III. Vibración con excitación armónica

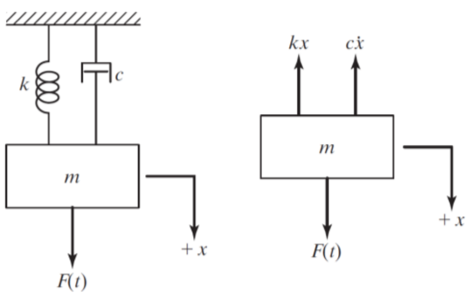
Objetivos:
1. Definir que es vibración con excitación armónica.
2. Analizar la respuesta de un sistema no amortiguado con excitación armónica.
3. Analizar la respuesta de un sistema amortiguado con excitación armónica.
4. Analizar la respuesta de un sistema amortiguado con movimiento armónico de la base.
5. Analizar la respuesta de un sistema amortiguado con desbalance rotacional.
6. Mostrar brevemente el procedimiento a seguir para resolver la ecuación diferencial de movimiento por medio del uso de la transformada de Laplace.

1. Introducción

Un sistema mecánico o estructural se dice que está sujeto a vibración forzada cuando energía externa es suplida al sistema durante la vibración. Energía externa puede ser suplida ya sea por medio de una fuerza aplicada o bien por medio de una excitación de desplazamiento impuesta. La fuerza aplicada o la excitación de desplazamiento puede ser armónica, no armónica pero periódica, no periódica, o aleatoria.

La respuesta de un sistema a una excitación armónica se conoce como respuesta armónica.

2. Ecuación de Movimiento



Sí una fuerza $F(t)$ actúa sobre un sistema masa-resorte-amortiguador viscoso la ecuación de movimiento puede ser obtenida usando la segunda ley de Newton

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)}$$

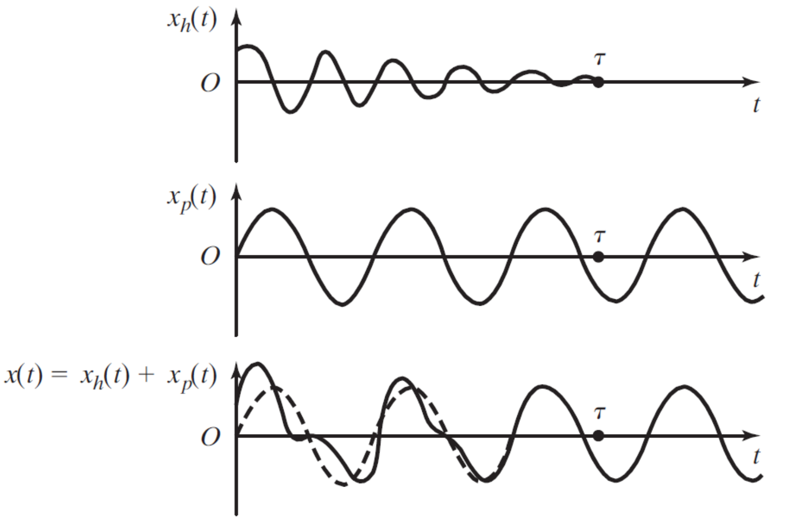
III. Vibración con excitación armónica

2. Ecuación de Movimiento

En vista de que esta ecuación es no uniforme, su solución general $x(t)$ esta dada por la suma de su solución homogénea, $x_h(t)$, y de la solución particular, $x_p(t)$. La solución homogénea, es la solución de la ecuación homogénea

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

La cual representa la vibración libre del sistema. Esta vibración libre se reduce con el tiempo bajo las tres posible condiciones de amortiguamiento, por lo tanto la solución general de la ecuación que rige la vibración forzada del sistema en cuestión, eventualmente se reducirá a su solución particular, la cual representa la vibración en estado estable. La parte del movimiento que se reduce producto del amortiguamiento (solución homogénea) es llamada transitoria. La tasa a la cual el movimiento transitorio decae depende de los valores de los parámetros del sistema (k, c, m).



III. Vibración con excitación armónica

3. Respuesta de un sistema no amortiguado con excitación armónica

Consideraremos un sistema no amortiguado sujeto a una fuerza armónica $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Aquí ω es la frecuencia de excitación.

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

La solución homogénea de esta ecuación sería

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t$$

Donde $\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$ representa la frecuencia natural del sistema y C_1, C_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales.

Producto de que la fuerza de excitación es armónica, la solución particular $x_p(t)$ también será armónica y tendrá la misma frecuencia natural. Suponiendo que $x_p(t)$ tenga la siguiente forma

$$x_p(t) = X \cos \omega t$$

$$X[-m\omega^2 + k] \cos \omega t = F_0 \cos \omega t$$

$$X = \frac{F_0}{-m\omega^2 + k} = \frac{F_0/k}{-\frac{m}{k}\omega^2 + 1}$$

$$X = \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Donde δ_{st} es el desplazamiento estático producto de la fuerza estática F_0.

Entonces

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2} \cos \omega t$$

Imponiendo las condiciones iniciales $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$

$$x(0) = C_1 + \frac{F_0}{k - m\omega^2} = x_0$$

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

III. Vibración con excitación armónica

3. Respuesta de un sistema no amortiguado con excitación armónica

$$\dot{x}(0) = C_2\omega_n = \dot{x}_0$$

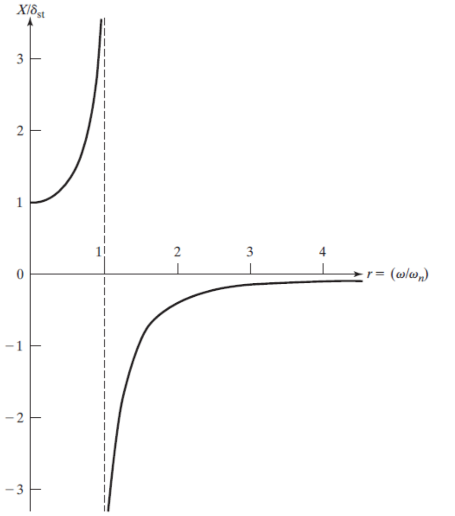
$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

$$\boxed{x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}\right)\cos\omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)\sin\omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2}\right)\cos\omega t}$$

Factor amplificador o razón de amplitud

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{1 - r^2}$$

Aquí: X es la amplitud máxima; la cantidad X/δ_{st} es el factor amplificador o razón de amplitud, y representa la razón entre la amplitud dinámica y la amplitud estática del movimiento; y r es la razón de la frecuencia.



En la figura anterior se pueden apreciar tres casos:
-Caso 1: $0 < r < 1$, $X/\delta_{st} > 0$
-Caso 2: $r > 1$, $X/\delta_{st} < 0$
-Caso 3: $r = 1$, $X/\delta_{st} \to \infty$, hay resonancia.

III. Vibración con excitación armónica

3. Respuesta de un sistema no amortiguado con excitación armónica

-Caso 3: $r = 1$, $X/\delta_{st} \to \infty$, hay resonancia.

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}\right)\cos\omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)\sin\omega_n t + \left(\frac{F_0}{k - m\omega^2}\right)\cos\omega t$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)\cos\omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)\sin\omega_n t + \left(\frac{\delta_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)\cos\omega t$$

$$x(t) = x_0\cos\omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)\sin\omega_n t + \delta_{st}\left(\frac{\cos\omega t - \cos\omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

Cuando se analiza la tendencia de $x(t)$ cuando $\omega = \omega_n$ se observa que el último término da una forma indeterminada del tipo $0/0$, por lo tanto se aplica la regla de L'Hospital

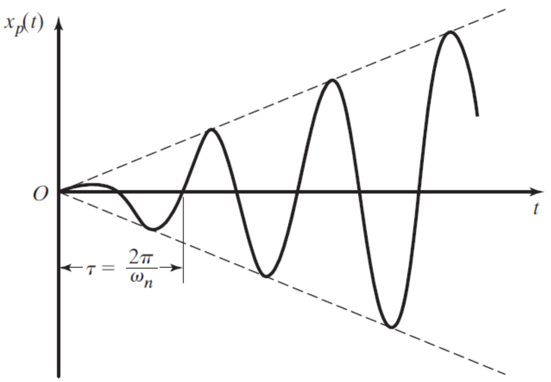
$$\lim_{\omega\to\omega_n}\left(\frac{\cos\omega t - \cos\omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) = \lim_{\omega\to\omega_n}\frac{\frac{d}{d\omega}(\cos\omega t - \cos\omega_n t)}{\frac{d}{d\omega}\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)}$$

$$\lim_{\omega\to\omega_n}\frac{\omega t\sin\omega t}{2\frac{\omega}{\omega_n}} = \frac{\omega_n t\sin\omega t}{2}$$

Por lo tanto

$$x(t) = x_0\cos\omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)\sin\omega_n t + \delta_{st}\frac{\omega_n t\sin\omega t}{2}$$

En la siguiente imagen se observa como el último término crece y tiende a infinito a medida que $t \to \infty$.



III. Vibración con excitación armónica

4. Respuesta de un sistema amortiguado con excitación armónica

Consideraremos un sistema amortiguado sujeto a una fuerza armónica $F(t) = F_0 \cos \omega t$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Suponiendo una forma para $x_p(t)$ del tipo

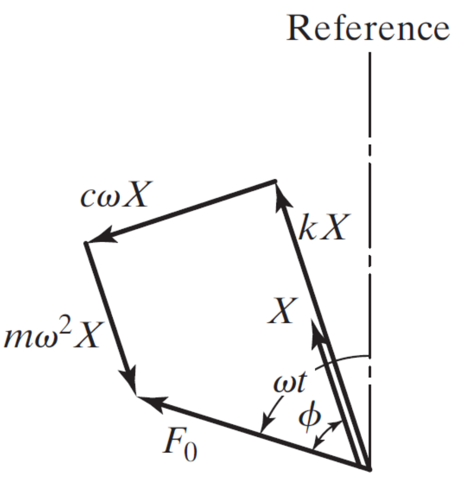
$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi)$$

Donde X es la amplitud máxima de la parte no homogénea de la respuesta y ϕ el ángulo de desfase entre la parte no homogénea de la respuesta y la fuerza armónica de excitación.

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi)\,, \dot{x}_p(t) = -X\omega \sin(\omega t - \phi)\,, \ddot{x}_p(t) = -X\omega^2 \cos(\omega t - \phi)$$

$$X[(k - m\omega^2)\cos(\omega t - \phi) - c\omega \sin(\omega t - \phi)] = F_0 \cos \omega t$$

Representando vectorialmente estas cantidades se tiene que



$$X^2[(k - m\omega^2)^2 + (-c\omega)^2] = {F_0}^2$$

$$X = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}}$$

$$\tan \phi = \frac{c\omega}{(k - m\omega^2)}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{(k - m\omega^2)}\right)$$

III. Vibración con excitación armónica

4. Respuesta de un sistema amortiguado con excitación armónica

Recordando que

$$\frac{c}{2m}=\left(\frac{c}{c_c}\right)\left(\frac{c_c}{2m}\right)=\zeta\omega_n$$

Se tendrá

$$X=\frac{F_0/k}{\left[\frac{(k-m\omega^2)^2}{k^2}+\frac{c^2\omega^2}{k^2}\right]^{1/2}}=\frac{\delta_{st}}{\left[\left(1-\frac{m}{k}\omega^2\right)^2+\frac{c^2\omega^2}{k^2}\right]^{1/2}}$$

$$X=\frac{\delta_{st}}{\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\frac{c^2\omega^2}{k^2}\right]^{1/2}}=\frac{\delta_{st}}{\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\frac{c^2\omega^2}{{\omega_n}^4m^2}\right]^{1/2}}$$

$$X=\frac{\delta_{st}}{\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+4\zeta^2\frac{\omega^2}{{\omega_n}^2}\right]^{1/2}}$$

$$X=\frac{\delta_{st}}{\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$\frac{X}{\delta_{st}}=\frac{1}{[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2]^{1/2}}$$

Aquí recuerde que $\frac{X}{\delta_{st}}$ es el factor amplificador o razón de amplitud, en este caso del movimiento amortiguado, y r la razón de frecuencias.

El ángulo de desfase también puede ser expresado en función de ζ y r

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{c\omega}{k}}{1-\frac{m\omega^2}{k}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{c\omega}{{\omega_n}^2m}}{1-\frac{m\omega^2}{k}}\right)$$

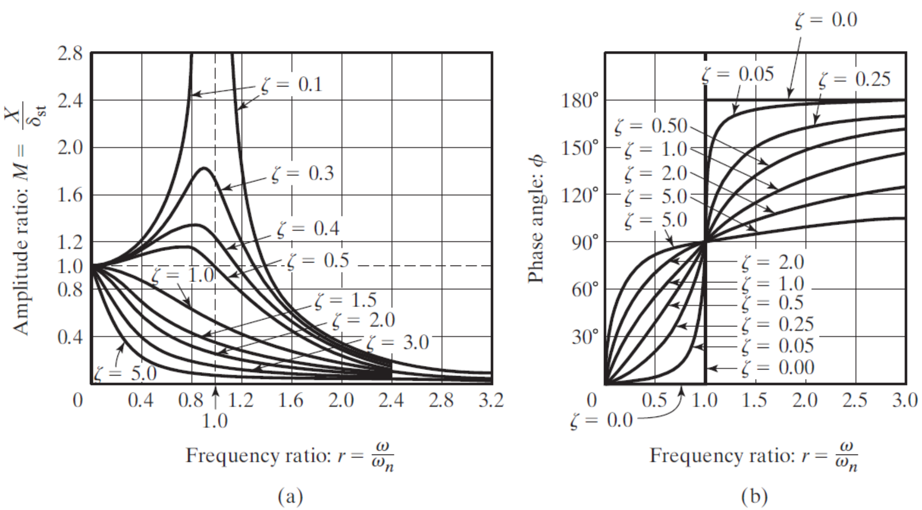
$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{{\omega_n}^2}}\right)$$

III. Vibración con excitación armónica

4. Respuesta de un sistema amortiguado con excitación armónica

$$\boxed{\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{1/2}}}$$

$$\boxed{\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)}$$



En su texto se hacen varias observaciones importantes con respecto a los valores que toma $\frac{X}{\delta_{st}}$ y ϕ en función de ζ y r. Favor revisar dichas observaciones en la sección 3.4.

5. Respuesta de un sistema amortiguado con excitación armónica en forma compleja

Sea $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$, la ecuación de movimiento estaría dada por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t}$$

Donde $i = \sqrt{-1}$

En vista de que físicamente la excitación está dada solo por la parte real de $F(t)$, la respuesta igualmente solo estará dada por la parte real de $x(t)$, donde $x(t)$ es una cantidad compleja que satisface la ecuación diferencial descrita.

Asumiendo que la solución particular $x_p(t)$ tenga la siguiente forma

$$x_p(t) = Xe^{i\omega t}$$

$$Xe^{i\omega t}(-m\omega^2 + ic\omega + k) = F_0 e^{i\omega t}$$

$$X = \frac{F_0}{(k - m\omega^2) + ic\omega}$$

III. Vibración con excitación armónica

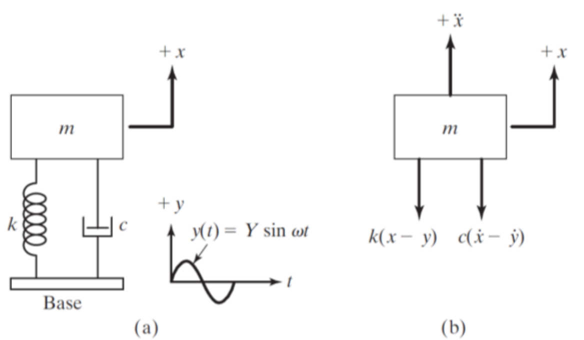
5. Respuesta de un sistema amortiguado con excitación armónica en forma compleja

$$X = \frac{F_0}{(k - m\omega^2) + ic\omega}\left[\frac{(k - m\omega^2) - ic\omega}{(k - m\omega^2) - ic\omega}\right]$$

$$\boxed{X = F_0\left[\left(\frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}\right) - i\left(\frac{c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}\right)\right]}$$

6. Respuesta de un sistema amortiguado con movimiento armónico de la base

Ocasionalmente la base o soporte de un sistema masa-resorte-amortiguador es sometida a un movimiento armónico. Sea $y(t)$ el desplazamiento de la base y $x(t)$ el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio estático a algún tiempo arbitrario t.



$$-kx + ky - c\dot{x} + c\dot{y} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$

Sea $y(t) = Y\sin\omega t$, y $x_p(t) = X\sin(\omega t - \phi)$

$$X[(k - m\omega^2)\sin(\omega t - \phi) + c\omega\cos(\omega t - \phi)] = (c\omega\cos\omega t + k\sin\omega t)Y$$

Empleando las identidades trigonométricas

$$\cos(\omega t - \phi) = \cos\omega t\cos\phi + \sin\omega t\sin\phi$$
$$\sin(\omega t - \phi) = \sin\omega t\cos\phi - \cos\omega t\sin\phi$$

Tras remplazar e igualar los coeficientes para $\cos\omega t$ y $\sin\omega t$

$$X[(k - m\omega^2)(-\sin\phi) + (c\omega)(\cos\phi)] = Y(c\omega)$$
$$X[(k - m\omega^2)(\cos\phi) + (c\omega)(\sin\phi)] = Y(k)$$

Una vez se resuelven este conjunto de ecuaciones se encuentra que

$$\boxed{\frac{X}{Y} = \frac{[k^2 + c^2\omega^2]^{1/2}}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}} = \frac{[1 + (2\zeta r)^2]^{1/2}}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}}}$$

III. Vibración con excitación armónica

6. Respuesta de un sistema amortiguado con movimiento armónico de la base

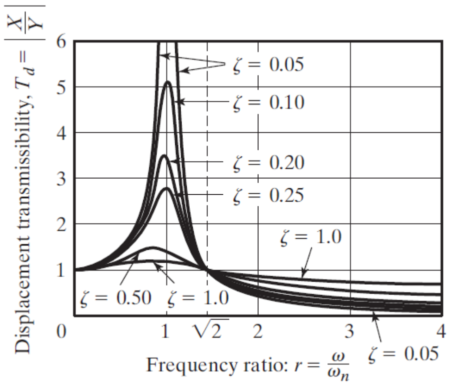
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{mc\omega^3}{k(k-m\omega^2)+c^2\omega^2}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{mc\omega^3/k^2}{\frac{k(k-m\omega^2)}{k^2}+\frac{c^2\omega^2}{k^2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{(mc\omega^3)/({\omega_n}^4 m^2)}{\left(1-\frac{m\omega^2}{{\omega_n}^2 m}\right)+\frac{c^2\omega^2}{{\omega_n}^4 m^2}}\right)$$

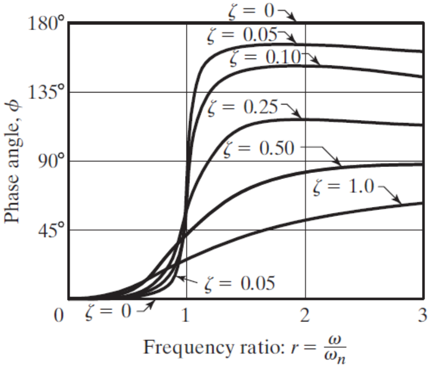
$$\boxed{\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\frac{\omega^3}{{\omega_n}^3}}{\left(1-\frac{\omega^2}{{\omega_n}^2}\right)+\left(4\zeta^2\frac{\omega^2}{{\omega_n}^2}\right)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r^3}{1+r^2(4\zeta^2-1)}\right)}$$

Aquí la razón $\frac{X}{Y}$ se conoce como la transmisibilidad de desplazamiento y ϕ es el ángulo de desfase entre el movimiento de la base y el movimiento de la masa m.

En su texto se hacen varias observaciones importantes con respecto a los valores que toma $\frac{X}{Y}$ y ϕ en función de ζ y r. Favor revisar dichas observaciones en la sección 3.6.



(a)



(b)

III. Vibración con excitación armónica

6. Respuesta de un sistema amortiguado con movimiento armónico de la base

<u>Fuerza transmitida a la base producto de las reacciones en el resorte y el amortiguador</u>

Recordando la ecuación de movimiento

$$-kx + ky - c\dot{x} + c\dot{y} = m\ddot{x}$$

Suponiendo una fuerza $F = -(-kx + ky - c\dot{x} + c\dot{y})$ que es transmitida a la base, sí $x_p(t) = X\sin(\omega t - \phi)$

$$-F = m\ddot{x}$$

$$-F = -Xm\omega^2 \sin(\omega t - \phi)$$

Suponiendo una forma para $F(t)$ del tipo

$$F(t) = F_T \sin(\omega t - \phi)$$

Entonces

$$\frac{F_T}{kY}\sin(\omega t - \phi) = \frac{X}{Y}\frac{m\omega^2}{k}\sin(\omega t - \phi)$$

$$\boxed{\frac{F_T}{kY} = \frac{X}{Y}\frac{\omega^2}{{\omega_n}^2} = r^2\frac{\left[1 + (2\zeta r)^2\right]^{1/2}}{\left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{1/2}}}$$

Aquí F_T es la amplitud o valor máximo de la fuerza transmitida y $\frac{F_T}{kY}$ es la transmisibilidad de fuerza.

<u>Movimiento relativo de la masa con respecto a la base</u>

Suponiendo $z = x - y$ describa el movimiento relativo de la masa con respecto a la base, la ecuación de movimiento podría re escribirse como

$$-kx + ky - c\dot{x} + c\dot{y} = m\ddot{x} + m\ddot{y} - m\ddot{y}$$

$$-m\ddot{y} = m(\ddot{x} - \ddot{y}) + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y)$$

Sea $y(t) = Y\sin\omega t$, y $z_p(t) = Z\sin(\omega t - \phi_1)$

$$m\omega^2 Y\sin\omega t = Z[(k - m\omega^2)\sin(\omega t - \phi_1) + c\omega\cos(\omega t - \phi_1)]$$

Empleando las identidades trigonométricas

III. Vibración con excitación armónica

6. Respuesta de un sistema amortiguado con movimiento armónico de la base

Movimiento relativo de la masa con respecto a la base

$$\cos(\omega t - \phi_1) = \cos\omega t \cos\phi_1 + \sin\omega t \sin\phi_1$$
$$\sin(\omega t - \phi_1) = \sin\omega t \cos\phi_1 - \cos\omega t \sin\phi_1$$

Tras remplazar e igualar los coeficientes para $\cos\omega t$ y $\sin\omega t$

$$Z[(k - m\omega^2)(-\sin\phi_1) + (c\omega)(\cos\phi_1)] = 0$$
$$Z[(k - m\omega^2)(\cos\phi_1) + (c\omega)(\sin\phi_1)] = m\omega^2 Y$$

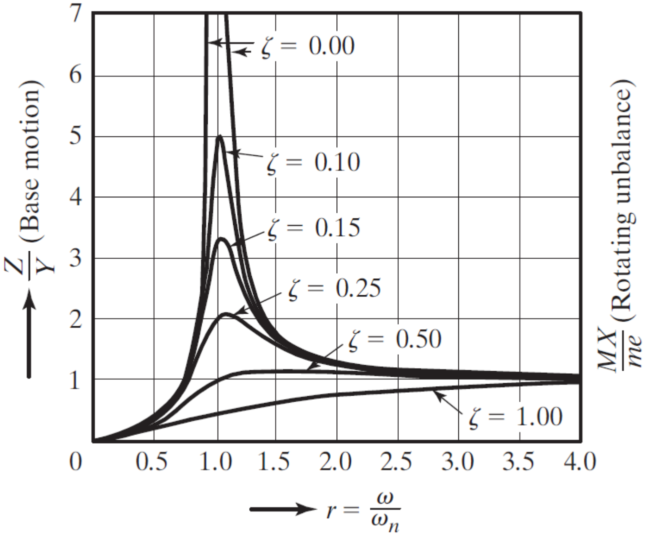
Una vez se resuelven este conjunto de ecuaciones se encuentra que

$$\frac{Z}{Y} = \frac{m\omega^2}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}} = \frac{m\omega^2/k}{\left[\frac{(k - m\omega^2)^2}{k^2} + \frac{c^2\omega^2}{k^2}\right]^{1/2}}$$

$$\boxed{\frac{Z}{Y} = \frac{r^2}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}}}$$

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{(k - m\omega^2)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{c\omega}{k}}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}\right)$$

$$\boxed{\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right)}$$



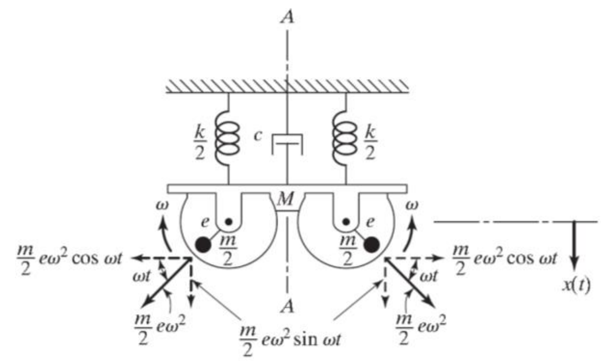
III. Vibración con excitación armónica

7. Respuesta de un sistema amortiguado con desbalance rotacional

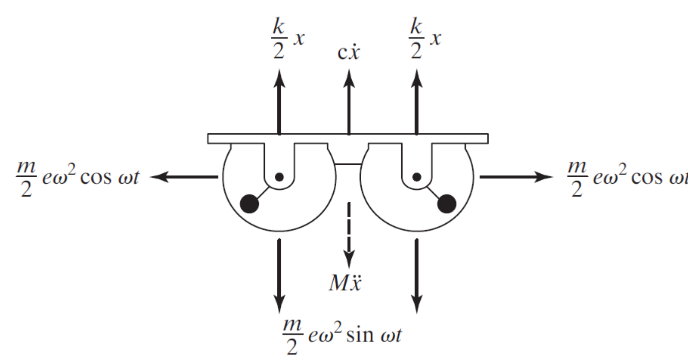
El desbalance en máquinas rotatorias constituye una de las principales causas de vibración. Suponga que la siguiente figura, la masa total de la máquina es M, y que hay dos masas excéntricas $m/2$ rotando en direcciones opuestas con una velocidad angular constante ω. La fuerza centrípeta $(me\omega^2)/2$ producto de cada masa provocara una excitación sobre el sistema de masa M. Si adicionalmente consideramos que las dos masas provocando el desbalance rotan en direcciones opuestas, las componentes horizontales de las fuerzas centrípetas de dichas masas se cancelarán y la ecuación de movimiento quedaría dada por

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \sin \omega t$$

Esta ecuación diferencial es análoga a la obtenida para un sistema con amortiguamiento viscoso, de un grado de libertad, sujeto a una fuerza de excitación armónica. También es análoga a la ecuación diferencial que describe el movimiento relativo de una masa con respecto a su base, cuando esta última está sujeta a un movimiento armónico.



(a)



(b)

III. Vibración con excitación armónica

7. Respuesta de un sistema amortiguado con desbalance rotacional

Sea $x_p(t) = X\sin(\omega t - \phi)$

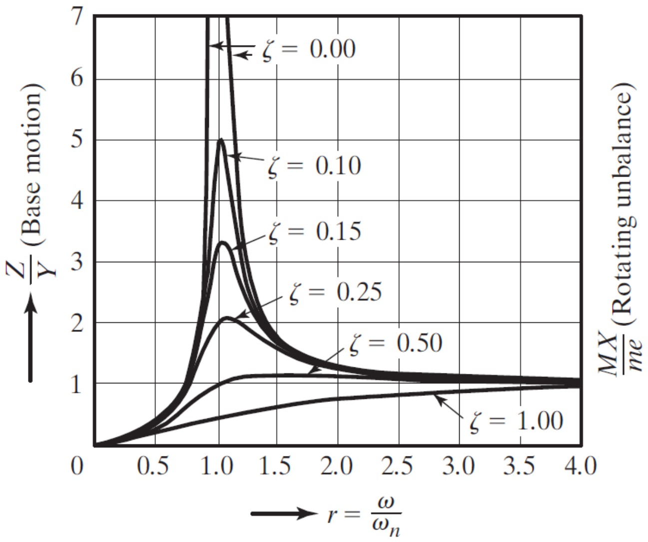
$$X = \frac{me\omega^2}{\left[(k - M\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{1/2}} = \frac{\frac{me\omega^2 M}{kM}}{\left[\frac{(k - M\omega^2)^2}{k^2} + \frac{c^2\omega^2}{k^2}\right]^{1/2}}$$

$$\boxed{\frac{MX}{me} = \frac{r^2}{\left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{1/2}}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{(k - M\omega^2)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{c\omega}{k}}{1 - \frac{M\omega^2}{k}}\right)$$

$$\boxed{\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right)}$$

Aquí $r = \frac{\omega}{\omega_n}$, $\omega_n = \left(\frac{k}{M}\right)^{1/2}$



En su texto se hacen varias observaciones importantes con respecto a los valores que toma $\frac{MX}{me}$ y ϕ en función de ζ y r. Favor revisar dichas observaciones en la sección 3.7.

III. Vibración con excitación armónica

7. Respuesta de un sistema amortiguado con desbalance rotacional

<u>Fuerza transmitida a la base producto del desbalance rotacional de un sistema masa-resorte-amortiguador</u>

Suponiendo una fuerza $F = c\dot{x} + kx$ que es transmitida a la base, sí $F(t) = F_T \sin(\omega t - \phi)$, y $x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi)$

$$F_T \sin(\omega t - \phi) = c\omega X \cos(\omega t - \phi) + kX \sin(\omega t - \phi)$$

Por lo tanto

$${F_T}^2 = (c\omega X)^2 + (kX)^2$$

$$F_T = X[(c\omega)^2 + (k)^2]^{1/2}$$

$$F_T = \frac{me\omega^2[(c\omega)^2 + (k)^2]^{1/2}}{[(k - M\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}} = \frac{me\omega^2\left[\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2 + 1\right]^{1/2}}{\left[\frac{(k - M\omega^2)^2}{k^2} + \frac{c^2\omega^2}{k^2}\right]^{1/2}}$$

$$\boxed{F_T = \frac{me\omega^2[(2\zeta r)^2 + 1]^{1/2}}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}}}$$

8. Enfoque de funciones de transferencia y soluciones utilizando la transformada de Laplace

<u>Soluciones utilizando la transformada de Laplace</u>

A continuación se presenta el procedimiento general para resolver la ecuación diferencial de un sistema de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso sujeto a una excitación arbitraria $F(t)$ por medio de la transformada y la transformada inversa de Laplace

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

$$\mathcal{L}\{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx\} = \mathcal{L}\{F(t)\}$$

$$m[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + c[sX(s) - x(0)] + kX(s) = F(s)$$

$$X(s)[ms^2 + cs + k] = F(s) + x(0)[ms + c] + m\dot{x}(0)$$

$$X(s) = \frac{F(s) + x(0)[ms + c] + m\dot{x}(0)}{[ms^2 + cs + k]}$$

$$\boxed{x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s) + x(0)[ms + c] + m\dot{x}(0)}{[ms^2 + cs + k]}\right\}}$$

Aquí $F(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$.

III. Vibración con excitación armónica

8. Enfoque de funciones de transferencia y soluciones utilizando la transformada de Laplace

Soluciones utilizando la transformada de Laplace

Evidente para poder emplear este método se requiere del conocimiento de las transformadas y de las transformadas inversas de Laplace de las diferentes funciones involucradas, del desarrollo de fracciones parciales, y del uso de las condiciones iniciales $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

En el apéndice D de su libro de texto puede encontrar una tabla con algunas de las transformadas de Laplace más útiles.

Enfoque de funciones de transferencia

El enfoque de funciones de transferencia, basadas en transformadas de Laplace, es comúnmente utilizado para la formulación y solución de problemas dinámicos en teoría de control. La función de transferencia relación la salida de un sistema con su entrada.

La función de transferencia de una ecuación diferencial lineal, e invariante con el tiempo está definida como la razón entre la transformada de Laplace de la función de salida o respuesta del sistema a la transformada de Laplace de la entrada o función de excitación del sistema, asumiendo condiciones iniciales iguales a cero.

$$\boxed{T(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}}$$

La función de transferencia puede ser representada como un diagrama de bloque.