

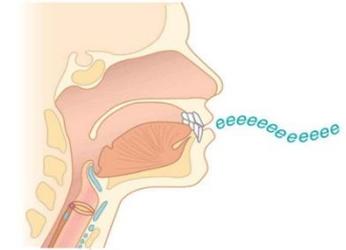
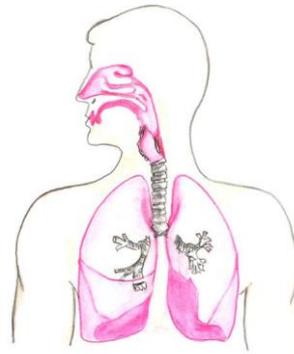
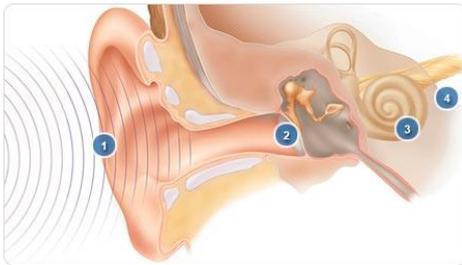
I. Fundamentos de Vibración

Objetivos:

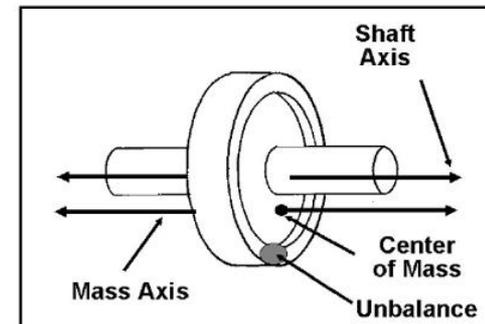
1. Indicar la importancia del estudio de la vibración.
2. Discutir algunos conceptos básicos de la vibración: ¿qué es la vibración?, ¿cuáles son las partes elementales de un sistema vibratorio?, ¿qué son grados de libertad y coordenadas generalizadas?, ¿qué diferencia existe entre sistemas discretos y continuos?
3. Discutir las varias clasificaciones de la vibración.
4. Establecer los pasos involucrados en el análisis de la vibración.
5. Introducir los elementos principales involucrados en el estudio de la vibración: elásticos, inerciales, disipadores, fuentes externas de energía.
6. Realizar un breve repaso del movimiento armónico.
7. Introducir SIMULINK de MATLAB.

1. Importancia del estudio de la vibración

La mayoría de las actividades humanas involucran vibración de una forma u otra.



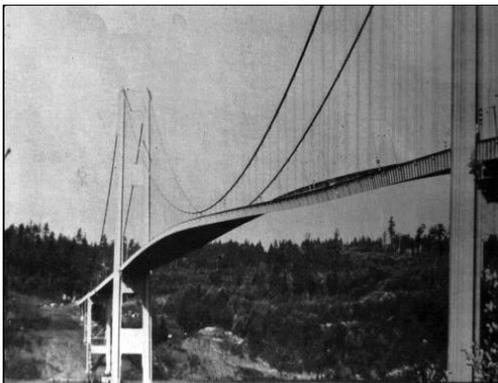
Recientemente muchos investigadores han estado motivados al estudio de las aplicaciones ingenieriles de la vibración: diseño de máquinas, fundaciones, estructuras, y sistemas de control. La mayoría de los elementos sujetos a movimiento, presentan desbalance inherente y están sujetos a rotación.



I. Fundamentos de Vibración

1. Importancia del estudio de la vibración

Cuando una frecuencia natural de una máquina u estructura coincide con la frecuencia de una excitación externa, ocurre un fenómeno llamado resonancia que lleva a deflexiones excesivas y a fallas.



La transmisión de vibraciones a seres humanos, resulta en disconformidad, pérdida de eficiencia, e incluso daño a la salud.



Las vibraciones pueden ser usadas para aplicaciones industriales y comerciales. También las vibraciones pueden mejorar la eficiencia de ciertos procesos como la soldadura.

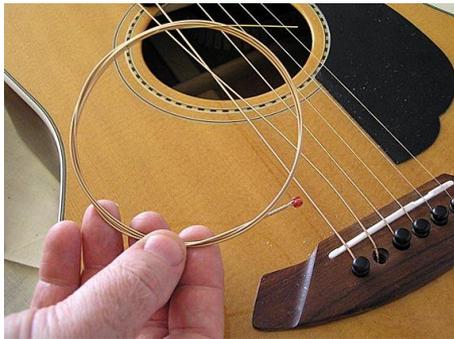


I. Fundamentos de Vibración

2. Conceptos básicos de vibración

¿Qué es vibración?

Cualquier movimiento que se repita después de un cierto intervalo de tiempo es llamado vibración u oscilación.

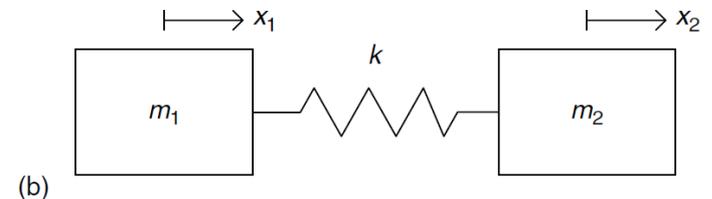
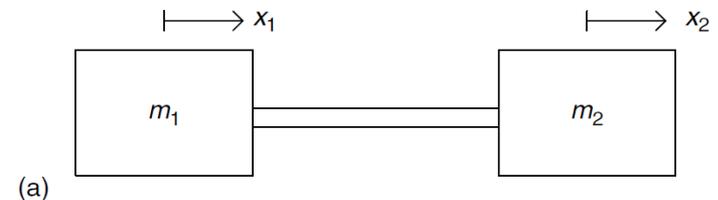


¿Cuáles son las partes elementales de los sistemas vibratorios?

La vibración de un sistema involucra la transferencia de su energía potencial a energía cinética, y viceversa, de forma alternativa. Por lo tanto, un sistema vibratorio tiene un medio para almacenar energía potencial (resorte o medio elástico), y un medio para almacenar energía cinética (masa o inercia-resistencia de un objeto a cambiar su estado de movimiento-). El sistema también puede tener un medio de disipación de energía (amortiguador).

Número de grados de libertad y coordenadas generalizadas.

Una coordenada es una variable dependiente del tiempo que es usada para seguir el movimiento de una partícula. Dos partículas son cinemáticamente independientes si no hay una relación geométrica o cinemática, que limite el movimiento relativo de una partícula con respecto a otra.

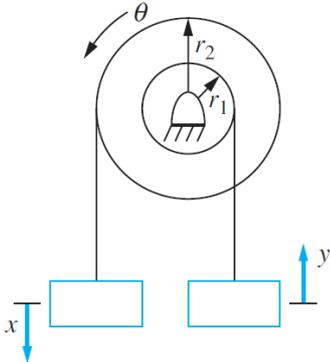


I. Fundamentos de Vibración

2. Conceptos básicos de vibración

Número de grados de libertad y coordenadas generalizadas.

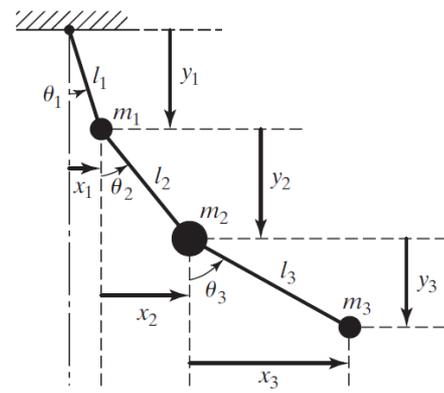
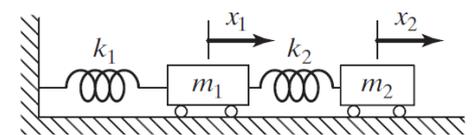
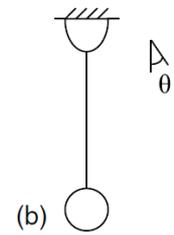
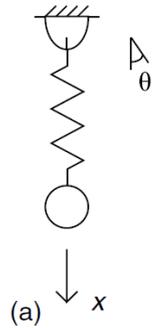
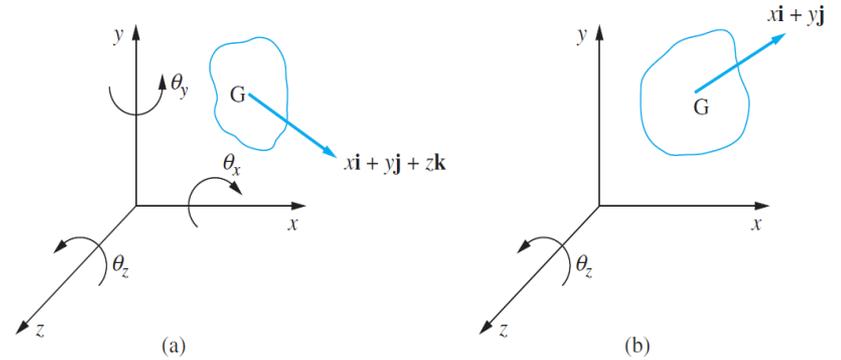
El número mínimo de coordenadas cinemáticas independientes necesarias para especificar el movimiento de cada partícula en un sistema en un instante de tiempo define el número de grados de libertad de ese sistema. Cualquier conjunto de n número de coordenadas cinemáticas independientes para un sistema de n grados de libertad es llamado conjunto de coordenadas generalizadas.



$$x = r_2 \theta, \quad y = r_1 \theta = \frac{r_1}{r_2} x$$

La teoría de vibraciones estudia el movimiento de partículas, cuerpos rígidos, y cuerpos deformables.

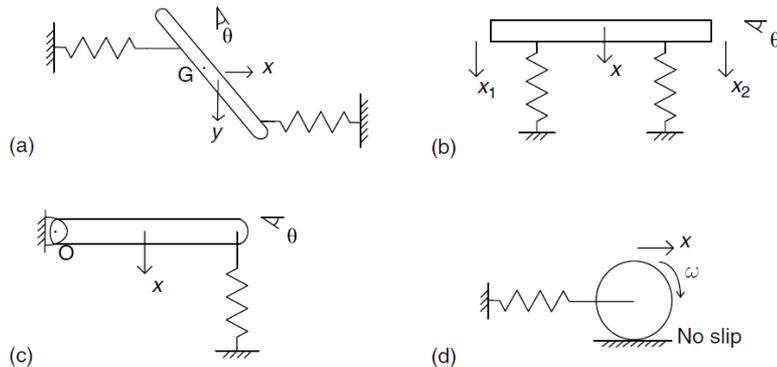
Una sola partícula libre de moverse en el espacio tiene tres grados de libertad, un cuerpo rígido sin restricciones tiene seis grado de libertad (su centro de masa puede moverse independientemente en tres direcciones mientras que el cuerpo puede rotar independientemente sobre tres ejes).



I. Fundamentos de Vibración

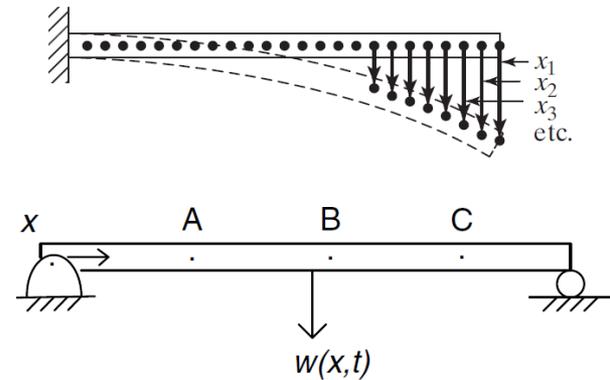
2. Conceptos básicos de vibración

Número de grados de libertad y coordenadas generalizadas.



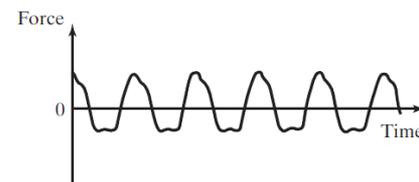
Sistemas discretos y sistemas distribuidos

Un gran número de sistemas pueden ser descritos usando un número finito de grados de libertad, a estos se les conoce como sistemas discretos. Otros sistemas, especialmente aquellos que involucran miembros elásticos continuos, tienen un número infinito de grados de libertad. A estos se les conoce como sistemas continuos.

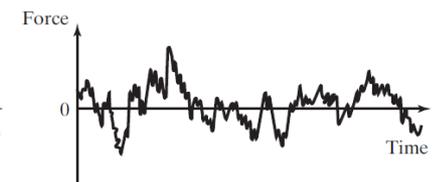


3. Clasificación de la vibración

- Libre y forzada.
- Vibración amortiguada y no amortiguada.
- Vibración lineal y no lineal.
- Vibración determinística y aleatoria.



(a) A deterministic (periodic) excitation



(b) A random excitation

I. Fundamentos de Vibración

4. Procedimiento de análisis de la vibración

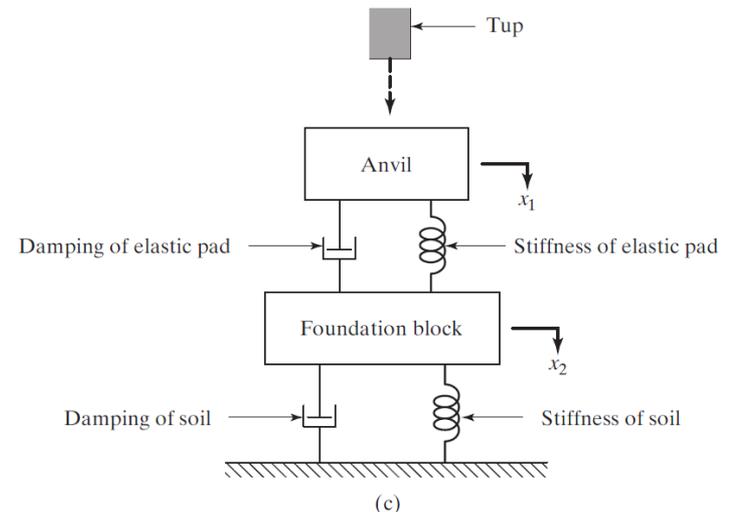
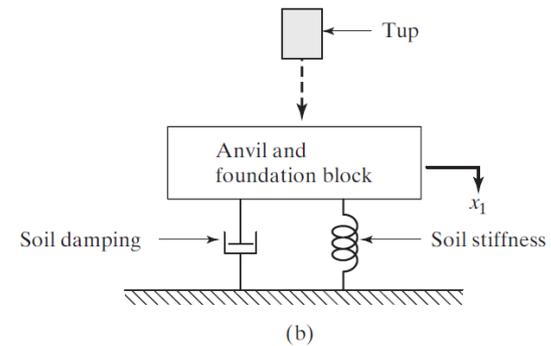
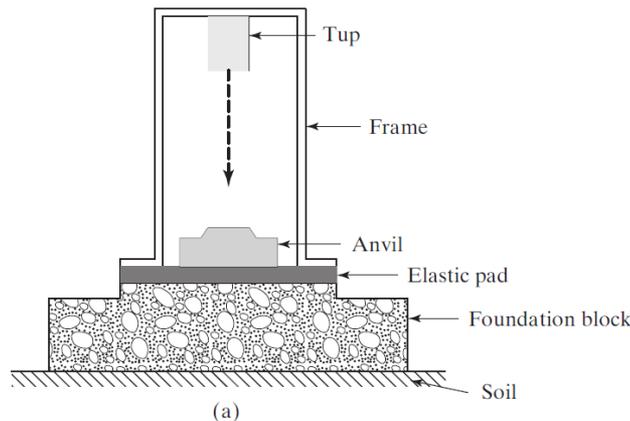
El procedimiento típico a seguir en el análisis es el siguiente:

Paso 1: Modelado matemático.

Paso 2: Derivación de las ecuaciones que gobiernan el problema.

Paso 3: Resolver las ecuaciones que gobiernan el fenómeno.

Paso 4: Interpretación de los resultados.



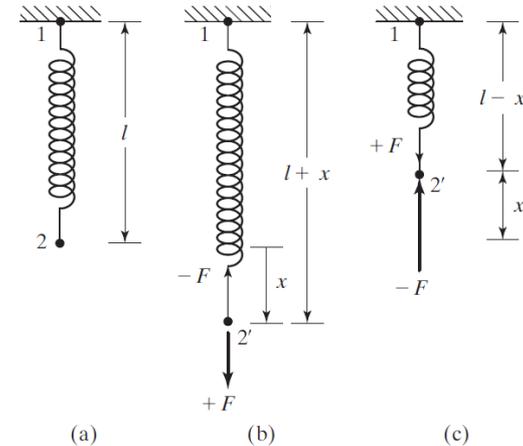
I. Fundamentos de Vibración

5. Elementos elásticos o de rigidez: resortes

Un resorte es un elemento mecánico flexible que une dos partículas en un sistema mecánico. En la realidad un resorte es un elemento continuo, sin embargo en la mayoría de las aplicaciones se supone que su masa y su capacidad de amortiguamiento son despreciables.



La longitud de un resorte cuando no está sujeto a fuerzas externas se conoce como longitud no deformada.



En vista de que el resorte está hecho de un material elástico, la fuerza F para que el resorte cambie su longitud en proporción a x debe ser alguna función continua de x .

$$F = f(x)$$

$$F(x + a) = F(a) + \frac{dF(a)}{dx} \frac{(x - a)}{1!} + \frac{d^2F(a)}{dx^2} \frac{(x - a)^2}{2!} + \frac{d^3F(a)}{dx^3} \frac{(x - a)^3}{3!} + \dots$$

$$a = 0$$

$$F(x) = k_0 + k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \dots$$

Donde: $k_0 = F(0)$, $k_1 = \frac{dF(0)}{dx}$, $k_2 = \frac{d^2F(0)}{dx^2} \cdot \frac{1}{2}$, $k_3 = \frac{d^3F(0)}{dx^3} \cdot \frac{1}{6}$, ...

I. Fundamentos de Vibración

5. Elementos elásticos o de rigidez: resortes

En vista de que x representa el cambio de longitud en el resorte medido desde su posición no deformada, cuando $x = 0, F = 0$, y consecuentemente $k_0 = 0$. Cuando x es negativa se considerará que el resorte está en compresión.

Muchos materiales tienen las mismas propiedades tanto en tensión como en compresión. Esto significa que si para elongar el resorte en cierta magnitud se requiere de una fuerza en tensión, para comprimirlo, se requerirá de la misma fuerza solo que en dirección opuesta.

$$F(x) + F(-x) = 0$$

$$F(x) = k_1x + k_3x^3 + k_5x^5 + \dots$$

De lo anterior se puede concluir que inherentemente todos los resortes son no lineales.

Si el valor de x es lo suficientemente pequeño los términos no lineales serán considerablemente pequeños en comparación con k_1x y por lo tanto

$$F(x) \cong k_1x$$

El trabajo hecho (W) por este resorte al elongarse e ir de un punto a a un punto b estaría dado por

$$W_{a-b} = \int_a^b -F(x)dx = \int_a^b -k_1x dx = \frac{k_1x^2|_a}{2} - \frac{k_1x^2|_b}{2}$$

$$E.P. = \frac{1}{2}k_1x^2$$

En caso tal de que se trate de un resorte sujeto a rotación, la energía potencial puede expresarse como

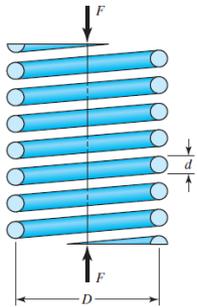
$$E.P. = \frac{1}{2}k_t\theta^2$$

Donde k_t es la constante de elasticidad o rigidez torsional del resorte y θ el desplazamiento angular.

I. Fundamentos de Vibración

5. Elementos elásticos o de rigidez: resortes

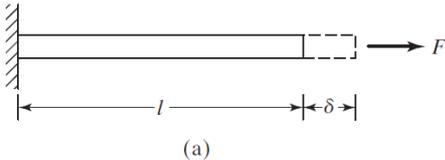
- Constante de un resorte helicoidal sujeto a tensión o compresión.



$$k_1 \cong \frac{d^4 G}{8D^3 N}$$

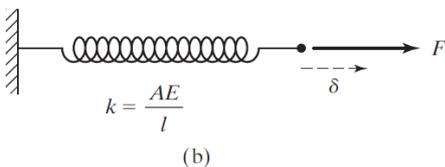
Donde D es el diámetro de la espiral de alambre, d el diámetro del alambre, G es el módulo de rigidez al cortante, y N es el número de vueltas activas.

- Constante de una barra elástica en cantiléver sujeta a una fuerza axial de tensión o compresión.



$$F = k_1 \delta, \quad \sigma = \frac{F}{A}, \quad \varepsilon = \frac{\delta}{l},$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$



$$\sigma A = k_1 \frac{\sigma l}{E} \rightarrow k_1 = \frac{AE}{l}$$

Donde: σ es el esfuerzo normal, A el área de sección transversal a la dirección de la fuerza F , ε la deformación unitaria, δ el cambio en la longitud de la barra al elongarse, l la longitud no deformada de la barra, y E el módulo de Young.

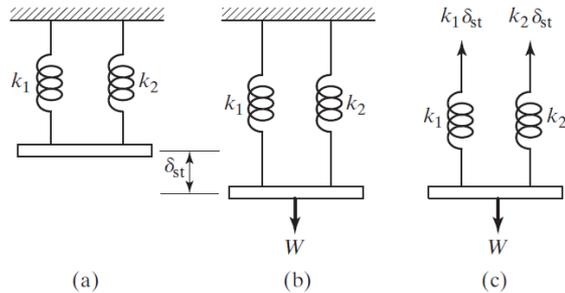
***Algunas expresiones de la constante de elasticidad (k_1) para elementos elásticos ante diferentes tipos de carga, puede encontrarlas detrás de la portada delantera y trasera de su libro de texto.*

I. Fundamentos de Vibración

5. Elementos elásticos o de rigidez: resortes

- Combinación de resortes.

a) Resortes en paralelo. Los resortes en paralelo presentan la misma deflexión ante una fuerza aplicada.



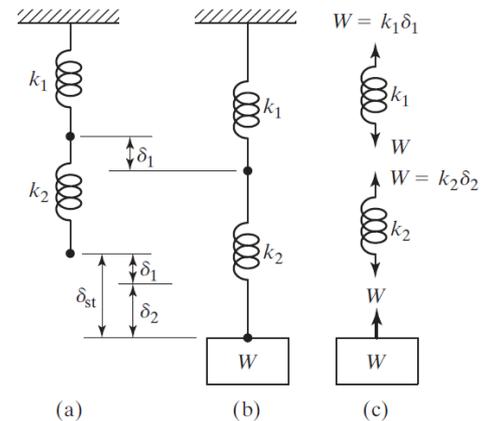
$$W = F_1 + F_2 = k_1 \delta_{st} + k_2 \delta_{st} = (k_1 + k_2) \delta_{st}$$

$$W = k_{eq} \delta_{st}$$

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n = \sum_{i=1}^n k_i$$

b) Resortes en serie. En el caso de resortes en serie se tiene la misma fuerza, pero diferente elongación.



$$W = k_1 \delta_1 = k_2 \delta_2 = k_{eq} \delta_{st}, \quad \delta_{st} = \delta_1 + \delta_2$$

$$\frac{W}{k_{eq}} = \frac{W}{k_1} + \frac{W}{k_2} \rightarrow \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

I. Fundamentos de Vibración

6. Otras fuentes de energía potencial

Cualquier fuerza conservativa (fuerza con la propiedad de que hará el mismo trabajo entre dos puntos con independencia de la trayectoria seguida) tiene asociada una función de energía potencial.

- a) Gravedad. La fuerza de un cuerpo producto de la presencia de su masa m en un campo gravitatorio es mg ; donde g es la aceleración gravitatoria. Esta es una fuerza conservativa.

El trabajo W está dado por

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Donde \vec{F} es el vector fuerza y $\vec{r} = x, y, z$ el vector posición.

$$W = E.P.(x_1, y_1, z_1) - E.P.(x_2, y_2, z_2)$$

$$dW = -dE.P. = -\frac{\partial E.P.}{\partial x} dx - \frac{\partial E.P.}{\partial y} dy - \frac{\partial E.P.}{\partial z} dz = \vec{\nabla} E.P. \cdot d\vec{r}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = 0\mathbf{i} - mg\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Aquí la dirección y se ha tomado positiva hacia arriba.

$$\vec{\nabla} E.P. = 0\mathbf{i} - mg\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial E.P.}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E.P.}{\partial y} = mg, \quad \frac{\partial E.P.}{\partial z} = 0$$

$$E.P. = mgy$$

Donde y es el cambio de posición del centro de masa.

I. Fundamentos de Vibración

7. Elementos inerciales: masas

a) Segunda ley de Newton, momento angular, y energía cinética para partículas o masas puntuales.

Como recordará para una partícula la segunda ley de Newton puede ser expresada como

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = m\vec{a}$$

Donde $\sum \vec{F}$ representa la sumatoria de todas las fuerzas externas actuando sobre la partícula, \vec{V} la velocidad de la partícula, \vec{a} la aceleración de la partícula, y m la masa de la partícula. Si \vec{r} es el vector posición de la partícula, la expresión anterior podría re escribirse como

$$\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

Los dos puntos representan que $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

El momento angular \vec{H}_o de una partícula sobre un punto o está definido como

$$\vec{H}_o = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = mr^2 \left(\frac{\vec{r} \times \dot{\vec{r}}}{r^2} \right) = I\vec{\omega}$$

Donde r es la norma euclidiana de \vec{r} , $I = mr^2$ el momento de inercia de la partícula o masa puntual, $\vec{\omega} = \dot{\theta}$ la velocidad angular, y θ el desplazamiento angular.

El momento de una fuerza sobre un punto es igual a

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Donde \vec{r} es un vector que va del punto hacia la aplicación de la fuerza. Aplicando lo anterior a la segunda ley de Newton sobre el punto o :

$$\sum \vec{M}_o = \sum \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}}$$

$$\dot{\vec{H}}_o = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = m[(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) + (\vec{r} \times \ddot{\vec{r}})] = \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}}$$

$$\dot{\vec{H}}_o = \sum \vec{M}_o = I\ddot{\theta}$$

I. Fundamentos de Vibración

7. Elementos inerciales: masas

a) Segunda ley de Newton, momento angular, y energía cinética para partículas o masas puntuales.

Finalmente la energía cinética para una partícula estaría dada por

$$E.C. = \frac{1}{2} m \vec{V} \cdot \vec{V} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$$

b) Segunda ley de Newton, momento angular, y energía cinética para sistemas de partículas.

Considere un sistema de n partículas. Sea \vec{r}_i el vector posición de una i esima partícula cuya masa es m_i . Si $\sum \vec{F}_i$ es la sumatoria de todas las fuerzas externas actuando sobre la partícula, entonces aplicando la segunda ley de Newton se tiene

$$\sum \vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

El diagrama de cuerpo libre de una partícula en un sistema ilustra las fuerzas entre la partícula i y todas las otras partículas en el sistema. Dejando que \vec{f}_{ij} sea la fuerza actuando sobre la partícula i desde la partícula j . A partir de la tercera ley de Newton también es evidente que la fuerza \vec{f}_{ji} , actuando sobre la partícula j desde la i , es $-\vec{f}_{ij}$. A partir de lo anterior

$$\sum \vec{F}_i = \sum \vec{F}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{f}_{ij}$$

Donde $\sum \vec{F}_i$ es la sumatoria de todas las fuerzas externas al sistema actuando sobre la partícula i .

Para todo el sistema, de acuerdo a la segunda ley de Newton se tendría

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum \vec{F}_i \right) = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i$$
$$\sum_{i=1}^n \left(\sum \vec{F}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{f}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

I. Fundamentos de Vibración

7. Elementos inerciales: masas

b) Segunda ley de Newton, momento angular, y energía cinética para sistemas de partículas.

$$\sum_{i=1}^n \sum \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{f}_{ij} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{f}_{ij} = 0, \text{ en vista de que } \vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \sum \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

El centro de masa para el sistema de partículas está dado por el vector \vec{r}

$$\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

$$\sum_{i=1}^n \sum \vec{F}_i = m \ddot{\vec{r}} = m \vec{a}$$

El momento angular \vec{H}_o de un sistema de partículas sobre un punto o es

$$\vec{H}_o = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i$$

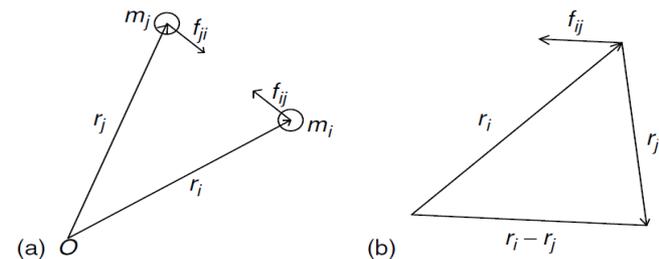
$$\dot{\vec{H}}_o = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i \right) = \sum_{i=1}^n m_i [(\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i) + (\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i)] = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum \vec{F}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{f}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

$$\dot{\vec{H}}_o = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \left(\sum \vec{F}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{f}_{ij} \right)$$

La expresión anterior contiene términos de la forma

$$r_i \times f_{ij} + r_j \times f_{ji} = r_i \times f_{ij} - r_j \times f_{ij} = (r_i - r_j) \times f_{ij} = 0$$



I. Fundamentos de Vibración

7. Elementos inerciales: masas

b) Segunda ley de Newton, momento angular, y energía cinética para sistemas de partículas.

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{f}_{ij} = 0$$

$$\vec{H}_o = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \sum \vec{F}_i = \sum M_o$$

Con respecto a la energía cinética

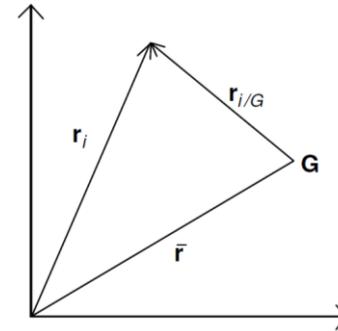
$$E.C. = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{r} + \vec{r}_{i/G}$$

Donde $\vec{r}_{i/G}$ es el vector posición una partícula i con respecto al centro de masa del sistema de partículas G .

$$E.C. = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}_{i/G}) \cdot (\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}_{i/G})$$

$$E.C. = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + 2\dot{\vec{r}} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_{i/G} + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_{i/G} \cdot \dot{\vec{r}}_{i/G} \right]$$



$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_{i/G} = m \dot{\vec{r}}_G = 0$$

Donde $\dot{\vec{r}}_G$ es el vector velocidad del centro de masa del cuerpo rígido con respecto a su centro de masa, y consecuentemente es cero.

$$E.C. = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_{i/G} \cdot \dot{\vec{r}}_{i/G} \right]$$

El primer término en la ecuación es la energía cinética del centro de masa del sistema, mientras que el segundo es la energía cinética producto del movimiento de las partículas relativo a su centro de masa.

I. Fundamentos de Vibración

7. Elementos inerciales: masas

c) Segunda ley de Newton, momento angular, y energía cinética para cuerpos rígidos.

Un cuerpo rígido es un sistema en el cuál la masa tiene una distribución continua, existe un centro de masa, y a medida que el movimiento ocurre, cada partícula mantiene su posición relativa al centro de masa.

La derivación de las ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido es similar a la de un sistema de partículas. Suponiendo que el cuerpo rígido este compuesto de una número de partículas de masa Δm_i

$$\sum \vec{F} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta m_i \ddot{\vec{r}}_i = \int_m \ddot{\vec{r}} dm$$

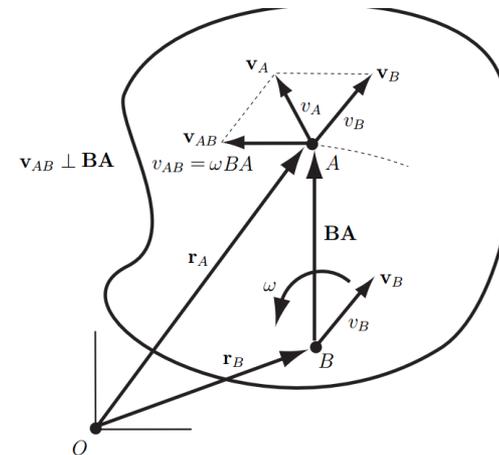
Donde $\sum \vec{F}$ representa la sumatoria de fuerzas externas sobre el cuerpo rígido.

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m} \int_m \ddot{\vec{r}} dm \rightarrow \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m} \int_m \ddot{\vec{r}} dm$$

$$\sum \vec{F} = m \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{H}_o = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \Delta m_i \dot{\vec{r}}_i = \int_m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dm$$

La ecuación de la velocidad relativa es usada para determinar la velocidad de cualquier partícula en el cuerpo rígido en términos de la velocidad del centro masa:



$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}$$

$$\frac{d(\vec{r}_A)}{dt} = \frac{d(\vec{r}_B)}{dt} + \frac{d(\vec{r}_{A/B})}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{r}_{A/B})}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B})$$

Sea A un punto arbitrario y B el centro de masa del cuerpo rígido

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} + (\vec{\omega} \times \vec{r}_G)$$

I. Fundamentos de Vibración

7. Elementos inerciales: masas

c) Segunda ley de Newton, momento angular, y energía cinética para cuerpos rígidos.

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} + (\vec{\omega} \times \vec{r}_G)$$

Donde $\vec{\omega}$ es el vector de velocidad angular, $\dot{\vec{r}}$ el vector velocidad de un punto arbitrario en el cuerpo rígido, $\dot{\vec{r}}$ el vector velocidad del centro de masa del cuerpo rígido, y $\vec{r}_G = \vec{r} - \vec{r}$

$$\vec{H}_o = \int_m (\vec{r} + \vec{r}_G) \times [\dot{\vec{r}} + (\vec{\omega} \times \vec{r}_G)] dm$$

$$\vec{H}_o = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \left[\vec{\omega} \int_m \vec{r}_G dm \right] + \left[\int_m \vec{r}_G dm \right] \times \dot{\vec{r}} + \int_m \vec{r}_G \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) dm$$

$$\vec{H}_o = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} + \int_m \vec{r}_G \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) dm$$

Sí el punto de rotación o fuera el centro de masa del cuerpo, siendo dicho punto la referencia, $\vec{r} = 0$, y por lo tanto el momento angular en torno al centro de masa del cuerpo estaría dado por

$$\vec{H}_o = \vec{H}_G = \int_m \vec{r}_G \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) dm$$

De lo contrario, el centro de masa sobre cualquier punto o estaría dado por

$$\vec{H}_o = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{H}_G$$

En el caso de que se trate de un movimiento bidimensional, las expresiones anteriores quedarían como

$$\vec{\omega} = \omega \mathbf{k}$$

$$\vec{r}_G = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$\vec{H}_G = \omega \int_m (x^2 + y^2) dm \mathbf{k} = \bar{I} \omega \mathbf{k}$$

Donde \bar{I} es el momento de inercia centroidal del cuerpo rígido sobre el eje z . La tasa de cambio de momento angular estará dada por

$$\dot{\vec{H}}_G = \sum \vec{M}_G = \bar{I} \dot{\omega} = \bar{I} \ddot{\theta} \mathbf{k}$$

I. Fundamentos de Vibración

7. Elementos inerciales: masas

c) Segunda ley de Newton, momento angular, y energía cinética para cuerpos rígidos.

Cuando el momento no se toma sobre el centro de masa se tiene

$$\sum \vec{M}_o = \left[(\dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}}) + (\vec{r} \times m\ddot{\vec{r}}) \right] + \bar{I}\ddot{\theta}\mathbf{k} = \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} + \bar{I}\ddot{\theta}\mathbf{k}$$

Con respecto a la energía cinética

$$E.C. = \frac{1}{2} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \Delta m_i \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \sum_{i=1}^n \Delta m_i \dot{\vec{r}}_{i/G} \cdot \dot{\vec{r}}_{i/G} \right] \right\}$$

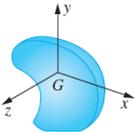
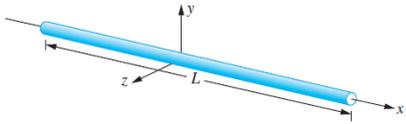
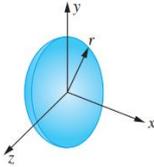
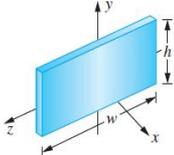
$$E.C. = \frac{1}{2} \left[m\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \int_m \dot{\vec{r}}_G \cdot \dot{\vec{r}}_G dm \right]$$

$$E.C. = \frac{1}{2} \left[m\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \int_m (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) dm \right]$$

Para el caso bidimensional

$$E.C. = \frac{1}{2} \left[m\dot{\vec{r}}^2 + \omega^2 \bar{I}_z \right]$$

Los momentos de inercia de ciertos cuerpos tridimensionales se muestran a continuación

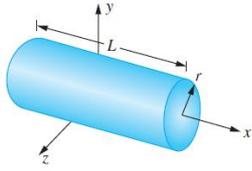
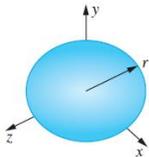
| Body | General Shape | Centroidal Moments of Inertia |
|---------------|---|---|
| General shape |  | $\bar{I}_x = \int (y^2 + z^2) dm$ $\bar{I}_y = \int (x^2 + z^2) dm$ $\bar{I}_z = \int (x^2 + y^2) dm$ |
| Slender rod |  | $\bar{I}_x \approx 0$ $\bar{I}_y = \frac{1}{12} mL^2$ $\bar{I}_z = \frac{1}{12} mL^2$ |
| Thin disk |  | $\bar{I}_x = \frac{1}{2} mr^2$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4} mr^2$ $\bar{I}_z = \frac{1}{4} mr^2$ |
| Thin plate |  | $\bar{I}_x = \frac{1}{12} m(w^2 + h^2)$ $\bar{I}_y = \frac{1}{12} mw^2$ $\bar{I}_z = \frac{1}{12} mh^2$ |

I. Fundamentos de Vibración

7. Elementos inerciales: masas

c) Segunda ley de Newton, momento angular, y energía cinética para cuerpos rígidos.

Los momentos de inercia de ciertos cuerpos tridimensionales se muestran a continuación

| Body | General Shape | Centroidal Moments of Inertia |
|-------------------|--|--|
| Circular cylinder |  | $\bar{I}_x = \frac{1}{12}mr^2$ $\bar{I}_y = \frac{1}{12}m(3r^2 + L^2)$ $\bar{I}_z = \frac{1}{12}m(3r^2 + L^2)$ |
| Sphere |  | $\bar{I}_x = \frac{2}{5}mr^2$ $\bar{I}_y = \frac{2}{5}mr^2$ $\bar{I}_z = \frac{2}{5}mr^2$ |

d) Masas equivalentes.

Para determinar la masa equivalente en sistemas con traslación pura o en rotación y traslación simplemente ha de sumarse la energía cinética de cada uno de los componentes del sistema e igualarla a una energía cinética equivalente con una masa equivalente y una velocidad lineal o angular equivalente. Vea sección 1.8 del libro de texto.

8. Elementos disipadores de energía: amortiguadores

En muchos sistemas prácticos, la energía de la vibración es gradualmente convertida en calor o sonido, y producto de esta reducción en la energía, la respuesta del sistema (como lo es el desplazamiento por ejemplo) eventualmente decrece. El mecanismo por el cual la energía vibratoria es eventualmente convertida en calor o sonido se conoce como amortiguamiento. Un amortiguador se supone no tiene masa ni elasticidad.

Hay diferentes tipos de amortiguamiento:

a) Amortiguamiento viscoso. Este es el tipo de amortiguamiento más común. Se da cuando un sistema mecánico vibra en un fluido, y la resistencia ofrecida por el fluido al movimiento causa que este disipe energía. En la disipación viscosa la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad del cuerpo que vibra.

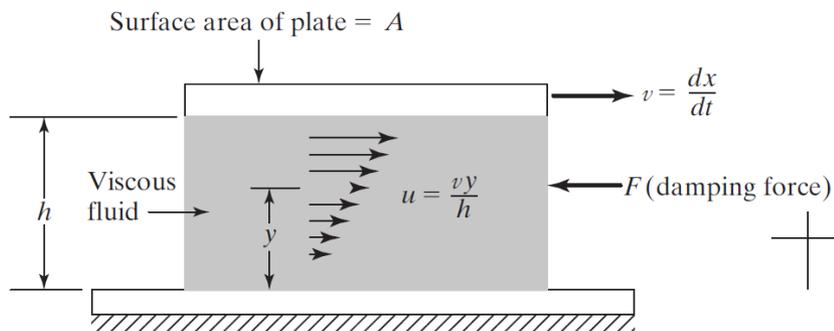
I. Fundamentos de Vibración

8. Elementos disipadores de energía: amortiguadores

a) Amortiguamiento viscoso.

Ejemplos típicos de amortiguamiento viscoso incluyen: una película de fluido entre dos superficies paralelas donde una se está deslizando, un fluido fluyendo alrededor de un pistón en un cilindro, un fluido fluyendo a través de un orificio, y un fluido dentro de un cojinete.

Película de fluido entre dos superficies paralelas donde una se está deslizando



Suponiendo que el fluido sea Newtoniano, de su clase de mecánica de fluidos, recordará que el esfuerzo cortante τ es proporcional al gradiente de velocidad (du/dy , $u =$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Donde μ es la viscosidad del fluido Newtoniano.

Para este caso en particular se conoce que la variación de la componente vertical de la velocidad, u , es lineal y que solo es función de y

$$u = f(y) = ay + b$$

Teniendo presente que $u(0) = 0$, y que $u(h) = v$

$$u = \frac{v}{h}y$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{v}{h}$$

Recordando que $\tau = F/A$, Donde F es la fuerza de amortiguamiento, y A el área sujeta al esfuerzo cortante

$$F = \frac{\mu A}{h}v = \frac{\mu A}{h}\dot{x}$$

I. Fundamentos de Vibración

8. Elementos disipadores de energía: amortiguadores

a) Amortiguamiento viscoso.

Película de fluido entre dos superficies paralelas donde una se está deslizando

$$F = c\dot{x}$$

Aquí $c = \frac{\mu A}{h}$ es la constante de amortiguamiento.

En la sección 1.9 de su libro de texto o en la parte trasera de su portada delantera o trasera puede apreciar otras expresiones para c cuando se tienen otros casos de amortiguamiento viscoso.

Lo anterior hace evidente que cuando existe amortiguamiento viscoso la fuerza asociada con la disipación de energía presenta una dependencia lineal con respecto a la velocidad.

El trabajo hecho por la fuerza de amortiguamiento estará dado por

$$W_{n.c.,viscoso} = \int c\dot{x} \cdot d\vec{x}$$

Donde $W_{n.c.}$ es el trabajo no conservativo asociado a la disipación viscosa. Ha de decirse que la fuerza de disipación viscosa siempre se opone al movimiento.

En el caso unidimensional:

$$W_{n.c.,viscoso} = \int c\dot{x}\mathbf{i} \cdot d\mathbf{x}\mathbf{i} = - \int c\dot{x} dx = - \int c\dot{x}^2 dt$$

Este trabajo conservativo es igual a la energía disipada.

La potencia consecuentemente será la tasa de cambio de esta energía disipada con respecto al tiempo.

$$P = \frac{dW_{n.c.,viscoso}}{dt} = -c\dot{x}^2$$

I. Fundamentos de Vibración

8. Elementos disipadores de energía: amortiguadores

b) Amortiguamiento de Coulomb o fricción seca. Este amortiguamiento se da entre superficie en contacto, ya sea en seco o con aquellas superficies con poca lubricación. Aquí la fuerza de amortiguamiento es constante en magnitud pero en dirección opuesta al movimiento.

c) Amortiguamiento material. Cuando un material es deformado, se absorbe y disipa energía por el material.

d) Amortiguadores en serie y en paralelo.

De forma análoga a los resortes, se pueden tener amortiguadores en serie o en paralelo y se puede determinar una constante de amortiguamiento equivalente (c_{eq}).

Amortiguadores en paralelo en movimiento de traslación

$$c_{eq} = \sum_{i=1}^n c_i$$

Amortiguadores en serie en movimiento de traslación

$$c_{eq} = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n c_i} \right)^{-1}$$

9. Fuentes externas de energía

Las fuentes externas de energía están constituidas por el trabajo efectuado por todas aquellas fuerzas no conservativas. Recuerde que dichas fuerzas son aquellas en donde el trabajo sí depende de la trayectoria recorrida.

La energía disipada producto del amortiguamiento viscoso es un ejemplo de este tipo de fuentes de energía.

En términos generales el trabajo hecho por una fuerza no conservativa estará dado por

$$W_{n.c.} = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} = - \int \vec{F} \cdot \dot{\vec{x}} dt$$

Y la potencia por

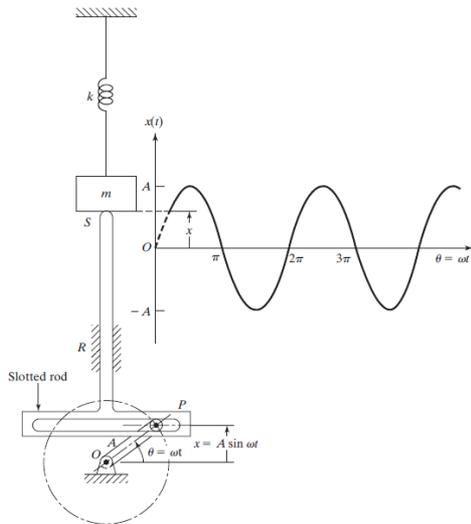
$$P = \frac{dW_{n.c.}}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{x}}$$

I. Fundamentos de Vibración

10. Movimiento harmónico

Un movimiento oscilatorio puede repetirse de forma regular o no. Sí el movimiento se repite después de intervalos de tiempo iguales, es llamado movimiento periódico.

El más simple de los movimientos periódicos es el armónico y se caracteriza por ser descrito por medio de funciones senoidales y/o cosenoidales.



a) Definiciones y terminología.

- Ciclo: Movimiento de un cuerpo vibratorio desde su posición de equilibrio o no perturbada hasta su posición extrema en una dirección, luego a su posición de equilibrio, después a su posición extrema en la otra dirección, y finalmente de regreso a su posición de equilibrio.
- Amplitud: Desplazamiento máximo de un cuerpo vibratorio desde su posición de equilibrio.
- Periodo de oscilación, τ : Tiempo que toma completar un ciclo de movimiento.

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

ω es la frecuencia circular o velocidad angular.

I. Fundamentos de Vibración

10. Movimiento armónico

a) Definiciones y terminología.

- Frecuencia de oscilación, f : Es el número de ciclos por unidad de tiempo.

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$$

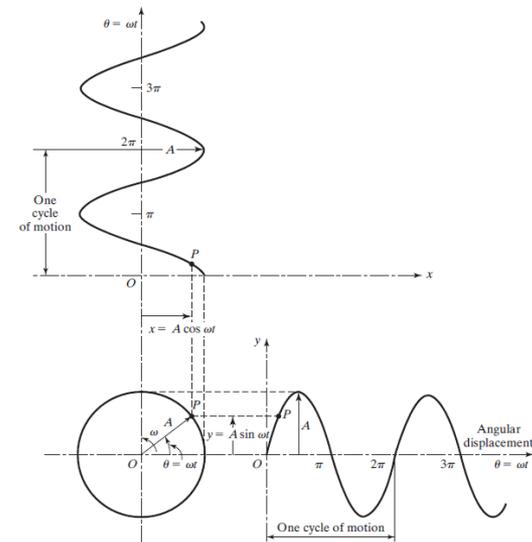
- Diferencia de fase, ϕ : Considere los movimientos x_1 y x_2

$$x_1 = A_1 \sin \omega t, \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi)$$

Dichos movimientos son llamados sincrónicos porque tienen la misma velocidad angular. Aquí ϕ representa la diferencia de fase entre estos dos movimientos.

- Frecuencia natural: Sí un sistema, después de una perturbación inicial, es dejado que vibre por sí mismo, la frecuencia con la cuál oscila sin la acción de fuerza externas se conoce como la frecuencia natural. Un sistema vibratorio de n grados de libertad tendrá n frecuencias naturales de vibración.

b) Representación vectorial del movimiento armónico.



El movimiento armónico puede ser representado por un vector $\vec{X} = \overrightarrow{OP}$ girando a una velocidad angular ω , sin embargo para poder ser descrito en el plano $x - y$ requiere de la descripción tanto de su componente vertical como horizontal.

I. Fundamentos de Vibración

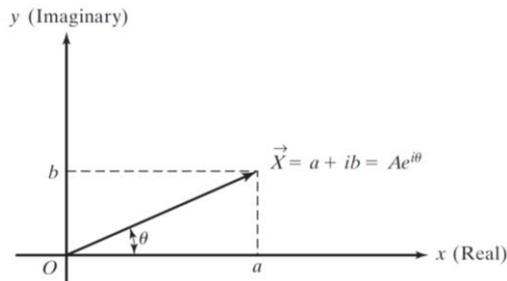
10. Movimiento armónico

b) Representación vectorial del movimiento armónico.

$$\vec{X} = A \cos \omega t \mathbf{i} + A \sin \omega t \mathbf{j}$$

c) Representación compleja del movimiento armónico.

Cualquier vector \vec{X} en el plano $x - y$ puede ser representado como un número complejo.



$$\vec{X} = a + ib, \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\vec{X} = A \cos \theta + iA \sin \theta$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$\vec{X} = A(\cos \theta + i \sin \theta) = Ae^{i\theta}$$

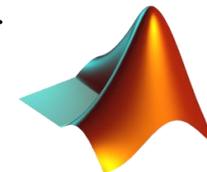
Sí inicialmente $\vec{X} = Ae^{i\theta}$, entonces la parte real de este vector representa la posición; la parte real de su primera derivada la velocidad, y la parte real de su segunda derivada la aceleración.

d) Análisis armónico.

Favor revisar en la sección 1.11 la parte asociada a expansión en series de Fourier, y series complejas de Fourier.

11. SIMULINK de MATLAB

MATLAB es un *software* que permite manipular matrices, graficar funciones y datos, implementar algoritmos, crear interfaces, e interactuar con programas escritos en otros lenguajes (C, C++, Java, Fortan, etc).



I. Fundamentos de Vibración

11. SIMULINK de MATLAB

SIMULINK (integrado a MATLAB) por su parte es un entorno de programación visual por medio de diagramas de bloques que simula, genera códigos de forma automática, prueba y verifica sistemas dinámicos.

