

# III. Análisis de posición y desplazamiento

## Objetivos:

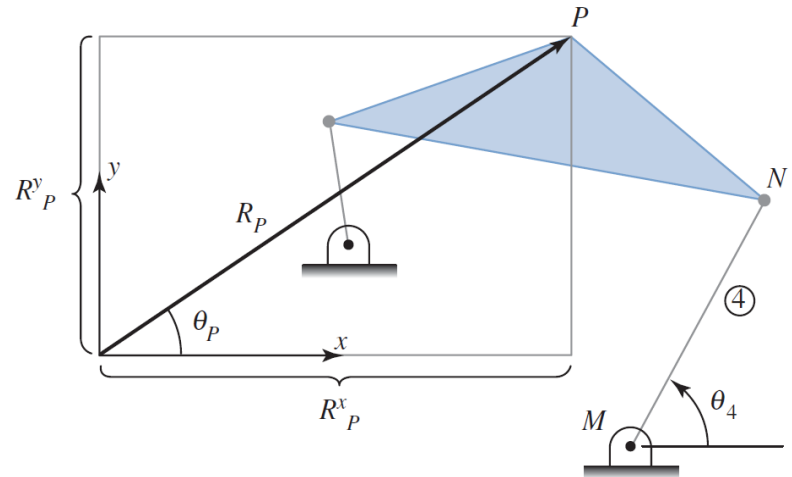
1. Definir la posición y el desplazamiento de un punto.
2. Determinar gráfica y analíticamente la posición de todos los eslabones de un mecanismo a medida que el o los eslabones, sobre los que actúan los actuadores, se desplazan.
3. Determinar gráfica y analíticamente las posiciones límites de un mecanismo.
4. Determinar gráfica y analíticamente la posición de todos los eslabones para un ciclo completo de movimiento de un mecanismo.
5. Reconocer la importancia del diagrama de desplazamiento o de posición de los puntos de interés en un mecanismo como una función del desplazamiento o posición de otros puntos en ese mismo mecanismo.

## 1. Posición.

La posición se refiere a la localización de un objeto.

### Posición de un punto.

La posición de un punto en un mecanismo es la localización espacial de ese punto y puede ser definido a través de un vector posición  $\mathbf{R}$ , desde un origen ó referencia hasta la localización del punto.

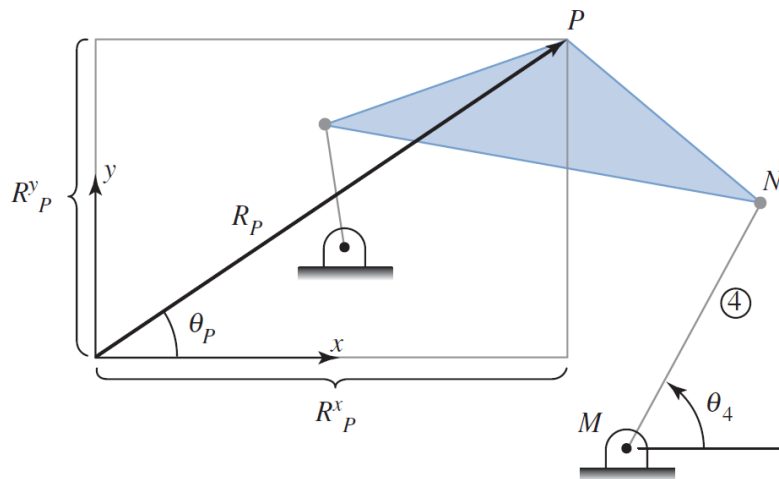


En el caso de una posición planar o bidimensional de un punto (vea punto  $P$  en la figura anterior) basta con especificar la distancia desde el origen (magnitud) y el ángulo desde el eje de referencia (dirección). También se podría identificar su posición a través de las componentes rectangulares ( $R_p^x, R_p^y$ ) del vector posición en un sistema de referencia coordinado.

# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 1. Posición.

### Posición angular de un eslabón



La posición angular de un eslabón,  $\theta$ , está definida como el ángulo que una línea entre dos puntos de ese eslabón forma con respecto a un eje de referencia.

### Posición de un mecanismo

El propósito principal al analizar un mecanismo es estudiar su movimiento. El movimiento ocurre cuando la posición de los eslabones y los puntos de referencia que constituyen el mecanismo son cambiados.

Para eslabonamientos con un grado de libertad, la posición de un solo eslabón o punto puede determinar con precisión la posición del resto de los eslabones o puntos. Consecuentemente, la posición de los puntos y eslabones en un mecanismo no es arbitraria ni independiente. Los parámetros independientes son las posiciones de ciertos eslabones o puntos que se ven directamente influenciados por los actuadores.

## 2. Desplazamiento.

Es el producto final del movimiento. Es un vector que representa la distancia entre la posición inicial y final de un punto o eslabón. Existe tanto desplazamiento lineal como angular.

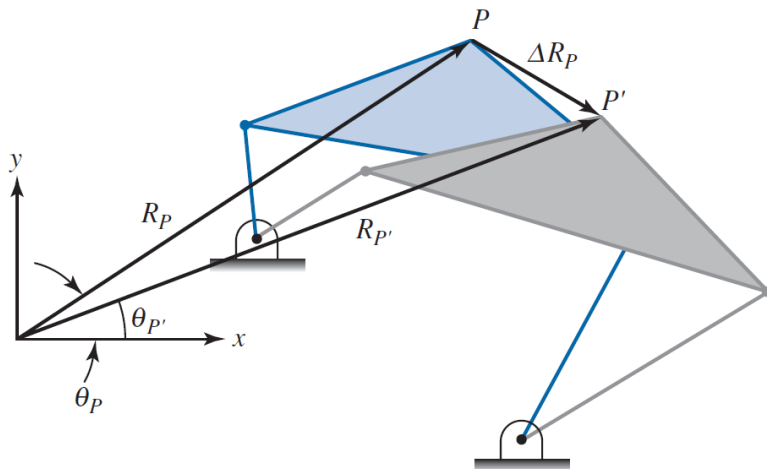
### Desplazamiento lineal

El desplazamiento lineal ( $\Delta R_P$  en la figura mostrada) es la distancia lineal entre la posición inicial y final de un punto durante el intervalo de tiempo en consideración.

# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 2. Desplazamiento.

### Desplazamiento lineal



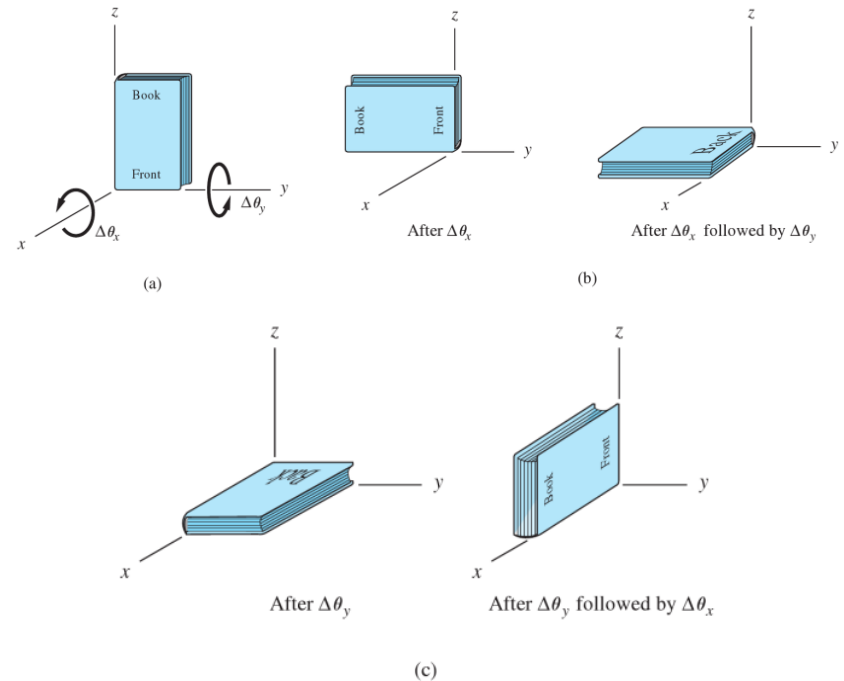
$$\Delta R_p = R_{p'} -> R_p$$

Observe que el sentido del vector desplazamiento va de la posición inicial a la posición final.

### Desplazamiento angular

El desplazamiento angular ( $\Delta\theta_3$  en la siguiente figura) es la distancia entre la posición angular inicial y final de un eslabón rotatorio.

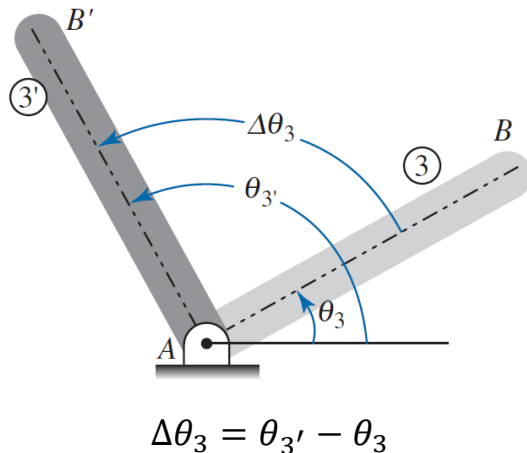
Y a pesar de que posee una magnitud (dada en grados, radianes, o revoluciones) y dirección (a favor o contra el reloj), el desplazamiento angular realmente no es un vector ya que no cumple con las leyes conmutativas y asociativas de la adición de vectores.



# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 2. Desplazamiento.

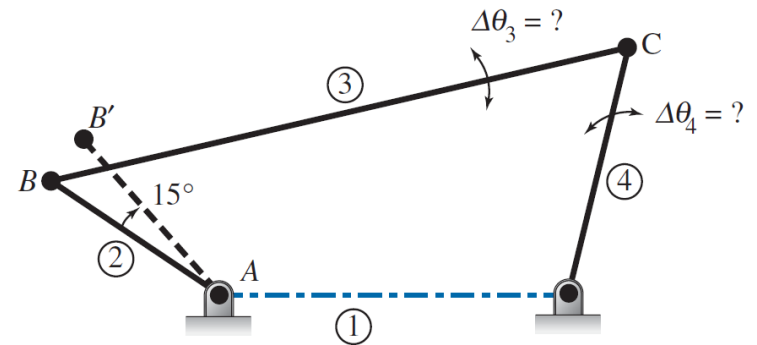
### Desplazamiento angular



## 3. Análisis de posición y desplazamiento.

Una investigación cinemática común, en el caso de los mecanismos, consiste en localizar la posición de todos los eslabones en el mecanismo a medida que el o los eslabone sobre los que influyen directamente los actuadores son desplazados.

Las posiciones de todos los eslabones constituyen la *configuración* del mecanismo.

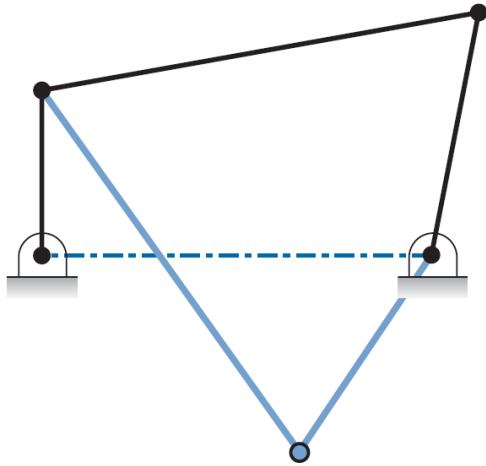


El mecanismo anterior, es de cuatro barras y tiene un grado de libertad. Un análisis de desplazamiento típico para el consistiría en determinar la posición de los eslabones 3 y 4 a medida que el eslabón 2 se mueve a un desplazamiento específico.

Ha de comentarse que prácticamente todos los eslabonamientos presentan dos configuraciones alternantes para una determina posición de el o los mecanismos que son actuados. Estas configuraciones alternantes son llamadas inversiones geométricas.

# III. Análisis de posición y desplazamiento

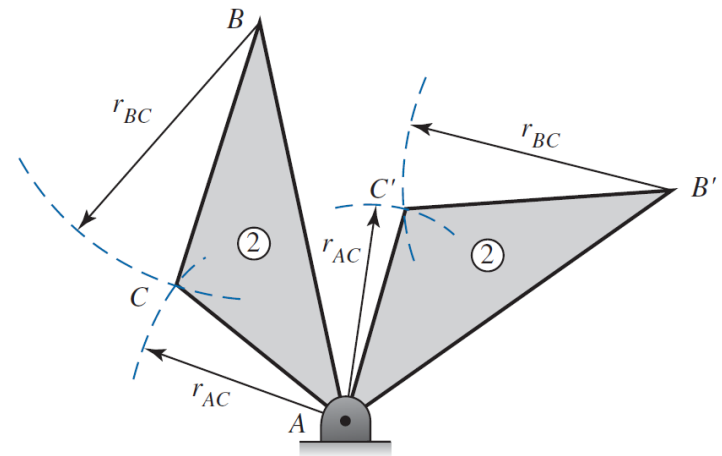
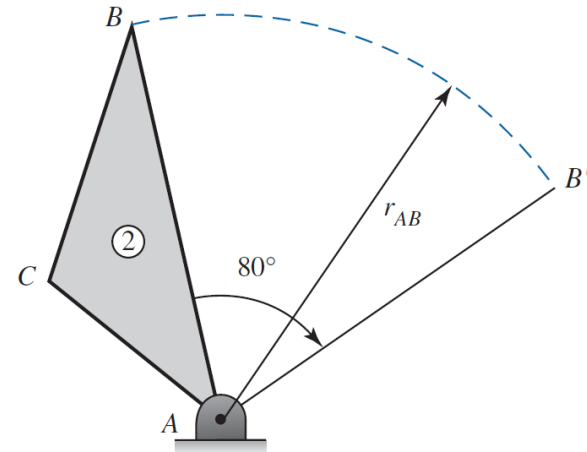
## 3. Análisis de posición y desplazamiento.



## 4. Análisis gráfico de posición y desplazamiento.

Posición y desplazamiento de un solo eslabón que es accionado.

Este proceso puede efectuarse al recolocar una sola línea del eslabón, y a partir de esta, el resto de la geometría que describe ese eslabón puede reconstruirse.



# III. Análisis de posición y desplazamiento

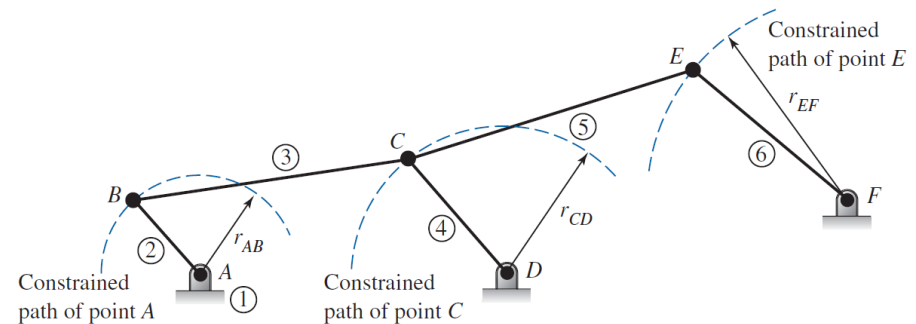
## 4. Análisis gráfico de posición y desplazamiento.

### Posición y desplazamiento del resto de los eslabones dependientes.

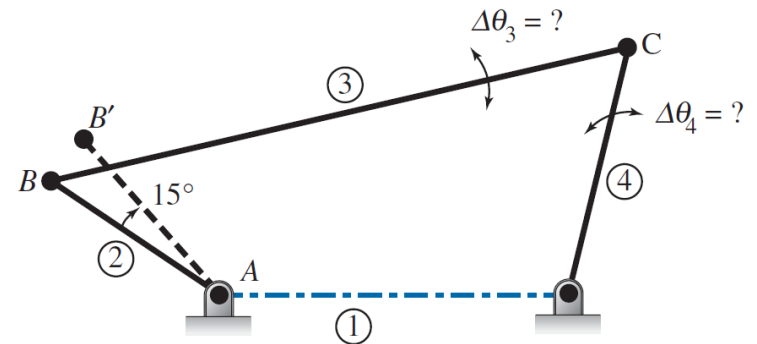
Una vez que el eslabón accionado es re posicionado, la posición del resto de los eslabones dependientes debe ser determinada. Para lograr esto, los posibles recorridos de todos los eslabones que están conectados al marco deben ser construidos.

En el caso de aquellos eslabones pivotados al marco, todos los puntos en el eslabón solo pueden rotar relativos al marco, y consecuentemente los posibles recorridos de dichos puntos son arcos circulares centrados en el pivote que los conecta al marco.

En el caso del recorrido de un punto en un eslabón que está conectado al marco por medio de una junta deslizante, debe tenerse en cuenta que todos los puntos en este eslabón se mueven en una línea recta paralela a la dirección de la superficie deslizante.

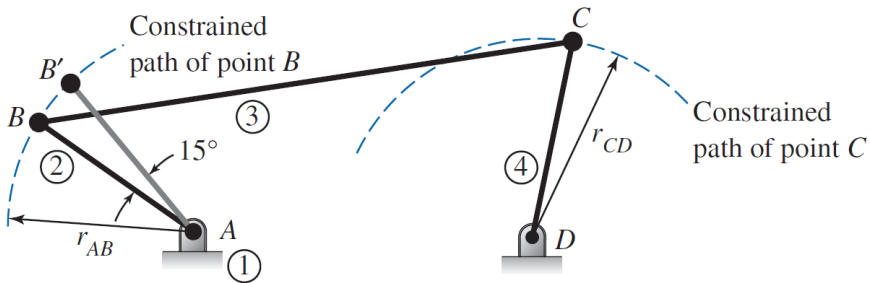


Por último, una vez construidos los recorridos de todos los eslabones unidos al marco, la posición de los eslabones que los conectan puede ser determinada a partir del hecho de que todos los eslabones son rígidos y que su longitud y forma no cambia durante el movimiento.

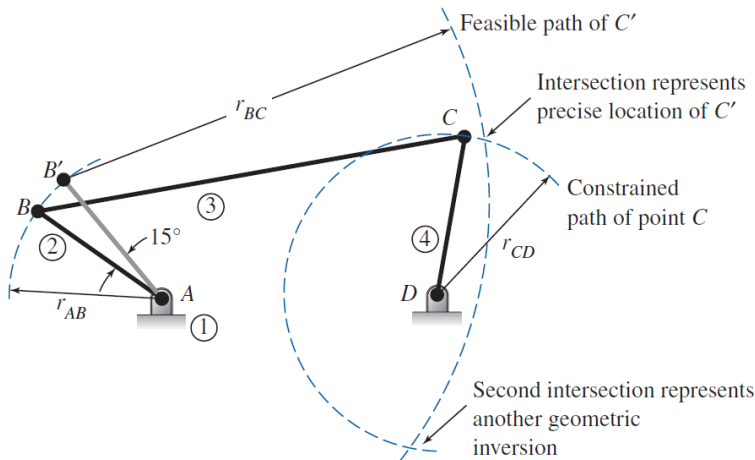


# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 4. Análisis gráfico de posición y desplazamiento.

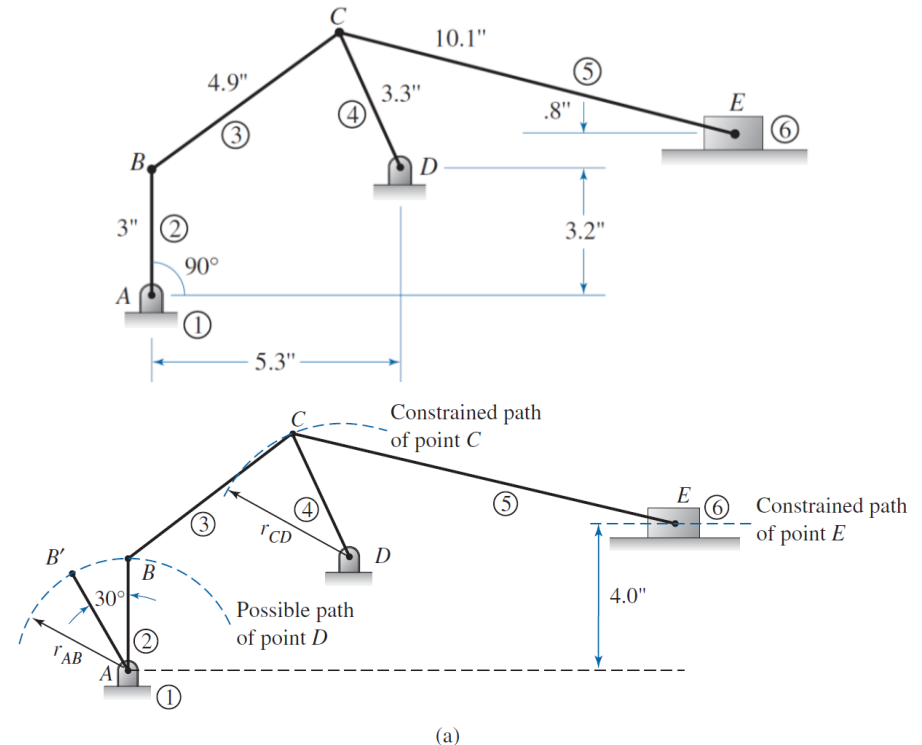


Tenga presente que para este mismo desplazamiento angular de eslabón accionado (eslabón 2) puede existir una inversión geométrica.



En algunas ocasiones, es posible que dos arcos no se intersecten debido a que la longitud de los eslabones evita que se alcance el desplazamiento requerido.

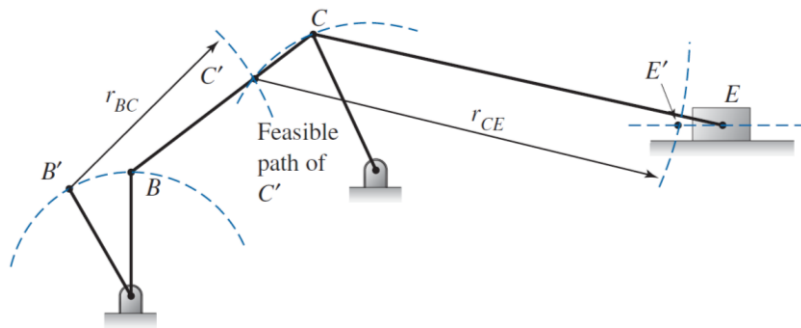
## Ejemplo con juntas de revolución y de deslizamiento



# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 4. Análisis gráfico de posición y desplazamiento.

### Ejemplo con juntas de revolución y de deslizamiento



(b)

## 5. Análisis analítico de posición y desplazamiento.

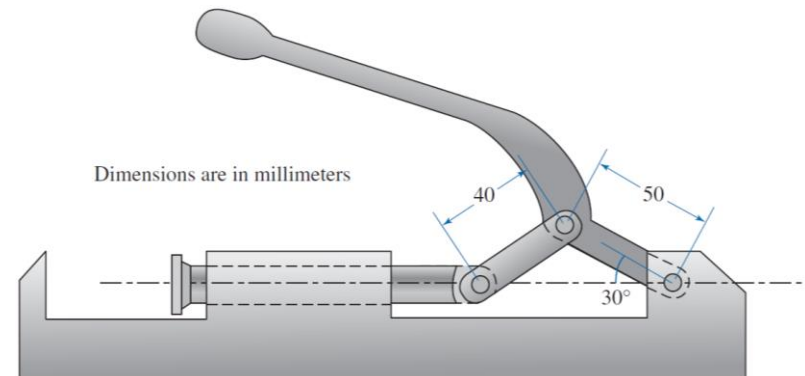
En términos generales, los métodos analíticos pueden ser usados en el análisis de posición para obtener resultados con un mayor grado de precisión.

### Método del triángulo

En general, este método involucra insertar líneas de referencia dentro del mecanismo y analizar los triángulos a partir de las leyes generales de triángulos rectos y oblicuos.

Para ejemplificar el método considere el siguiente caso.

En la siguiente figura se observa un mecanismo de sujeción. Aquí la posición inicial del agarradero es de  $30^\circ$ . Determine analíticamente el desplazamiento del eslabón deslizante (punto C) de la herramienta de sujeción cuando el agarradero ha sido desplazado  $15^\circ$  en dirección anti horaria.

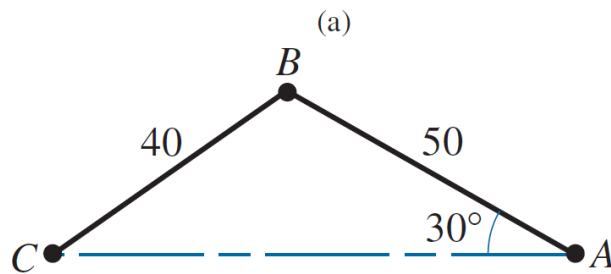
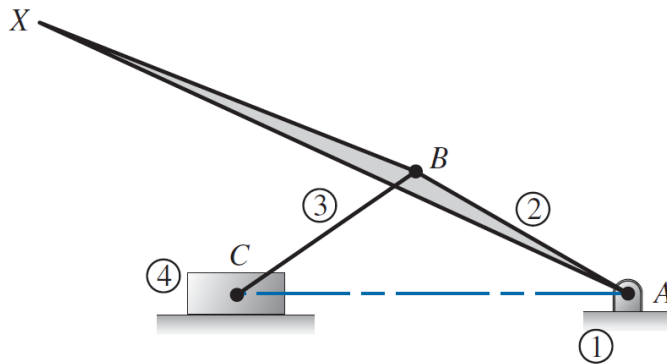




# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 5. Análisis analítico de posición y desplazamiento.

### Método del triángulo



(b)

Para determinar el ángulo  $\angle BCA$ , el ángulo  $\angle ABC$ , y la dimensión  $AC$  se puede emplear la ley del seno, la del coseno, y la propiedad de que la suma de todos los ángulos interiores ha de ser  $180^\circ$ .

$$\frac{\sin \angle BCA}{AB} = \frac{\sin \angle BAC}{BC} \rightarrow \angle BCA = \sin^{-1} \left( \frac{AB}{BC} \sin \angle BAC \right)$$

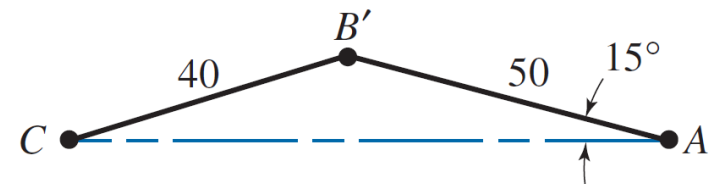
$$\angle BCA = \sin^{-1} \left( \frac{50}{40} \sin 30^\circ \right) \cong 38.68^\circ$$

$$\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180^\circ$$

$$\angle ABC = (180 - 30 - 38.68)^\circ \cong 111.32^\circ$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - [2(AB)(BC) \cos \angle ABC]$$

$$AC = \sqrt{(50)^2 + (40)^2 - [2(50)(40) \cos 111.32^\circ]} \cong 74.53 \text{ mm}$$



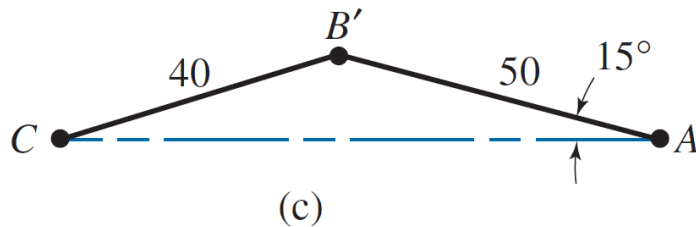
(c)

Para encontrar el desplazamiento del eslabón deslizante se requiere de las nuevas posiciones angulares  $\angle B'CA$ ,  $\angle AB'C$ , y de la nueva dimensión  $AC$ .

# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 5. Análisis analítico de posición y desplazamiento.

### Método del triángulo



$$\frac{\sin \angle B'CA}{AB'} = \frac{\sin \angle B'AC}{B'C} \rightarrow \angle B'CA = \sin^{-1} \left( \frac{AB'}{B'C} \sin \angle B'AC \right)$$

$$\angle B'CA = \sin^{-1} \left( \frac{50}{40} \sin 15^\circ \right) \cong 18.88^\circ$$

$$\angle AB'C + \angle B'AC + \angle B'CA = 180^\circ$$

$$\angle AB'C = (180 - 15 - 18.88)^\circ \cong 146.12^\circ$$

$$AC_{nueva} = \sqrt{(50)^2 + (40)^2 - [2(50)(40) \cos 146.12^\circ]}$$

$$AC_{nueva} \cong 86.14 \text{ mm}$$

Por lo tanto:

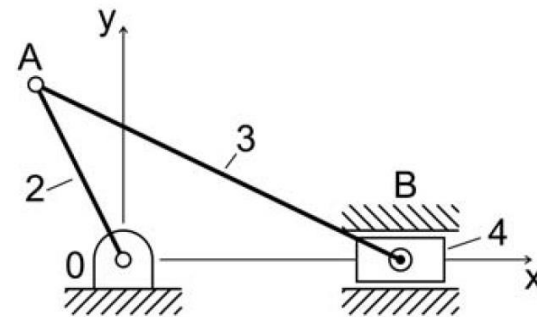
$$\Delta R_c = (AC_{nueva} - AC) \leftarrow$$

$$\Delta R_c \cong (86.14 - 74.53) \leftarrow \cong 11.61 \text{ mm} \leftarrow$$

### Método de ecuaciones de lazo cerrado

La siguiente sección corresponde a algunos temas del capítulo 2 del libro *Fundamentals of Kinematics and Dynamics of Machines and Mechanism* de O. Vinogradov.

Considere el mecanismo de deslizamiento-manivela (también llamado manivela-corredera) mostrado a continuación.



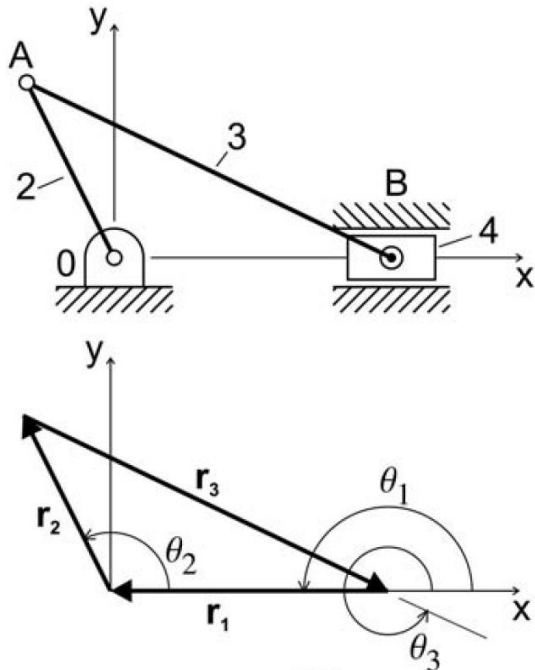
Observe que el origen está representado por el punto  $O$  y que el eje coordenado  $x$  se ha tomado de manera tal que coincide con la dirección en que se desplaza el eslabón 4.

# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 5. Análisis analítico de posición y desplazamiento.

### Método de ecuaciones de lazo cerrado

Con cada eslabón uno puede asociar un vector de manera tal que se forma una cadena cerrada. Las direcciones de los vectores que se toman son arbitrarias y la magnitud de cada uno representa la longitud del eslabón respectivo.



Matemáticamente hablando la suma de un conjunto de vectores que finaliza en el origen debe ser igual a cero. Esto último constituye el principio en que se basa la ecuación de lazo cerrado de un mecanismo.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i = 0$$

Donde  $n$  es el número total de vectores.

Aquí cada uno de estos vectores  $\mathbf{r}_i$  puede ser expresado como:

$$\mathbf{r}_i = |r_i|(\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$$

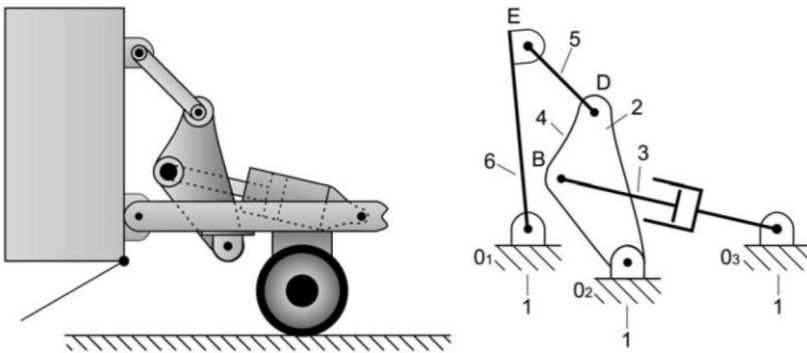
Tenga en cuenta que en el caso planar, la ecuación vectorial de lazo cerrado involucra solo dos ecuaciones escalares y que dicho sistema solo puede ser resuelto cuando se tienen solo dos incógnitas.

En algunos casos se pueden tener mecanismos compuestos constituidos de un conjunto de cadenas cerradas con sus correspondientes ecuaciones de lazo cerrado.

# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 5. Análisis analítico de posición y desplazamiento.

### Método de ecuaciones de lazo cerrado



Aquí se tiene dos mecanismos simples, uno de manivela corredera (eslabones 1,2,3) y un mecanismo de cuatro barras(1,6,5,2).

En vista de que cualquier mecanismo planar puede ser descrito por una ecuación de lazo cerrado, entonces dicha ecuación genérica puede ser resuelta para las varias combinaciones posibles de los parámetros conocidos y variables no conocidas. A continuación se desarrollan los diferentes casos posibles.

a) Primer caso: la magnitud y dirección de un vector son desconocidas.

$$\sum_{i=1}^n |r_i|(\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T = |r_j|(\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T + \sum_{i=1, i \neq j}^n |r_i|(\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T = 0$$

Entonces:

$$|r_j|(\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T = - \sum_{i=1, i \neq j}^n |r_i|(\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$$

Sea:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= |b|(\cos \alpha, \sin \alpha)^T = (b_x, b_y)^T = \\ &= - \sum_{i=1, i \neq j}^n |r_i|(\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T \\ b_x &= - \sum_{i=1, i \neq j}^n |r_i| \cos \theta_i \quad b_y = - \sum_{i=1, i \neq j}^n |r_i| \sin \theta_i \end{aligned}$$

# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 5. Análisis analítico de posición y desplazamiento.

a) Primer caso: la magnitud y dirección de un vector son desconocidas.

$$|b| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b_y}{b_x}\right)$$

De manera tal que:

$$|r_j| \cos \theta_j = |b| \cos \alpha$$

$$|r_j| \sin \theta_j = |b| \sin \alpha$$

Y en vista de que tanto  $|r_j|$  como  $|b|$  son mayores a cero se puede concluir que:

$$|r_j| = |b|$$

$$\theta_j = \alpha$$

b) Segundo caso: la magnitud de un vector y la dirección de otro vector son desconocidas.

$$\sum_{i=1}^n |r_i| (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T = |r_j| (\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T + |r_k| (\cos \theta_k, \sin \theta_k)^T + \sum_{i=1, i \neq j, i \neq k, j \neq k}^n |r_i| (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T = 0$$

Entonces:

$$|r_j| (\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T + |r_k| (\cos \theta_k, \sin \theta_k)^T = \sum_{i=1, i \neq j, i \neq k, j \neq k}^n |r_i| (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$$

Sea:

$$\mathbf{b} = |b| (\cos \alpha, \sin \alpha)^T = (b_x, b_y)^T = \sum_{i=1, i \neq j, i \neq k, j \neq k}^n |r_i| (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$$

Por lo tanto:

$$|r_j| (\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T + |r_k| (\cos \theta_k, \sin \theta_k)^T = |b| (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$$

Aquí las incógnitas son  $|r_j|$  y  $\theta_k$ .

# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 5. Análisis analítico de posición y desplazamiento.

b) Segundo caso: la magnitud de un vector y la dirección de otro vector son desconocidas.

Si la expresión anterior se multiplica primero por el vector unitario perpendicular a  $\mathbf{r}_j$ ,  $\mathbf{u}_1 = (-\sin \theta_j, \cos \theta_j)^T$ , y luego por el vector unitario paralelo a  $\mathbf{r}_j$ ,  $\mathbf{u}_2 = (\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T$ , se tendrán las siguientes expresiones:

$$\left( |r_j|(\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T + |r_k|(\cos \theta_k, \sin \theta_k)^T \right) \cdot (-\sin \theta_j, \cos \theta_j)^T =$$

$$(|b|(\cos \alpha, \sin \alpha)^T) \cdot (-\sin \theta_j, \cos \theta_j)^T$$

$$|r_k|(-\sin \theta_j \cos \theta_k + \sin \theta_k \cos \theta_j) = |b|(-\sin \theta_j \cos \alpha + \sin \alpha \cos \theta_j)$$

$$|r_k| \sin(\theta_k - \theta_j) = |b| \sin(\alpha - \theta_j)$$

$$\left( |r_j|(\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T + |r_k|(\cos \theta_k, \sin \theta_k)^T \right) \cdot (\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T =$$

$$(|b|(\cos \alpha, \sin \alpha)^T) \cdot (\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T$$

$$|r_j| + |r_k|(\cos \theta_j \cos \theta_k + \sin \theta_k \sin \theta_j) = |b|(\cos \theta_j \cos \alpha + \sin \alpha \sin \theta_j)$$

$$|r_j| + |r_k| \cos(\theta_k - \theta_j) = |b| \cos(\alpha - \theta_j)$$

A partir de las ecuaciones anteriores se pueden encontrar una expresión explícita para  $|r_j|$  en función de  $\alpha, |b|, \theta_j$ :

$$[|r_k| \cos(\theta_k - \theta_j)]^2 = [ |b| \cos(\alpha - \theta_j) - |r_j| ]^2$$

$$[|r_k| \sin(\theta_k - \theta_j)]^2 = |r_k|^2 [1 - \cos^2(\theta_k - \theta_j)] = [ |b| \sin(\alpha - \theta_j) ]^2$$

$$|r_k|^2 - [ |b| \cos(\alpha - \theta_j) - |r_j| ]^2 = [ |b| \sin(\alpha - \theta_j) ]^2$$

$$|r_j| = |b| \cos(\alpha - \theta_j) \mp \sqrt{|r_k|^2 - [ |b| \sin(\alpha - \theta_j) ]^2}$$

Aquí si ambos resultados para  $|r_j|$  son positivos esto quiere decir que físicamente hay dos configuraciones admisibles para el mecanismo.

# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 5. Análisis analítico de posición y desplazamiento.

b) Segundo caso: la magnitud de un vector y la dirección de otro vector son desconocidas.

Una vez  $|r_j|$  es conocido, se puede determinar  $\theta_k$  de las expresiones previamente deducidas:

$$|r_k|(\cos \theta_k, \sin \theta_k)^T = |b|(\cos \alpha, \sin \alpha)^T - |r_j|(\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T$$

Sea:

$$\begin{aligned} c &= |c|(\cos \beta, \sin \beta)^T = (c_x, c_y)^T = \\ &|b|(\cos \alpha, \sin \alpha)^T - |r_j|(\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T \end{aligned}$$

$$c_x = |b| \cos \alpha - |r_j| \cos \theta_j$$

$$c_y = |b| \sin \alpha - |r_j| \sin \theta_j$$

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{c_y}{c_x} \right)$$

Y en vista de que tanto  $|r_k|$  como  $|c|$  serán mayores a cero se puede concluir que:

$$\theta_k = \beta$$

c) Tercer caso: La magnitud de dos vectores es desconocida.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |r_i|(\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T &= \\ |r_j|(\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T + |r_k|(\cos \theta_k, \sin \theta_k)^T + \\ \sum_{i=1, i \neq j, i \neq k, j \neq k}^n |r_i|(\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} |r_j|(\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T + |r_k|(\cos \theta_k, \sin \theta_k)^T &= \\ - \sum_{i=1, i \neq j, i \neq k, j \neq k}^n |r_i|(\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T \end{aligned}$$

Sea:

$$\begin{aligned} b &= |b|(\cos \alpha, \sin \alpha)^T = (b_x, b_y)^T = \\ - \sum_{i=1, i \neq j, i \neq k, j \neq k}^n |r_i|(\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T \end{aligned}$$

# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 5. Análisis analítico de posición y desplazamiento.

c) Tercer caso: La magnitud de dos vectores es desconocida.

Por lo tanto:

$$|r_j|(\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T + |r_k|(\cos \theta_k, \sin \theta_k)^T = |b|(\cos \alpha, \sin \alpha)^T$$

Aquí las incógnitas son  $|r_j|$  y  $|r_k|$ .

De las ecuaciones deducidas en el caso b), se sabe que al multiplicar la expresión anterior por el vector unitario perpendicular a  $\mathbf{r}_j$  y luego por el vector unitario perpendicular a  $\mathbf{r}_k$ ,  $\mathbf{u}_3 = (-\sin \theta_k, \cos \theta_k)^T$ , se tendrá:

$$|r_k| = \frac{|b| \sin(\alpha - \theta_j)}{\sin(\theta_k - \theta_j)}$$
$$|r_j| = \frac{|b| \sin(\alpha - \theta_k)}{\sin(\theta_j - \theta_k)}$$

d) Cuarto caso: La dirección de dos vectores es desconocida.

Siguiendo un procedimiento similar al caso b) y c) se tendrá la siguiente ecuación:

$$|r_j|(\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T + |r_k|(\cos \theta_k, \sin \theta_k)^T = |b|(\cos \alpha, \sin \alpha)^T$$

Aquí las incógnitas son  $\theta_j$  y  $\theta_k$ .

Si la expresión anterior se multiplica primero por un vector unitario perpendicular al vector  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{u}_{\perp b} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)^T$ , y luego por un vector unitario paralelo al vector  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{u}_{\parallel b} = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$ ; se tendrá:

$$|r_j| \sin(\alpha - \theta_j) + |r_k| \sin(\alpha - \theta_k) = 0$$

$$|r_j| \cos(\alpha - \theta_j) + |r_k| \cos(\alpha - \theta_k) = |b|$$

Y a partir de las expresiones anteriores se puede determinar  $\theta_j, \theta_k$ .

Sin entrar en detalles, con respecto a la manipulación algebraica se puede aseverar que:



# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 5. Análisis analítico de posición y desplazamiento.

d) Cuarto caso: La dirección de dos vectores es desconocida.

$$\tan(\alpha - \theta_j) = \frac{\left[ \pm \frac{|r_k|}{|r_j|} \sqrt{1 - \left( \frac{|b|^2 - |r_j|^2 + |r_k|^2}{2|b||r_k|} \right)^2} \right]}{\left[ \frac{|b| - |r_k| \left( \frac{|b|^2 - |r_j|^2 + |r_k|^2}{2|b||r_k|} \right)}{|r_j|} \right]}$$

De donde se puede deducir  $\theta_j$ . Aquí como se puede ver, en realidad existen dos soluciones posibles.

$$\tan(\alpha - \theta_k) = \frac{-|r_j| \sin(\alpha - \theta_j)}{|b| - |r_j| \cos(\alpha - \theta_j)}$$

De donde se puede deducir  $\theta_k$ . En vista de que existen dos posibles valores que puede tomar  $\theta_j$  también hay dos posibles soluciones para  $\theta_k$ .

e) Quinto caso: Se desconoce la magnitud de un vector, la dirección de un segundo vector, y la dirección del primer vector y de un tercer vector se encuentran funcionalmente relacionadas con la dirección del segundo vector.

$$\sum_{i=1}^n |r_i| (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T = |r_j| (\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T + |r_k| (\cos \theta_k, \sin \theta_k)^T + |r_l| (\cos \theta_l, \sin \theta_l)^T + \sum_{i=1, i \neq j, i \neq k, i \neq l, j \neq k, j \neq l, k \neq l}^n |r_i| (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T = 0$$

Entonces:

$$|r_j| (\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T + |r_k| (\cos \theta_k, \sin \theta_k)^T + |r_l| (\cos \theta_l, \sin \theta_l)^T = \sum_{i=1, i \neq j, i \neq k, i \neq l, j \neq k, j \neq l, k \neq l}^n |r_i| (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$$

# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 5. Análisis analítico de posición y desplazamiento.

e) Quinto caso: Se desconoce la magnitud de un vector, la dirección de un segundo vector, y la dirección del primer vector y de un tercer vector se encuentran funcionalmente relacionadas con la dirección del segundo vector.

Sea:

$$\mathbf{b} = |b|(\cos \alpha, \sin \alpha)^T = (b_x, b_y)^T = - \sum_{i=1, i \neq j, i \neq k, i \neq l, j \neq k, j \neq l, k \neq l}^n |r_i|(\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$$

Por lo tanto:

$$|r_j|(\cos \theta_j, \sin \theta_j)^T + |r_k|(\cos \theta_k, \sin \theta_k)^T + |r_l|(\cos \theta_l, \sin \theta_l)^T = |b|(\cos \alpha, \sin \alpha)^T$$

Aquí las incógnitas son  $|r_k|$  y  $\theta_j$ , y se sabe que  $\theta_k = \theta_j - \gamma$ ,  $\theta_l = \theta_j - \beta$ .

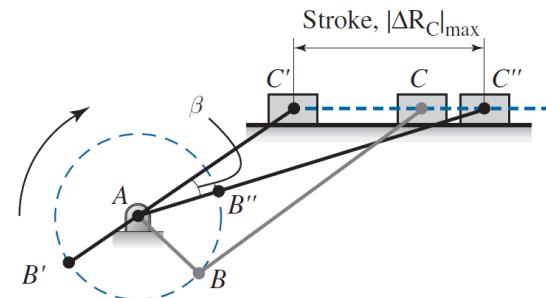
Para resolver este caso se sigue un procedimiento similar al del caso b. Para más detalles vea el material de apoyo adjunto a la presentación.

Ha de comentarse que las ecuaciones de lazo cerrado pueden también emplearse para analizar mecanismos compuestos. En este caso se identifica la cantidad de mecanismos simples, se plantean las correspondientes ecuaciones de lazo cerrado, y se resuelven las mismas secuencialmente. Recuerde que debe tener igual cantidad de ecuaciones y de incógnitas.

## 6. Posiciones límites.

La configuración de un mecanismo en donde uno de sus eslabones está en una posición extrema se conoce como posición límite.

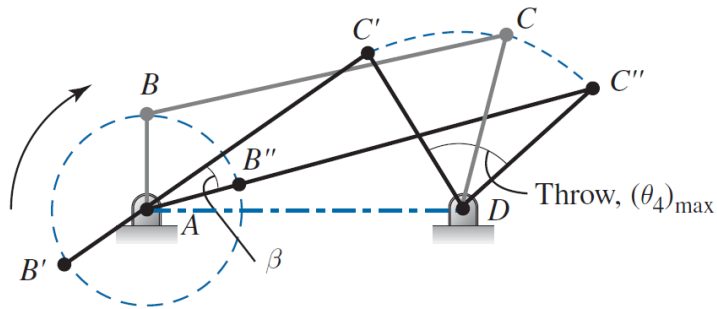
Típicamente las posiciones límites se alcanzan cuando dos eslabones se vuelven colineales.



(a) Slider-crank

# III. Análisis de posición y desplazamiento

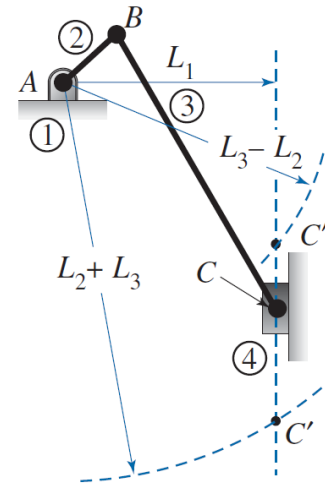
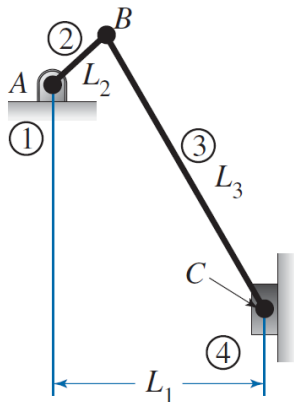
## 6. Posiciones límites.



(b) Four-bar

### Análisis gráfico

Es indistinto al análisis de posición y desplazamiento previamente discutido.



### Análisis analítico

Este consiste de dos etapas:

1. Similar al método gráfico, debe determinar las configuraciones del mecanismo que pueden llevar a posiciones límites (colinealidad entre eslabones).
2. Una vez determinadas todas las configuraciones, para la o las configuraciones que le son de interés, deduzca las incógnitas empleando el método de los triángulo o bien el método de ecuación de lazo cerrado.

# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 7. Ángulo de transmisión y ventaja mecánica.

La *ventaja mecánica* de un mecanismo es la razón de la fuerza de salida (o torque) a la fuerza de entrada (o torque).

En un eslabonamiento, el ángulo de transmisión  $\gamma$  cuantifica la transmisión de fuerza a través del eslabonamiento y afecta directamente la eficiencia mecánica. Evidentemente, la definición del ángulo de transmisión va a depender de la selección del eslabón que este siendo accionado.

En términos generales, el ángulo de transmisión es una medida de la calidad de la fuerza (o torque) transmitido en un mecanismo y su valor óptimo suele ser  $90^\circ$ .

Como regla general  $45^\circ \leq \gamma \leq 135^\circ$ .

En el capítulo de velocidad se darán más detalles con respecto al ángulo de transmisión.

## 8. Ciclo completo de un mecanismo.

La configuración de un mecanismo en un instante en particular se conoce como la *fase* del mecanismo.

En el análisis del ciclo completo de un mecanismo se estudia el movimiento del mecanismo desde una fase inicial (generalmente una posición límite, de existir) hasta la fase final de la operación, considerando determinados intervalos de fase del ciclo.

Para estudiar el ciclo completo se pueden emplear los procedimientos previamente descritos, ya sean gráficos o analíticos.

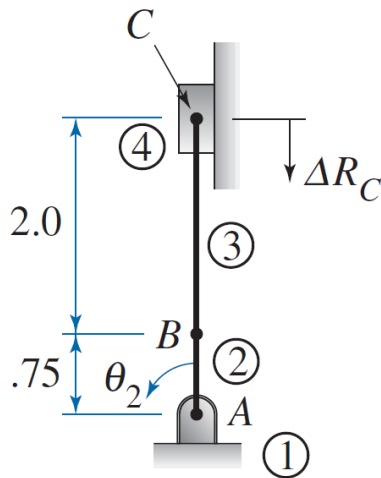
## 9. Diagramas de posición o de desplazamiento.

Una vez efectuado el análisis de posición de un ciclo completo de un mecanismo, se pueden efectuar diagramas gráficos en donde se muestre la dependencia entre el desplazamiento o la posición de un punto con respecto al desplazamiento o la posición de otro punto.

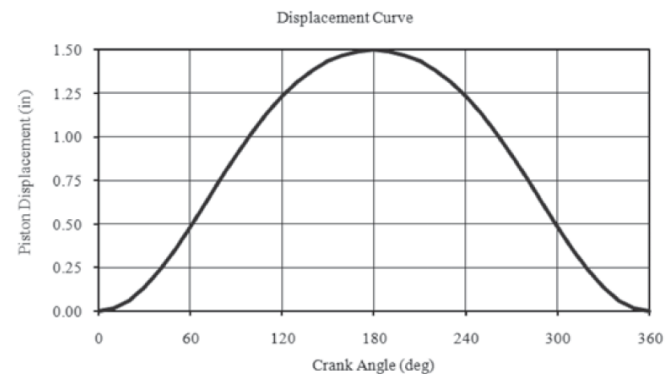
# III. Análisis de posición y desplazamiento

## 9. Diagramas de posición o de desplazamiento.

Típicamente, el desplazamiento o la posición del eslabón que es accionado; se coloca en eje horizontal o de las abscisas. En tanto que el desplazamiento o la posición del eslabón o punto dependiente; se coloca en el eje vertical o de las ordenadas.



	A	B	C	D	E	F	G
1		Crank	Piston				
2		Angle	Displacement				
3		(deg)	(in)				
4		0	0.000				
5		30	0.136				
6		60	0.483				
7		90	0.896				
8		120	1.233				
9		150	1.435				
10		180	1.500				
11		210	1.435				
12		240	1.233				
13		270	0.896				
14		300	0.483				
15		330	0.136				
16		360	0.000				



In summary, for a + C a set of solution angles  $(\theta_i, \theta_j)^1$  is found, and for a - C another set of solutions  $(\theta_i, \theta_j)^2$  is found. Since both sets are based on the solution of the loop-closure equation, they are physically admissible. In practical terms it means that a mechanism with given links allows two physical configurations.

### Fifth Case

In this case the *magnitude* of one vector, the *direction* of another vector, and the *directions* of two other vectors, functionally related to the direction of the second vector, are to be found. The loop-closure equation, after the known vectors are moved to the right-hand side, has the form:

$$r_i (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T + r_j (\cos(\theta_i - \gamma), \sin(\theta_i - \gamma))^T + r_k (\cos(\theta_i - \beta), \sin(\theta_i - \beta))^T = b (\cos \alpha, \sin \alpha)^T \quad (2.45)$$

where  $\theta_i$  and  $r_j$  are the two unknowns, and it is seen that  $\theta_j = \theta_i - \gamma$  and  $\theta_k = \theta_i - \beta$ .

Premultiply Equation 2.45 from the left by a unit vector perpendicular to the vector  $\mathbf{r}_j$ , namely, by the vector  $\mathbf{u}_1 = (-\sin(\theta_i - \gamma), \cos(\theta_i - \gamma))^T$ . The result is

$$r_i \sin \gamma + r_k \sin(\gamma - \beta) = b \sin(\alpha - \theta_i + \gamma) \quad (2.46)$$

Now premultiply Equation 2.45 from the left by a unit vector parallel to the vector  $\mathbf{r}_j$ , namely, by the vector  $\mathbf{u}_2 = (\cos(\theta_i - \gamma), \sin(\theta_i - \gamma))^T$ . The result is

$$r_i \cos \gamma + r_j + r_k \cos(\gamma - \beta) = b \cos(\alpha - \theta_i + \gamma) \quad (2.47)$$

The strategy is to find  $r_j$  first. To achieve this, square both sides in Equations 2.46 and 2.47 and add the two. The result is

$$r_i^2 + r_j^2 + r_k^2 + 2 r_i r_k \cos \beta + 2 r_j r_i \cos \gamma + 2 r_j r_k \cos(\gamma - \beta) + 2 r_i r_k \cos \gamma \cos(\gamma - \beta) = b^2 \quad (2.48)$$

The latter equation is a quadratic one with respect to  $r_j$

$$r_j^2 + cr_j + d = 0 \quad (2.49)$$

where  $c = 2r_i \cos \gamma + 2 r_k \cos(\gamma - \beta)$  and  $d = r_i^2 + r_k^2 + 2r_i r_k \cos \beta - b^2$ .

Equation 2.49 has two roots:

$$r_{j,1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - d} \quad (2.50)$$

It is seen that for the solution of the original system Equation 2.45 to exist there must be a positive root in Equation 2.50. If such a root does exist, it defines the

unknown magnitude  $r_j$ . The other unknown, angle  $\theta_i$ , is found from the system of Equations 2.46 and 2.47, which has multiple solutions. However, in this case a unique solution can be found. Denote  $\zeta = \alpha - \theta_i + \gamma$ , and  $\zeta^* = \alpha - \theta_i + \gamma$ . From Equations 2.46 and 2.47 it follows that

$$\sin \zeta = (r_i \sin \gamma + r_k \sin(\gamma - \beta))/b = A \quad (2.51)$$

and

$$\cos \zeta = (r_i \cos \gamma + r_j + r_k \cos(\gamma - \beta))/b = B \quad (2.52)$$

Since  $A$  and  $B$  are known constants for the already-found  $r_j$ , then angle  $\zeta$  is uniquely found from the following conditions:

$$\zeta = \begin{cases} \zeta^* & \text{if } A > 0 \text{ and } B > 0 \\ \pi - \zeta^* & \text{if } A > 0 \text{ and } B < 0 \\ \pi + \zeta^* & \text{if } A < 0 \text{ and } B < 0 \\ 2\pi - \zeta^* & \text{if } A < 0 \text{ and } B > 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

Having found  $\zeta$ , the unknown angle  $\theta_i = \alpha - \zeta + \gamma$  can be determined.

### 2.3.5 APPLICATIONS TO SIMPLE MECHANISMS

#### Slider-Crank Inversions

One can apply the solutions found in Section 2.3.4 to some inversions of the slider-crank mechanism shown in Figure 1.14.

- Case of Figure 1.14a  
Assuming that the crank 2 is the driver, the loop-closure equation is

$$r_1 (\cos \theta_1, \sin \theta_1)^T + r_3 (\cos \theta_3, \sin \theta_3)^T = -r_2 (\cos \theta_2, \sin \theta_2)^T \quad (2.54)$$

where  $r_1$  and  $\theta_3$  are the unknowns, and thus the equation falls into the second case category. Note that  $r_1$  is given by Equation 2.31, and  $\theta_3$  by Equation 2.32.

A position analysis of this mechanism was done using Mathematica. Snapshots of the motion at four positions are shown in Figure 2.6 for the following input data:

$$\frac{r_3}{r_1} = 4, \quad \theta_1 = \pi$$

The change of the angle of rotation of the connecting rod (link 3) during one cycle of crank rotation is shown in Figure 2.7. Note that when  $\theta_2 = 0, \pi, 2\pi$ , the connecting rod coincides with the  $x$ -axis. The maximum of the angle  $\theta_3$  allows one to check for possible interference with the cylinder walls.