Investigación de Operaciones II

Lectura 6

Modelos de inventario probabilísticos

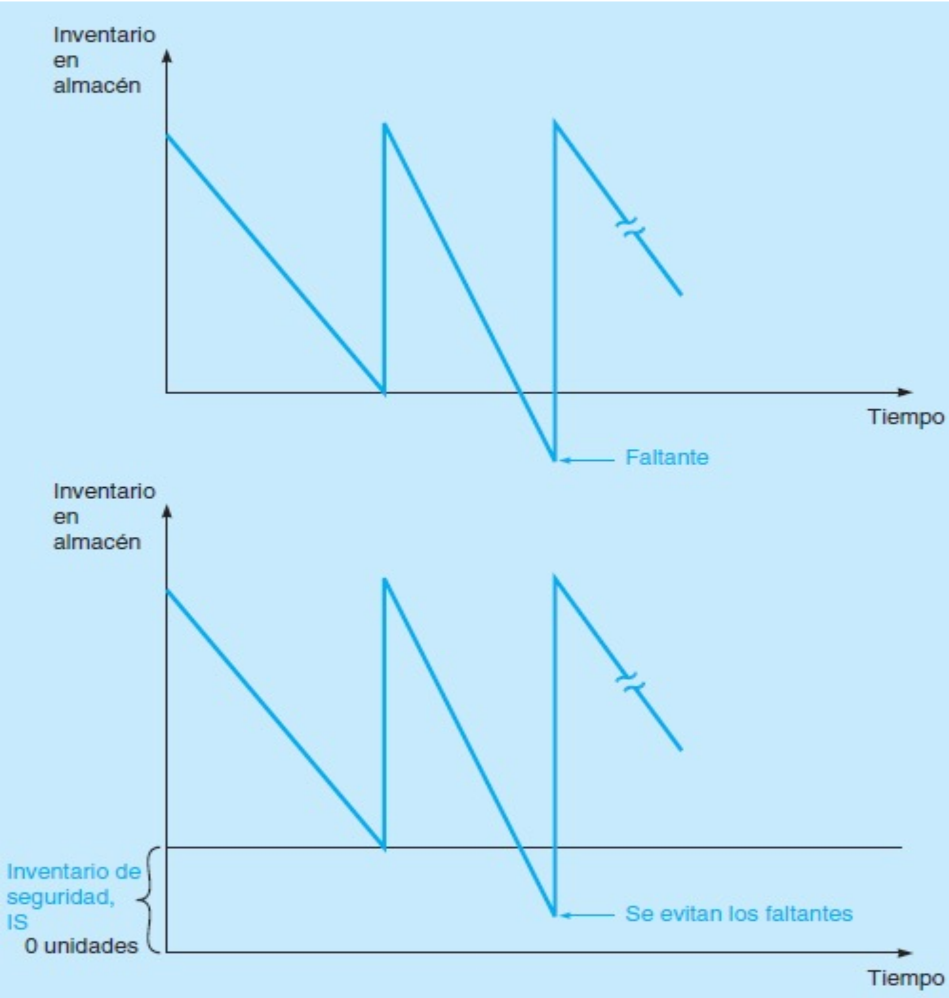
Profesor:
Ricardo Caballero, M.Sc.
ricardo.caballero@utp.ac.pa

Uso del inventario de seguridad

- Si la demanda o los tiempos de entrega son inciertos, la demanda exacta durante el punto de reorden (ROP) no se conocerá con certidumbre.
- Para prevenir ***faltantes***, es necesario tener un inventario adicional llamado ***inventario de seguridad***.
- El inventario de seguridad previene los faltantes cuando la demanda es más alta de lo esperado.
- El inventario de seguridad se puede implementar ajustando el ROP

El inventario de seguridad ayuda a evitar el desabasto. Consiste en conservar inventario adicional

Utilización del inventario de seguridad y el punto de reorden



Se agrega un inventario de seguridad variable a la ecuación para considerar la demanda incierta durante el tiempo de entrega

$$ROP = dL + IS$$

donde

IS = inventario de seguridad

Cómo determinar la cantidad de inventario de seguridad?

- Existen muchas situaciones donde se desconocen los costos de los faltantes.
- Un enfoque alternativo para determinar los niveles del inventario de seguridad consiste en usar un *nivel de servicio*.
- Un nivel de servicio indica el porcentaje de tiempo en que se cumple con la demanda de los clientes. Determina la probabilidad de que la demanda no sea

$$Nivel\ de\ servicio = 1 - Probabilidad\ de\ faltantes$$

o bien,

$$Probabilidad\ de\ faltantes = 1 - Nivel\ de\ servicio$$

Inventario de seguridad con distribución normal

Inventario de seguridad con distribución normal usa los niveles de inventario prescritos para establecer el inventario de seguridad cuando no se pueda determinar el costo del desabastecimiento

$$ROP = (Demanda\ promedio\ en\ el\ tiempo\ de\ entrega) + Z\sigma_{dLT}$$

Inventario de seguridad = $Z\sigma_{dLT}$

donde:

Z = número de desviaciones estándar para un nivel de servicio dado
σ_{dLT} = desviación estándar de la demanda durante el tiempo de entrega

Ejemplo 1: Inventario de seguridad con distribución normal

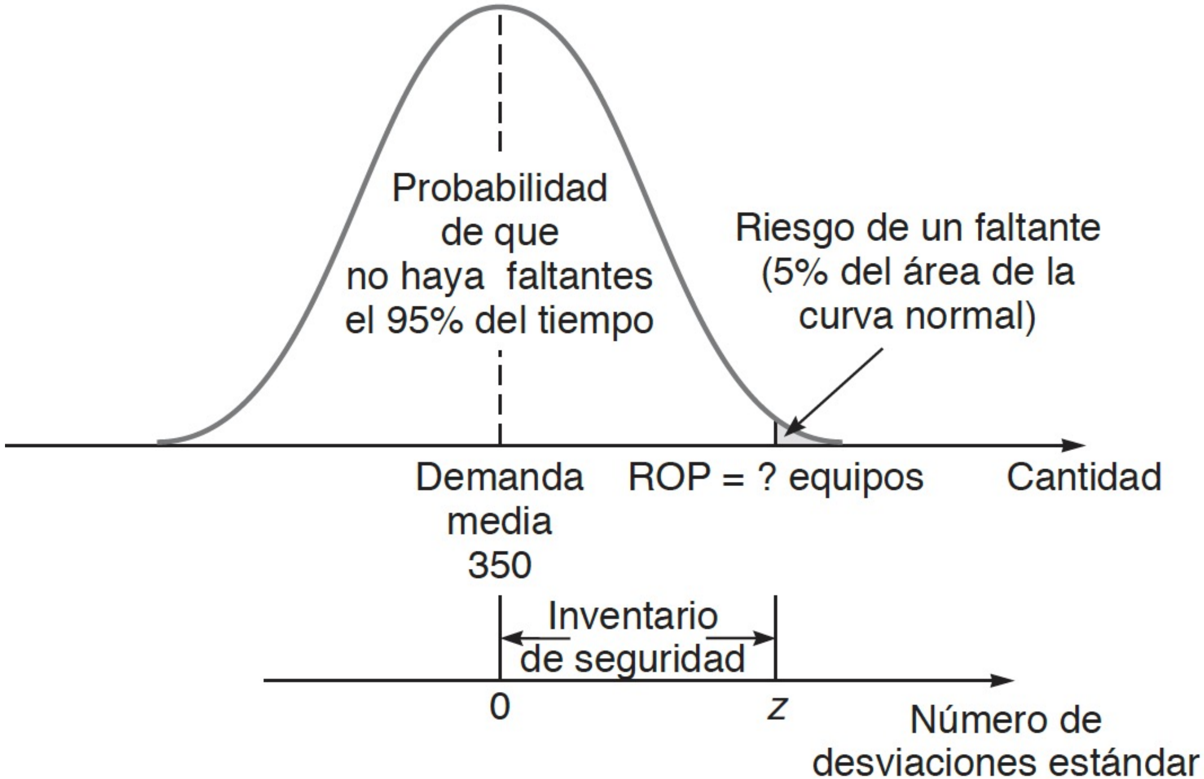
El Hospital Regional almacena un equipo de resucitación de código azul que tiene una demanda distribuida normalmente durante el periodo de reorden. La demanda media (promedio) durante el periodo de reorden es de 350 equipos, y la desviación estándar es de 10 equipos. El gerente del hospital quiere aplicar una política que permita tener faltantes solo un 5% del tiempo.

a. ¿Cuál es el valor adecuado de Z?
b. ¿Cuánto inventario de seguridad debe mantener el hospital?
c. ¿Qué punto de reorden debe usarse?

Ejemplo 1: Inventario de seguridad con distribución normal

μ = Demanda media = 350
σ_{dLT} = Desviación estándar = 10
X = Demanda media + Inventario de seguridad
IS = Inventario de seguridad = $X - \mu$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



$1-\alpha$	90%	92%	94%	95%	96%	97%	98%	99%
α	10%	8%	6%	5%	4%	3%	2%	1%
$z_{\alpha/2}$	1,645	1,751	1,881	$\boxed{1,960}$	2,054	2,170	2,326	2,576
z_{α}	1,282	1,405	1,555	1,645	1,751	1,881	2,054	2,326

Siendo:
$1-\alpha$ = Nivel de confianza
α = Nivel de significación

Ejemplo 1: Inventario de seguridad con distribución normal

a. ¿Cuál es el valor adecuado de Z?

Se usan las propiedades de una curva normal estandarizada para obtener un valor Z para un área situada bajo la curva normal de 0.95 (o 1 – 0.05).

	00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73536	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97784	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169

Usado una tabla normal, se encuentra un valor de **Z de 1.65** desviaciones estándar desde la media.

Ejemplo 1: Inventario de seguridad con distribución normal

b. ¿Cuánto inventario de seguridad debe mantener el hospital?

Porque: $$Inventario\ de\ seguridad = X - \mu$$

y: $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma_{dLT}}$$

entonces: $$Inventario\ de\ seguridad = Z\sigma_{dLT}$$

Al despejar el inventario de seguridad, resulta:

$$Inventario\ de\ seguridad = 1.65(10)$$

$$Inventario\ de\ seguridad = 16.5\ equipos$$

Ejemplo 1: Inventario de seguridad con distribución normal

c. ¿Qué punto de reorden debe usarse?

$$ROP = demanda\ esperada\ durante\ el\ tiempo\ de\ entrega + Invnetario\ de\ seguridad$$

$$ROP = 350\ equipos + 16.5\ equipos\ del\ inventario\ de\ seguridad$$

$$ROP = 366.5, o\ 367\ equipos$$

El costo de la política de inventarios aumenta en forma impresionante (exponencialmente) con el incremente en los niveles de servicio

Otras situaciones donde la demanda y tiempo de entrega pueden ser constante o variable

Existen tres situaciones por considerar. En cada una de las siguientes fórmulas para el Punto de Reorden, la demanda promedio durante el tiempo de entrega es el primer término y el inventario de seguridad

1. La demanda es variable pero el tiempo de entrega es constante:

$$\text{PRO} = \bar{d}L + Z(\sigma_d \sqrt{L})$$

donde:

$\bar{d}$ = demanda promedio diaria

σ_d = desviación estándar de la demanda diaria

L = tiempo de entrega en días

2. La demanda es constante y el tiempo de entrega es variable:

$$\text{PRO} = d\bar{L} + Z(d\sigma_L)$$

donde:

$\bar{L}$ = tiempo de entrega promedio

σ_L = desviación estándar del tiempo

d = demanda diaria

3. Ambos, la demanda y el tiempo de entrega, son variables:

$$\text{PRO} = \bar{d}\,\bar{L} + Z\left(\sqrt{\bar{L}\sigma_d^2 + \bar{d}^2\sigma_L^2}\right)$$

Ejemplo 2: Demanda variable y tiempo de entrega constante

Una compañia decidió determinar el inventario de seguridad y el ROP para otros tres artículos: SKU F5402, SKU B7319 y SKU F9004. Para el SKU F5402, la demanda diaria tiene distribución normal, con media de 15 unidades y desviación estándar de 3. El tiempo de entrega es exactamente de 4 días. Hinsdale quiere mantener un nivel de servicio de 97%. ¿Cuál es el punto de reorden y cuánto inventario de seguridad debería tener?

$$\begin{aligned} \text{PRO} &= \bar{d}L + Z(\sigma_d\sqrt{L}) = 15(4) + 1.88(3\sqrt{4}\,) = 15(4) + 1.88(6) \\ &= 60 + 11.28 = 71.28 \end{aligned}$$

Ejemplo 2: **Demanda constante y tiempo de entrega variable**

Para el SKU B7319, la demanda diaria es constante en 25 unidades por día, y el tiempo de entrega tiene distribución normal con media de 6 días y desviación estándar de 3. La compañía quiere mantener el nivel de servicio a 98% para este producto en particular. ¿Cuál es el punto de reorden?

$$\begin{aligned}\text{PRO} &= d\bar{L} + Z(d\sigma_L) = 25(6) + 2.05(3)(25) = 150 + 2.05(75)\\ &= 150 + 153.75 = 303.75\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Demanda y tiempo de entrega variables

Para el SKU F9004, la demanda diaria tiene distribución normal con media de 20 unidades y desviación estándar de 4, en tanto que el tiempo de entrega tiene distribución normal con media de 5 días y una desviación estándar de 2. La compañía quiere mantener el nivel de servicio a 94% para este producto en particular. ¿Cuál es el punto de reorden?

$$\begin{aligned}
\text{PRO} &= \overline{d}\overline{L} + Z\left(\sqrt{\overline{L}\sigma_d^2 + \overline{d}^2\sigma_L^2}\right) = (20)(5) + 1.55\left(\sqrt{5(4)^2 + (20)^2(2)^2}\right) \\
&= 100 + 1.55\sqrt{1680} \\
&= 100 + 1.55(40.99) \\
&= 100 + 63.53 \\
&= 163.53
\end{aligned}$$

Ejemplo 2:

NIVEL DE SERVICIO (%)	VALOR Z EN LA TABLA DE LA CURVA NORMAL	INVENTARIO DE SEGURIDAD (UNIDADES)
90	1.28	12.8
91	1.34	13.4
92	1.41	14.1
93	1.48	14.8
94	1.55	15.5
95	1.65	16.5
96	1.75	17.5
97	1.88	18.8
98	2.05	20.5
99	2.33	23.3
99.99	3.72	37.2

Conforme aumenta el nivel de servicio, el inventario de seguridad es mayor a una tasa creciente.
La tabla ilustra cómo cambiaría el inventario de seguridad en el ejemplo de la compañía (SKU A3378) con los cambios en el nivel de servicio. Conforme aumenta el inventario de seguridad, también se incrementan los costos anuales por almacenar.

Modelo de inventario de periodo único con demanda probabilística

- El modelo de inventario único se refiere a situaciones en las que se coloca un pedido del producto; al final del periodo, el producto o se ha vendido en su totalidad, o el excedente de artículos no vendidos se venderá a un valor de rescate.
- El modelo de inventario de periodo único se aplica en situaciones que implican artículos de temporada o perecederos que no pueden ser conservados en el inventario y vendidos en el futuro.
- El **análisis adicional** es un método que puede utilizarse para determinar la cantidad óptima de pedido con un modelo de inventario de periodo único. El análisis adicional aborda la pregunta de cuánto ordenar comparando el costo o pérdida de ordenar una unidad adicional con el costo o pérdida de no ordenar una unidad adicional. Los costos implicados se definen como sigue:

$\boldsymbol{C_o} = \boldsymbol{costo\ por\ unidad\ de\ demanda\ sobreestimada}$

$\quad Este\ costo\ representa\ la\ perdida\ por\ ordenar\ una\ unidad\ adicional\ y\ que\ no\ puede\ ser\ vendiad$

$\boldsymbol{C_u} = \boldsymbol{costo\ por\ unidad\ de\ demanda\ subestimada}$

$\quad Este\ costo\ representa\ la\ oportunidad\ perdida\ por\ no\ ordenar\ una\ unidad\ adicional\ \ que\ pudo\ ser\ vendida$

Modelo de inventario de periodo único con demanda probabilística:

Análisis adicional o del costo marginal

Ecuación del costo marginal $\boldsymbol{P(C_o) \leq (1-P)C_u}$

Donde P es la probabilidad de que la unidad no se venda y 1-P es la probabilidad de que sí se venda porque debe ocurrir una u otra cosa (la unidad se vende o no)

Despejando

$$\boldsymbol{P \leq \frac{C_u}{C_o + C_u}}$$

- Esta ecuación establece que se debe mantener el aumento del tamaño del pedido siempre y cuando la probabilidad de no vender lo que se pide sea igual o menor que la razón $\boldsymbol{\frac{C_u}{C_o + C_u}}$

Análisis marginal con la distribución normal

Cuando la demanda del producto o las ventas siguen una distribución normal, lo cual es una situación común de los negocios, es posible aplicar el análisis marginal con la distribución normal siguiendo los siguientes pasos

1. Determinar el valor de $\frac{C_u}{C_o + C_u}$ para el problema.
2. Localizar *P* en la distribución normal y encontrar el valor *Z* asociado.
3. Encontrar *X* usando la relación $Z = \frac{X^* - \mu}{\sigma}$ para despejar la política de almacenamiento que resulte

Ejemplo 3: Análisis marginal con la distribución normal

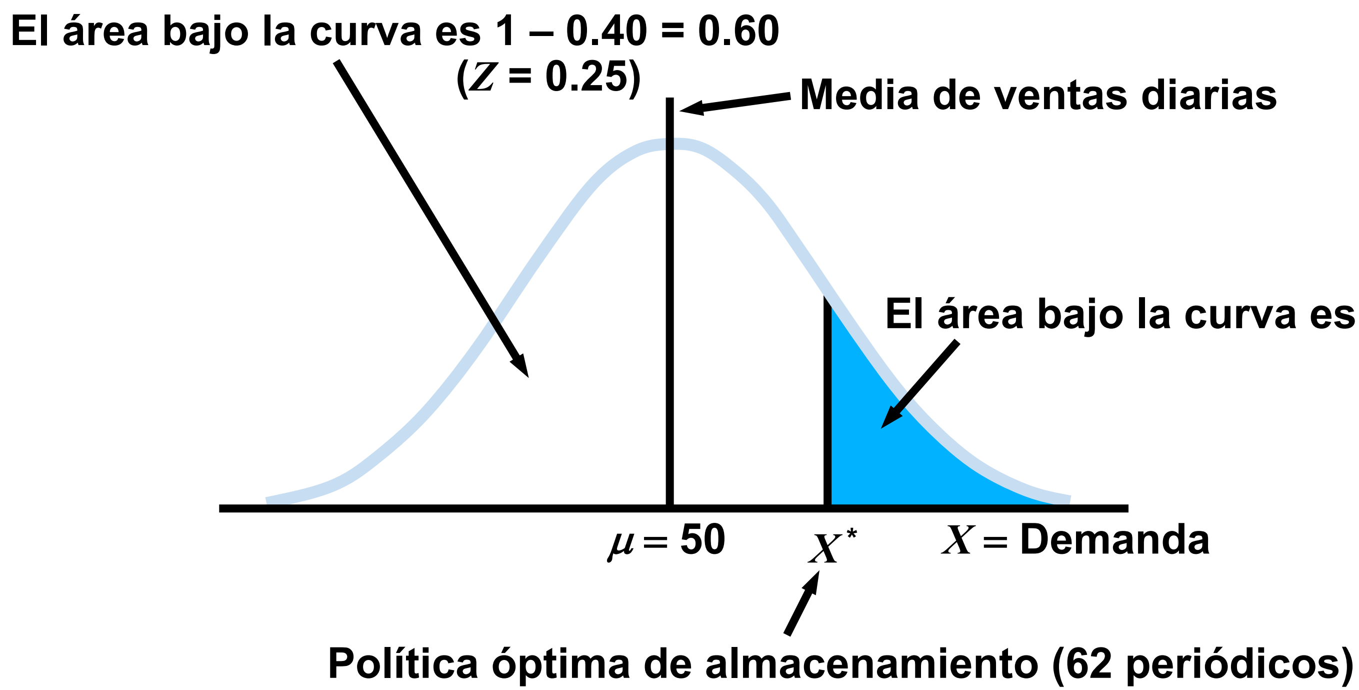
La demanda de ejemplares del periódico Chicago Tribune en el quisco de Joe se distribuye normalmente y tiene una media de 60 periódicos al día, con una desviación estándar de 10 ejemplares. Con una pérdida marginal de 20 centavos y una utilidad marginal de 30 centavos, ¿què política de almacenamiento diario debería seguir Joe?

Ejemplo 3: Análisis marginal con la distribución normal

$$P \leq \frac{C_u}{C_o + C_u} = \frac{20 \text{ centavos}}{30 \text{ centavos} + 20 \text{ centavos}} = \frac{20}{50} = 0.40$$

Usando la distribución normal, se obtiene el valor de *Z* apropiado

Z = 0.25 desviaciones estándar de la media



Ejemplo 3: Análisis marginal con la distribución normal

En este problema, $\mu = 60$ y $\sigma = 10$, de modo que

$$0.25 = \frac{X^* - 60}{10}$$

o bien,

$$X^* = 60 + 0.25(10) = 62.5, \text{ o 62 periódicos}$$

Joe debe ordenar 62 ejemplares del diario, ya que la probabilidad de vender 63 periódicos es ligeramente menor que 0.40.

Ejemplo 3: Análisis marginal con la distribución normal

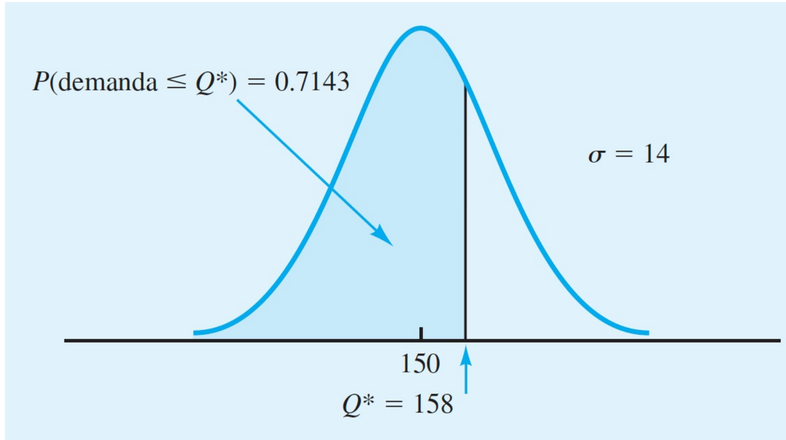
Considere la situación de Car Rental, debe decidir. cuántos automóviles debe tener disponibles en cada sucursal en periodos específicos del tiempo a lo largo del año.
A la gerencia le gustaría saber el número de automóviles grandes que debe tener disponibles para el fin de semana del Día del trabajo. Con base en experiencia previa, la demanda de los clientes de automóviles grandes durante el fin de semana del Día del trabajo tiene una distribución normal con una media de 150 automóviles y una desviación estándar de 14. Costo por excedente $80 por automovil. Costo de subestimación $200 por automovil.

¿Cuántos automóviles deberá tener disponibles Car Rental para el fin de semana del Día del trabajo?

Ejemplo 3: Análisis marginal con la distribución normal

$C_u = \$200$

$C_o = \$80$



$$P(D \leq Q^*) = \frac{C_u}{C_o + C_u}$$

$$P(D \leq Q^*) = \frac{200}{80 + 200} = 0.7143$$

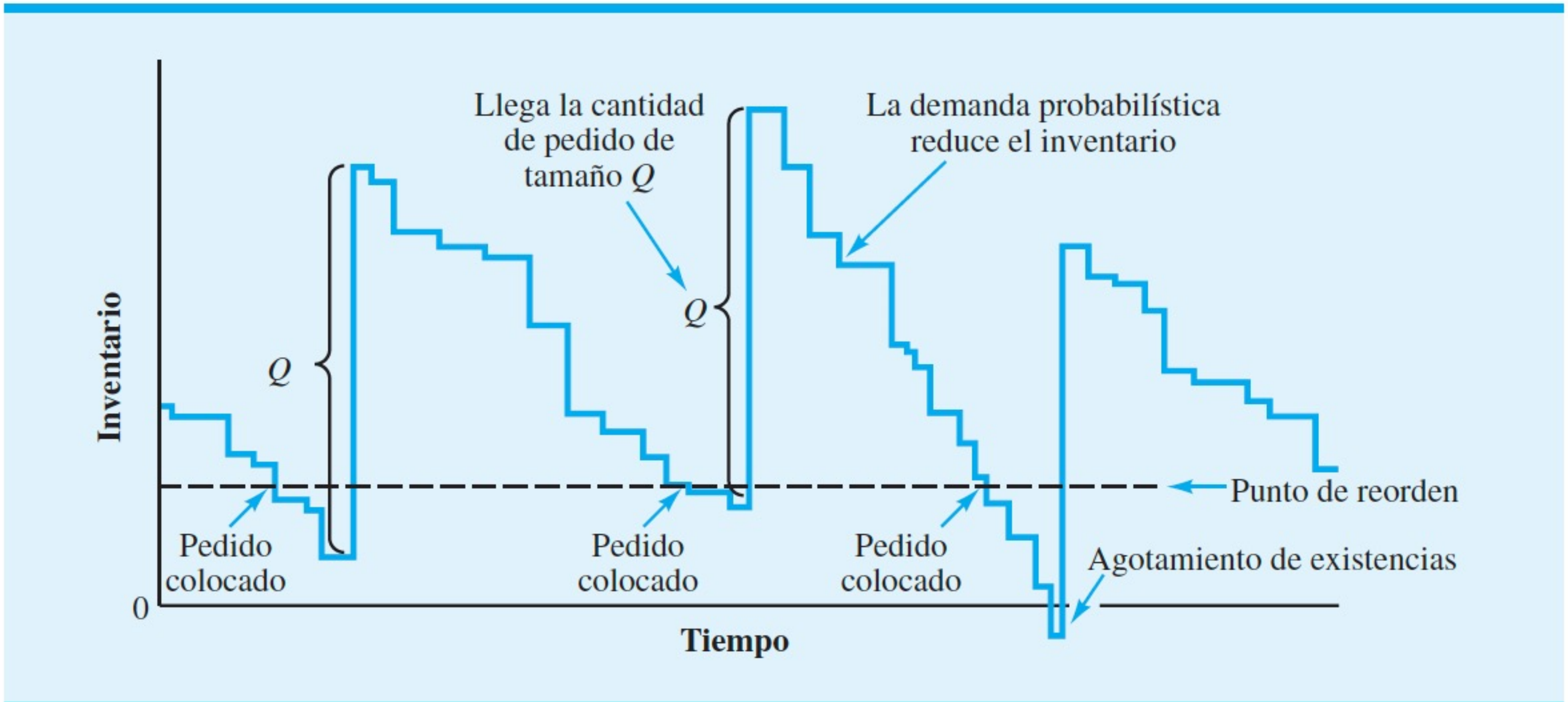
Se puede utilizar la distribución de probabilidad normal de la demanda para determiner la cantidad de pedido que satisfice la condición. La probabilidad de 0.7143 ocurre con Z= 0.57 desviaciones estándares sobre la media.

$$Q^* = \mu + 0.57\sigma$$

$$Q^* = 150 + 0.57(14) = 158$$

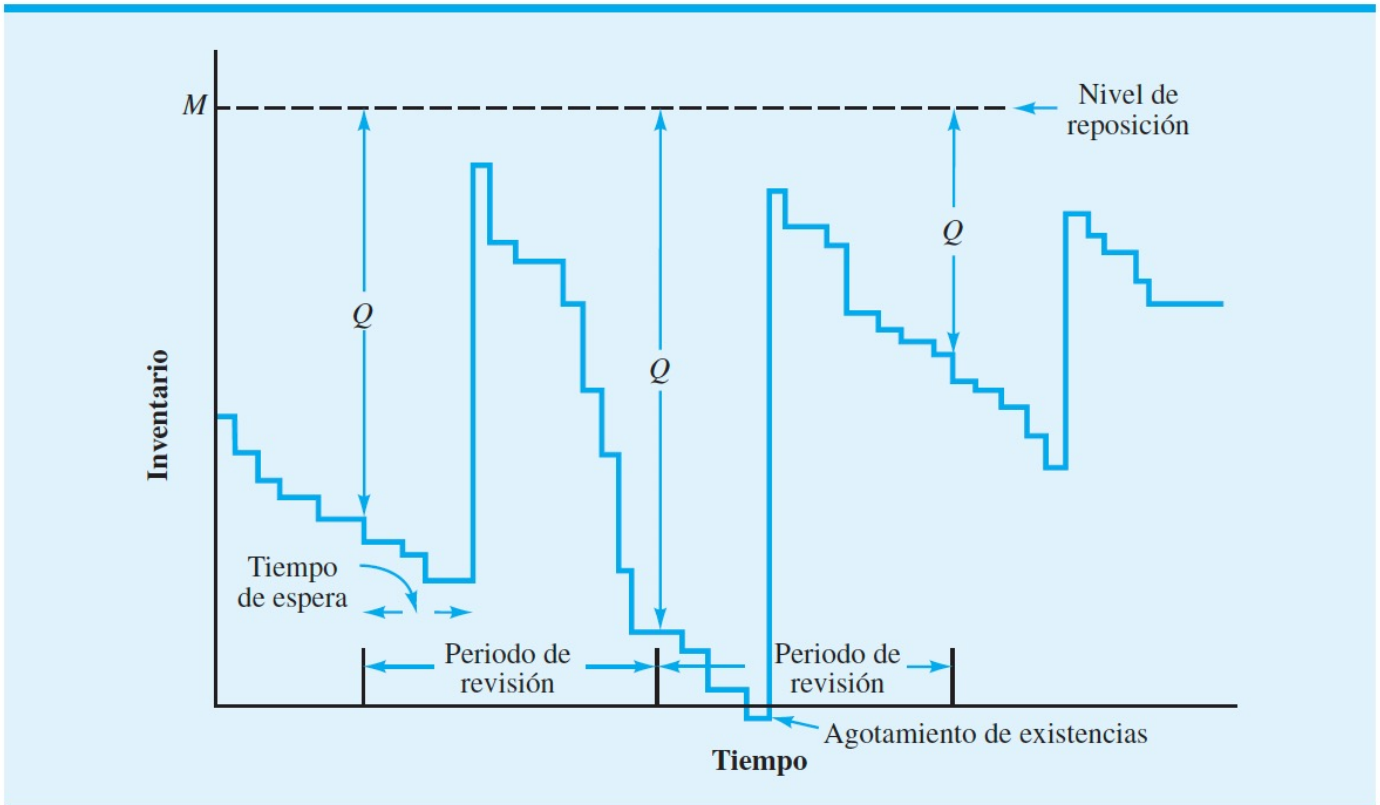
Por lo tanto, Car Rental debe planear tener 158 automóviles disponibles.

Cantidad de pedido, modelo de punto de reorden con demanda probabilística



Modelo de revisión periódica con demanda probabilística

Con un sistema de revisión periódica, el inventario se revisa y vuelve a ordenar sólo en puntos especificados en el tiempo.



Ejemplo 4: Modelo de revisión periódica con demanda probabilística

Considere una empresa que cuenta con varias tiendas minoristas que comercializan varios productos de uso doméstico. La empresa opera su sistema de inventario con una revisión periódica de dos semanas. Con este sistema, el gerente de una tienda minorista puede ordenar cualquier número de unidades de algún producto al almacén central la empresa cada dos semanas. Los pedidos de todos los productos que van a una tienda en particular se combinan en un envío.

Cuando se decide la cantidad que se ordenará de cada producto en un periodo de revision dado, el gerente de la tienda sabe que no se puede volver a ordenar el producto hasta el siguiente periodo de revisión.
Suponiendo que el tiempo de espera es menor que el periodo de revisión, un pedido hecho en un periodo de revisión será recibido antes del siguiente periodo.
En este caso, la decisión de cuánto ordenar en cualquier periodo de revisión se determina como sigue:

$$Q = M - H$$

Donde,
Q = cantidad de pedido
M = nivel de reemplazo
H = inventario disponible en el periodo de revisión

Ejemplo 4: Modelo de revisión periódica con demanda probabilística

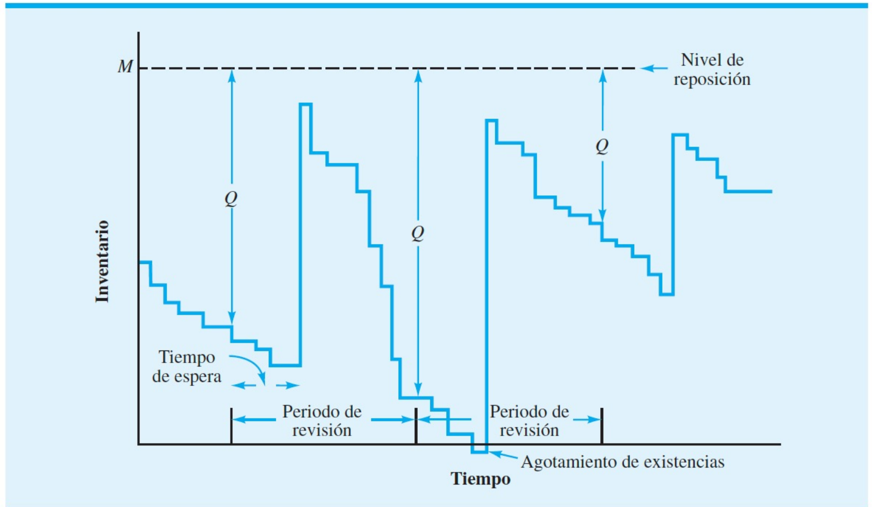
Suponga que el nivel de reposición de un producto particular es de 50 unidades y el inventario disponible en el periodo de revisión es 12 unidades

De cuánto deberá ser el pedido?

$$Q = M - H$$

$$Q = 50 - 12$$

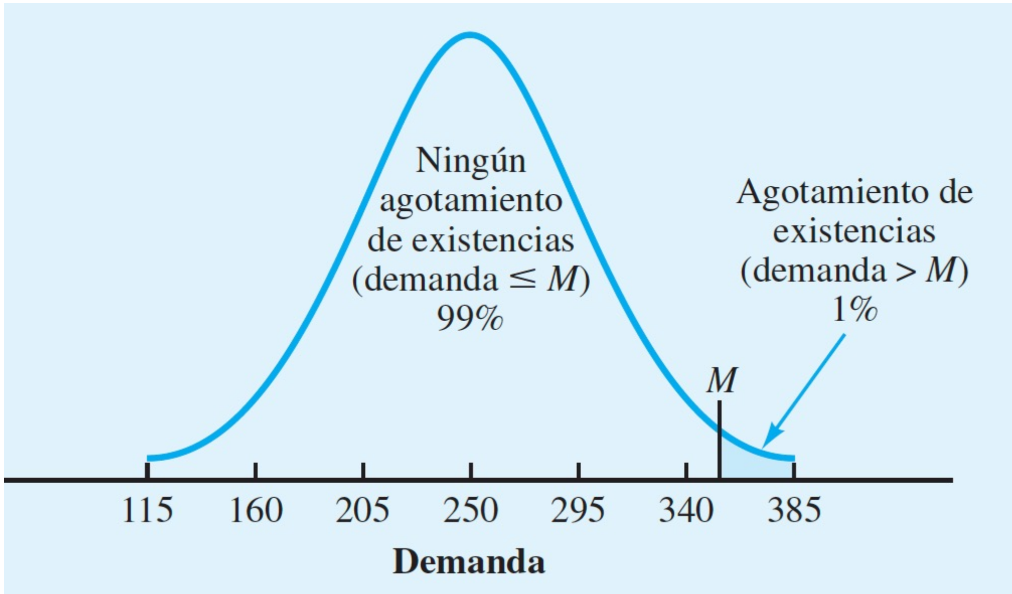
$$Q = 38\, unidades$$



Así, con el modelo de revisión periódica, cada periodo de revisión se solicitan suficientes unidades para regresar la posición del inventario al nivel de reposición.

Ejemplo 4: Modelo de revisión periódica con demanda probabilística

Suponga ahora que el objetivo de la gerencia es determiner el nivel de reposición con sólo 1% de probabilidad de un agotamiento de existencias. Tiene una demanda media de 250 unidades y una desviación estándar de la demanda de 45 unidades



$$M = \mu + z\sigma = 355$$

$$M = 250 + 2.33(45) = 355$$

	00	.01	.02	.03	.04	.05
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884
0.6	.72575	.72907	.73237	.73536	.73891	.74215
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441
2.0	.97725	.97784	.97831	.97882	.97932	.97982
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778
2.3	.98928	.98956	.98983	$\boxed{.99010}$	.99036	.99061
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286

Bibliografía

- Render, B. (2016). *Métodos cuantitativos para los negocios*. Editorial Pearson.
- Taha, H. (2011). *Investigación de operaciones*. Editorial Pearson.
- Render, B. & Heizer, J. (2014). *Principios de administración de operaciones*. Pearson
- Chase, R. & Jacobs, F. (2014). *Administración de operaciones, producción y cadena de suministro.* McGraw – Hill
- Hillier, F. & Lieberman, G. (2015). *Investigación de operaciones*. McGraw-Hill
- Anderson, D. & Sweeny, D. (2019). *Métodos cuantitativos para los negocios*. Cengage
- Albright, C. & Winston, W. (2015). *Business Analytics: Data Analysis and Decision Making*. Cengage

Contacto

Ricardo Caballero, M.Sc.

Docente Tiempo Completo
Facultad de Ingeniería Industrial
Centro Regional de Chiriquí
Universidad Tecnológica de Panamá

E-mail: ricardo.caballero@utp.ac.pa

https://www.academia.utp.ac.pa/ricardo-caballero