1 = \left\{{X_2}^{(1)}/{X_1}^{(1)}\right\}$, y $r_2 = \left\{{X_2}^{(2)}/{X_1}^{(2)}\right\}$:

$$r_1 = \frac{{X_2}^{(1)}}{{X_1}^{(1)}} = \frac{(-m_1{\omega_1}^2)+(k_1+k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{(-m_2{\omega_1}^2)+(k_2+k_3)}$$

$$r_2 = \frac{{X_2}^{(2)}}{{X_1}^{(2)}} = \frac{(-m_1{\omega_2}^2)+(k_1+k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{(-m_2{\omega_2}^2)+(k_2+k_3)}$$

VI. Sistemas de dos grados de libertad

3. Análisis de vibración libre de un sistema de dos grados de libertad no amortiguado

Los modos normales de vibración correspondientes a las frecuencias naturales, pueden ser expresados como:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1{}^{(1)} \\ X_2{}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1{}^{(1)} \\ r_1 X_1{}^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1{}^{(2)} \\ X_2{}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_2{}^{(1)} \\ r_2 X_1{}^{(1)} \end{Bmatrix}$$

Los vectores $\vec{X}^{(1)}$ y $\vec{X}^{(2)}$ que denotan los modos normales de vibración, son conocidos como los *vectores modales del sistema*. La solución del problema de vibración libre puede ser expresada como:

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1{}^{(1)}(t) \\ x_2{}^{(1)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1{}^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ r_1 X_1{}^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{Bmatrix} = \text{Primer modo}$$

$$\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1{}^{(2)}(t) \\ x_2{}^{(2)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1{}^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ r_2 X_1{}^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix} = \text{Segundo modo}$$

Donde: $X_1{}^{(1)}$, $X_1{}^{(2)}, \phi_1, \phi_2$ son constantes que dependen de las condiciones iniciales.

<u>Condiciones iniciales</u>

Para condiciones iniciales arbitrarias, ambos modos serán excitados; y el movimiento resultante, el cuál es la solución general de las ecuaciones diferenciales de movimiento acopladas, puede ser obtenido por la superposición lineal de los dos modos:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}^{(1)}(t) + \vec{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1{}^{(1)}(t) + x_1{}^{(2)}(t) \\ x_2{}^{(1)}(t) + x_2{}^{(2)}(t) \end{Bmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} X_1{}^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + X_1{}^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ r_1 X_1{}^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + r_2 X_1{}^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix}$$

Donde las constantes $X_1{}^{(1)}$, $X_1{}^{(2)}, \phi_1, \phi_2$ son determinadas a partir de las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(t=0) = x_1(0), \qquad \dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_1(0)$$

$$x_2(t=0) = x_2(0), \qquad \dot{x}_2(t=0) = \dot{x}_2(0)$$

VI. Sistemas de dos grados de libertad

3. Análisis de vibración libre de un sistema de dos grados de libertad no amortiguado

<u>Condiciones iniciales</u>

Sustituyendo en las expresiones previamente listadas:

$$x_1(0) = X_1{}^{(1)} \cos\phi_1 + X_1{}^{(2)} \cos\phi_2$$

$$\dot{x}_1(0) = -\omega_1 X_1{}^{(1)} \operatorname{sen}\phi_1 - \omega_2 X_1{}^{(2)} \operatorname{sen}\phi_2$$

$$x_2(0) = r_1 X_1{}^{(1)} \cos\phi_1 + r_2 X_1{}^{(2)} \cos\phi_2$$

$$\dot{x}_2(0) = -r_1\omega_1 X_1{}^{(1)} \operatorname{sen}\phi_1 - r_2\omega_2 X_1{}^{(2)} \operatorname{sen}\phi_2$$

Las expresiones anteriores podrían re escribirse como:

$$X_1{}^{(1)} \cos\phi_1 = \left\{\frac{r_2 x_1(0) - x_2(0)}{r_2 - r_1}\right\}$$

$$X_1{}^{(2)} \cos\phi_2 = \left\{\frac{-r_1 x_1(0) + x_2(0)}{r_2 - r_1}\right\}$$

$$X_1{}^{(1)} \operatorname{sen}\phi_1 = \left\{\frac{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1(r_2 - r_1)}\right\}$$

$$X_1{}^{(2)} \operatorname{sen}\phi_2 = \left\{\frac{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2(r_2 - r_1)}\right\}$$

De lo cual se obtiene que:

$$X_1{}^{(1)} = \sqrt{\left(X_1{}^{(1)} \cos\phi_1\right)^2 + \left(X_1{}^{(1)} \operatorname{sen}\phi_1\right)^2}$$

$$X_1{}^{(1)} = \sqrt{\left(\frac{r_2 x_1(0) - x_2(0)}{r_2 - r_1}\right)^2 + \left(\frac{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1(r_2 - r_1)}\right)^2}$$

$$\boxed{X_1{}^{(1)} = \left(\frac{1}{r_2 - r_1}\right)\sqrt{\left(r_2 x_1(0) - x_2(0)\right)^2 + \left(\frac{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1}\right)^2}}$$

$$X_1{}^{(2)} = \sqrt{\left(X_1{}^{(2)} \cos\phi_2\right)^2 + \left(X_1{}^{(2)} \operatorname{sen}\phi_2\right)^2}$$

$$\boxed{X_1{}^{(2)} = \left(\frac{1}{r_2 - r_1}\right)\sqrt{\left(-r_1 x_1(0) + x_2(0)\right)^2 + \left(\frac{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2}\right)^2}}$$

VI. Sistemas de dos grados de libertad

3. Análisis de vibración libre de un sistema de dos grados de libertad no amortiguado

<u>Condiciones iniciales</u>

$$\tan\phi_1 = \left\{\frac{-r_2\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1[r_2x_1(0) - x_2(0)]}\right\} \rightarrow$$
$$\phi_1 = \tan^{-1}\left\{\frac{-r_2\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1[r_2x_1(0) - x_2(0)]}\right\}$$

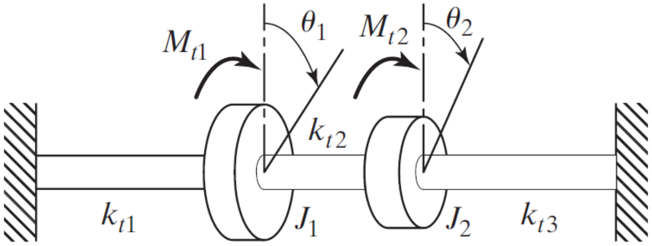
$$\tan\phi_2 = \left\{\frac{r_1\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2[-r_1x_1(0) + x_2(0)]}\right\} \rightarrow$$
$$\phi_2 = \tan^{-1}\left\{\frac{r_1\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_2[-r_1x_1(0) + x_2(0)]}\right\}$$

De lo anterior también se hace evidente, que el sistema puede hacerse vibrar a alguno de sus modos normales $(i = 1,2)$ al estar sujeto a las siguientes condiciones iniciales específicas:

$$x_1(t=0) = X_1^{(i)} = Constante, \qquad \dot{x}_1(t=0) = 0$$
$$x_2(t=0) = r_iX_1^{(i)}, \qquad \dot{x}_2(t=0) = 0$$

4. Análisis de vibración libre de un sistema torsional de dos grados de libertad no amortiguado

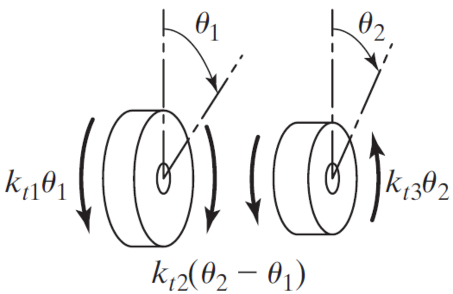
Considere un sistema torsional consistente de dos discos montados en un eje, tal como se observa en la siguiente figura. Los tres segmentos del eje tienen contantes elásticas rotacionales k_{t1}, k_{t2}, k_{t3}, tal como se indica en la figura. Aquí también se muestran los momentos de inercia J_1 y J_2, los torques aplicados M_{t1} y M_{t2}, y las coordenadas generalizadas θ_1 y θ_2.



VI. Sistemas de dos grados de libertad

4. Análisis de vibración libre de un sistema torsional de dos grados de libertad no amortiguado

Y el diagrama de cuerpo libre correspondiente se muestra a continuación:



Empleando la segunda ley de Newton se derivan entonces las ecuaciones diferenciales de movimiento:

$$J_1\ddot{\theta}_1 = -k_{t1}\theta_1 + k_{t2}(\theta_2 - \theta_1) + M_{t1}$$

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 = M_{t1}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 = -k_{t2}(\theta_2 - \theta_1) - k_{t3}\theta_2 + M_{t2}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 - k_{t2}\theta_1 + (k_{t2} + k_{t3})\theta_2 = M_{t2}$$

De tratarse de vibración libre las ecuaciones diferenciales podría ser re escritas como:

$$\boxed{\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 &= 0 \\ J_2\ddot{\theta}_2 - k_{t2}\theta_1 + (k_{t2} + k_{t3})\theta_2 &= 0 \end{aligned}}$$

Las cuáles son análogas a las ecuaciones de movimiento del sistema en traslación de dos grados de libertad considerado en la sección anterior. Esto último implica que se podría realizar un análisis similar para determinar la respuesta del sistema ante condiciones iniciales específicas.

5. Acoplamiento de coordenadas y coordenadas principales

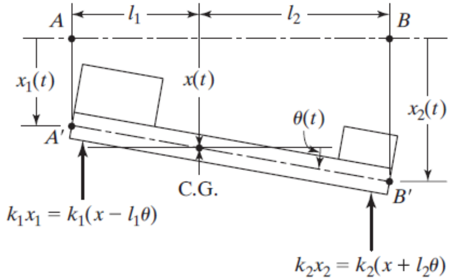
Como se ha mencionado previamente, un sistema de n grados de libertad, requiere de n coordenadas independientes para describir su configuración.

VI. Sistemas de dos grados de libertad

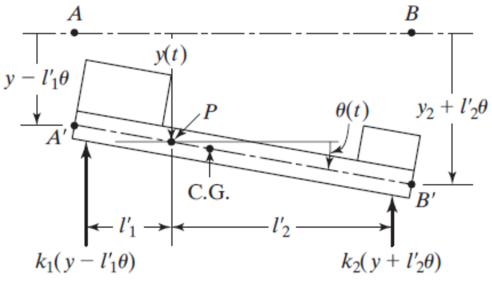
5. Acoplamiento de coordenadas y coordenadas principales

Usualmente, estas coordenadas son cantidades geométricas independientes medidas desde la posición de equilibrio para el cuerpo vibrante. Sin embargo, es posible seleccionar algún otro conjunto de n coordenadas para describir la configuración del sistema, y cada conjunto de n coordenadas constituye un conjunto de coordenadas generalizadas.

Como se observa en las siguientes figuras, cualquiera de estos conjuntos de coordenadas puede ser usado para describir el movimiento de este sistema de dos grados de libertad.



(a)



(b)

Consecuentemente, cualquiera de estos conjuntos: $(x_1, x_2), (x, \theta), (x_1, \theta)$, y (y, θ); representan las coordenadas generalizadas del sistema.

VI. Sistemas de dos grados de libertad

5. Acoplamiento de coordenadas y coordenadas principales

Ahora bien, para discutir el acoplamiento de las ecuaciones diferenciales de movimiento en los sistemas de dos grados de libertad, considere el caso más general, de un sistema de dos grados de libertad con amortiguamiento viscoso sujeto a vibración libre:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = 0$$

Donde: $m_{12} = m_{21}, c_{12} = c_{21}, k_{12} = k_{21}$.

Se dice entonces que:

- ✓ Sí la matriz de rigidez no es diagonal, el sistema presenta acoplamiento elástico o estático.
- ✓ Sí la matriz de amortiguamiento no es diagonal, se dice que el sistema tiene acoplamiento de amortiguamiento o de velocidad.
- ✓ Sí la matriz de masa no es diagonal, el sistema tiene acoplamiento de masa o inercial.

Ha de decirse de igual forma, que el sistema en vibración libre siempre vibrará de forma natural con independencia de las coordenadas generalizadas seleccionadas.

También ha de comentarse que el acoplamiento depende de las coordenadas generalizadas empleadas y este no es una propiedad inherente del sistema. Por lo tanto siempre pudiese seleccionarse algún conjunto de coordenadas en donde no exista acoplamiento estático ni dinámico (de masa y/o de amortiguamiento). A tales coordenadas se les conoce como coordenadas principales o naturales. *Vea el ejemplo 5.6 de su libro de texto.*

VI. Sistemas de dos grados de libertad

6. Análisis de vibración forzada general, soluciones por medio del uso de la transformada de Laplace.

Considere el conjunto de ecuaciones diferenciales del sistema, masa-resorte-amortiguador sujeto a vibración forzada, mencionado en la sección 2.

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1(t)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = F_2(t)$$

Al tomar la transformada de Laplace a ambos lados en ambas ecuaciones nos quedaría:

$$m_1[s^2X_1(s) - sx_1(0) - \dot{x}_1(0)] + (c_1 + c_2)[sX_1(s) - x_1(0)] - c_2[sX_2(s) - x_2(0)] + (k_1 + k_2)X_1(s) - k_2X_2(s) = F_1(s)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &X_1(s)[m_1s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)] - X_2(s)[c_2s + k_2] \\ &= F_1(s) + s[m_1x_1(0)] + [m_1\dot{x}_1(0) + (c_1 + c_2)x_1(0) - c_2x_2(0)] \end{aligned}}$$

$$m_2[s^2X_2(s) - sx_2(0) - \dot{x}_2(0)] - c_2[sX_1(s) - x_1(0)] + (c_2 + c_3)[sX_2(s) - x_2(0)] - k_2X_1(s) + (k_2 + k_3)X_2(s) = F_2(s)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &-X_1(s)[c_2s + k_2] + X_2(s)[m_2s^2 + (c_2 + c_3)s + (k_2 + k_3)] \\ &= F_2(s) + s[m_2x_2(0)] + [m_2\dot{x}_2(0) + (c_2 + c_3)x_2(0) - c_2x_1(0)] \end{aligned}}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones algebraicas para $X_1(s)$ y $X_2(s)$ y al tomar la transformada inversa de Laplace se encuentra la solución del sistema $x_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(X_1)$, $x_2(t) = \mathcal{L}^{-1}(X_2)$. Para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas puede emplear sustitución directa o bien regla de Cramer. Tenga presente de igual forma que de ser necesario tendrá que determinar las fracciones parciales de $X_1(s)$ y de $X_2(s)$ antes de emplear la transformada inversa de Laplace sobre dichas funciones.