V. Derivación de las ecuaciones diferenciales empleando métodos variacionales

Objetivo:
1. Comprender las bases del cálculo de variaciones y apreciar su utilidad en la derivación de las ecuaciones de movimiento de sistemas dinámicos conservativos y no conservativos, de n grados de libertad, tras desarrollar las ecuaciones de Euler-Lagrange sobre el funcional respectivo.

1. Funcionales y cálculo de variaciones

Los métodos variaciones proveen una forma consistente para derivar las ecuaciones de movimiento de sistemas discretos y continuos.

<u>Funcionales</u>

Una función de una variable real continua es un mapeo del dominio de la variable dentro de su rango. Por ejemplo si $y = f(x) = \operatorname{sen} x$, el domino de $f(x)$ es todo el conjunto de números reales. Sin embargo el rango de $f(x)$ son todos los valores de y dentro del intervalo $-1 \leq y \leq 1$.

El *dominio de una función* está dado por el conjunto de valores que puede tomar una función. Es decir todos los valores a los cuales se puede evaluar la función.

El *rango de una función*, está determinado por todos los valores que pueden resultar al evaluar una función.

Las funciones generalmente requieren satisfacer ciertas condiciones. Por ejemplo, la solución de una ecuación diferencial requiere satisfacer ciertas condiciones de frontera.

Un funcional por otro lado, es un mapeo de un conjunto de funciones dentro de un conjunto de números reales, de manera tal que el mapeo de cada función en ese conjunto es un número real único. En otras palabras, un funcional es una función de un conjunto de funciones que resulta en un número real.

V. Derivación de las ecuaciones diferenciales empleando métodos variacionales

1. Funcionales y cálculo de variaciones

Funcionales

El dominio de un funcional es el conjunto de funciones y su rango es un conjunto de número reales.

Funcionales comunes incluyen:

- $\frac{df(2)}{dx}$ el cual es un funcional cuyo dominio son todas las funciones diferenciables en $x = 2$.

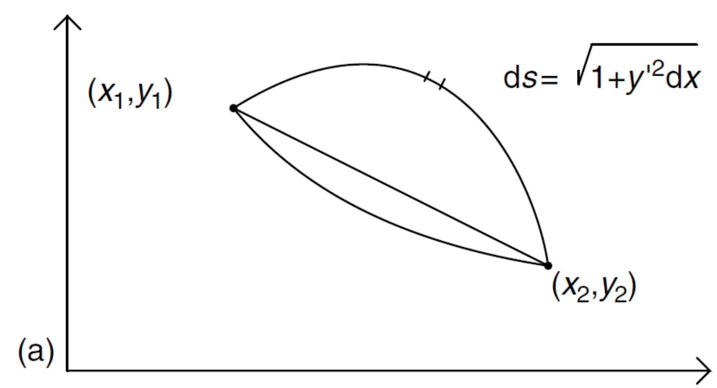
-$V = \frac{1}{2}\int_0^L EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$ el cual representa la energía potencial de una barra elástica de longitud L, módulo de elasticidad E, y sección transversal A. El dominio de este funcional son todos los desplazamientos $u(x, t)$ que satisfagan las condiciones de frontera específicas de la barra.

Particularmente nos interesan los funcionales I de la forma:

$$\boxed{I = \int_a^b F(x, y, y')dx}$$

Donde: x es una variable independiente, $y(x)$ es una función continua diferenciable en el intervalo cerrado $[a, b]$ que satisface condiciones específicas en $x = a$ y en $x = b$, $y' = dy/dx$, y F una función de x, y, y'.

Existen dos funcionales clásicos que son comúnmente utilizados para ilustrar el cálculo de variaciones. El primero consiste en que curva $y(x)$ minimiza la longitud del arco entre dos puntos. Es decir que recorrido o ruta es la más corta para unir los dos puntos.

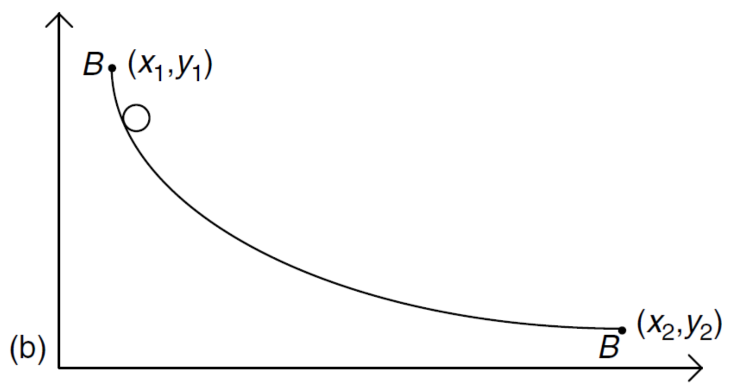


V. Derivación de las ecuaciones diferenciales empleando métodos variacionales

1. Funcionales y cálculo de variaciones

<u>Funcionales</u>

El segundo problema clásico considera el problema del braquistócrono de Bernoulli, el cual consiste en determinar el camino entre dos puntos específico a través del cual le tomará a una partícula desplazarse sin fricción en el menor tiempo posible.



<u>Variaciones</u>

Sí $y(x)$ es una función continua de x, entonces el diferencial dy debido a un cambio en la variable x:

$$dy = \lim_{\Delta x \to 0}[y(x+\Delta x) - y(x)]$$

Lo que puede re escribirse como:

$$dy = y(x+dx) - y(x)$$

Ahora, considere que $y(x)$ es una curva entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). También considere que ε sea un parámetro pequeño y que $\eta(x)$ sea cualquier curva arbitraria que cumpla con $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ y que sea de clase C' (es decir al menos su primera derivada existe). Una familia de curvas es entonces definida por:

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$$

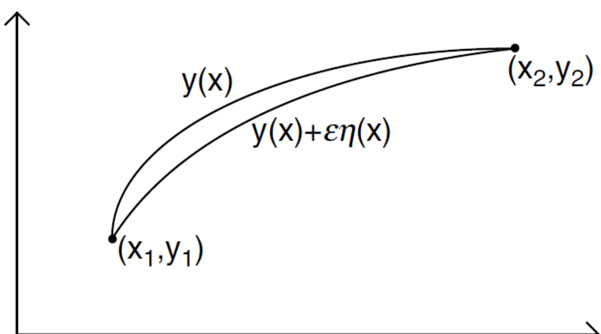
Y el cambio de $y(x)$ a $\tilde{y}(x)$ es llamado variación en y y puede ser denotado como $\delta(y)$:

$$\delta(y) = \varepsilon\eta(x)$$

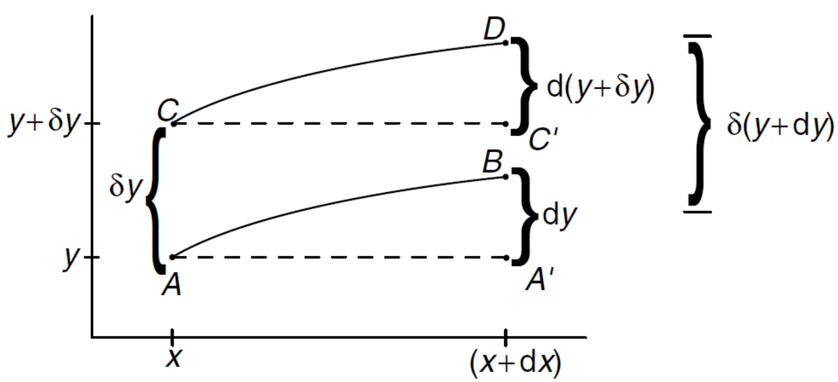
V. Derivación de las ecuaciones diferenciales empleando métodos variacionales

1. Funcionales y cálculo de variaciones

<u>Variaciones</u>



Los conceptos de diferencial y variación son comparados en la siguiente imagen.



De la imagen anterior se puede ver que la distancia $A'D$ puede ser determinada como:

$$\delta y + d(y + \delta y) = dy + \delta(y + dy)$$

$$\delta y + dy + d(\delta y) = dy + \delta y + \delta(dy)$$

$$d(\delta y) = \delta(dy)$$

Lo anterior demuestra que la diferenciación y la variación, son operaciones conmutativas. Esto implica que el orden de variación y diferenciación puede ser intercambiable.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\delta y) = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

V. Derivación de las ecuaciones diferenciales empleando métodos variacionales

2. Ecuación de Euler-Lagrange

Consideremos que $y(x)$ es una función que minimiza el funcional:

$$I = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

Y que $\delta(y) = \varepsilon\eta(x)$ sea la variación de $y(x)$. Donde $\eta(x = a) = \eta(x = b) = 0$. Ahora bien, al remplazar $y(x)$ por $\tilde{y}(x)$ y $y'(x)$ por $\tilde{y}'(x)$ en el funcional anterior se tendrá:

$$\tilde{I} = \int_a^b F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')dx$$

El cuál solo será función del parámetro ε:

$$\boxed{\tilde{I} = f(\varepsilon)}$$

El *extremun* (máximo o mínimo del funcional) de $\tilde{I}$ se obtendrá cuando:

$$\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon} = 0$$

Lo cual cuando $\varepsilon = 0$, implica que $\delta I = 0$, y por lo tanto:

$$\left.\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')dx = 0$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')dx = 0$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\frac{d\tilde{y}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\frac{d\tilde{y}'}{d\varepsilon}\right)dx = 0$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\eta'(x)\right)dx = 0$$

V. Derivación de las ecuaciones diferenciales empleando métodos variacionales

2. Ecuación de Euler-Lagrange

Integrando por parte el término $\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\eta'(x)$:

$$u = \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}, dv = \eta'(x)dx, du = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\right)dx, v = \eta(x)$$

Entonces:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\eta'(x)dx = \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\ \eta(x)\Big|_a^b - \int_a^b \left[\eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\right)\right]dx$$

Por lo tanto:

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\right)\right]dx = 0$$

Teniendo presente que cuando $\varepsilon = 0$

$$y = \tilde{y}, y' = \tilde{y}'$$

La expresión anterior podría re escribirse como:

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx = 0$$

En la expresión anterior si $\eta(x)$ es cualquier función arbitraria para que se cumpla la igualdad se tendrá que:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0}$$

Esta última ecuación es conocida como la ecuación de Euler-Lagrange y tras ser resuelta da el valor de F que extremiza al funcional I.

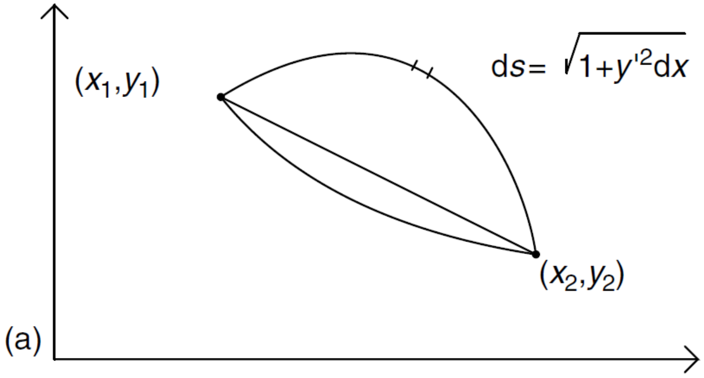
Ruta más corta para unir dos puntos

Como ejemplo consideraremos que curva $y(x)$ minimiza el funcional I asociado con la longitud del arco entre dos puntos.

V. Derivación de las ecuaciones diferenciales empleando métodos variacionales

2. Ecuación de Euler-Lagrange

<u>Ruta más corta para unir dos puntos</u>



$$I=\int_a^b dS=\int_a^b\sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$I=\int_a^b\left(\sqrt{dx^2+dy^2}\right)\frac{dx}{dx}$$

$$I=\int_{x1}^{x2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)dx$$

Empleando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$F=\sqrt{1+(y')^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0,\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{1}{2}\left[\frac{2y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right]\frac{dy'}{dy'}$$

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)=0$$

Lo cual tras integrar una vez con respecto a x es igual a:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=C_1$$

$$\frac{(y')^2}{1+(y')^2}={C_1}^2\rightarrow(y')^2={C_1}^2+(y')^2{C_1}^2$$

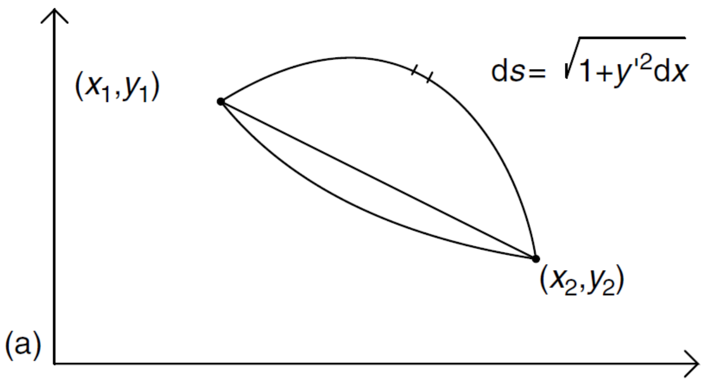
$$(y')^2\left(1-{C_1}^2\right)={C_1}^2$$

$$y'=\sqrt{\frac{{C_1}^2}{1-{C_1}^2}}=C_2$$

V. Derivación de las ecuaciones diferenciales empleando métodos variacionales

2. Ecuación de Euler-Lagrange

Ruta más corta para unir dos puntos



$$\frac{dy}{dx} = C_2$$

$$\boxed{y = C_2 x + C_3}$$

Esto último prueba un hecho conocido, la ruta más corta para unir dos puntos es una recta.

En caso tal que se trate de un funcional que dependa de n variables dependientes:

$$I = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_{n,}\, y'_1, y'_2, \dots, y'_n\,)dx$$

Se tendrá la siguiente expresión para las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_i}\right) = 0, \qquad i = 1,2, \dots, n}$$

3. Principio de Hamilton

Considere que $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ sea el conjunto de coordenadas generalizas para describir el movimiento de un sistema de n grados de libertad.

Considere ahora una partícula de masa m y deje que $\vec{r}$ sea el vector posición medido desde el origen del sistema coordenado:

$$\vec{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

V. Derivación de las ecuaciones diferenciales empleando métodos variacionales

3. Principio de Hamilton

En vista de que el movimiento de la partícula puede ser descrito utilizando las coordenadas generalizadas:

$$x = x(v_1, v_2, \dots, v_n), y = y(v_1, v_2, \dots, v_n), z = z(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Y por lo tanto:

$$\vec{r} = \vec{r}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Escribiendo la Segunda Ley de Newton para esta partícula:

$$\sum \vec{F} + \sum \vec{f} = m\ddot{\vec{r}}$$

Donde $\sum \vec{F}$ es la sumatoria de todas las fuerzas externas al sistema actuando sobre la partícula y $\sum \vec{f}$ todas las fuerzas actuando sobre la partícula desde otras partículas en el sistema.

El principio de trabajo y energía es derivado al tomar el producto punto a ambos lados de la ecuación de movimiento con el diferencial del vector de desplazamiento e integrando entre dos posiciones:

$$\sum \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \sum \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot \Delta\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r}$$

Donde $\Delta\vec{r}$ representa el vector entre dos partículas. El trabajo hecho por las fuerzas externas es definido como:

$$W_{1\to 2} = \sum \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Y el término a la derecha de la igual se puede re escribir como:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \right) \right] dt$$

V. Derivación de las ecuaciones diferenciales empleando métodos variacionales

3. Principio de Hamilton

Lo cual tras ser evaluado da el cambio de energía cinética entre los dos instantes asociados a la posición 1 y 2, por lo tanto la ecuación del principio de trabajo y energía podría re escribirse como:

$$W_{1\to 2} + \sum \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot \Delta\vec{r} = T_2 - T_1$$

Sí se repite un procedimiento análogo para todo el sistema de partículas se tendrá que $\sum \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot \Delta\vec{r} = 0$, y por lo tanto:

$$\boxed{W_{1\to 2} = T_2 - T_1}$$

En donde aquí $W_{1\to 2}$ representa el trabajo total sobre el sistema de partículas y $T_2 - T_1$ el cambio de cinética total de todo el sistema de partículas. Esta expresión es igualmente válida para cuerpos rígidos. Aquí evidentemente tanto el trabajo como la energía cinética en cualquier instante son funcionales de las coordenadas generalizadas.

La variación en las coordenadas generalizadas δv_i debe cumplir que:

$$\delta v_i(t_1) = \delta v_i(t_2) = 0, \qquad i = 1,2,\dots n$$

Y la variación en el vector posición estaría dada por:

$$\delta\vec{r} = \vec{r}(v_1 + \delta v_1, v_2 + \delta v_2, \dots, v_n + \delta v_n) - \vec{r}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Tomando el producto punto a ambos lados de la ecuación de movimiento con la variación del vector de desplazamiento:

$$\sum \vec{F} \cdot \delta\vec{r} + \sum \vec{f} \cdot \delta\vec{r} = m\ddot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r}$$

Aquí $\sum \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$ representa a la variación en el trabajo y se denomina como trabajo virtual δW.

V. Derivación de las ecuaciones diferenciales empleando métodos variacionales

3. Principio de Hamilton

La expresión al lado derecho de la igualdad podría re escribirse al considerar que:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r}) = \ddot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r} + \dot{\vec{r}} \cdot \delta\dot{\vec{r}}$$

Note también que:

$$\delta(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = (\delta\dot{\vec{r}}) \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot (\delta\dot{\vec{r}}) = 2\dot{\vec{r}} \cdot (\delta\dot{\vec{r}})$$

Por lo tanto:

$$\dot{\vec{r}} \cdot (\delta\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}\delta(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})$$

Y:

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r}) - \frac{1}{2}\delta(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})$$

Consecuentemente:

$$\delta W + \sum \vec{f} \cdot \delta\vec{r} = m\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r}) - \delta\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right)$$

$$\delta W + \sum \vec{f} \cdot \delta\vec{r} = m\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r}) - \delta T$$

$$\delta W + \delta T + \sum \vec{f} \cdot \delta\vec{r} = m\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r})$$

Y para un sistema de partículas $\sum \vec{f} \cdot \delta\vec{r} = 0$.

Adicionalmente el trabajo virtual total del sistema de partículas se podría dividir en el trabajo hecho por las fuerzas conservativas (energía potencial, V) y el hecho por las fuerzas no conservativas (W_{nc}):

$$\delta W = \delta W_{nc} - \delta V$$

Por lo tanto, para un sistema de partículas:

$$\delta W_{nc} - \delta V + \delta T = m\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r})$$

Donde m es la masa total del sistema y $\vec{r}$ el vector posición al centroide del sistema. Integrando la expresión anterior entre dos puntos asociados a los instantes 1 y 2:

V. Derivación de las ecuaciones diferenciales empleando métodos variacionales

3. Principio de Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta W_{nc} - \delta V + \delta T)dt = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}\cdot\delta\vec{r})dt = m(\dot{\vec{r}}\cdot\delta\vec{r})\Big|_{t_1}^{t_2}$$

Lo que será igual a cero ya que $\delta v_i(t_1) = \delta v_i(t_2) = 0$.

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta W_{nc} - \delta V + \delta T)dt = 0$$

Definiendo el funcional lagraniano como:

$$\delta L = \delta T - \delta V$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta W_{nc} + \delta L)dt = 0$$

$$\boxed{\delta\int_{t_1}^{t_2}(W_{nc} + L)dt = 0}$$

Lo cual se conoce como el principio extendido de Hamilton.

4. Ecuaciones de Lagrange para sistemas conservativos

En la sección anterior se demostró que cuando se extremiza el funcional al hacer que:

$$\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{dI}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = 0$$

El variacional del funcional $\delta I = 0$

Entonces sí $I = \int_{t_1}^{t_2}(W_{nc} + L)dt$, para sistemas conservativos $(W_{nc} = 0)$ la ecuación de Euler-Lagrange que permite encontrar el valor de $F = L$ que extremiza al funcional I, para un sistema de n grados de libertad estaría dada por:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v'_i}\right) = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n}$$

Donde $v'_i = \frac{dv_i}{dt} = \dot{v}_i$.

La expresión anterior es conocida como las ecuaciones de Lagrange y permite derivar las ecuaciones diferenciales de movimiento para sistemas de n grados de libertad, lineales y no lineales.

V. Derivación de las ecuaciones diferenciales empleando métodos variacionales

5. Ecuaciones de Lagrange para sistemas no conservativos

En el caso de los sistemas no conservativos, el funcional I estaría dado por:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (W_{nc} + L)dt$$

En donde el trabajo hecho por las fuerzas no conservativas depende solo de la variación en las coordenadas generalizadas y no de sus derivaciones con respecto al tiempo.

Por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial v_i}(W_{nc} + L) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{v}_i}(W_{nc} + L)\right) = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_i}\right) + \frac{\partial W_{nc}}{\partial v_i} = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Donde:

$$\frac{\partial W_{nc}}{\partial v_i} = Q_i$$

Y Q_i representa a las fuerzas generalizadas actuando en la misma dirección que la coordenada generalizada v_i.

La ecuación de Lagrange para sistemas no conservativos de n grados de libertad, entonces estaría dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_i}\right) + Q_i = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

O bien:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial v_i} = Q_i, \qquad i = 1,2,\dots,n}$$

<u>Sistemas con amortiguamiento viscoso</u>

Recordando que la potencia disipada por un amortiguador viscoso, de viscosidad constante c, puede ser calculada por medio de la siguiente expresión:

$$P = -c\dot{v}^2$$

V. Derivación de las ecuaciones diferenciales empleando métodos variacionales

5. Ecuaciones de Lagrange para sistemas no conservativos

Sistemas con amortiguamiento viscoso

Donde v representa la coordenada generalizada.

Para un sistema de n grados de libertad, la potencia total P, asociada al amortiguamiento viscoso, estaría dada por:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \left(-c\dot{v}_i{}^2\right)$$

Lo cual tras derivar con respecto a la coordenada generalizada $\dot{v}_i$:

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{v}_i} = -2\sum_{i=1}^{n} \mathrm{c}\dot{v}_i = -2Q_{i,viscoso}$$

Despejando para $Q_{i,viscoso}$:

$$Q_{i,viscoso} = -\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \dot{v}_i}$$

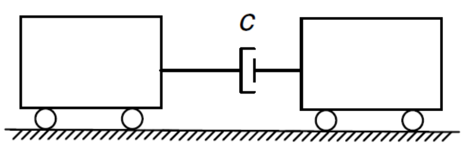
Por lo que la ecuación de Lagrange, cuando existe amortiguamiento viscoso, podría ser re escrita como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial v_i} = Q_{i,viscoso} + Q_{i,otro}, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial v_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \dot{v}_i} = Q_{i,otro}, \qquad i = 1,2,\dots,n}$$

Se hace la salvedad de que cuando el amortiguador viscoso se encuentra en medio de dos partículas, la fuerza desarrollada por el amortiguador es producto de la constante de amortiguamiento y de la velocidad relativa entre las partículas, y va en dirección opuesta a dicha velocidad relativa.

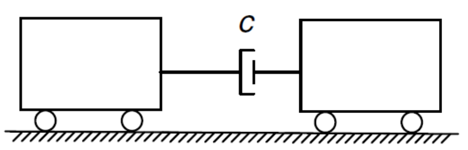
Considere por ejemplo el siguiente caso:



V. Derivación de las ecuaciones diferenciales empleando métodos variacionales

5. Ecuaciones de Lagrange para sistemas no conservativos

<u>Sistemas con amortiguamiento viscoso</u>



El carrito a la derecha del amortiguador puede ser descrito por medio de una coordenada generalizada x_2 y a la izquierda del amortiguador por una coordenada generalizada x_1. Suponiendo $x_2 > x_1$, la fuerza desarrollada F estaría dada por:

$$F = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

Y el trabajo por:

$$W = -\int_{x_{2,1}}^{x_{2,2}} c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)dx_2 + \int_{x_{1,1}}^{x_{1,2}} c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)dx_1$$

$$W = -\int_{t_1}^{t_2} c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\dot{x}_2 dt + \int_{t_1}^{t_2} c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\dot{x}_1 dt$$

$$W = -\int_{t_1}^{t_2} c\left({\dot{x}_2}^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2 + {\dot{x}_1}^2\right)dt = -\int_{t_1}^{t_2} c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 dt$$

Considerando que la potencia $P = -\frac{dW_{n.c.,viscoso}}{dt}$, entonces:

$$\boxed{P = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2}$$