Investigación de Operaciones II

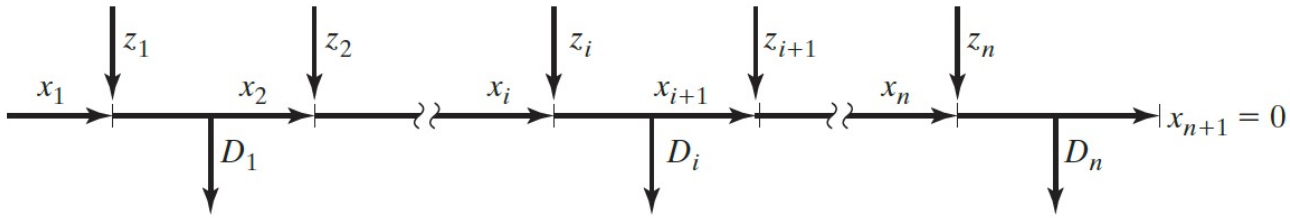
Lectura 5

Modelo dinámico de cantidad económica de pedido

Profesor:
Ricardo Caballero, M.Sc.
✉ ricardo.caballero@utp.ac.pa

Modelo de cantidad económica de pedido con costo de preparación

- En esta situación no se permiten faltantes, y se incurre en un costo de preparación cada vez que se inicia un nuevo lote de producción.
- Se presentarán dos métodos de solución: un algoritmo de programación exacta dinámica y una heurística.



z_i = cantidad pedida
D_i = demanda durante el periodo
x_i = inventario al inicio del periodo

La función de costo de producción asociado para le period i es

$$C_i(z_i) = \begin{cases} 0, & z_i = 0 \\ S_i + C_i(z_i), & z_i > 0 \end{cases}$$

Los elementos de costos de esta situación se definen como:

S_i = costo de preparación *en el periodo* i

H_i = costo de *retención de inventario unitario del periodo* i *a* $i+1$

La función $C_i(z_i)$ es la función de costo de producción marginal, dada z_i

Algoritmo de programación dinámica general

Sin faltantes, el modelo de inventario se basa en minimizar la suma de los costos de producción y retención en los n periodos. A fin de simplificar, supondremos que el costo de retención en el periodo i se basa en el inventario de final de periodo, definido como

$$x_{i+1} = x_i + z_i - D_i$$

Para la ecuación recursiva hacia adelante, o de avance, el estado en la etapa (periodo) i se define como x_{i+1} , el nivel del inventario al final del periodo. En el caso extremo, el inventario restante, x_{i+1} , puede satisfacer la demanda en todos los periodos restantes; es decir,

$$0 \leq x_{i+1} \leq D_{i+1} \pm \cdots + D_n$$

Sea $f_i(x_{i+1})$ el costo mínimo del inventario para los periodos 1, 2, … i dado el inventario final del period x_{i+1}. La ecuación recursive hacia adelante es

$$f_1(x_2) = \min_{z_1 = D_1 + x_2 - x_1} \{C_1(z_1) + H_1 x_2\},$$

$$f_i(x_{i+1}) = \min_{0 \leq z_i \leq D_i + x_{i+1}} \{C_i(z_i) + H_i x_{i+1} + f_{i-1}(x_{i+1} + D_i - z_i)\}, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Observe que durante el periodo 1, z_1 es exactamente igual a $D_1 + x_2 - x_1$. Para $i > 1$, z_i puede ser cero porque D_i puede satisfacerse a partir de la producción en periodos precedentes.

Ejemplo 1: Algoritmo de programación dinámica general

La siguiente tabla proporciona los datos de una situación de inventario de 3 periodos

Periodo i	Demanda Di (unidades)	Costo de preparación ($)	Costo de retencion ($)
1	3	3	1
2	2	7	3
3	4	6	2

La demanda ocurre en unidades discretas y el inventario de inicio es $x_1 = 1\,unidad$. El costo de producción unitario $C_i(z_i)$ es de $10 para las primeras 3 unidades y de $20 para cada unidad adicional, es decir

$$C_i(z_i) = \begin{cases} 10z_i, & 0 \le z_i \le 3 \\ 30 + 20(z_i - 3), & z_i > 4 \end{cases}$$

Determine la política de inventario óptima

Ejemplo 1: Algoritmo de programación dinámica general

Periodo 1

- *No olvide el costo por ordenar (S), cuando hay que ordenar

$$C_i(z_i) = \begin{cases} 10z_i, & 0 \le z_i \le 3 \\ 30 + 20(z_i - 3), & z_i > 4 \end{cases}$$

$$0 \le x_2 \le 6$$

$$C_1(z_1) + H_1 x_2$$

		$z_1 = 2$	$z_1 = 3$	$z_1 = 4$	$z_1 = 5$	$z_1 = 6$	$z_1 = 7$	$z_1 = 8$	Sol. óptima	
x_2	$H_1 x_2$	$C_1(z_1) = 23$	$C_1(z_1) = 33$	$C_1(z_1) = 53$	$C_1(z_1) = 73$	$C_1(z_1) = 93$	$C_1(z_1) = 113$	$C_1(z_1) = 133$	$f_1(x_2)$	z_1^*
0	0	23							23	2
1	1		34						34	3
2	2			55					55	4
3	3				76				76	5
4	4					97			97	6
5	5						118		118	7
6	6							139	139	8

Ejemplo 1: Algoritmo de programación dinámica general

Periodo 2

- *No olvide el costo por ordenar (S), cuando hay que ordenar

$$C_i(z_i) = \begin{cases} 10z_i, & 0 \le z_i \le 3 \\ 30 + 20(z_i - 3), & z_i > 4 \end{cases}$$

$$0 \le x_3 \le 4$$

$$C_2(z_2) + H_2x_3 + f_1(x_3 + D_2 - z_2)$$

		$z_2 = 0$	$z_2 = 1$	$z_2 = 2$	$z_2 = 3$	$z_2 = 4$	$z_2 = 5$	$z_2 = 6$	Sol. óptima	
x_3	H_2x_3	$C_2(z_2) = 0$	$C_2(z_2) = 17$	$C_2(z_2) = 27$	$C_2(z_2) = 37$	$C_2(z_2) = 57$	$C_2(z_2) = 77$	$C_2(z_2) = 97$	$f_2(x_3)$	z_2^*
0	0	55	51	50					50	2
1	3	79	75	64	63				63	3
2	6	103	99	88	77	86			77	3
3	9	127	123	112	101	100	109		100	4
4	12	151	147	136	125	124	123	132	123	5

Ejemplo 1: Algoritmo de programación dinámica general

Periodo 3

$$C_i(z_i) = \begin{cases} 10z_i, & 0 \le z_i \le 3 \\ 30 + 20(z_i - 3), & z_i > 4 \end{cases}$$

- *No olvide el costo por ordenar (S), cuando hay que ordenar

$$C_3(z_3) + H_3x_4 + f_2(x_4 + D_3 - z_3)$$

		$z_2 = 0$	$z_2 = 1$	$z_2 = 2$	$z_2 = 3$	$z_2 = 4$	Sol. óptima	
x_4	H_3x_4	$C_3(z_3) = 0$	$C_3(z_3) = 16$	$C_3(z_3) = 26$	$C_3(z_3) = 36$	$C_3(z_3) = 56$	$f_3(x_4)$	$z_3{}^*$
0	0	123	116	103	99	106	99	3

La solución óptima se lee como sigue:

$$(x_4 = 0) \rightarrow \boxed{z_3 = 3} \rightarrow (x_3 = 0 + 4 - 3 = 1) \rightarrow \boxed{z_2 = 3}$$

$$\rightarrow (x_2 = 1 + 2 - 3 = 0) \rightarrow \boxed{z_1 = 2}$$

Por lo tanto, la solución óptima es $z_1^* = 2, z_2^* = 3$, y $z_3^* = 3$, con un costo total de \$99.

Algoritmo de programación dinámica con costos marginales constantes o decrecientes

La PD general dada antes es aplicable con cualquier función de costo. Esta generalización dicta que el estado xi y las alternativas zi en la etapa i asumen valores en incrementos de 1, lo que podría dar lugar a tablas grandes cuando las cantidades demandadas son grandes. Un caso especial del modelo de PD general promete reducir el volumen de los cálculos. En esta situación especial, tanto el costo de producción unitario como los costos de retención unitarios son funciones no crecientes (cóncavas) de la cantidad de producción y el nivel del inventario, respectivamente. Esta situación suele ocurrir cuando la función de costo unitario es constante o si se permite el descuento por cantidad. En las condiciones dadas, se puede demostrar que

1. Dado que un inventario inicial cero (xi) es óptimo para satisfacer la demanda en cualquier periodo i o con una nueva producción con inventario entrante, pero nunca con ambos; es decir, zixi = 0. (En el caso de inventario inicial positivo, x1 > 0, la cantidad puede amortizarse con las demandas de los periodos sucesivos hasta que se agote.)
2. La cantidad de producción óptima, zi, durante el periodo i debe ser cero o satisfacer la demanda exacta de uno o más periodos subsiguientes contiguos.

Ejemplo 2: Algoritmo de programación dinámica con costos marginales constantes o decrecientes

Un modelo de inventario de 4 periodos opera con los siguientes datos:

Periodo i	Demanda Di (unidades)	Costo de preparación ($)
1	76	98
2	26	114
3	90	185
4	67	70

El inventario inicial $x_1 = 15\, unidades$. El costo de producción unitario es de $2 y el costo de retención unitario es de $1 durante todos los periodos (para simplificar los costos de producción y retención unitarios son los mismos durante todos los periodos)

La solución se determina por el algoritmo hacia adelante ya proporcionado, except que los valores x_{i+1} y z_i ahora suponen sumas “concentradas” en lugar de con incrementos de uno. Debido a que $x_1 = 15$ la demanda del primer period se ajusta a 76 - 15 = 61 unidades

Ejemplo 2: Algoritmo de programación dinámica con costos marginales constantes o decrecientes

Periodo 1

- *No olvide el costo por ordenar (S), cuando hay que ordenar

$D_1 = 61$

$0 \leq x_2 \leq 183$

$$C_1(z_1) + H_1 x_2$$

		$z_1 = 61$	$z_1 = 87$	$z_1 = 177$	$z_1 = 244$	Sol. óptima	
x_2	$H_1 x_2$	$C_1(z_1) = 220$	$C_1(z_1) = 272$	$C_1(z_1) = 452$	$C_1(z_1) = 586$	$f_1(x_2)$	$z_1{}^*$
0	0	220				220	61
26	26		298			298	87
116	116			568		568	177
183	183				769	769	244

Ejemplo 2: Algoritmo de programación dinámica con costos marginales constantes o decrecientes

Periodo 2

- *No olvide el costo por ordenar (S), cuando hay que ordenar

$D_2 = 26$

$0 \leq x_2 \leq 157$

$$C_2(z_2) + H_2 x_3 + f_1(x_3 + D_2 - z_2)$$

		$z_2 = 0$	$z_2 = 26$	$z_2 = 116$	$z_2 = 183$	Sol. óptima	
x_2	$H_1 x_2$	$C_2(z_2) = 0$	$C_2(z_2) = 166$	$C_2(z_2) = 346$	$C_2(z_2) = 480$	$f_2(x_3)$	z_2^*
0	0	298	386			298	0
90	90	658		656		656	116
157	157	926			85	857	183

Ejemplo 2: Algoritmo de programación dinámica con costos marginales constantes o decrecientes

Periodo 3

- *No olvide el costo por ordenar (S), cuando hay que ordenar

$D_3 = 90$

$0 \leq x_3 \leq 67$

$$C_3(z_3) + H_3x_4 + f_2(x_4 + D_3 - z_3)$$

		$z_3 = 0$	$z_3 = 90$	$z_2 = 157$	Sol. óptima	
x_4	H_3x_4	$C_3(z_3) = 0$	$C_3(z_3) = 365$	$C_3(z_3) = 499$	$f_3(x_4)$	z_3^*
0	0	656	663		656	0
67	67	924		864	864	157

Ejemplo 2: Algoritmo de programación dinámica con costos marginales constantes o decrecientes

Periodo 4

$D_4 = 67$

- *No olvide el costo por ordenar (S), cuando hay que ordenar

$$C_4(z_4) + H_4x_5 + f_3(x_5 + D_4 - z_4)$$

		$z_4 = 0$	$z_4 = 67$	Sol. óptima	
x_5	H_4x_5	$C_4(z_4) = 0$	$C_4(z_4) = 204$	$f_4(x_5)$	z_4^*
0	0	864	860	860	0

La política óptima se determina a partir de las tablas como sigue:

$$(x_5 = 0) \rightarrow \boxed{z_4 = 67} \rightarrow (x_4 = 0) \rightarrow \boxed{z_3 = 0}$$

$$\rightarrow (x_3 = 90) \rightarrow \boxed{z_2 = 116} \rightarrow (x_2 = 0) \rightarrow \boxed{z_1 = 61}$$

Esto da $z_1^* = 61, z_2^* = 116, z_3^* = 0$, y $z_4^* = 67$, a un costo total de \$860.

Silver Meal

- Válido sólo cuando el costo de producción unitario es constante e idéntico para todos los periodos. Por esta razón solo se balancean los costos de preparación y retención
- Se puede calcular el tamaño de lote económico durante una situación dinámica
- Identifica los periodos futuros sucesivos cuya demanda puede ser satisfecha a partir de la producción del periodo actual.
- Suponga que se produce en el periodo i, $i+1$,… y t, $i \leq t$ y se define $TC(i,t)$ como los costos de preparación y por mantener asociados para los mismos periodos

$$TC(i,t)\begin{cases} S_i\,, & t=1 \\ S_i + H_i D_{i+1} + (H_i + H_{i+1})D_{i+2} + \cdots + \left(\sum_{i}^{t-1} H_i\right) D_t\,, & t > i \end{cases}$$

- Luego se define $TCU(i,t)$ como el costo por periodo asociado

$$TCU(i,t) = \frac{TC(i,t)}{t-i+1}$$

D_i = tasa de demanda
S_i = costo de preparación
H_i = costo por mantener
t = $periodo$

Ejemplo 3: Silver Meal

- Encuentre la politica de inventario optima para la siguiente situacion de inventario de 6 periodos
- El costo de producción unitario es de $2 para todos los periodos

Periodo t	$D_i(unidades)$	$S_i(\$)$	$\mathrm{H}_i(\$)$
1	10	20	1
2	15	17	1
3	7	10	1
4	20	18	3
5	13	5	1
6	25	50	1

Ejemplo 3: Silver Meal

- $\boldsymbol{i = 1}$

$\boldsymbol{t = 1}$

$TC(i,t) = S_i$

$\boldsymbol{TC(1,1) = S_1 = \$20}$

$$TCU(i,t) = \frac{TC(i,t)}{t - i + 1}$$

$$TCU(1,1) = \frac{TC(1,1)}{1 - 1 + 1}$$

$$\boldsymbol{TCU(1,1) = \frac{\$20}{1} = \$20}$$

$\boldsymbol{t = 2}$

$$TC(i,t) = TC(i,t-1) + \left(\sum_{i}^{t-1} H_i\right) D_t$$

$$TC(1,2) = TC(1,2-1) + \left(\sum_{1}^{2-1} H_1\right) D_2$$

$TC(1,2) = \$20 + (\$1)\$15$

$\boldsymbol{TC(1,2) = \$35}$

$$TCU(i,t) = \frac{TC(i,t)}{t - i + 1}$$

$$TCU(1,2) = \frac{TC(1,2)}{2 - 1 + 1}$$

$$\boldsymbol{TCU(1,2) = \frac{\$35}{2} = \$17.50}$$

Ejemplo 3: Silver Meal

- $\boldsymbol{i = 1}$

$\boldsymbol{t = 3}$

$$TC(i,t) = TC(i,t-1) + \left(\sum_{i}^{t-1} H_i\right) D_t$$

$$TC(1,3) = 35 + (1+1)7$$

$$\boldsymbol{TC(1,3) = \$49}$$

$$TCU(i,t) = \frac{TC(i,t)}{t-i+1}$$

$$TCU(1,3) = \frac{49}{3-1+1}$$

$$\boldsymbol{TCU(1,3) = \$16.33}$$

$\boldsymbol{t = 4}$

$$TC(i,t) = TC(i,t-1) + \left(\sum_{i}^{t-1} H_i\right) D_t$$

$$TC(1,4) = 49 + (1+1+1)20$$

$$\boldsymbol{TC(1,4) = \$109}$$

$$TCU(i,t) = \frac{TC(i,t)}{t-i+1}$$

$$TCU(1,4) = \frac{109}{4-1+1}$$

$$\boldsymbol{TCU(1,4) = \$27.25}$$

Ejemplo 3: Silver Meal

Determine el mínimo local t* satisfaciendo la siguiente condición

- $TCU(i, t+1) \geq TCU(i, t)$
- $27.25 \geq 16.33$
- Por consiguiente se debe producir 10+15+7 = 32 unidades en el periodo 1 para satisfacer los periodos 1 al 3 con un costo total de $49

Periodo t	$D_i(unidades)$	$TC(1,t)$	$TCU(1,t)$
1	10	20	20
2	15	35	17.50
3	7	49	16.33
4	20	109	27.25

Ejemplo 3: Silver Meal

Tabla final

Periodo t	$Unidades\ producidas$	Costos ($)
1	32	49
2	0	0
3	0	0
4	20	18
5	13	5
6	25	50
TOTAL	90	122

El mínimo ocurre en $t^* = 5$, que requiere pedir 13 unidades en el periodo 5 para el periodo 5. Luego establecemos $i = 5 + 1 = 6$. Sin embargo, como $i = 6$ es el último periodo del horizonte de planificación, debemos pedir 25 unidades en el periodo 6 para el periodo 6.

Bibliografía

- Render, B. (2016). *Métodos cuantitativos para los negocios*. Editorial Pearson.
- Taha, H. (2011). *Investigación de operaciones*. Editorial Pearson.
- Render, B. & Heizer, J. (2014). *Principios de administración de operaciones*. Pearson
- Chase, R. & Jacobs, F. (2014). *Administración de operaciones, producción y cadena de suministro.* McGraw – Hill
- Hillier, F. & Lieberman, G. (2015). *Investigación de operaciones*. McGraw-Hill
- Anderson, D. & Sweeny, D. (2019). *Métodos cuantitativos para los negocios*. Cengage
- Albright, C. & Winston, W. (2015). *Business Analytics: Data Analysis and Decision Making*. Cengage

Contacto

Ricardo Caballero, M.Sc.

Docente Tiempo Completo
Facultad de Ingeniería Industrial
Centro Regional de Chiriquí
Universidad Tecnológica de Panamá

E-mail: ricardo.caballero@utp.ac.pa

https://www.academia.utp.ac.pa/ricardo-caballero