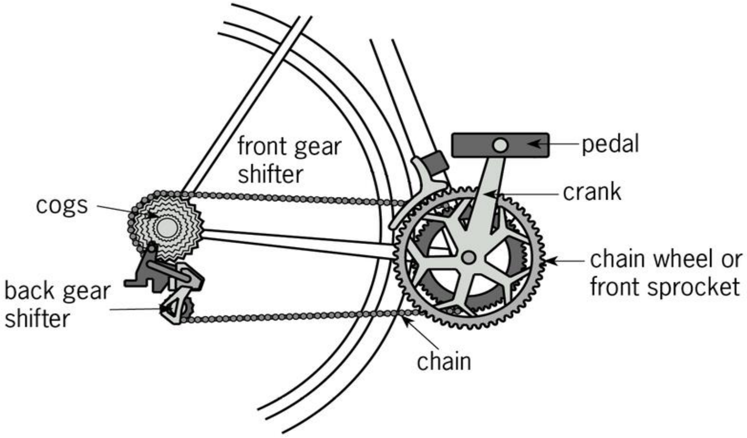
V. Engranes en general

Objetivos:

1. Definir que es un engrane.
2. Mencionar los tipos de engrane.
3. Ver la nomenclatura de los engranes rectos.
4. Discutir algunos fundamentos teóricos relacionados a los engranes rectos.
5. Discutir acerca de los dientes y los trenes de engranes.
6. Ver la terminología y el análisis de fuerza en engranes rectos, cónico, helicoidales, y de tornillo sinfín.

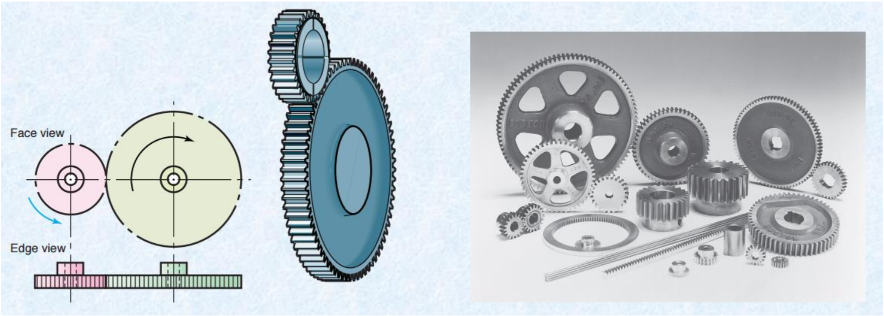


V. Engranes en general

1. Definición y tipos de engranes

¿Qué es un engrane?

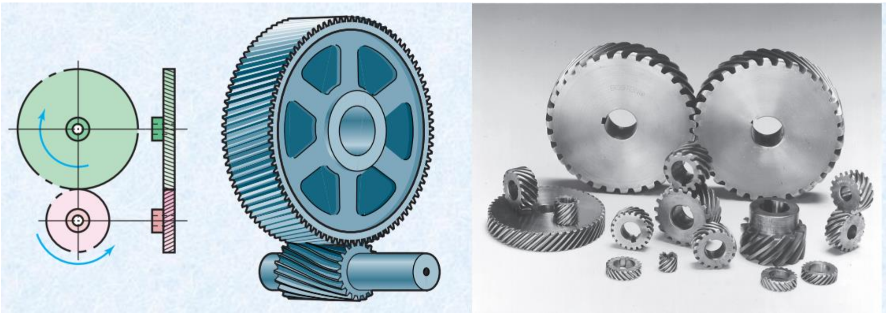
Es un elemento rotatorio dentado, el cuál está en contacto con otro componente de máquinas dentado (generalmente otro engrane), usado para transmitir torque.



¿Cuáles son los tipos de engranes?

- Engranes rectos. Son los tipos de engranes más simples. Los dientes son paralelo al eje de rotación. Se emplean para transmitir movimiento rotatorio de un eje paralelo a otro.

- Engranes helicoidales. En estos los dientes están inclinados con respecto al eje de rotación. También transmiten movimiento rotatorio entre ejes paralelos, pero con menor ruido que los engranes rectos. Esto último producto de que el contacto entre los dientes es más gradual. Debido a que los dientes están inclinados, se desarrolla carga de empuje.



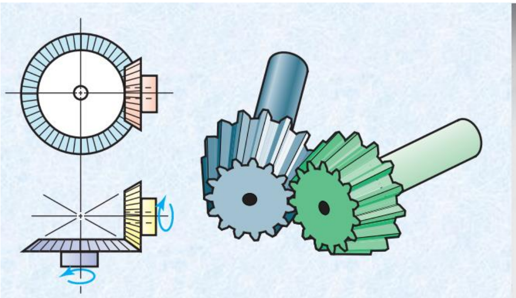
V. Engranes en general

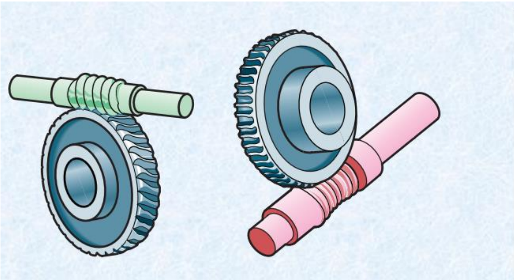
1. Definición y tipos de engranes

¿Cuáles son los tipos de engranes?

– Engranes cónicos. Los dientes están formados en una superficie cónica. Se transmite movimiento rotatorio entre ejes que se interceptan.

– Tornillos sin fin. Transmiten movimiento entre ejes que se interceptan. Son similares a un tornillo como su nombre lo indica. Son usados cuando se tienen relaciones de velocidad entre los dos ejes altas (3 o más). En estos tipos de engranes se transmite el movimiento rotatorio del tornillo al engrane y no al revés.






2. Nomenclatura

Al ser los engranes rectos los más simples, serán empleados para desarrollar las relaciones cinemáticas básicas relacionadas con la forma de los dientes.

V. Engranes en general

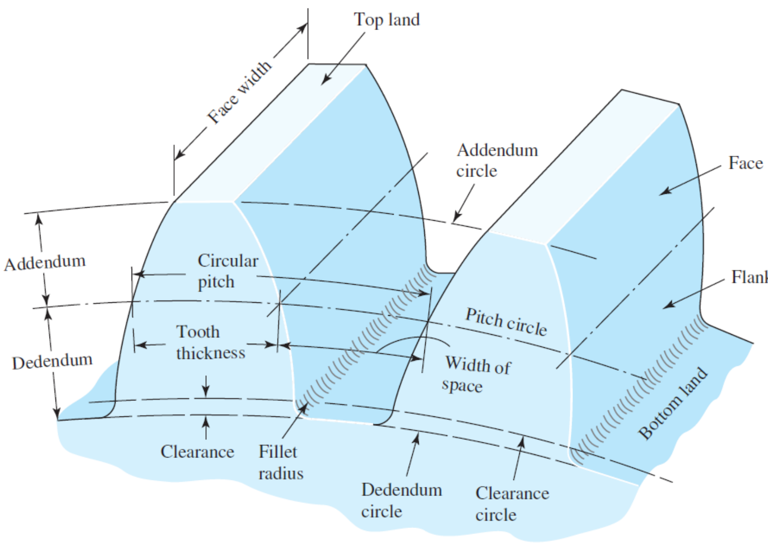
2. Nomenclatura

– Circulo de paso. Es el círculo teórico sobre el cuál se basan los cálculos y su diámetro es llamado “diámetro de paso”. Los círculos de paso de engranes acoplados son tangentes entre sí. El engrane de menor tamaño es llamado piñón, y el de mayor tamaño es llamado rueda.

– Paso circular p. Es la distancia medida en el círculo de paso de un punto en un determinado diente al mismo punto en el diente adyacente. El paso circular es igual a la suma del espesor del diente y del ancho de espacio entre los dientes.

– Circulo de la raíz (*dedendum circle*) y de la cabeza (*addendum circle*). Los círculos que definen la superficie del fondo y la superior (cresta) del diente, respectivamente.

– Cabeza (*addendum*) a. Es la distancia radial medida desde el círculo de paso a la cresta del diente.



– Raíz (*dedendum*) b. Es la distancia radial medida desde el círculo de paso a la superficie del fondo del diente.

– Circulo de holgura o de claro. Círculo tangente al círculo de la cabeza del engrane acoplado.

V. Engranes en general

2. Nomenclatura

- Holgura o claro c. Distancia entre la cresta del engrane y la raíz del engrane acoplado. Es decir es la cantidad por la que la raíz de un engrane dado excede la cabeza de su engrane acoplado.

- Paso diametral P. Es la razón del número de dientes N de un engrane a su diámetro de paso. Debe tenerse presente que los engranes acoplados deben tener el mismo paso diametral.

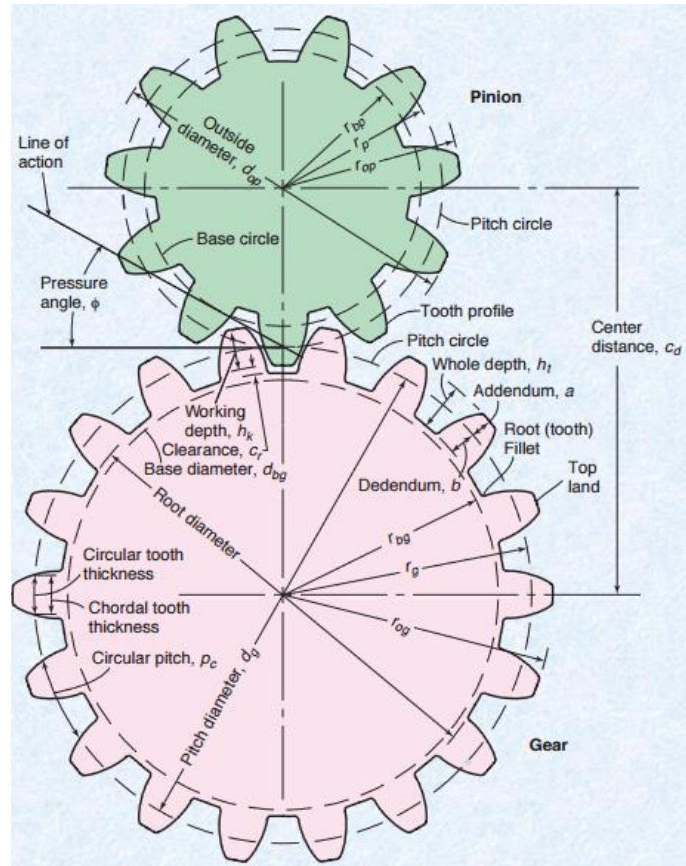
$$P = \frac{N}{d}$$

El paso circular puede ser escrito en términos del paso diametral.

$$p = \frac{\pi d}{N} = \frac{\pi}{P}$$

- Módulo m. Es el inverso del paso diametral.

$$m = \frac{1}{P} = \frac{d}{N} \rightarrow p = \pi m$$



V. Engranes en general

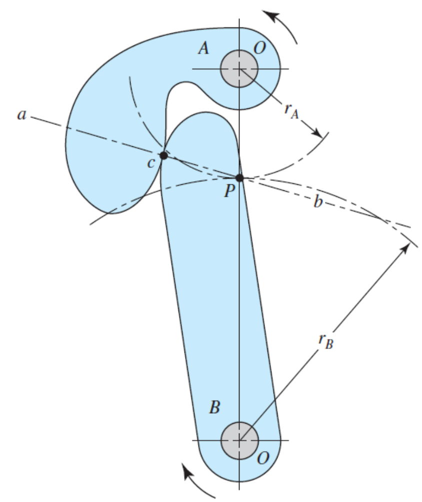
3. Fundamentos teóricos

<u>Acción conjugada</u>

El perfil de los dientes de un engranaje es diseñado de manera tal que produzca una relación constante de velocidad angular durante el acoplamiento. A esto último se le conoce como acción conjugada.

Cuando una superficie curva es presionada contra otra, tal como se observa en la figura, el punto de contacto ocurre cuando las dos superficies son tangentes una con respecto a la otra (punto c) y las fuerzas en cualquier instante están dirigidas a lo largo de una normal común ab a las dos superficies curvas. La línea ab, representanta la dirección de acción de las fuerzas y es llamada línea de acción o línea de presión.

La línea de acción se intersectará con la línea de los centros O-O en algún punto P el cuál también define el punto de tangencia entre los círculos de paso de los dos engranes acoplados y es llamado punto de paso.

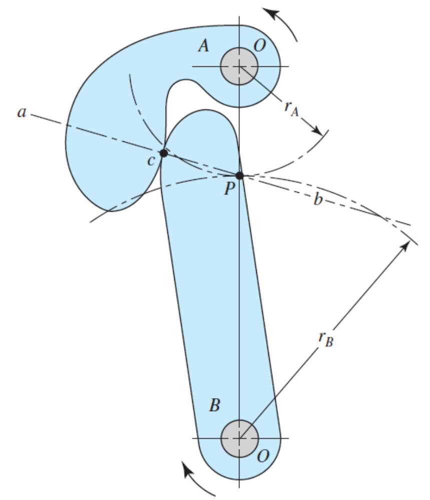


V. Engranes en general

3. Fundamentos teóricos

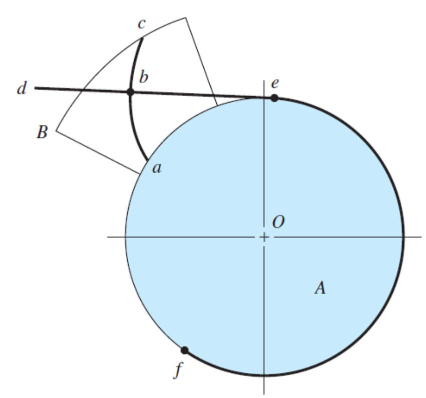
Acción conjugada

Para transmitir movimiento rotatorio a velocidad angular constante el punto de paso debe permanecer fijo, es decir todas las líneas de acción debe pasar a través del mismo punto P. En teoría, es posible seleccionar de forma arbitraria cualquier perfil para un diente, y luego determinar un perfil para los dientes de acoplamiento que producirá acción conjugada. Una de estas soluciones es el perfil de involuta (que se usa de manera universal para dientes de engranes).



Con el perfil de involuta todos los puntos de contacto ocurren a través de la misma línea, la cuál es la línea de acción.

Propiedades de la involuta



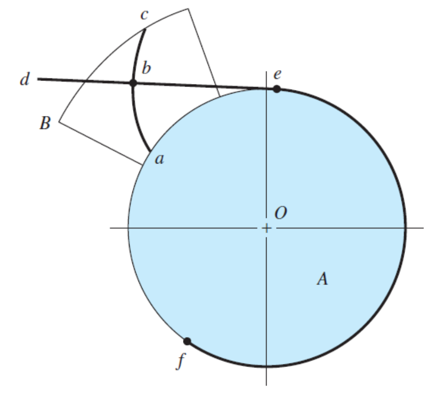
El círculo en torno al cual la involuta es generada es llamado círculo base. Una curva involuta puede ser generada empleando una cuerda enrollada en torno al círculo base.

V. Engranes en general

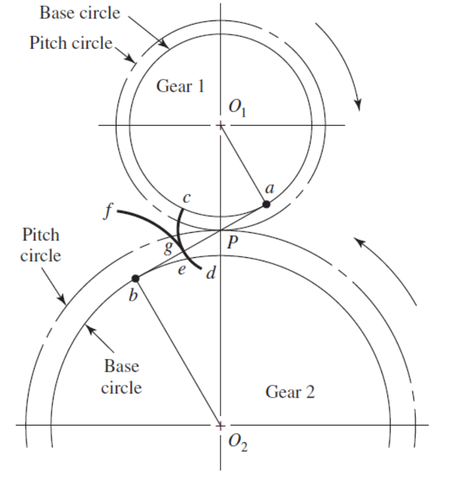
3. Fundamentos teóricos

<u>Propiedades de la involuta</u>

Considere una brida parcial B la cuál esta sujeta al cilindro A, entorno al cuál está enrrollada la cuerda def que está en tensión. El punto b en la cuerda trazará la curva de involuta al ser enrollada y desenrollada la cuerda. Aquí la línea generatriz de es siempre normal a la curva de involuta en todos los puntos de intersección y a su vez es siempre tangente al cilindro A.



Considere ahora dos engranes con centro fijos O_1 y O_2, y cuyos radios de circulo base están dados por O_1a y O_2b de forma respectiva. Imagine ahora que una cuerda es sujeta en sentido horario alrededor del círculo base de centro O_1 y en sentido antihorario alrededor del círculo base de centro O_2; de manera tal de que cuando los engranes giren en sentidos contrarios dicha cuerda se mantenga en tensión. Las involutas entonces son generadas de forma simultánea por el de trazo, el cual representa el punto de contacto, y la cuerda ab es la línea generatriz. El punto de contacto se mueve a lo largo de la línea generatriz, pero dicha línea no cambia de posición ya que es siempre tangente a los círculos base.



V. Engranes en general

3. Fundamentos teóricos

Dibujo de dientes

Es necesario que sea capaz de dibujar los dientes en un par de engranes que buscan acoplarse. La sección 13-5 ilustra lo anterior, favor leerla.

Relación de contacto

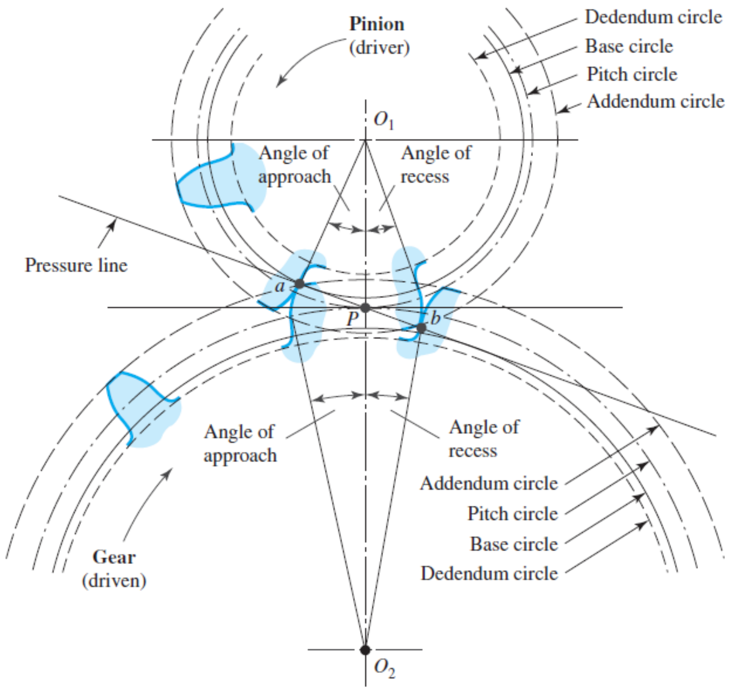
La relación de contacto m_c define el número promedio de pares de dientes en contacto durante el acoplamiento. Sí $m_c = 1$ solo existe un par de dientes en contacto. Para reducir la posibilidad de impacto se recomienda que $m_c \geq 1.2$.

Ver la sección 13-6 del libro de texto.

Interferencia

El contacto de partes de los perfiles de dientes que no están conjugados es llamado interferencia.

Esta situación suele suceder cuando el círculo de la raíz está por debajo del círculo base.

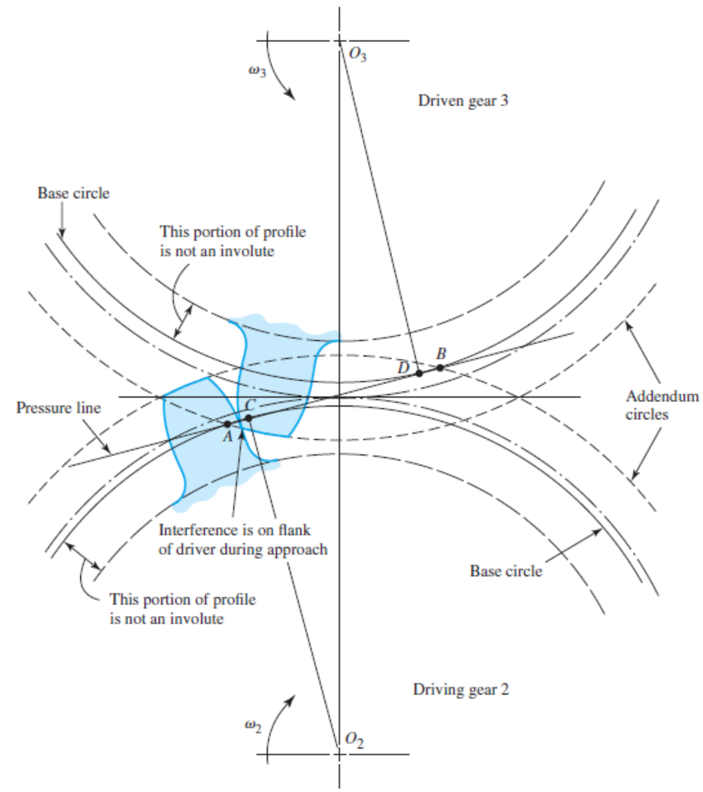


V. Engranes en general

3. Fundamentos teóricos

<u>Interferencia</u>

Los puntos iniciales y finales de contacto son designados como A y B, respectivamente, en la segunda figura, y están localizados en la línea de presión (también llamada línea de acción). Observe que aquí los puntos en donde se da tangencia entre los círculos base y la línea de presión (C, D) difieren de A,B. En este caso el flanco del diente impulsor primero hace contacto con el diente impulsado en el punto A, lo cual ocurre antes de que la parte de la involuta del diente impulsor entre en acción (tenga presente que la involuta se dibuja a partir del circulo base, y aquella porción por debajo de dicho circulo no forma parte del perfil de involuta).



Para reducir la interferencia se suele utilizar ángulos de presión de 20°, 22.5°, o 25° (esto hace que el circulo base sea menor).

4. Sistemas de dientes

Un sistema de dientes es una norma o estándar que especifica las relaciones entre los parámetros del engrane tal como cresta, raíz, espesor del diente ángulo de presión, entre otros.

V. Engranes en general

4. Sistemas de dientes

En principio las normas fueron desarrolladas para que existiera la posibilidad de intercambiar engranes con cualquier número de dientes, pero con el mismo ángulo de presión y paso.

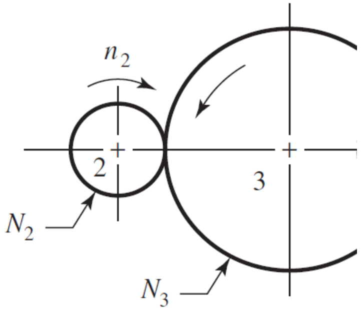
- ✓ La tabla 13-1 contiene los estándares más usados para engranes rectos. La tabla 13-2 es útil para realizar la selección del paso diametral (sistema ingles) o el módulo (sistema internacional) de un engrane.
- ✓ La tabla 13-3 presenta las proporciones estándar de dientes de engranes cónicos rectos (ver nomenclatura en la figura 13-20).
- ✓ La tabla 13-4 enuncia las proporciones estándar para los dientes de engranes helicoidales.

En el caso de los engranes de tornillos sin fin, ha de decirse que los mismos no han sido altamente estandarizados. La tabla 13-5, en tanto, resume lo que se considera como buena práctica en lo que respecto a los ángulos de presión y a la profundidad del diente para este tipo de engranes.

5. Trenes de engranes

Un tren de engranes consiste de dos o más engranes. En general, pueden haber varios engranes impulsores (entradas) y varios siendo impulsados (salidas). Cualquier engrane que no dé ni tome torque se conoce como engrane libre o loco.

Considere el piñón 2 que impulsa a la rueda 3, tal como se muestra a continuación.



Aquí la velocidad lineal en el punto de contacto es la misma, por lo tanto:

$$V = |\omega_2 r_2| = |\omega_3 r_3|$$

V. Engranes en general

5. Trenes de engranes

Recordando que: $\omega = 2\pi n$, $r = d/2$, $P = N/d$. Donde d es el diámetro de paso, n el número de revoluciones por unidad de tiempo, N el número de dientes, y P el paso diametral (que ha de ser el mismo para engranes acoplados); la expresión anterior podría re escribirse como:

$$|n_2 d_2| = |n_3 d_3|$$

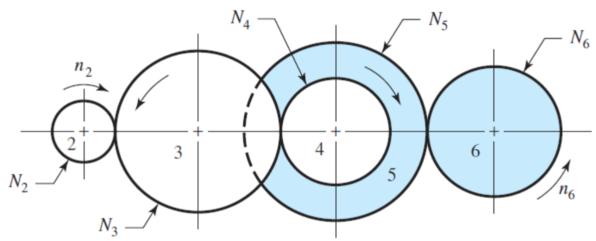
ó

$$|n_2 N_2| = |n_3 N_3|$$

Las expresiones anteriores son válidas para todo tipo de engranes (rectos, cónicos, helicoidales o de tornillo sin fin).

El valor absoluto es para dar libertad a la hora de seleccionar la dirección positiva o negativa. La convección de signos típica es que contra el reloj se toma como + la rotación.

Como ejemplo considere el siguiente tren de engranes.



$$n_6 = -\frac{N_2}{N_3}\frac{N_3}{N_4}\frac{N_5}{N_6} n_2$$

Observe aquí que los engranes 2, 3, 5 son impulsores y los engranes 3, 4, y 6 son impulsados.

Sí definimos el valor del tren e como la razón del producto de dientes impulsores a dientes impulsados, la expresión anterior podría re escribirse como:

$$n_6 = e n_2$$

Donde el signo de e es positivo cuando el último engrane (n_L) gire en la misma dirección que el primer engrane n_F; y negativo de lo contrario.

V. Engranes en general

5. Trenes de engranes

$$\boxed{n_L = e n_F}$$

$$\boxed{e = \frac{producto\ de\ dientes\ impulsores}{producto\ de\ dientes\ impulsados}}$$

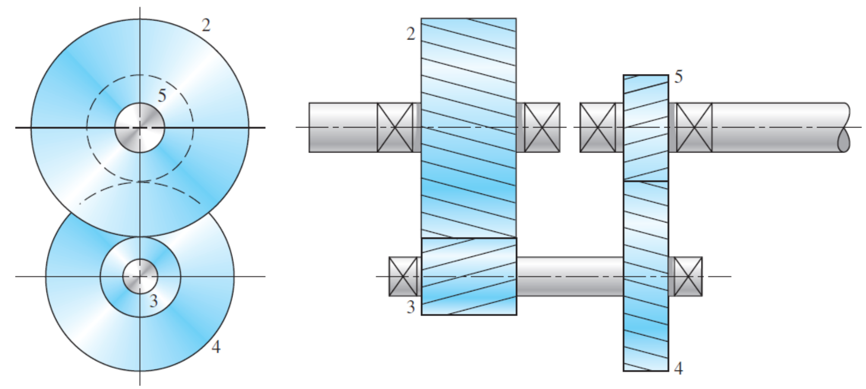
Ha de decirse, que en ocasiones es deseable que el eje de entrada y el de salida de un tres de engranes compuesto de dos etapas estén en línea, tal como se observa en la siguiente figura. A esta configuración se le denomina tren de engranes compuesto inverso, y requiere que las distancias entre los ejes sean las mismas para ambas etapas, lo que implica que exista la siguiente limitante:

$$\frac{d_2}{2} + \frac{d_3}{2} = \frac{d_4}{2} + \frac{d_5}{2}$$

Lo cual, asumiendo que exista un paso diametral constante P entre las dos etapas, podría re escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{N_2}{2P} + \frac{N_3}{2P} = \frac{N_4}{2P} + \frac{N_5}{2P}$$

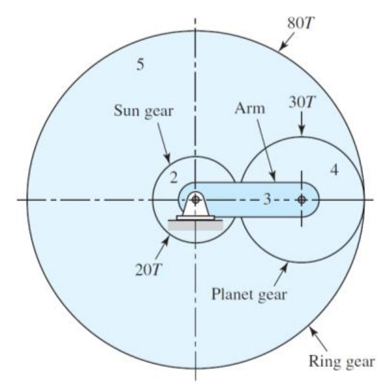
$$\boxed{N_2 + N_3 = N_4 + N_5}$$



<u>Trenes de engranes planetarios o epicíclicos</u>

Los trenes planetarios incluyen: un engrane sol, un portador planetario o brazo, y uno o más engranes planetarios.

Los trenes planetarios tienen dos o más grados de libertad.

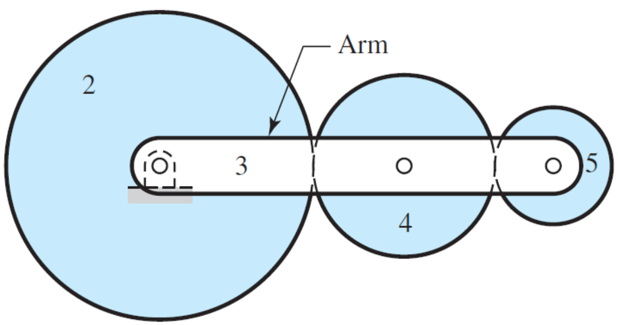


V. Engranes en general

5. Trenes de engranes

Trenes de engranes planetarios o epicíclicos

La figura mostrada a continuación muestra un tren planetario compuesto de un engrane sol 2, un brazo 3, y dos engranes planetarios 4 y 5.



La velocidad angular del engrane 2 relativa al brazo 3 está dada por:

$$n_{23} = n_2 - n_3$$

Similarmente la velocidad angular del engrane 5 relativa al brazo 3 está dada por:

$$n_{53} = n_5 - n_3$$

Dividendo las expresiones anteriores obtenemos la razón de la velocidad relativa del engrane 5 al 2 con respecto al brazo 3:

$$\frac{n_{53}}{n_{23}} = \frac{n_5 - n_3}{n_2 - n_3}$$

Esta razón es proporcional al número de dientes ya sea que el brazo este o no rotando y representa el valor del tren e:

$$\boxed{e = \frac{n_L - n_A}{n_F - n_A}}$$

Donde: n_L es la velocidad angular en rev/min del último engrane, n_A es la velocidad angular en rev/min del brazo, y n_F es la velocidad angular en rev/min del primer engrane.

V. Engranes en general

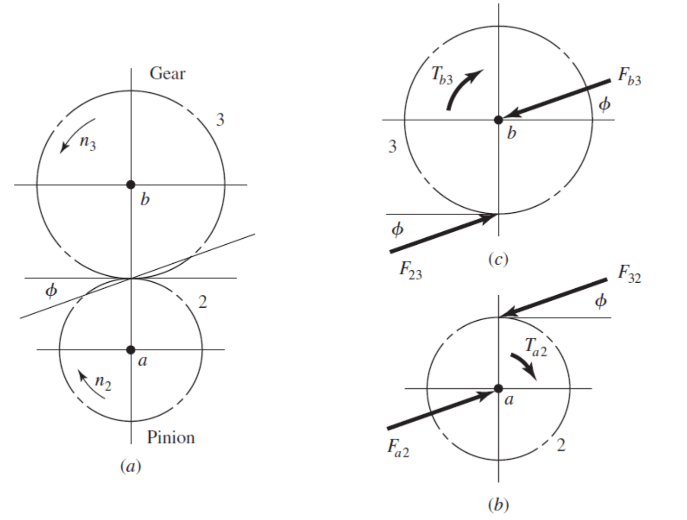
6. Terminología y análisis de fuerza

<u>Engranes rectos</u>

Antes de iniciar el análisis de trenes de engranes, se debe mencionar la notación a emplear:

- ✓ El número 1 corresponde al marco de la máquina.
- ✓ El número 2 al primer engrane de entrada o impulsor. El resto de los engranes son numerados sucesivamente 3, 4,etc.
- ✓ Los ejes son designados utilizando letras minúsculas: $a, b, c,$ etc.
- ✓ La fuerza que ejerce el engrane 2 sobre el 3 es denotada como F_{23} por ejemplo.
- ✓ Similarmente, la fuerza que ejerce el engrane 2 sobre el eje a es denotada como F_{2a}.
- ✓ Los superíndices indican la dirección, y las direcciones son indicadas usando las coordenadas x, y, z para los eje, y r y t para las reacciones radiales y tangenciales de los dientes, respectivamente. Por ejemplo ${F^t}_{43}$ es la componente tangencial de la fuerza ejercida por el engrane 4 sobre el engrane 3.

Considere ahora un engrane 2 montado sobre un eje a el cuál rota a una velocidad n_2 y que impulsa al engrane 3 el cual está montado sobre un eje b y que consecuentemente girará a una velocidad n_3. Aquí las reacciones entre los dientes acoplados ocurren a lo largo de la línea de presión. En la figura (b) el piñón ha sido separado del engrane y de eje y sus efectos ha sido remplazado por fuerzas y torques.



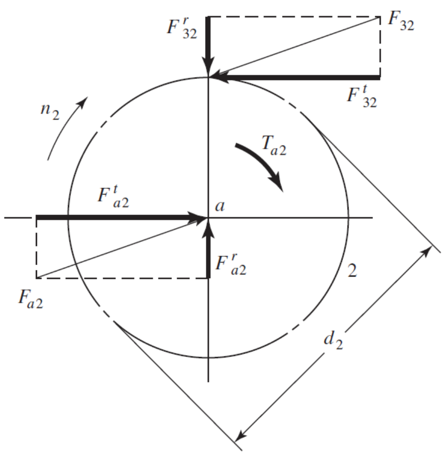
V. Engranes en general

6. Terminología y análisis de fuerza

Engranes rectos

En la imagen anterior puede verse que para el engrane impulsor la dirección del torque es la misma dirección de la rotación.

Ha de decirse también que las reacciones pueden ser divididas en sus componentes, tal como se muestra en el diagrama de cuerpo libre mostrado a continuación.



Aquí la única componente útil de F_{32} es la tangencial, la cual es definida como la carga transmitida $W_t = F^t{}_{32}$, y el torque relacionado con la carga trasmitida puede ser expresado como:

$$T = \frac{d}{2} W_t$$

Donde: $T = T_{a2}$ y $d = d_2$.

Y la potencia transmitida H a través del engrane puede ser obtenida del producto del torque T y la velocidad angular ω:

$$H = T\omega = \left(\frac{W_t d}{2}\right)\omega$$

Teniendo presente que la velocidad lineal $V = \frac{d}{2}\omega = \pi dn$, se tendrá:

$$\boxed{H = W_t \pi dn}$$

Lo cual podría re escribirse como:

$$W_t = 33000\frac{H}{V}$$

Donde: $V = \frac{\pi dn}{12}$ $[ft/min]$, $H = [hp]$, $W_t = [lbf]$

V. Engranes en general

6. Terminología y análisis de fuerza

Engranes cónicos

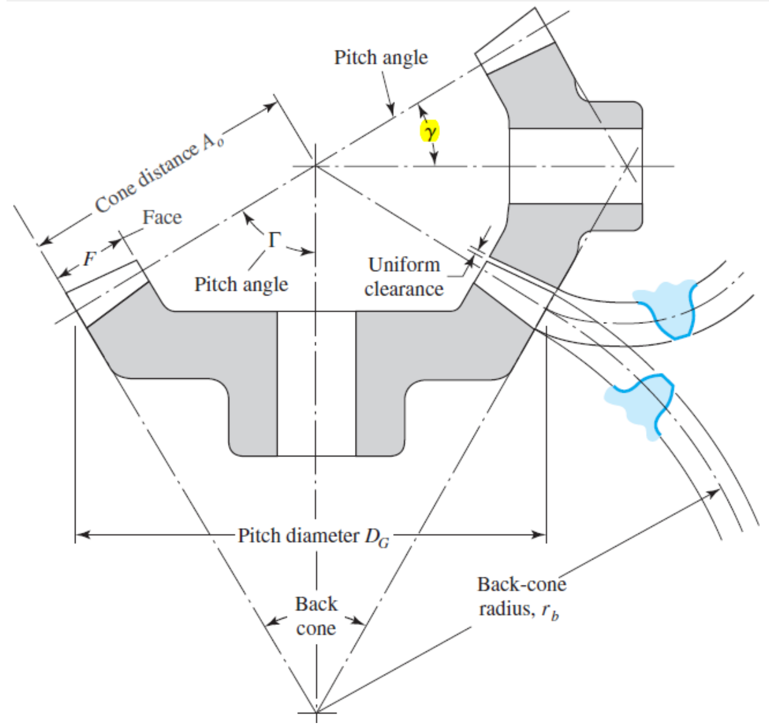
Los engranes cónicos son usados para transmitir movimiento entre eje que se interceptan. Los ejes usualmente presentan un ángulo de 90° entre ellos pero otros ángulos también son posibles.

La figura mostrada a continuación ilustra la terminología en el engranes cónicos.

De la imagen anterior se pueden hacer algunas observaciones:

- ✓ El diámetro de paso D_G es medido en el extremo mayor del diente.
- ✓ Aquí el paso circular p y el diámetro de paso se calculan igual de la misma manera que en los engranes rectos.
- ✓ Los ángulos de paso son definidos tal como se observa en la figura y esta relacionados al número de dientes de la siguiente forma:

$$Piñon \rightarrow \tan\gamma = \frac{N_{piñon}}{N_{rueda}}$$



$$Rueda \rightarrow \tan\Gamma = \frac{N_{rueda}}{N_{piñon}}$$

Aquí N representa el número de dientes.

Los engranes cónicos de dientes rectos estándares se cortan de manera tal que se garantice un ángulo de presión de 20°.

V. Engranes en general

6. Terminología y análisis de fuerza

<u>Engranes cónicos</u>

Con respecto al análisis de fuerza en este tipo de engranes, ha de decirse que el punto de acción de la fuerza se asume que está en el punto medio del diente (aunque en realidad la fuerza se encuentra en algún lugar entre el punto medio y el extremo mayor del diente).

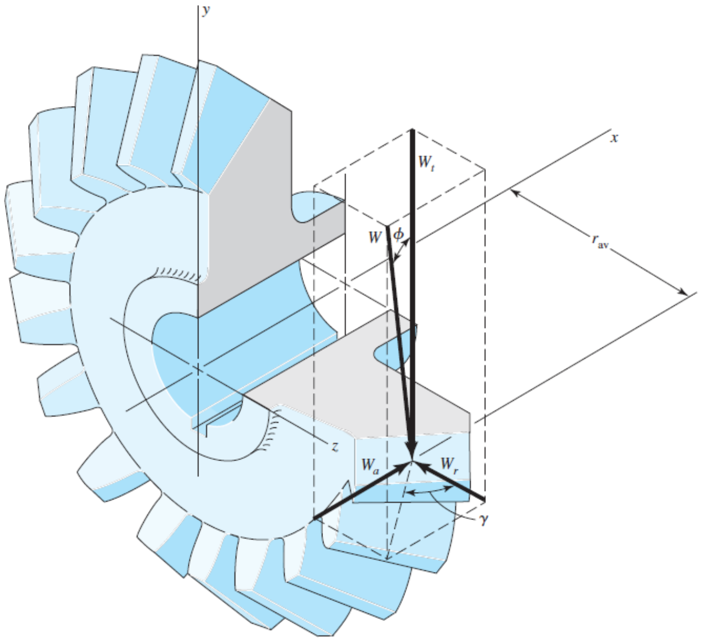
La fuerza transmitida W_t se define entonces como:

$$W_t = \frac{T}{r_{av}}$$

Donde: T es el torque y r_{av} es radio de paso en el punto medio. Las fuerzas actuando en el punto medio del diente son mostradas a continuación.

De la trigonometría, se encuentra la fuerza radial W_r y la fuerza axial W_a en función de la fuerza transmitida y de los ángulos de presión ϕ y de paso γ:

$$\boxed{\cos\gamma = \frac{W_r}{W_t \tan\phi} \rightarrow W_r = W_t \tan\phi \cos\gamma}$$



$$\boxed{\operatorname{sen}\gamma = \frac{W_a}{W_t \tan\phi} \rightarrow W_a = W_t \tan\phi \operatorname{sen}\gamma}$$

Como se puede ver las tres fuerzas W_t, W_a, W_r tienen orientaciones ortogonales y pueden ser utilizadas para determinar las cargas en los cojinetes por medio de las ecuaciones de equilibrio estático.

V. Engranes en general

6. Terminología y análisis de fuerza

Engranes helicoidales paralelos

Los engranes helicoidales son usados principalmente para transmitir movimiento entre ejes paralelos (aunque también pudiesen ser usados para ejes que se interceptan).

En el caso de los engranes helicoidales es importante hacer algunas observaciones:

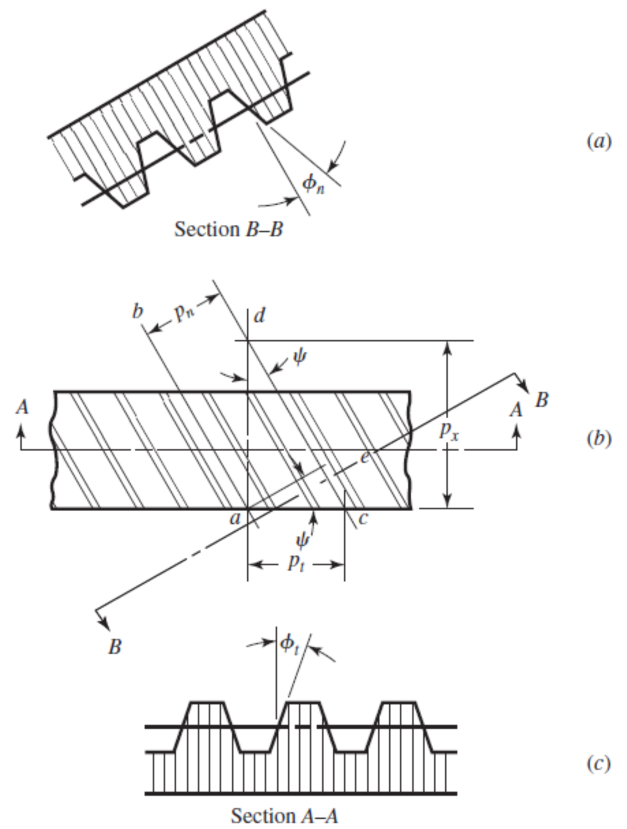
- ✓ Ambos engranes deben tener el mismo ángulo de hélice, pero uno debe ser estar orientado a la derecha y el otro a la izquierda.
- ✓ La forma del diente es una involuta helicoidal. Esta puede ser producida al cortar una pieza de papel con la forma de un paralelogramo y al enrollarla entorno a un cilindro base (ver figura 13-21).
- ✓ El contacto inicial entre dientes comienza como un punto y después se extiende a una línea diagonal que se extiende a través de la cara del diente a medida que se desarrolla el acople.
- ✓ Producto del acople gradual de los dientes, los engranes helicoidales pueden transmitir cargas pesadas a altas velocidades.
- ✓ Los engranes helicoidales producen tanto cargas radiales como de empuje en el eje.
- ✓ Cuando se tienen engranes helicoidales montados lado a lado en el mismo eje, pero cuyas hélices tienen sentidos opuestos, estos desarrollarán cargas de empuje opuestas que se cancelarán.

La figura mostrada a continuación muestra la nomenclatura a emplear en engranes helicoidales. Esta es una vista de planta de una cremallera helicoidal. Las líneas ab y cd representan las líneas centrales de dos dientes helicoidales adyacentes, tomadas en el mismo plano de paso. El ángulo ψ es el ángulo de la hélice y la distancia ac representa el paso circular transversal p_t en el plano de rotación (usualmente llamado simplemente paso circular). La distancia ae en tanto se denomina como paso circular normal p_n.

V. Engranes en general

6. Terminología y análisis de fuerza

Engranes helicoidales paralelos



De la trigonometría se puede ver que p_n esta dado por:

$$\cos\psi = \frac{ae}{ac} \rightarrow ae = ac\cos\psi$$

$$p_n = p_t\cos\psi$$

Y la distancia ad es conocida como paso axial p_x y está dada por:

$$p_x = \frac{p_t}{\tan\psi}$$

Con respecto a los ángulos de presión normal y transversal, ϕ_n y ϕ_t los mismos están relacionados con el ángulo de la hélice por medio de la siguiente expresión:

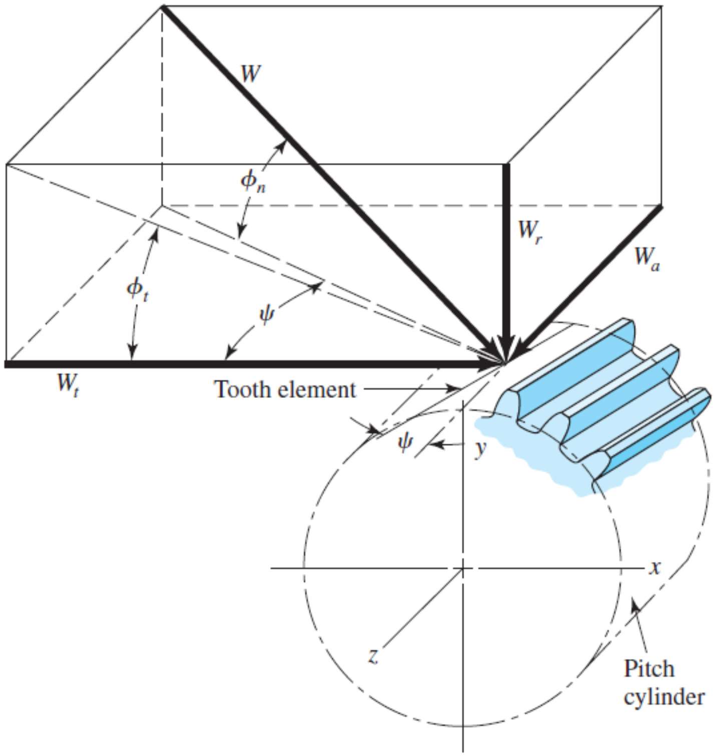
$$\cos\psi = \frac{\tan\phi_n}{\tan\phi_t}$$

Con respecto al análisis de fuerza, el punto de aplicación de las fuerzas en este tipo de engranes se supone esta en el plano de paso y el centro de la cara del diente. Las fuerzas actuando en el diente son mostradas en la siguiente figura.

V. Engranes en general

6. Terminología y análisis de fuerza

Engranes helicoidales paralelos



La fuerza transmitida se encuentra a partir del torque de entrada al igual que en el caso de los engranes rectos.

De la trigonometría, la fuerza radial W_r y la fuerza axial W_a pueden ser encontradas a partir de la carga transmitida W_t:

$$\tan\phi_t = \frac{W_r}{W_t} \rightarrow W_r = W_t \tan\phi_t$$

$$\tan\psi = \frac{W_a}{W_t} \rightarrow W_a = W_t \tan\psi$$

Con respecto a la fuerza total, la misma estaría dada por:

$$\cos\phi_n = \frac{(W_t/\cos\psi)}{W} \rightarrow W = \frac{W_t}{\cos\phi_n \cos\psi}$$

V. Engranes en general

6. Terminología y análisis de fuerza

<u>Engranes de tornillo sin fin</u>

Algunas observaciones importantes con respecto a la terminología de los tornillos sin fin se listan a continuación:

- ✓ El tornillo sin fin y el engrane o corona que se acopla a este tienen el mismo sentido de la hélice, pero con ángulos que suelen ser diferentes.
- ✓ El ángulo de hélice del sin fin, ψ_W, es grande y usualmente se especifica el ángulo de avance λ. Ver la siguiente figura.
- ✓ El ángulo de avance del sin fin es igual al ángulo de la hélice de la corona ψ_G para ejes que se interceptan a 90°.
- ✓ Típicamente, el paso axial del sin fin p_x y el paso transversal circular de la corona p_t son especificados. Y el paso transversal de la corona se relaciona con el diámetro de paso de esta d_G y con el número de dientes N_G a partir de la siguiente expresión:

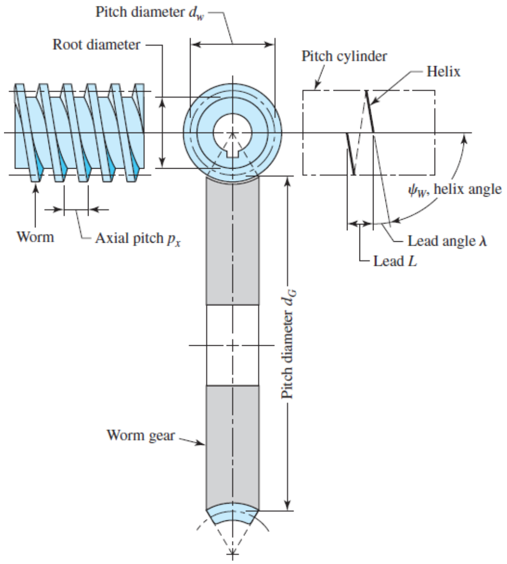
$$\pi d_G = N_G p_t$$

- ✓ El avance y el paso axial del sin fin están relacionados por medio de la siguiente expresión:

$$L = p_x N_W$$

- ✓ Y el ángulo de avance y el avance esta relacionados por:

$$\tan \lambda = \frac{L}{\pi d_W}$$

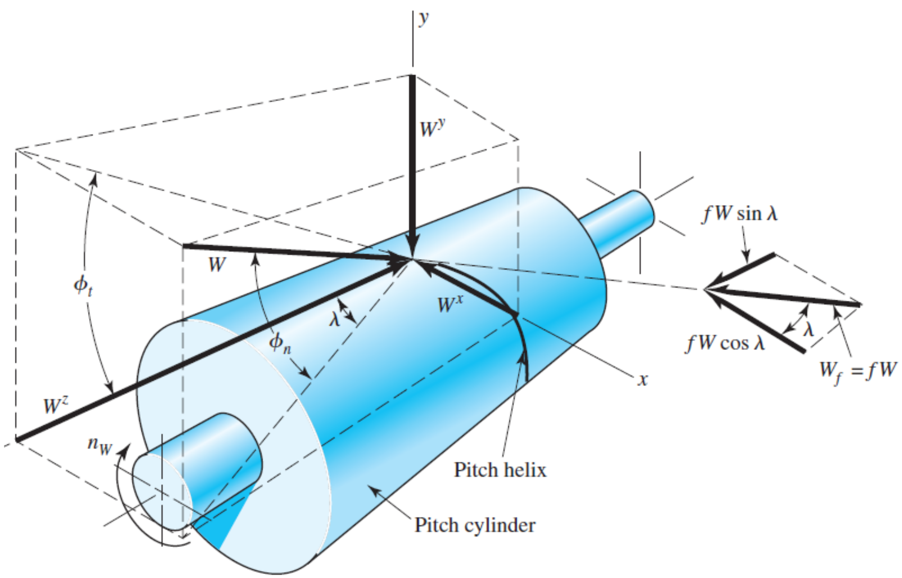


V. Engranes en general

6. Terminología y análisis de fuerza

Engranes de tornillo sin fin

Con respecto al análisis de fuerza, al despreciar la fricción, la única fuerza actuando sobre el diente es la fuerza normal W. Las componentes x, y, z de la fuerza denotadas como W^x, W^y, W^z son mostradas en la figura a continuación. Observe que el eje axial del sin fin está en la dirección z y se supondrá que el eje axial de la corona irá en la dirección x.



Utilizando los subíndices W y G para indicar las fuerzas actuando en el sin fin y en la corona, respectivamente, se nota que:

$$W^x = W_{Wt} = -W_{Ga}$$

$$W^y = W_{Wr} = -W_{Gr}$$

$$W^z = W_{Wa} = -W_{Gt}$$

En contraste con engranes rectos en donde el movimiento relativo entre los dientes acoplados es rodante, en el caso de los engranes de tornillo sin fin el movimiento relativo entre los dientes del sin fin y de la corona es puramente deslizante y consecuentemente la fricción juega un papel significativo.

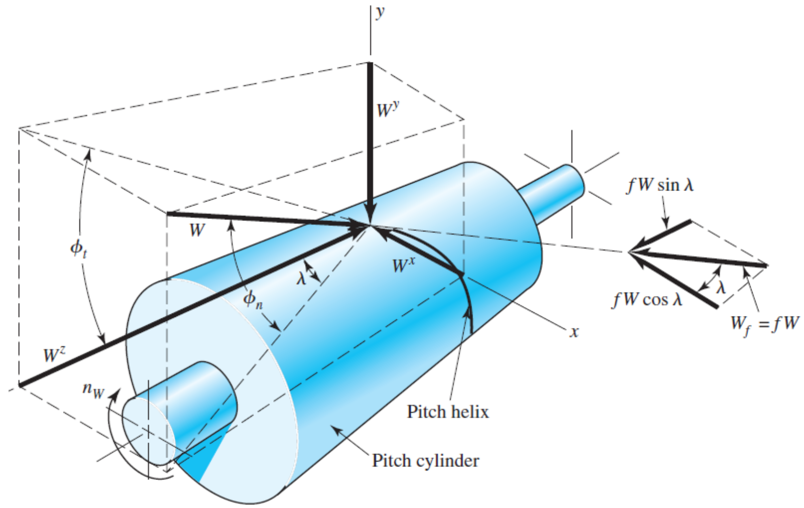
V. Engranes en general

6. Terminología y análisis de fuerza

Engranes de tornillo sin fin

Introduciendo el coeficiente de fricción f, la fuerza de fricción (actuando en dirección tangencial a la superficie del diente) $W_f = fW$ contribuye a las componentes de fuerza y de la trigonometría en la figura:

$$\boxed{\begin{aligned} W^x &= W(\cos\phi_n \operatorname{sen}\lambda + f\cos\lambda) \\ W^y &= W\sin\phi_n \\ W^z &= W(\cos\phi_n\cos\lambda - f\operatorname{sen}\lambda) \end{aligned}}$$



A partir de la expresión para W^z se puede determinar W_f:

$$W^z = -W_{Gt} = W(\cos\phi_n\cos\lambda - f\operatorname{sen}\lambda)$$

$$\boxed{W_f = fW = \frac{fW_{Gt}}{f\operatorname{sen}\lambda - \cos\phi_n\cos\lambda}}$$

Y las fuerzas tangenciales del sin fin y de la corona se pueden relacionar por medio de la siguiente expresión:

$$W^x = W_{Wt} = W(\cos\phi_n \operatorname{sen}\lambda + f\cos\lambda)$$

$$\boxed{W_{Wt} = \frac{W_{Gt}(\cos\phi_n \operatorname{sen}\lambda + f\cos\lambda)}{(f\operatorname{sen}\lambda - \cos\phi_n\cos\lambda)}}$$

Por otra parte, la eficiencia de la fuerza transmitida η por el sin fin puede ser definida como:

$$\eta = \frac{W_{Wt,\text{sin } fricción}}{W_{Wt,\text{con } fricción}}$$

$$\eta = \left[-\frac{W_{Gt}(\cos\phi_n \operatorname{sen}\lambda)}{(\cos\phi_n\cos\lambda)}\right]\left[\frac{(f\operatorname{sen}\lambda - \cos\phi_n\cos\lambda)}{W_{Gt}(\cos\phi_n \operatorname{sen}\lambda + f\cos\lambda)}\right]$$

V. Engranes en general

6. Terminología y análisis de fuerza

Engranes de tornillo sin fin

Al multiplicar la expresión anterior tanto en el numerador como en el denominador por:

$$\frac{1}{\cos\phi_n \operatorname{sen}\lambda \cos\lambda}$$

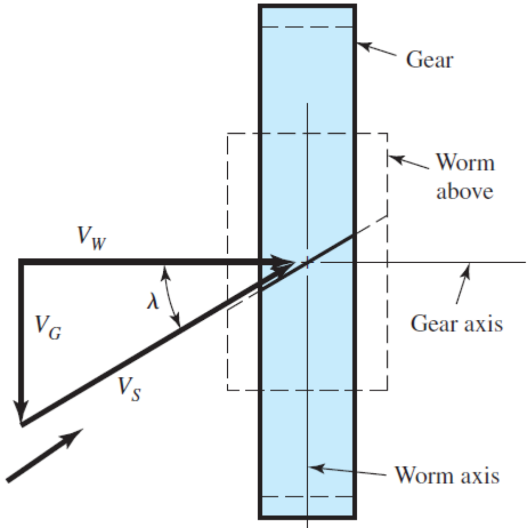
Se encuentra que:

$$\boxed{\eta = \frac{\cos\phi_n - f\tan\lambda}{\cos\phi_n + f\cot\lambda}}$$

A partir de la expresión anterior, se puede demostrar que la eficiencia incrementa al incrementar el ángulo de avance (vea tabla 13-6).

Este coeficiente de fricción se ha demostrado de forma experimental que depende de la velocidad de deslizamiento $\vec{V}_s = \vec{V}_W - \vec{V}_G$, donde $\vec{V}_W$ es la velocidad lineal del sin fin y $\vec{V}_G$ la velocidad lineal de la corona.

En base a la figura anterior se puede ver que:



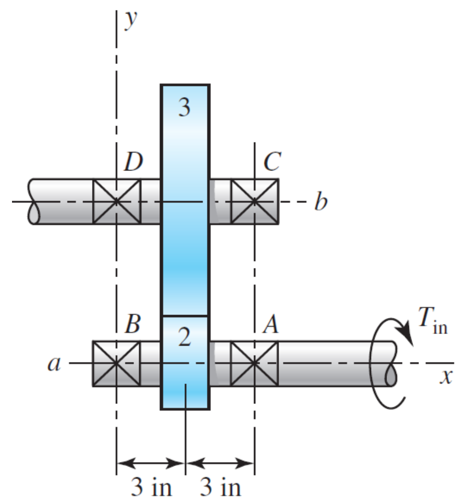
$$\boxed{\cos\lambda = \frac{V_W}{V_s} \rightarrow V_s = \frac{V_W}{\cos\lambda}}$$

Una vez se cuenta con V_s se puede determinar el coeficiente de fricción f a partir de un gráfico similar al de la figura 13-42 del libro de texto.

V. Engranes en general

7. Ejemplos

1. La siguiente imagen muestra un par de engranes rectos montados en un eje. Sí se sabe que el piñón tiene 18 dientes, la rueda tiene 45 dientes, el paso diametral es de 5 dientes/pulgada, el ángulo de presión es de 20°, la potencia de entrada es de 32 hp, y que la velocidad del eje a es de 1800 rev/min; determine la magnitud de las fuerzas actuando en los cojinetes A, B, C, y D.



Suposiciones: Los cojinetes A y B están sujetos a las mismas cargas impuestas únicamente por el eje a, los cojinetes D y C están sujetos a las mismas cargas impuestas únicamente por el eje b.

Ecuaciones básicas:

$$P = \frac{N}{d}, \qquad T = \frac{d}{2}W_t, \qquad H = T\omega = \left(\frac{W_t d}{2}\right)\omega = W_t \pi d n, \qquad \tan\phi = \frac{W_r}{W_t}, \qquad R_A = R_B,$$
$$R_C = R_D$$

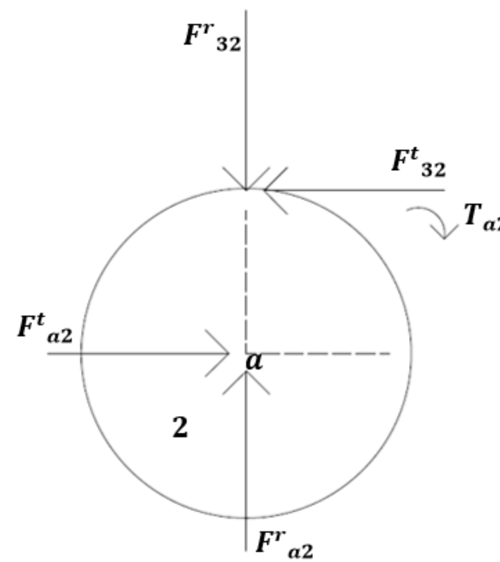
V. Engranes en general

7. Ejemplos

1. La siguiente imagen muestra un par de engranes rectos montados en un eje. Sí se sabe que el piñón tiene 18 dientes, la rueda tiene 45 dientes, el paso diametral es de 5 dientes/pulgada, el ángulo de presión es de 20°, la potencia de entrada es de 32 hp, y que la velocidad del eje a es de 1800 rev/min; determine la magnitud de las fuerzas actuando en los cojinetes A, B, C, y D.

Desarrollo:

En primer lugar se dibujará el diagrama de cuerpo libre del piñón.



Aquí se puede ver que los cojinetes A y B estarán sujetos a las fuerzas $F^r{}_{32}$ y $F^t{}_{32}$ así que primero se determinarán dichas fuerzas:

$$P = \frac{N_2}{d_2} \rightarrow d_2 = \frac{N_2}{P} \qquad d_2 = \frac{18\ dientes}{5\ dientes/in} = 3.6\ in$$

$$H = W^t{}_{a2} \pi d_2 n_2 \rightarrow W^t{}_{a2} = W^t{}_{32} = \frac{H}{\pi d_2 n_2}$$

$$W^t{}_{32} = \frac{32\ hp}{\pi \left(3.6\ in \cdot \frac{1\ ft}{12\ in}\right)(1800\ rev/min)} \cdot \left(\frac{33000\ lbf \cdot ft/min}{1\ hp}\right)$$

$$W^t{}_{32} \cong 622.47\ lbf$$

$$|F^t{}_{32}| = |W^t{}_{32}| \cong 622.47\ lbf$$

V. Engranes en general

7. Ejemplos

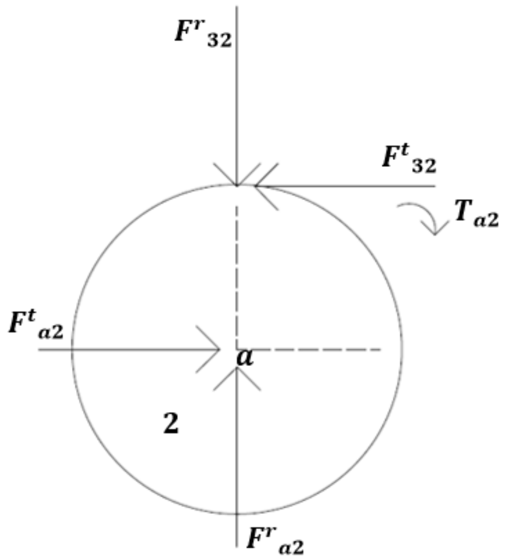
1. La siguiente imagen muestra un par de engranes rectos montados en un eje. Sí se sabe que el piñón tiene 18 dientes, la rueda tiene 45 dientes, el paso diametral es de 5 dientes/pulgada, el ángulo de presión es de 20°, la potencia de entrada es de 32 hp, y que la velocidad del eje a es de 1800 rev/min; determine la magnitud de las fuerzas actuando en los cojinetes A, B, C, y D.

Desarrollo:

$$\tan\phi = \frac{W^r{}_{32}}{W^t{}_{32}} \rightarrow W^r{}_{32} = W^t{}_{32}\tan\phi$$

$$W^r{}_{32} = (622.47\ lbf)\tan 20°$$

$$|F^r{}_{32}| = |W^r{}_{32}| \cong 226.56\ lbf$$



Entonces la carga radial que ha de ser distribuida sobre los cojinetes A y B, estaría dada por:

$$R = \sqrt{(F^t{}_{a2})^2 + (F^r{}_{a2})^2}$$

$$R = \sqrt{(622.47\ lbf)^2 + (226.56\ lbf)^2} \cong 662.42\ lbf$$

$$\boldsymbol{R_A = R_B \cong 331.21\ lbf}$$

V. Engranes en general

7. Ejemplos

1. La siguiente imagen muestra un par de engranes rectos montados en un eje. Sí se sabe que el piñón tiene 18 dientes, la rueda tiene 45 dientes, el paso diametral es de 5 dientes/pulgada, el ángulo de presión es de 20°, la potencia de entrada es de 32 hp, y que la velocidad del eje a es de 1800 rev/min; determine la magnitud de las fuerzas actuando en los cojinetes A, B, C, y D.

Desarrollo:

Siguiendo un procedimiento similar se determinan las cargas radiales que actúan sobre los cojinetes C y D:

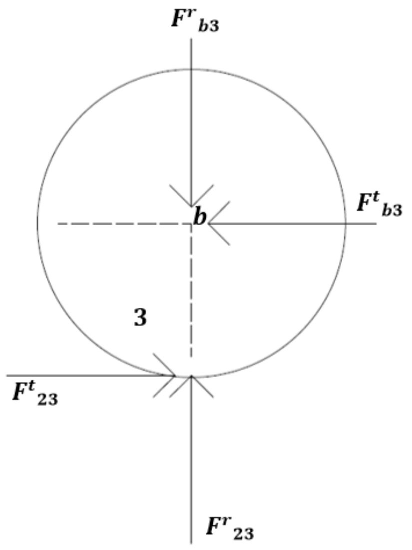
$$|F^t{}_{23}| = |F^t{}_{32}| \cong 622.47\ lbf$$

$$|F^r{}_{23}| = |F^r{}_{32}| \cong 226.56\ lbf$$

$$R = \sqrt{(F^t{}_{b3})^2 + (F^r{}_{b3})^2}$$

$$R = \sqrt{(622.47\ lbf)^2 + (226.56\ lbf)^2} \cong 662.42\ lbf$$

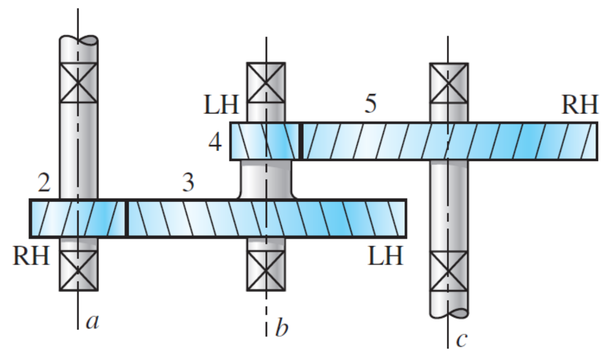
$$\boldsymbol{R_C = R_D \cong 331.21\ lbf}$$



V. Engranes en general

7. Ejemplos

2. Un tren de engranes se compone de cuatro engranes helicoidales tal como se observa en la siguiente figura. Los engranes tienen un ángulo de presión normal de 20° y un ángulo de hélice de 30°. El engrane 2 es el impulsor y rota en sentido contrario al reloj. Sí sabe que el eje b es libre, la carga transmitida desde el engrane 2 hacía el engrane 3 es de 500 lbf, el engrane 3 tiene 54 dientes, el engrane 4 tiene 14 dientes, el paso diametral normal del engrane 3 y del 4 es de 7 dientes/pulgada; determine las fuerzas que ejercen los engranes 3 y 4 sobre el eje.



Suposiciones: Las únicas fuerzas actuando sobre el eje b son las del engrane 3 y 4. La velocidad angular del engrane 3 es igual a la del engrane 4.

Ecuaciones básicas:

$$p_n = p_t \cos\psi\,, \qquad p = \frac{\pi}{P}, \qquad P = \frac{N}{d}, \qquad \cos\psi = \frac{\tan\phi_n}{\tan\phi_t}, \qquad W_r = W_t \tan\phi_t\,, \qquad W_a = W_t \tan\psi\,,$$

$$H = W_t \pi d n, \qquad n_3 = n_4$$

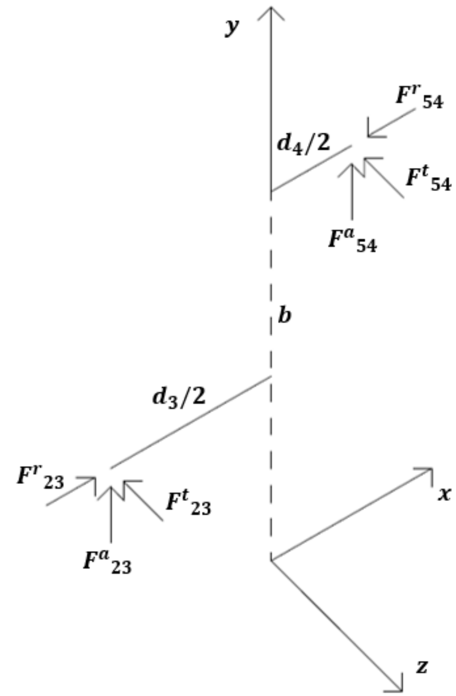
V. Engranes en general

7. Ejemplos

2. Un tren de engranes se compone de cuatro engranes helicoidales tal como se observa en la siguiente figura. Los engranes tienen un ángulo de presión normal de 20° y un ángulo de hélice de 30°. El engrane 2 es el impulsor y rota en sentido contrario al reloj. Sí sabe que el eje b es libre, la carga transmitida desde el engrane 2 hacía el engrane 3 es de 500 lbf, el engrane 3 tiene 54 dientes, el engrane 4 tiene 14 dientes, el paso diametral normal del engrane 3 y del 4 es de 7 dientes/pulgada; determine las fuerzas que ejercen los engranes 3 y 4 sobre el eje.

Desarrollo:

A continuación se muestra el diagrama de cuerpo libre donde se observan las cargas que están actuando sobre los engranes 3 y 4.



En primer lugar se determinará el paso diametral transversal P_t y el ángulo de presión transversal ϕ_t del cojinete 3:

$$p_n = p_t \cos\psi \rightarrow p_t = \frac{p_n}{\cos\psi} \qquad \frac{p_t}{\pi} = \frac{p_n}{\cos\psi} \rightarrow \frac{1}{P_t} = \frac{1}{P_n \cos\psi}$$

$$P_t = P_n \cos\psi = (7\ diente\,s/i\,n)\cos 30°$$

$$P_t \cong 6.062\ diente\,s/i\,n$$

$$\cos\psi = \frac{\tan\phi_n}{\tan\phi_t} \rightarrow \phi_t = \tan^{-1}\left(\frac{\tan\phi_n}{\cos\psi}\right)$$

V. Engranes en general

7. Ejemplos

2. Un tren de engranes se compone de cuatro engranes helicoidales tal como se observa en la siguiente figura. Los engranes tienen un ángulo de presión normal de 20° y un ángulo de hélice de 30°. El engrane 2 es el impulsor y rota en sentido contrario al reloj. Sí sabe que el eje b es libre, la carga transmitida desde el engrane 2 hacía el engrane 3 es de 500 lbf, el engrane 3 tiene 54 dientes, el engrane 4 tiene 14 dientes, el paso diametral normal del engrane 3 y del 4 es de 7 dientes/pulgada; determine las fuerzas que ejercen los engranes 3 y 4 sobre el eje.

Desarrollo:

$$\cos\psi = \frac{\tan\phi_n}{\tan\phi_t} \rightarrow \phi_t = \tan^{-1}\left(\frac{\tan\phi_n}{\cos\psi}\right)$$

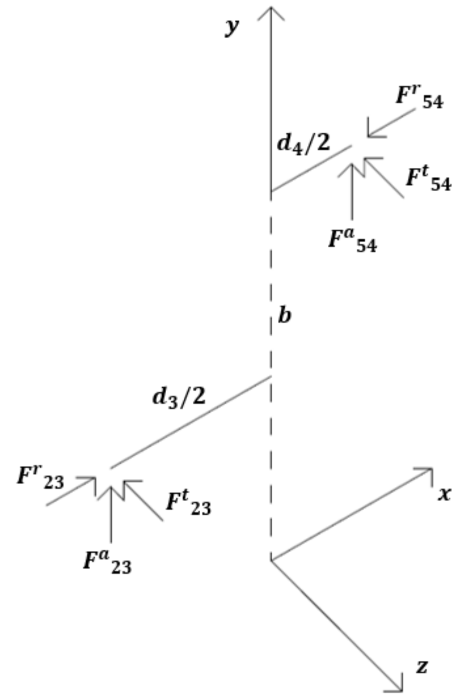
A partir de los resultados anteriores, y sabiendo que la carga trasmitida desde el engrane 2 al 3 es de 500 lbf, se pueden determinar las fuerzas radiales y axiales que ejerce el engrane 2 sobre el 3:

$$F^t{}_{23} = W_t = 500\ lbf \qquad F^r{}_{23} = W_r = W_t \tan\phi_t$$

$$F^r{}_{23} = (500\ lbf)\tan 22.80° \cong 210.18\ lbf$$

$$F^a{}_{23} = W_a = W_t \tan\psi$$

$$F^a{}_{23} = (500\ lbf)\tan 30° \cong 288.68\ lbf$$



V. Engranes en general

7. Ejemplos

2. Un tren de engranes se compone de cuatro engranes helicoidales tal como se observa en la siguiente figura. Los engranes tienen un ángulo de presión normal de 20° y un ángulo de hélice de 30°. El engrane 2 es el impulsor y rota en sentido contrario al reloj. Sí sabe que el eje b es libre, la carga transmitida desde el engrane 2 hacía el engrane 3 es de 500 lbf, el engrane 3 tiene 54 dientes, el engrane 4 tiene 14 dientes, el paso diametral normal del engrane 3 y del 4 es de 7 dientes/pulgada; determine las fuerzas que ejercen los engranes 3 y 4 sobre el eje.

Desarrollo:

Por lo tanto, las fuerzas actuando sobre el engrane 3 desde el 2 y que consecuentemente actuarán desde el engrane 3 al eje b serán las siguientes:

$$F_{23} = F^r{}_{23}\ \mathbf{i} + F^a{}_{23}\ \mathbf{j} - F^t{}_{23}\ \mathbf{k}$$

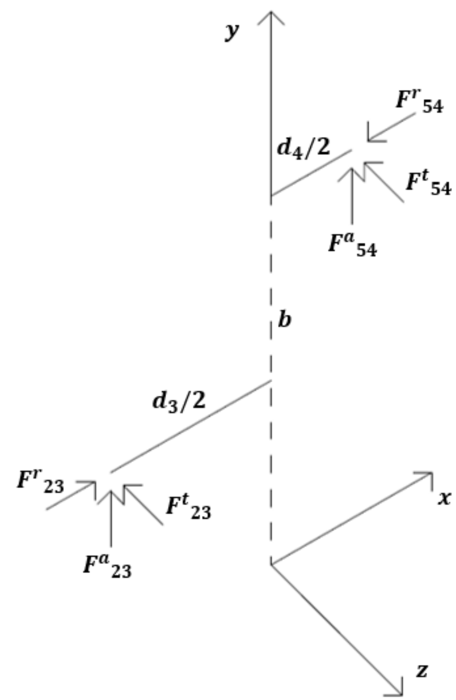
$$F_{23} = (210.18\ \mathbf{i} + 288.68\ \mathbf{j} - 500\ \mathbf{k})lbf$$

$$|\boldsymbol{F_{3b}}| = |\boldsymbol{F_{23}}|$$

Con respecto a las fuerzas actuando sobre el cojinete 4:

$$P_t = \frac{N_3}{d_3} \to d_3 = \frac{N_3}{P_t} \qquad d_3 = \frac{54\ dientes}{6.062\ dientes/in} \cong 8.91\ in$$

$$d_4 = \frac{N_4}{P_t} \qquad d_4 = \frac{14\ dientes}{6.062\ dientes/in} \cong 2.31\ in$$



V. Engranes en general

7. Ejemplos

2. Un tren de engranes se compone de cuatro engranes helicoidales tal como se observa en la siguiente figura. Los engranes tienen un ángulo de presión normal de 20° y un ángulo de hélice de 30°. El engrane 2 es el impulsor y rota en sentido contrario al reloj. Sí sabe que el eje b es libre, la carga transmitida desde el engrane 2 hacía el engrane 3 es de 500 lbf, el engrane 3 tiene 54 dientes, el engrane 4 tiene 14 dientes, el paso diametral normal del engrane 3 y del 4 es de 7 dientes/pulgada; determine las fuerzas que ejercen los engranes 3 y 4 sobre el eje.

Desarrollo:

$$H = F^t{}_{23}\pi d_3 n_3 = F^t{}_{45}\pi d_4 n_4 \qquad F^t{}_{45} = F^t{}_{23}\left(\frac{d_3}{d_4}\right)$$

$$|F^t{}_{54}| = |F^t{}_{45}| = 500\ lbf\left(\frac{8.91\ in}{2.31\ in}\right) \cong 1928.57\ lbf$$

$$F^r{}_{54} = (1928.57\ lbf)\tan 22.80° \cong 810.70\ lbf$$

$$F^a{}_{54} = (1928.57\ lbf)\tan 30° \cong 1113.46\ lbf$$

Por lo tanto, las fuerzas actuando sobre el engrane 4 desde el 5 y que consecuentemente actuarán sobre el eje b desde el engrane 4 serán las siguientes:

$$F_{54} = -F^r{}_{54}\,\mathbf{i} + F^a{}_{54}\,\mathbf{j} - F^t{}_{54}\,\mathbf{k}$$

$$F_{54} = (-810.70\,\mathbf{i} + 1113.46\,\mathbf{j} - 1928.57\,\mathbf{k})lbf$$

$$|\boldsymbol{F_{54}}| = |\boldsymbol{F_{45}}| = |\boldsymbol{F_{4b}}|$$