V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

Objetivo:
1. Comprender las bases del cálculo de variaciones y apreciar su utilidad.
2. Introducir la teoría empleada en el análisis de placas elásticas delgadas.

1. Funcionales y cálculo de variaciones

Los métodos variaciones proveen una forma consistente para derivar las ecuaciones diferenciales de problemas físicos.

Funcionales

Una función de una variable real continua es un mapeo del dominio de la variable dentro de su rango. Por ejemplo si $y = f(x) = \operatorname{sen} x$, el domino de $f(x)$ es todo el conjunto de números reales. Sin embargo el rango de $f(x)$ son todos los valores de y dentro del intervalo $-1 \leq y \leq 1$.

El *dominio de una función* está dado por el conjunto de valores que puede tomar una función. Es decir todos los valores a los cuales se puede evaluar la función.

El *rango de una función*, está determinado por todos los valores que pueden resultar al evaluar una función.

Las funciones generalmente requieren satisfacer ciertas condiciones. Por ejemplo, la solución de una ecuación diferencial requiere satisfacer ciertas condiciones de frontera.

Un funcional por otro lado, es un mapeo de un conjunto de funciones dentro de un conjunto de números reales, de manera tal que el mapeo de cada función en ese conjunto es un número real único. En otras palabras, un funcional es una función de un conjunto de funciones que resulta en un número real.

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

1. Funcionales y cálculo de variaciones

<u>Funcionales</u>

El dominio de un funcional es el conjunto de funciones y su rango es un conjunto de número reales.

Funcionales comunes incluyen:

- $\frac{df(2)}{dx}$ el cual es un funcional cuyo dominio son todas las funciones diferenciables en $x = 2$.

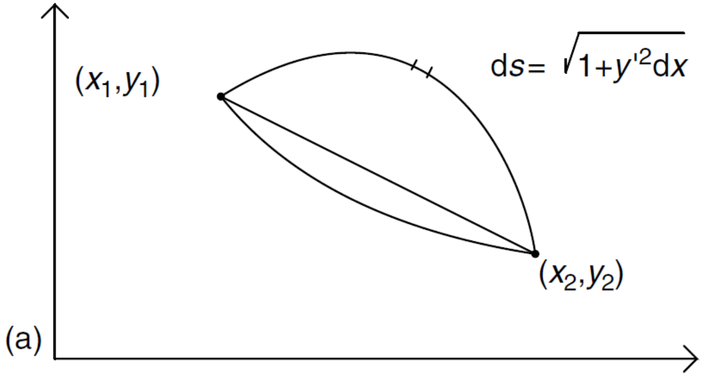
-$V = \frac{1}{2}\int_0^L EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$ el cual representa la energía potencial de una barra elástica de longitud L, módulo de elasticidad E, y sección transversal A. El dominio de este funcional son todos los desplazamientos $u(x,t)$ que satisfagan las condiciones de frontera específicas de la barra.

Particularmente nos interesan los funcionales I de la forma:

$$\boxed{I = \int_a^b F(x, y, y')dx}$$

Donde: x es una variable independiente, $y(x)$ es una función continua diferenciable en el intervalo cerrado $[a, b]$ que satisface condiciones específicas en $x = a$ y en $x = b$, $y' = dy/dx$, y F una función de x, y, y'.

Existen dos funcionales clásicos que son comúnmente utilizados para ilustrar el cálculo de variaciones. El primero consiste en que curva $y(x)$ minimiza la longitud del arco entre dos puntos. Es decir que recorrido o ruta es la más corta para unir los dos puntos.

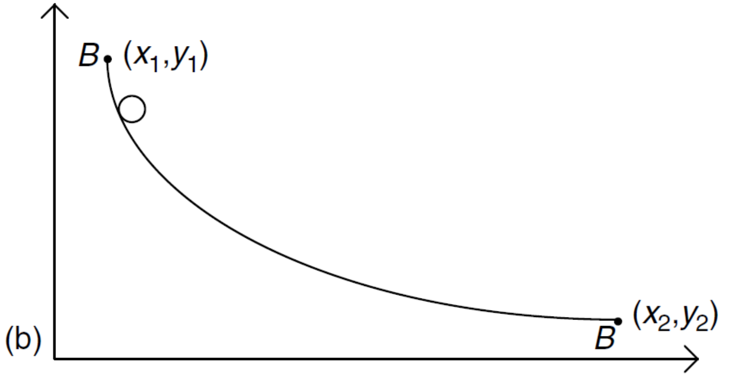


V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

1. Funcionales y cálculo de variaciones

<u>Funcionales</u>

El segundo problema clásico considera el problema del braquistócrono de Bernoulli, el cual consiste en determinar el camino entre dos puntos específico a través del cual le tomará a una partícula desplazarse sin fricción en el menor tiempo posible.



<u>Variaciones</u>

Sí $y(x)$ es una función continua de x, entonces el diferencial dy debido a un cambio en la variable x:

$$dy = \lim_{\Delta x \to 0} [y(x + \Delta x) - y(x)]$$

Lo que puede re escribirse como:

$$dy = y(x + dx) - y(x)$$

Ahora, considere que $y(x)$ es una curva entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). También considere que ε sea un parámetro pequeño y que $\eta(x)$ sea cualquier curva arbitraria que cumpla con $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ y que sea de clase C' (es decir al menos su primera derivada existe). Una familia de curvas es entonces definida por:

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$$

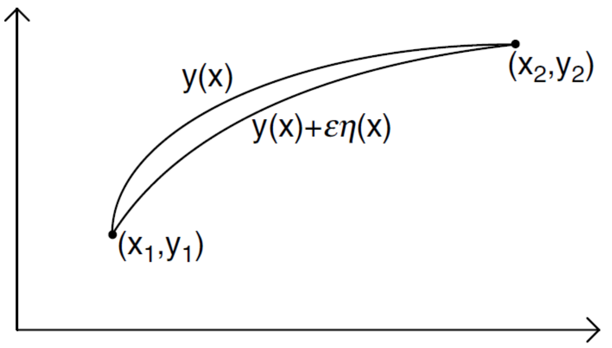
Y el cambio de $y(x)$ a $\tilde{y}(x)$ es llamado variación en y y puede ser denotado como $\delta(y)$:

$$\delta(y) = \varepsilon\eta(x)$$

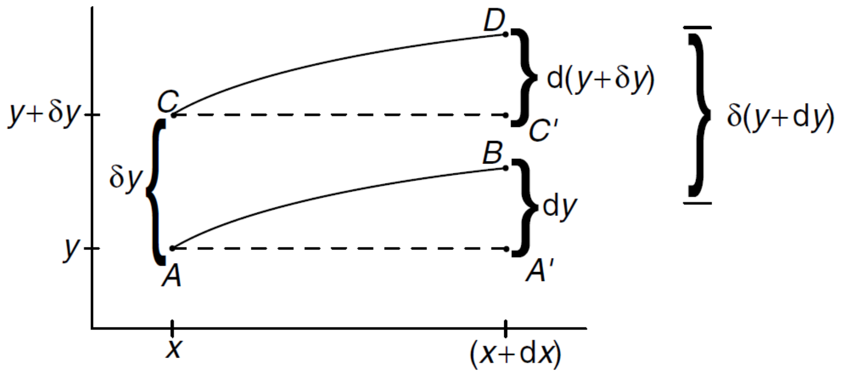
V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

1. Funcionales y cálculo de variaciones

Variaciones



Los conceptos de diferencial y variación son comparados en la siguiente imagen.



De la imagen anterior se puede ver que la distancia $A'D$ puede ser determinada como:

$$\delta y + d(y + \delta y) = dy + \delta(y + dy)$$

$$\delta y + dy + d(\delta y) = dy + \delta y + \delta(dy)$$

$$d(\delta y) = \delta(dy)$$

Lo anterior demuestra que la diferenciación y la variación, son operaciones conmutativas. Esto implica que el orden de variación y diferenciación puede ser intercambiable.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\delta y) = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

2. Ecuación de Euler-Lagrange

Consideremos que $y(x)$ es una función que minimiza el funcional:

$$I = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

Y que $\delta(y) = \varepsilon\eta(x)$ sea la variación de $y(x)$. Donde $\eta(x = a) = \eta(x = b) = 0$. Ahora bien, al remplazar $y(x)$ por $\tilde{y}(x)$ y $y'(x)$ por $\tilde{y}'(x)$ en el funcional anterior se tendrá:

$$\tilde{I} = \int_a^b F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')dx$$

El cuál solo será función del parámetro ε:

$$\boxed{\tilde{I} = f(\varepsilon)}$$

El *extremun* (máximo o mínimo del funcional) de $\tilde{I}$ se obtendrá cuando:

$$\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon} = 0$$

Lo cual cuando $\varepsilon = 0$, implica que $\delta I = 0$, y por lo tanto:

$$\left.\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')dx = 0$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')dx = 0$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\frac{d\tilde{y}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\frac{d\tilde{y}'}{d\varepsilon}\right)dx = 0$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\eta'(x)\right)dx = 0$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

2. Ecuación de Euler-Lagrange

Integrando por parte el término $\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\eta'(x)$:

$$u = \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}, dv = \eta'(x)dx, du = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\right)dx, v = \eta(x)$$

Entonces:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\eta'(x)dx = \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\ \eta(x)\Big|_a^b - \int_a^b \left[\eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\right)\right]dx$$

Por lo tanto:

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'}\right)\right]dx = 0$$

Teniendo presente que cuando $\varepsilon = 0$

$$y = \tilde{y}, y' = \tilde{y}'$$

La expresión anterior podría re escribirse como:

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx = 0$$

En la expresión anterior si $\eta(x)$ es cualquier función arbitraria para que se cumpla la igualdad se tendrá que:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0}$$

Esta última ecuación es conocida como la ecuación de Euler-Lagrange y tras ser resuelta da el valor de F que extremiza al funcional I.

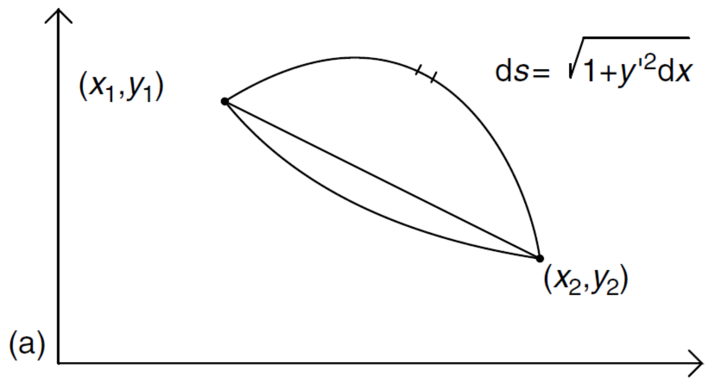
<u>Ruta más corta para unir dos puntos</u>

Como ejemplo consideraremos que curva $y(x)$ minimiza el funcional I asociado con la longitud del arco entre dos puntos.

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

2. Ecuación de Euler-Lagrange

Ruta más corta para unir dos puntos



$$I = \int_a^b dS = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$I = \int_a^b \left(\sqrt{dx^2 + dy^2}\right)\frac{dx}{dx}$$

$$I = \int_{x1}^{x2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) dx$$

Empleando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$F = \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{2}\left[\frac{2y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\right]\frac{dy'}{dy'}$$

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\right) = 0$$

Lo cual tras integrar una vez con respecto a x es igual a:

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1$$

$$\frac{(y')^2}{1 + (y')^2} = {C_1}^2 \rightarrow (y')^2 = {C_1}^2 + (y')^2{C_1}^2$$

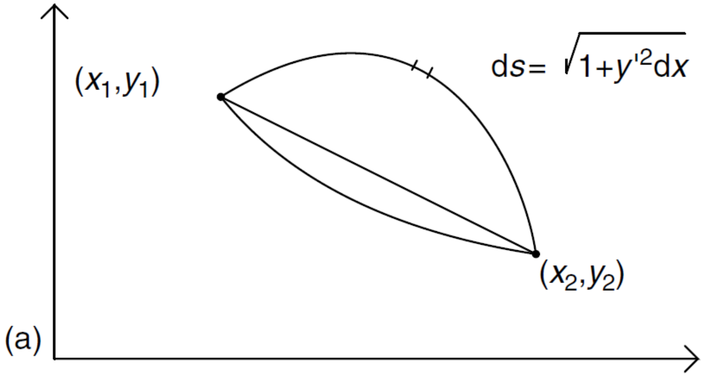
$$(y')^2(1 - {C_1}^2) = {C_1}^2$$

$$y' = \sqrt{\frac{{C_1}^2}{1 - {C_1}^2}} = C_2$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

2. Ecuación de Euler-Lagrange

Ruta más corta para unir dos puntos



$$\frac{dy}{dx} = C_2$$

$$\boxed{y = C_2 x + C_3}$$

Esto último prueba un hecho conocido, la ruta más corta para unir dos puntos es una recta.

En caso tal que se trate de un funcional que dependa de n variables dependientes:

$$I = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_{n,} \, y'_1, y'_2, \dots, y'_n \,) dx$$

Se tendrá la siguiente expresión para las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_i}\right) = 0, \qquad i = 1,2, \dots, n}$$

3. Funcionales con dos variables independientes (x, y).

$$I = \int_0^a \int_0^b F(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{yy}, w_{xy}, w_{yx}) \, dy dx$$

Aquí se busca la función $w(x,y)$ que extremice al funcional I.

Se define la variación de $w(x,y)$ de la siguiente manera:

$$\delta(w) = \epsilon \eta(x,y)$$

Donde:

$$\epsilon \neq f(x,y)$$

$$\eta(x,y) \rightarrow \text{Es arbitraria, de clase } C''$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

3. Funcionales con dos variables independientes (x, y).

Donde:

$$\eta(0,y) = \eta(a,y) = \eta(x,0) = \eta(x,b) = 0$$

$$\eta_x(0,y) = \eta_x(a,y) = \eta_x(x,0) = \eta_x(x,b) = 0$$

$$\eta_y(0,y) = \eta_y(a,y) = \eta_y(x,0) = \eta_y(x,b) = 0$$

Sea $\widetilde{w}(x,y) = w(x,y) + \epsilon\eta(x,y)$

$$\widetilde{w}_x(x,y) = w_x(x,y) + \epsilon\eta_x(x,y),$$

$$\widetilde{w}_{xx}(x,y) = w_{xx}(x,y) + \epsilon\eta_{xx}(x,y),$$

$$\widetilde{w}_y(x,y) = w_y(x,y) + \epsilon\eta_y(x,y),$$

$$\widetilde{w}_{yy}(x,y) = w_{yy}(x,y) + \epsilon\eta_{yy}(x,y),$$

$$\widetilde{w}_{xy}(x,y) = w_{xy}(x,y) + \epsilon\eta_{xy}(x,y),$$

$$\widetilde{w}_{yx}(x,y) = w_{yx}(x,y) + \epsilon\eta_{yx}(x,y)$$

$$\tilde{I} = \int_0^a \int_0^b F(x, y, \widetilde{w}, \widetilde{w}_x, \widetilde{w}_y, \widetilde{w}_{xx}, \widetilde{w}_{yy}, \widetilde{w}_{xy}, \widetilde{w}_{yx})\, dydx$$

$$\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon} = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}}\frac{d\widetilde{w}}{d\varepsilon}\right) dydx +$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_x}\frac{d\widetilde{w}_x}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_{xx}}\frac{d\widetilde{w}_{xx}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_y}\frac{d\widetilde{w}_y}{d\varepsilon}\right) dydx +$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_{yy}}\frac{d\widetilde{w}_{yy}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_{xy}}\frac{d\widetilde{w}_{xy}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_{yx}}\frac{d\widetilde{w}_{yx}}{d\varepsilon}\right) dydx$$

$$\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon} = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}}\eta + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_x}\eta_x + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_{xx}}\eta_{xx}\right) dydx +$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_y}\eta_y + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_{yy}}\eta_{yy} + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_{xy}}\eta_{xy} + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_{yx}}\eta_{yx}\right) dydx$$

$$\left.\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$$

Y el *extremun* (máximo o mínimo del funcional) de $\tilde{I}$ se obtendrá cuando:

$$\left.\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

3. Funcionales con dos variables independientes (x, y).

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w}\eta + \frac{\partial F}{\partial w_x}\eta_x + \frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\eta_{xx} + \frac{\partial F}{\partial w_y}\eta_y \right) dydx + \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w_{yy}}\eta_{yy} + \frac{\partial F}{\partial w_{xy}}\eta_{xy} + \frac{\partial F}{\partial w_{yx}}\eta_{yx} \right) dydx = 0$$

¿Cómo se pueden efectuar estas integrales de superficie?

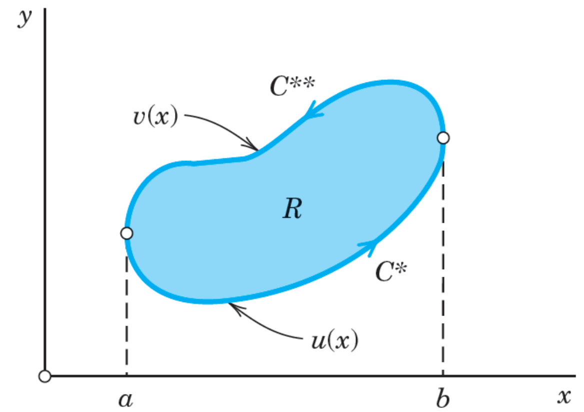
Teorema de Green

El teorema de Green permite efectuar la transformación entre integrales de superficie y de línea.

Considere R una región delimitada cerrada en el plano xy cuya frontera C consiste de curvas suaves y finitas. Sea $F_1(x, y)$ y $F_2(x, y)$ funciones continuas que tienen derivadas parciales continuas $\partial F_1/\partial y$ y $\partial F_2/\partial x$ en algún dominio dentro de R. Entonces:

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy)$$

Para probar el teorema anterior considere inicialmente que $F_2 = 0$:



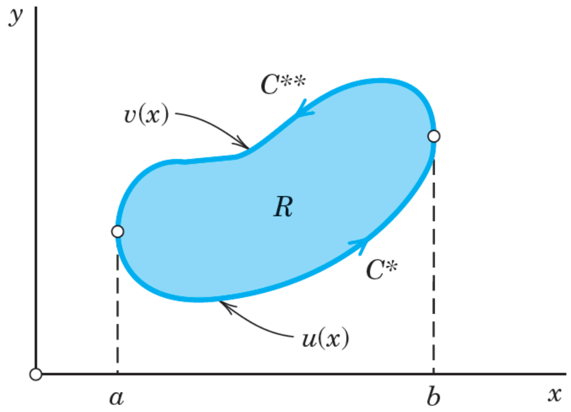
Aquí $a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)$.

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \int_a^b \left(F_1(x, y)\Big|_{u(x)}^{v(x)} \right) dx = \int_a^b F_1\big(x, v(x)\big) - F_1\big(x, u(x)\big) dx$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

3. Funcionales con dos variables independientes (x, y).

Teorema de Green



$$\int_a^b F_1(x, v(x))dx - \int_a^b F_1(x, u(x))dx =$$

$$-\int_b^a F_1(x, v(x))dx - \int_a^b F_1(x, u(x))dx$$

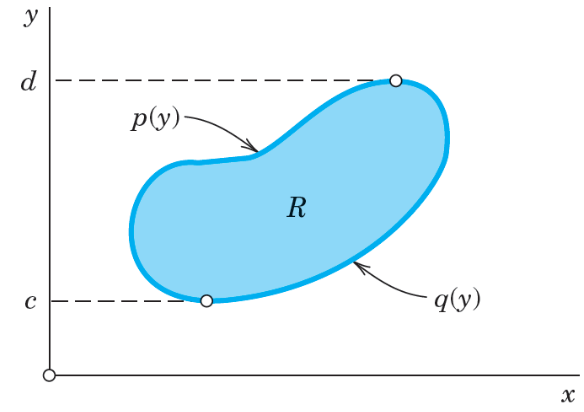
En vista de que $y = v(x)$ es la curva C^{**} y que $y = u(x)$ es la curva C^* la integral anterior podría re escribirse como integrales de línea:

$$-\left(\int_{C**} F_1(x, y)dx + \int_{C*} F_1(x, y)dx\right) = -\oint_C (F_1(x, y)dx)$$

Por lo tanto:

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = -\oint_C (F_1(x, y)dx)$$

Similarmente si $F_1 = 0$:

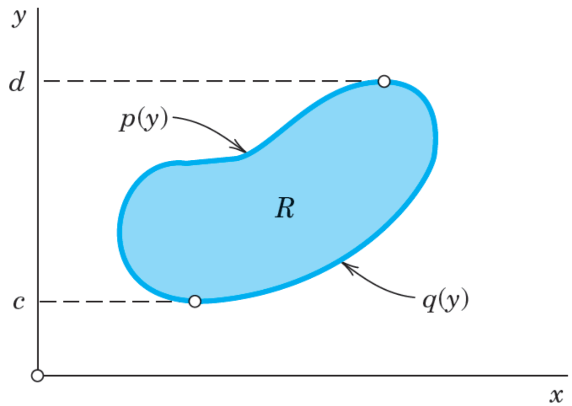


Aquí $q(y) \leq x \leq p(y), c \leq y \leq d.$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

3. Funcionales con dos variables independientes (x, y).

Teorema de Green



$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dxdy = \int_{p(y)}^{q(y)} \int_c^d \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dxdy =$$

$$\int_c^d \left(F_2(x,y)\Big|_{p(y)}^{q(y)}\right) dy =$$

$$\int_c^d \big(F_2(q(y),y) - F_2(p(y),y)\big) dy =$$

$$\int_c^d \big(F_2(q(y),y)\big) dy + \int_d^c \big(F_2(p(y),y)\big) dy$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dxdy = \oint_C \left(F_2(x,y)dy\right)$$

La superposición de los resultados anteriores prueba el teorema de Green.

Caso especial $F_1 = \beta G_1, F_2 = \beta G_2$, donde $\beta = f(x,y)$:

$$\iint_R \left(\frac{\partial(\beta G_2)}{\partial x} - \frac{\partial(\beta G_1)}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C (\beta G_1 dx + \beta G_2 dy)$$

$$\iint_R \left(G_2 \frac{\partial \beta}{\partial x} - G_1 \frac{\partial \beta}{\partial y}\right) dxdy =$$

$$-\iint_R \beta \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) dxdy + \oint_C \beta(G_1 dx + G_2 dy)$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

3. Funcionales con dos variables independientes (x, y).

Algunos ejemplos de la aplicación del teorema de Green de interés.

a.

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\eta_x\right) dydx$$

Sea:

$$G_1 = 0, \beta = \eta, G_2 = \frac{\partial F}{\partial w_x}$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\eta_x\right) dydx = -\iint_R \eta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\right) dxdy + \oint_C \eta \left(\frac{\partial F}{\partial w_x} dy\right)$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\eta_x\right) dydx = -\iint_R \eta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\right) dxdy$$

b.

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\eta_{xx}\right) dydx$$

Sea:

$$G_1 = 0, \beta = \eta_x, G_2 = \frac{\partial F}{\partial w_{xx}}$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\eta_{xx}\right) dydx = -\int_0^a \int_0^b \eta_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\right) dydx + \oint_C \eta_x \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} dy\right)$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

3. Funcionales con dos variables independientes (x, y).

Algunos ejemplos de la aplicación del teorema de Green de interés.

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \eta_{xx}\right) dydx = \int_0^a \int_0^b \eta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\right) dydx -$$

$$\oint_C \eta \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\right) dy\right) + \oint_C \eta_x \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} dy\right)$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \eta_{xx}\right) dydx = \int_0^a \int_0^b \eta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\right) dydx$$

c.

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \eta_{xy}\right) dydx$$

Sea:

$$G_1 = 0, \beta = \eta_y, G_2 = \frac{\partial F}{\partial w_{xy}}$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \eta_{xy}\right) dydx = -\int_0^a \int_0^b \eta_y \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}}\right) dydx +$$

$$\oint_C \eta_y \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} dy\right)$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \eta_{xy}\right) dydx = \int_0^a \int_0^b \eta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}}\right) dydx +$$

$$\oint_C \eta \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}}\right) dx\right) \oint_C \eta_y \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} dy\right)$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \eta_{xy}\right) dydx = \int_0^a \int_0^b \eta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}}\right) dydx$$

Por lo tanto:

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

3. Funcionales con dos variables independientes (x, y).

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w}\eta + \frac{\partial F}{\partial w_x}\eta_x + \frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\eta_{xx} + \frac{\partial F}{\partial w_y}\eta_y \right) dydx +$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w_{yy}}\eta_{yy} + \frac{\partial F}{\partial w_{xy}}\eta_{xy} + \frac{\partial F}{\partial w_{yx}}\eta_{yx} \right) dydx = 0$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_0^a \int_0^b \eta \left(\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_y}\right) \right) dydx +$$

$$\int_0^a \int_0^b \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{yy}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{yx}}\right) \right) dydx = 0$$

Consecuentemente:

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_y}\right) + \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{yy}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{yx}}\right) = 0 \end{gathered}}$$

4. Ecuación diferencial que rige las deflexiones pequeñas en placas.

Las suposiciones que típicamente se hacen en el estudio de las deflexiones en placas delgadas son las hipótesis de Kirchhoff (vea el inicio de la sección 9.1.2 de su libro de texto).

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

4. Ecuación diferencial que rige las deflexiones pequeñas en placas.

-Principio de conservación de energía: Para un cuerpo elástico en ausencia de efectos térmicos e inerciales, la energía potencial o de deformación del cuerpo será igual al trabajo hecho por las cargas aplicadas.

-Principio de energía potencial mínima: Dentro de todos los posibles desplazamientos consistentes con las reacciones, el estado correcto de desplazamiento es aquel que minimice la energía potencial.

Para el caso particular de deflexiones pequeñas en placas $w(x,y)$ sujetas únicamente a una carga lateral $P(x,y)$, la energía de deformación V esta dada por:

$$V = \int_0^a \int_0^b \frac{D}{2}\left\{\left(w_{xx}+w_{yy}\right)^2 - 2(1-v)\left[(w_{xx})(w_{yy}) - \left(w_{xy}\right)^2\right]\right\} dydx$$

$$-\int_0^a \int_0^b P(x,y)w\, dydx$$

Donde:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)}$$

Aquí E es el modulo de Young, h el espesor de la placa, v la razón de Poisson, a la dimensión de la placa en la dirección x, y b su dimensión en la dirección y.

Por lo tanto el funcional de interés es:

$$F = \frac{D}{2}\left\{\left(w_{xx}+w_{yy}\right)^2 - 2(1-v)\left[(w_{xx})(w_{yy}) - \left(w_{xy}\right)^2\right]\right\}$$

$$-Pw$$

Aquí:

$$\frac{\partial F}{\partial w} = -P, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\right) = 0$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

4. Ecuación diferencial que rige las deflexiones pequeñas en placas.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{D}{2}\{2(w_{xx} + w_{yy}) - 2(1-v)(w_{yy})\}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\right) = \frac{D}{2}\{2(w_{xxxx} + w_{xxyy}) - 2(1-v)(w_{xxyy})\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\right) = D(w_{xxxx} + vw_{xxyy})$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{y}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{yy}}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{D}{2}\{2(w_{xx} + w_{yy}) - 2(1-v)(w_{xx})\}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{yy}}\right) = D(vw_{xxyy} + w_{yyyy})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{D}{2}\{-2(1-v)[-2(w_{xy})]\}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}}\right) = 2D(1-v)(w_{xxyy})$$

De manera tal que la ecuación diferencial resultante es:

$$-P + D(w_{xxxx} + vw_{xxyy}) + D(vw_{xxyy} + w_{yyyy}) + 2D(1-v)(w_{xxyy}) = 0$$

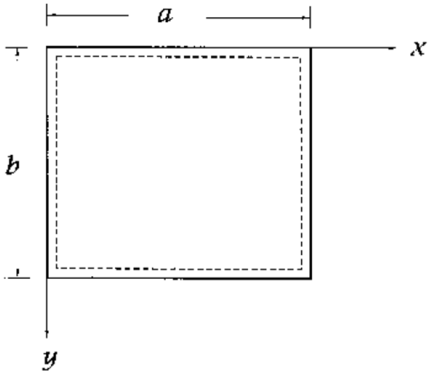
O Bien:

$$\boxed{D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right] = P}$$

Una deducción alternativa a la aquí presentada puede ser apreciada en la sección 9.1.2 de su libro de texto.

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

5. Resolución de la ecuación diferencial que rige las deflexiones pequeñas en placas para determinadas condiciones de frontera.



Método de Navier (Placa simplemente apoyada en sus extremos y sujeta a una carga lateral $P(x,y)$)

Ecuación diferencial:

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right]=P$$

Condiciones de frontera:

$$w=0\Big|_{x=0,a}, \qquad w=0\Big|_{y=0,b},$$

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-v\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0\Bigg|_{x=0,a},$$

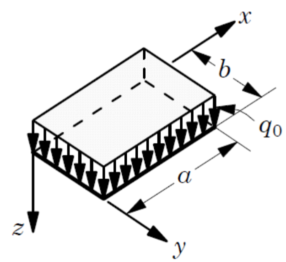
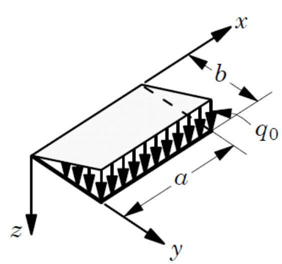
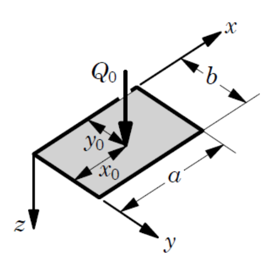
$$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-v\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0\Bigg|_{y=0,b}$$

Se supondrá que tanto la carga como la deflexión en la placa pueden ser modeladas a través de series dobles de Fourier:

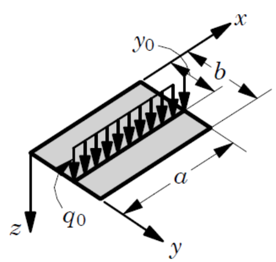
$$P(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}P_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$P_{mn}=\frac{\int_0^a\int_0^b\left[P(x,y)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right]dxdy}{\int_0^a\int_0^b\left[\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right]^2dxdy}$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

Loading	Coefficients q_{mn}
	**Uniform load** $q(x,y) = q_0$ $q_{mn} = \frac{16 q_0}{\pi^2 mn}$ $(m, n = 1, 3, 5, \cdots)$
	**Hydrostatic load** $q(x,y) = q_0 \frac{y}{b}$ $q_{mn} = \frac{8 q_0}{\pi^2 mn}(-1)^{n+1}$ $(m = 1, 3, 5, \cdots)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$
	**Point load** [i.e., Q_0 at (x_0, y_0)] $q_{mn} = \frac{4 Q_0}{ab} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n \pi y_0}{b}$ $(m, n = 1, 2, 3, \cdots)$

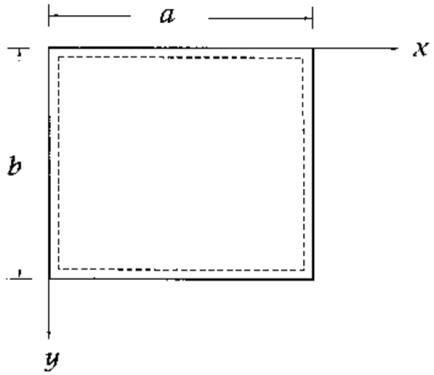
V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

Loading	Coefficients q_{mn}
	**Line load** $q(x,y) = q_0\ \delta(y - y_0)$ $q_{mn} = \frac{8q_0}{\pi b m} \sin \frac{n\pi y_0}{b}$ $(m = 1, 3, 5, \cdots)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

5. Resolución de la ecuación diferencial que rige las deflexiones pequeñas en placas para determinadas condiciones de frontera.

Método de Navier (Placa simplemente apoyada en sus extremos y sujeta a una carga lateral $P(x, y)$)



$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$D\left[w_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + w_{mn}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 + 2w_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] = P_{mn}$$

$$w_{mn} = \frac{P_{mn}}{D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 + 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}$$

$$w_{mn} = \frac{P_{mn}}{D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2}$$

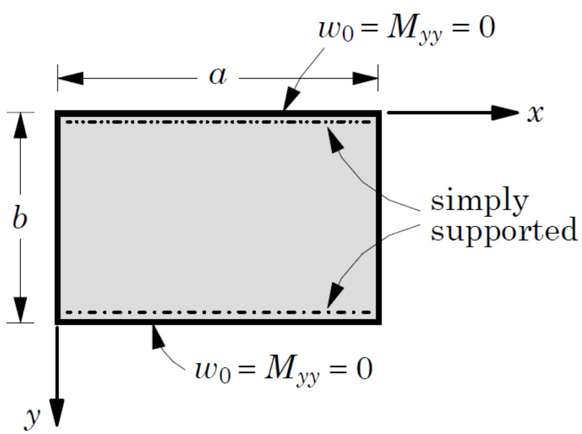
Por lo tanto:

$$\boxed{w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{P_{mn}}{D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)}$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

5. Resolución de la ecuación diferencial que rige las deflexiones pequeñas en placas para determinadas condiciones de frontera.

<u>Método de Levy (placa con al menos dos bordes simplemente apoyados en sus extremos y sujeta a una carga lateral $P(x,y)$)</u>



Ecuación diferencial:

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right] = P$$

Condiciones de frontera:

$$w = 0\Big|_{y=0,b},$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0\Bigg|_{y=0,b}$$

Sea:

$$\boxed{W(x,y) = W_h(x,y) + W_p(x,y)}$$

Problema homogéneo.

$$W_h(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right] = 0$$

$$\frac{d^4 f_n(x)}{dx^4} - 2\left(\frac{d^2 f_n(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 = 0$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

5. Resolución de la ecuación diferencial que rige las deflexiones pequeñas en placas para determinadas condiciones de frontera.

Método de Levy (placa con al menos dos bordes simplemente apoyados en sus extremos y sujeta a una carga lateral $P(x,y)$)

Considerando que:

$$f_n(x) = e^{\lambda x}$$

$$\lambda^4 - 2\lambda^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{n\pi}{b}, \qquad \lambda_{3,4} = -\frac{n\pi}{b}$$

Por lo tanto:

$$f_n(x) = A_n e^{\lambda_1 x} + B_n x e^{\lambda_1 x} + C_n e^{\lambda_3 x} + D_n x e^{\lambda_1 x}$$

$$\boxed{W_h(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n e^{\lambda_1 x} + B_n x e^{\lambda_1 x} + C_n e^{\lambda_3 x} + D_n x e^{\lambda_1 x}\right]\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}$$

Problema no homogéneo

Sea:

$$W_p(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$P(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$P_n(x) = \frac{\int_0^b P(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy}{\int_0^b\left[\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right]^2 dy}$$

Lo que al remplazar en la ecuación diferencial da:

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right] = P$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

5. Resolución de la ecuación diferencial que rige las deflexiones pequeñas en placas para determinadas condiciones de frontera.

Método de Levy (placa con al menos dos bordes simplemente apoyados en sus extremos y sujeta a una carga lateral $P(x,y)$)

Problema no homogéneo

$$\boxed{D\left[\frac{d^4 g_n(x)}{dx^4} - 2\left(\frac{d^2 g_n(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right] = P_n(x)}$$

Tras resolver la ecuación ordinaria anterior y encontrar $g_n(x)$ se puede determinar $W_p(x,y)$ y consecuentemente $W(x,y)$. Las constantes A_n, B_n, C_n, D_n dependen de las condiciones de frontera en los otros dos bordes.

Típicamente se suele suponer que $g_n(x)$ es una función que presenta la misma forma que $P_n(x)$.

6. Vibración de placas.

Principio extendido de Hamilton.

$$\boxed{\delta\int_{t_1}^{t_2}(\Pi - \mathrm{T})dt = 0}$$

Donde Π es la energía de deformación y T la energía cinética.

$$\Pi - \mathrm{T} = \int_0^a\int_0^b \frac{D}{2}\left\{\left(w_{xx} + w_{yy}\right)^2\right\}dxdy -$$

$$\int_0^a\int_0^b \frac{D}{2}\left\{2(1-v)\left[(w_{xx})(w_{yy}) - \left(w_{xy}\right)^2\right]\right\}dxdy -$$

$$\int_0^a\int_0^b Pw\,dxdy - \int_0^a\int_0^b \rho h\,(w_t)^2 dxdy$$

Aquí debe comentarse que no se está considerando el momento de inercia de masa de la barra.

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

6. Vibración de placas.

Funcional y ecuación diferencial que rige el problema de vibración en placas.

$$F = f\left(w, w_t, w_{xx}, w_{yy}, w_{xy}\right)$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \int_0^b F\left(w, w_t, w_{xx}, w_{yy}, w_{xy}\right) dxdydt$$

Aquí se busca la función $w(x, y, t)$ que extremice la funcional I.

Se define la variación de $w(x, y)$ de la siguiente manera:

$$\delta(w) = \epsilon\eta(x, y, t)$$

Donde:

$$\epsilon \neq f(x, y, t)$$

$$\eta(x, y, t) \rightarrow \text{Es arbitraria, de clase } C''$$

$$(0, y, t) = \eta(a, y, t) = \eta(x, 0, t) = \eta(x, b, t) = 0$$

$$\eta(x, y, t_1) = \eta(x, y, t_2) = 0$$

$$\eta_x(0, y, t) = \eta_x(a, y, t) = \eta_x(x, 0, t) = \eta_x(x, b, t) = 0$$

$$\eta_y(0, y, t) = \eta_y(a, y, t) = \eta_y(x, 0, t) = \eta_y(x, b, t) = 0$$

Sea $\widetilde{w}(x, y, t) = w(x, y, t) + \epsilon\eta(x, y, t)$

$$\tilde{I} = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \int_0^b F\left(\widetilde{w}, \widetilde{w}_t, \widetilde{w}_{xx}, \widetilde{w}_{yy}, \widetilde{w}_{xy}\right) dxdydt$$

$$\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}} \frac{d\widetilde{w}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_t} \frac{d\widetilde{w}_t}{d\varepsilon}\right) dxdydt +$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_{xx}} \frac{d\widetilde{w}_{xx}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_{yy}} \frac{d\widetilde{w}_{yy}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_{xy}} \frac{d\widetilde{w}_{xy}}{d\varepsilon}\right) dxdydt$$

$$\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}} \eta + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_t} \eta_t + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_{xx}} \eta_{xx}\right) dxdydt +$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_{yy}} \eta_{yy} + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{w}_{xy}} \eta_{xy}\right) dxdydt$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

6. Vibración de placas.

Funcional y ecuación diferencial que rige el problema de vibración en placas.

$$\left.\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$$

Y el *extremun* (máximo o mínimo del funcional) de $\tilde{I}$ se obtendrá cuando:

$$\left.\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^a\int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w}\eta + \frac{\partial F}{\partial w_t}\eta_t + \frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\eta_{xx}\right) dxdydt + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^a\int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial w_{yy}}\eta_{yy} + \frac{\partial F}{\partial w_{xy}}\eta_{xy}\right) dxdydt = 0$$

Lo que tras emplear la primera identidad de Green e integración por partes lleva a:

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^a\int_0^b \eta\left[\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial w_t}\right)\right] dxdydt +$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^a\int_0^b \eta\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{yy}}\right)\right] dxdydt +$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^a\int_0^b \eta\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}}\right)\right] dxdydt = 0$$

En vista de que $\eta(x,y,t)$ es una función arbitraria lo que está en corchete debe ser igual a cero. Y considerando el principio extendido de Hamilton se tendrá que la ecuación diferencial que rige el problema es:

$$\boxed{D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\right] = P - \rho h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)}$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

6. Vibración de placas.

Vibración libre ($P(x,y,t)=0$).

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right]+\rho h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)=0$$

Sea:

$$w(x,y,t)=J(x,y)(A\sin\omega t+B\sin\omega t)$$

Aquí A,B dependen de las condiciones iniciales y la forma de $J(x,y)$ de las condiciones de frontera.

Placa simplemente apoyada.

$$w=0\Big|_{x=0,a}, \qquad w=0\Big|_{y=0,b},$$

$$M_x=0\Big|_{x=0,a},$$

$$M_y=0\Big|_{y=0,b}$$

Sea:

$$J(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Lo que al ser remplazado en la ecuación diferencial lleva a la siguiente expresión:

$$D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4+2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right]-\rho h(\omega)^2=0$$

$$\boxed{\omega_{mn}=\left(\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\right)\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}$$

Siendo la frecuencia fundamental ω_{11}:

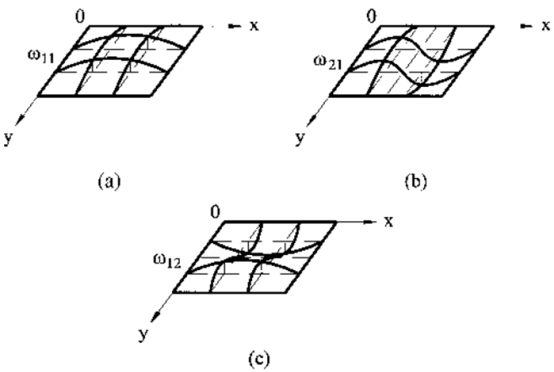
$$\omega_{11}=\left(\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\right)\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right]$$

En la siguiente figura se aprecia ω_{11} (a), ω_{21} (b),ω_{12} (c):

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

6. Vibración de placas.

Vibración libre ($P(x, y, t) = 0$).



Vibración forzada ($P(x, y, t) \neq 0$).

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right] + \rho h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = P$$

$$w = 0\Big|_{x=0,a}, \qquad w = 0\Big|_{y=0,b},$$

$$M_x = 0\Big|_{x=0,a}, \qquad M_y = 0\Big|_{y=0,b}$$

$$w(x, y, 0) = u_0(x, y), \qquad \dot{w}(x, y, 0) = v_0(x, y)$$

Aquí el punto encima de la variable w representa a $\partial w/\partial t$.

Sea:

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$P(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Por lo tanto:

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

6. Vibración de placas.

Vibración forzada ($P(x,y,t) \neq 0$).

$$U_{mn} = \frac{\int_0^a \int_0^b u_0(x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dxdy}{\int_0^a \int_0^b \left[\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\right]^2 \left[\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right]^2 dxdy}$$

$$V_{mn} = \frac{\int_0^a \int_0^b v_0(x,y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dxdy}{\int_0^a \int_0^b \left[\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\right]^2 \left[\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right]^2 dxdy}$$

$$P_{mn}(t) = \frac{\int_0^a \int_0^b P(x,y,t) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dxdy}{\int_0^a \int_0^b \left[\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\right]^2 \left[\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right]^2 dxdy}$$

Lo que al ser remplazado en la ecuación diferencial lleva a la siguiente expresión:

$$D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2 W_{mn}(t) + (\rho h)\ddot{W}_{mn}(t) = P_{mn}(t)$$

Definiendo a M_{mn} como:

$$M_{mn} = \left(\frac{D}{\rho h}\right)\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2$$

Lo anterior podría ser re escrito como:

$$\ddot{W}_{mn}(t) + M_{mn}W_{mn}(t) = \left(\frac{1}{\rho h}\right)P_{mn}(t)$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que puede ser resuelta empleando el método de transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{\ddot{W}_{mn}(t) + M_{mn}W_{mn}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\left(\frac{1}{\rho h}\right)P_{mn}(t)\right\}$$

$$s^2W_{mn}(s) - sW_{mn}(0) - \dot{W}_{mn}(0) + M_{mn}W_{mn}(s) = \left(\frac{1}{\rho h}\right)P_{mn}(s)$$

Donde:

$$P_{mn}(s) = \mathcal{L}\{P_{mn}(t)\}$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

6. Vibración de placas.

<u>Vibración forzada ($P(x, y, t) \neq 0$).</u>

Lo anterior también se puede re escribir como:

$$W_{mn}(s) = \left(\frac{1}{\rho h}\right)\frac{P_{mn}(s)}{s^2 + M_{mn}} + \frac{sU_{mn}}{s^2 + M_{mn}} + \frac{V_{mn}}{s^2 + M_{mn}}$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace se encuentra $W_{mn}(t)$:

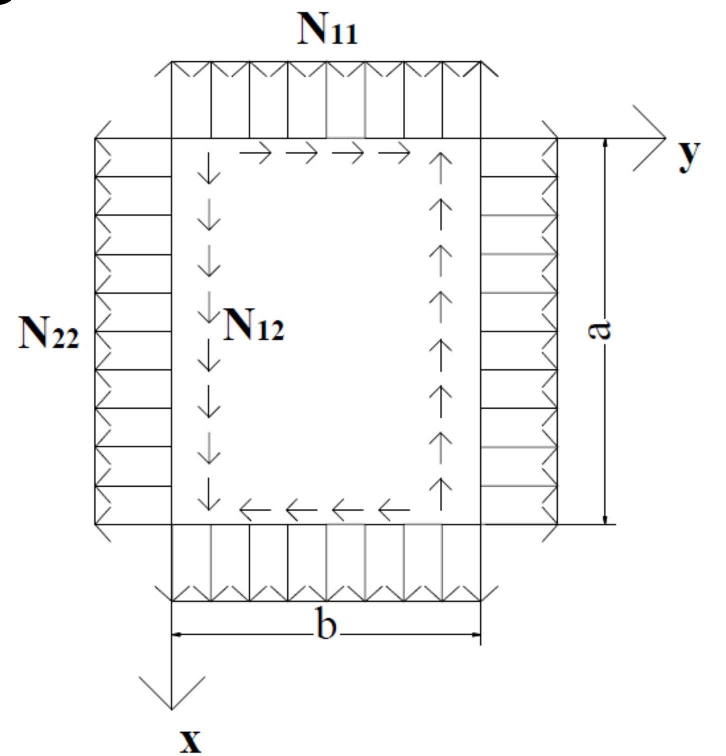
$$W_{mn}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{\rho h}\right)\frac{P_{mn}(s)}{s^2 + M_{mn}} + \frac{sU_{mn}}{s^2 + M_{mn}} + \frac{V_{mn}}{s^2 + M_{mn}}\right\}$$

$$\boxed{W_{mn}(t) = F_{mnp}(t) + U_{mn}\cos\left(\sqrt{M_{mn}}t\right) + \frac{V_{mn}}{\sqrt{M_{mn}}}\sin\left(\sqrt{M_{mn}}t\right)}$$

Donde:

$$F_{mnp}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{\rho h}\right)\frac{P_{mn}(s)}{s^2 + M_{mn}}\right\}$$

7. Pandeo general (estabilidad) de placas.



En el caso de que existan cargas en plano el funcional resultante es el siguiente:

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

7. Pandeo general (estabilidad) de placas.

$$F = \frac{D}{2}\left\{\left(w_{xx} + w_{yy}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[(w_{xx})(w_{yy}) - \left(w_{xy}\right)^2\right]\right\} +$$

$$\frac{1}{2}\left\{N_{11}(w_x)^2 + 2N_{12}\left(w_x w_y\right) + N_{22}\left(w_y\right)^2\right\} - Pw$$

Y la ecuación diferencial resultante es la siguiente:

$$\boxed{D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right] = P + \left[N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]}$$

En vista de que:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\right) = N_{11}w_{xx} + N_{12}w_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_y}\right) = N_{12}w_{xy} + N_{22}w_{yy}$$

Para más detalles vea el final de la sección 3 de la presente presentación.

<u>Placa simplemente apoyada, donde $P = N_{12} = 0$, y N_{11}, N_{22} son cargas uniformemente distribuidas en compresión.</u>

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]$$

$$= N_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$w = 0\Big|_{x=0,a}, \qquad w = 0\Big|_{y=0,b},$$

$$M_x = 0\Big|_{x=0,a}, \qquad M_y = 0\Big|_{y=0,b}$$

Sea:

$$N_{11} = -q_x . N_{22} = -q_y$$

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Lo que al ser remplazado en la ecuación diferencial da:

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

7. Pandeo general (estabilidad) de placas.

$$D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2 w_{mn}=\left[q_x\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+q_y\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]w_{mn}$$

Caso # 1: $q_x=q_y=q$.

$$D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2=q_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]$$

$$q_{mn}=D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]$$

Por lo que la carga crítica $q_{crítica}$ estará dada por:

$$\boxed{q_{11}=q_{crítica}=D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}$$

Caso # 2: $q_x=q, q_y=\lambda q$.

Aquí $\lambda>0$.

$$D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2=q_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\lambda\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]$$

$$q_{mn}=\frac{D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2}{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\lambda\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}$$

Lo cual puede ser re escrito como:

$$q_{mn}=\frac{\pi^2D\left[\left(\frac{mb}{a}\right)^2+n^2\right]^2}{b^2\left[\left(\frac{mb}{a}\right)^2+\lambda n^2\right]}$$

Sí $a>b$, se alcanzará el valor de la carga crítica solo cuando $n=1$ y cuando se tenga un valor de m dado por:

$$\frac{dq_{m1}}{dm}=\frac{\pi^2D\left[\left(\frac{mb}{a}\right)^2+1\right]^2}{b^2\left[\left(\frac{mb}{a}\right)^2+\lambda\right]}=0$$

V. Cálculo de variaciones y breve introducción al análisis de placas elásticas delgadas

8. Esfuerzos y deformaciones.

A partir de la deflexión de la placa y de las propiedades del material se pueden determinar los esfuerzos y las deformaciones. Para más detalles refiérase a un libro de elasticidad (ver capítulo 1 y 3 del libro *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells* de J.N. Reddy por ejemplo).