Simulación Aplicada a la Logística

Lectura 4

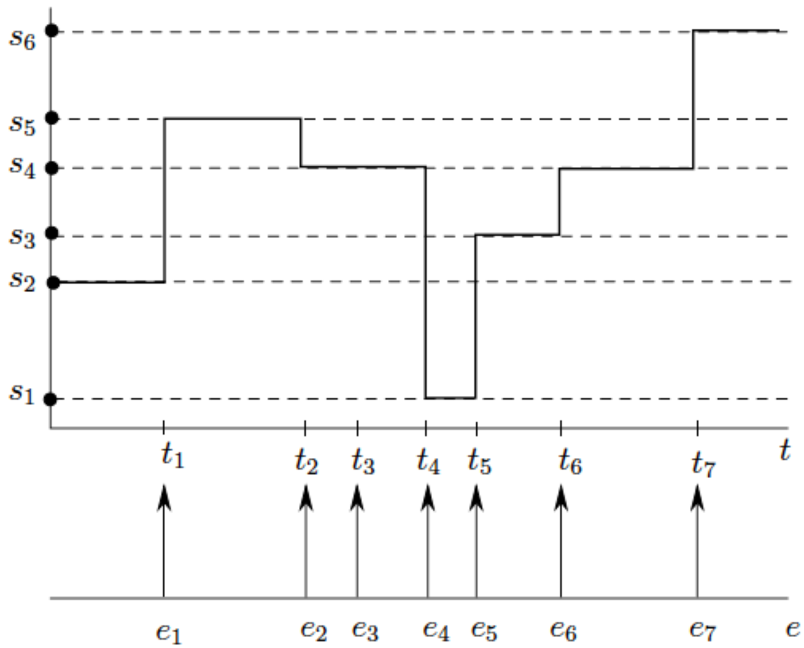
Introducción a Simulación de Eventos Discretos

Profesor:
Ricardo Caballero, M.Sc.
ricardo.caballero@utp.ac.pa

Sistemas de eventos discretos (DES)

Son sistemas cuyo espacio de estado es discreto y cuyo estado solo puede cambiar como resultado de eventos instantáneos que ocurren de forma asíncrona a lo largo del tiempo. Sus propiedades son:

- El espacio de estado es un conjunto discreto
- El mecanismo de transición de estado es impulsado por eventos



$X = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$

Un **evento** debe ser pensado como algo que ocurre instantáneamente y provoca transiciones desde un valor del estado a otro.

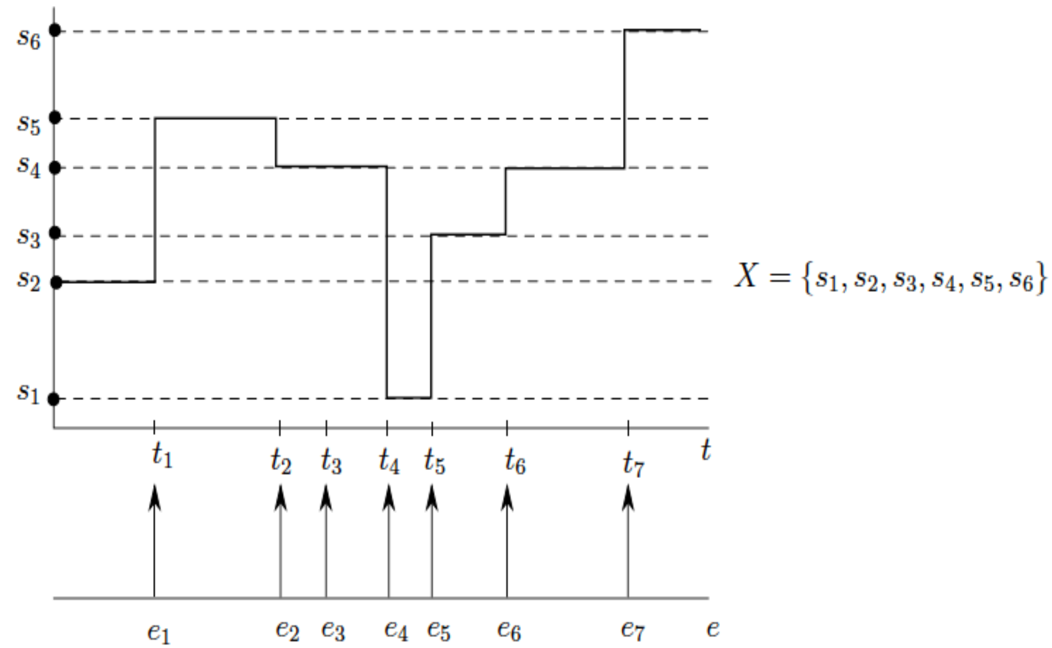
Ejemplos

- Estado de una máquina: {ON,OFF} o {OCUPADA, OCIOSA, FINALIZADO}.
- Un computador ejecutando un programa: {ESPERANDO ENTRADA,EJECUTANDO, FINALIZADO}.
- Cualquier tipo de inventario: {0,1,2, . . . }.

Sistemas de eventos discretos (DES)

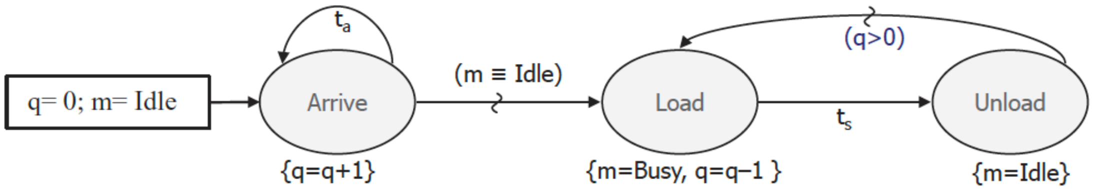
Un sistema de eventos discretos (DES) es un sistema con estados discretos s_i que son elementos de un conjunto de estados finitos $X\ (s_i \in X, i = 1 \ldots |X|)$ y eventos discretos e_j que son elementos de un conjunto de eventos finitos $E(e_j \in E, j = 1 \ldots |E|)$, que es controlado por eventos y, por lo tanto, los cambios de estado son causados por la ocurrencia de eventos asíncronos a lo largo del tiempo a través de transiciones instantáneas.

- Para el DES, el espacio de estado es un conjunto discreto $X = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$.
- La ruta de muestra solo puede saltar de un estado a otro cuando ocurre un evento.
- Un evento puede tener lugar, pero no causar una transición de estado, como en el caso de e3.
- En un DES, $x\ (t)$ es una función constante por partes, ya que el estado salta de un valor discreto a otro cada vez que ocurre un evento.

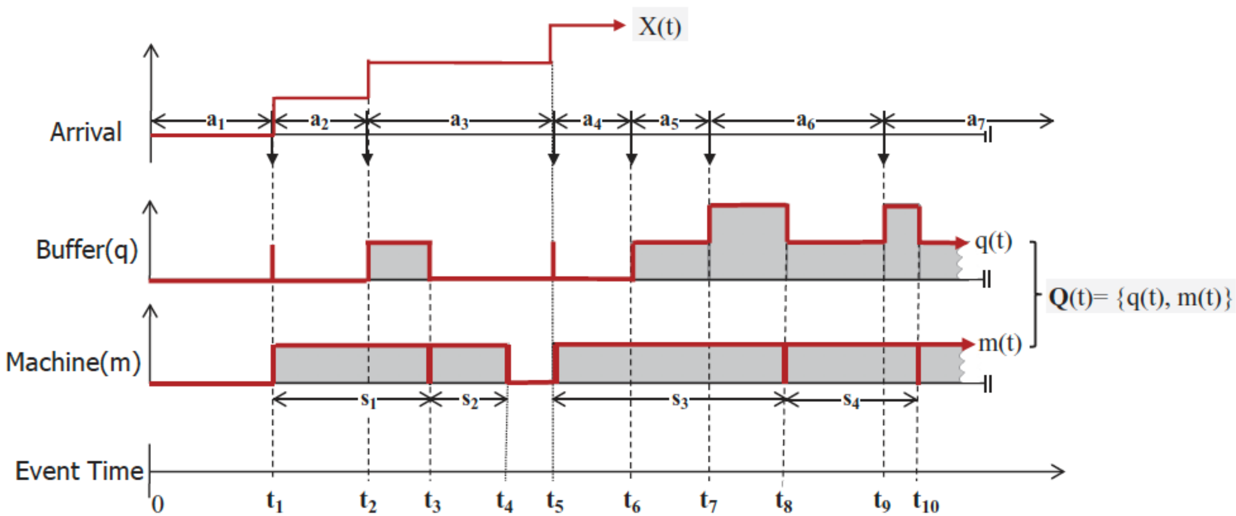


Mapa de ocurrencia de eventos de simulación en la escala de tiempo

Trayectoria de un modelo de simulación



Gráfica de eventos describiendo la dinámica de sistema de un solo servidor



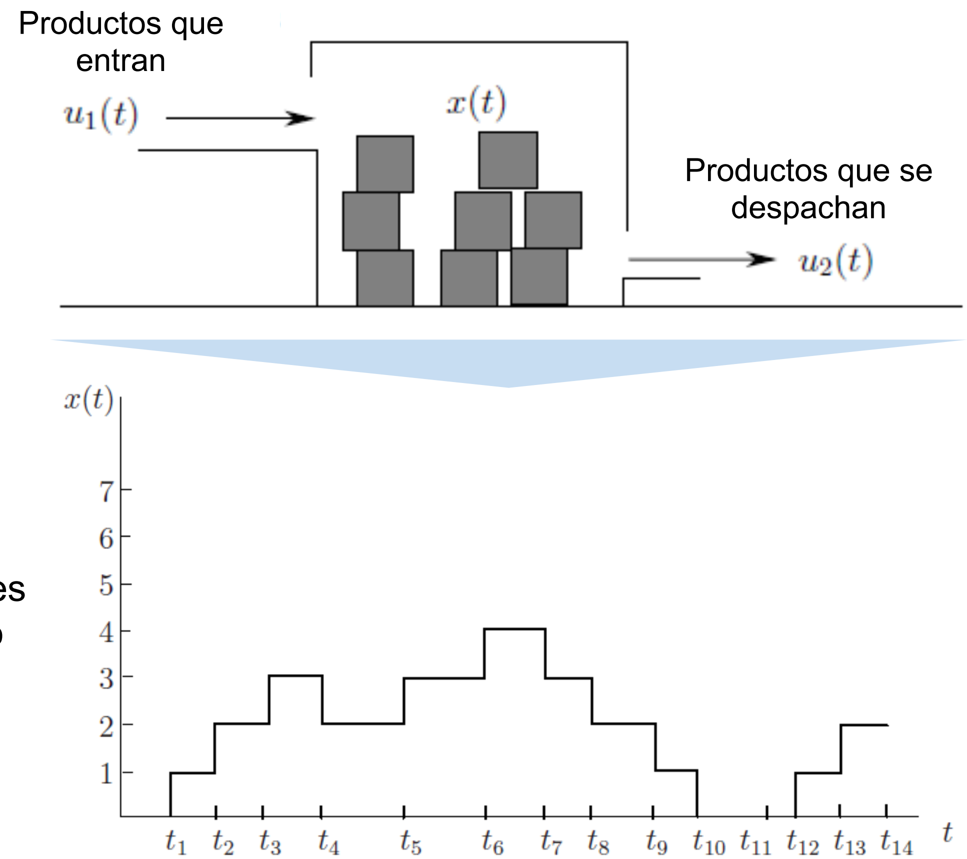
Trayectoria de un modelo de simulación para un sistema de un solo servidor

Ejemplo: Sistema de una bodega

Se desea modelar el inventario de esta bodega, esto es, cuantos productos están presentes en un tiempo determinado.

Nos interesa el nivel de inventario en este almacén, es decir, cuántos productos están presentes en un momento dado

- Cuando ocurre una llegada de producto a la bodega $u_1(t)$, $x\,(t)$ aumenta en 1.
- Cuando ocurre una salida de un producto de la bodega, $u_2(t)$, $x\,(t)$ disminuye en 1.

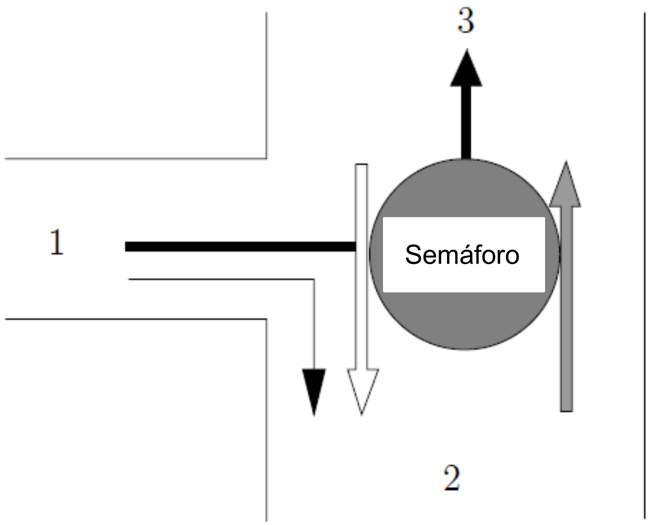


Usamos la notación t^+ para definir un instante de tiempo "justo después" de t. Con estas observaciones y notaciones podemos escribir la ecuación de estado como

$$x(t^+) = \begin{cases} x(t) + 1 & si\ \ u_1(t) = 1 \quad u_2(t) = 0 \\ x(t) - 1 & si\ \ u_1(t) = 0 \quad u_2\,(t) = 1, x\,(t) > 0 \\ x(t) & de\ lo\ contrario \end{cases}$$

Ejemplo: Sistema de tráfico

En un entorno de tráfico, los vehículos utilizan servidores como semáforos, cabinas de peaje y el espacio físico en las carreteras.



Una intersección en T controlada por un semáforo

Hay cuatro tipos de vehículos:

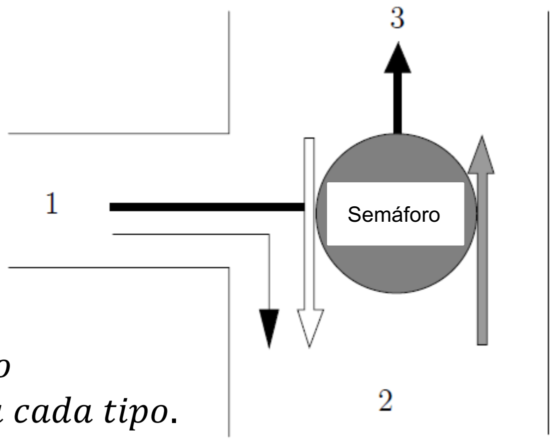
(1,2) vehículos que vienen del punto 1 y giran a la derecha hacia 2,
(1,3) vehículos procedentes de 1 y girando a la izquierda hacia 3,
(2,3) vehículos que van directamente de 2 a 3, y
(3,2) vehículos que van directamente de 3 a 2.

El semáforo se configura de modo que:

- se vuelva rojo para los vehículos (1,2) y (1,3) (verde para los vehículos (2,3) y (3,2)), o
- se vuelva verde para (1,2)) y (1,3) vehículos (rojo para (2,3) y (3,2) vehículos).

Ejemplo: Sistema de tráfico

En este caso el conjunto del evento va a ser definido por:



$$E = \{a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{32}, d_{12}, d_{13}, d_{23}, d_{32}, g, r\}$$

Donde:

$a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{32}$ *representa la llegada de los vehículos para los cuatro tipo*

$d_{12}, d_{13}, d_{23}, d_{32}$ *es una salida del vehículo al despejar la intersección para cada tipo.*

g *indica que el semáforo está en verde para los vehículos* $(1,2)$ *y* $(1,3)$

r *indica que el semáforo esta en rojo para los vehículos* $(1,2)$ *y* $(1,3)$

Un espacio de estado posible se define por las longitudes de cola formadas por los cuatro tipos de vehículos y el estado del semáforo en sí, es decir

$$X = \{(x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{32}, y) : x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{32} \geq 0, y \in \{G, R\}\}$$

Donde

$x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{32}$ *son las cuatro longitudes de la cola,*

y *es el estado del semáforo(*G *significa verde para los vehículos*$(1,2)$ *y* $(1,3)$*,*
R *significa rojo para los vehículos*$(1,2)$ *y* $(1,3)$*).*

Números aleatorios

Para poder realizar una simulación que incluya variabilidad dentro de sus eventos, es preciso generar una serie de números aleatorios

Los números aleatorios uniformes (0,1) desempeñan un papel clave en el muestreo de distribuciones

La única forma factible de generar números aleatorios (0,1) para usarlos en una simulación está basada en operaciones aritméticas.

.0589	.3529	.5869	.3455	.7900	.6307
.6733	.3646	.1281	.4871	.7698	.2346
.4799	.7676	.2867	.8111	.2871	.4220
.9486	.8931	.8216	.8912	.9534	.6991
.6139	.3919	.8261	.4291	.1394	.9745
.5933	.7876	.3866	.2302	.9025	.3428
.9341	.5199	.7125	.5954	.1605	.6037
.1782	.6358	.2108	.5423	.3567	.2569
.3473	.7472	.3575	.4208	.3070	.0546
.5644	.8954	.2926	.6975	.5513	.0305

Propiedades

- **Las secuencias deben ser no correlacionadas**. Esto significa que en una sucesión de números aleatorios, una subsecuencia no puede estar relacionada con ninguna otra.

- **Independencia estadística y aleatoriedad**. Esto implica que la probabilidad de que un número específico aparezca en la sucesión debe ser la misma para cada uno de los elementos del conjunto de los números aleatorios. La aparición de un número dentro de la sucesión no implica la aparición de otro.

- **Deben tener período máximo.** los generadores aleatorios son cíclicos, por lo cual es deseable que cada uno de los elementos aparezca una vez en la secuencia antes que la misma se repita

Generación de números aleatorios

- Actualmente, las computadores pueden generar una cantidad de números aleatorios para su uso al ejecutar la simulación
- También, existen tablas predeterminadas con números aleatorios entre 0 y 1
- Un **generador de números aleatorios** es un algoritmo que produce secuencias de números que siguen una distribución de probabilidad específi ca y tienen la apariencia de aleatoriedad.

Método congruencial para generar números aleatorios

- El **método congruencial mixto** genera una sucesión de números aleatorios enteros en un intervalo de 0 a m – 1 .
- Este algoritmo genera una secuencia de números enteros por medio de una ecuación recursiva

$$X_{i+1} = (aX_i + C)mod(m) \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots n$$

donde

$X_0 = semilla$
$a = constante\ multiplicativa$
$c = constante\ aditiva$
$m = módulo$

donde

$R = Número\ aleatorio\ generado$ $\qquad R = \frac{X_i}{m-1}$

Generación de variables aleatorias

- En la sección anterior, vimos cómo generar números aleatorios, es decir, el caso especial de las variables aleatorias de la distribución U [0,1].

- En esta sección, asumiremos que hay disponible una secuencia de números aleatorios y nos concentraremos en el tema de cómo transformarla para obtener una secuencia de variables aleatorias a partir de una distribución de probabilidad específicaF (x).

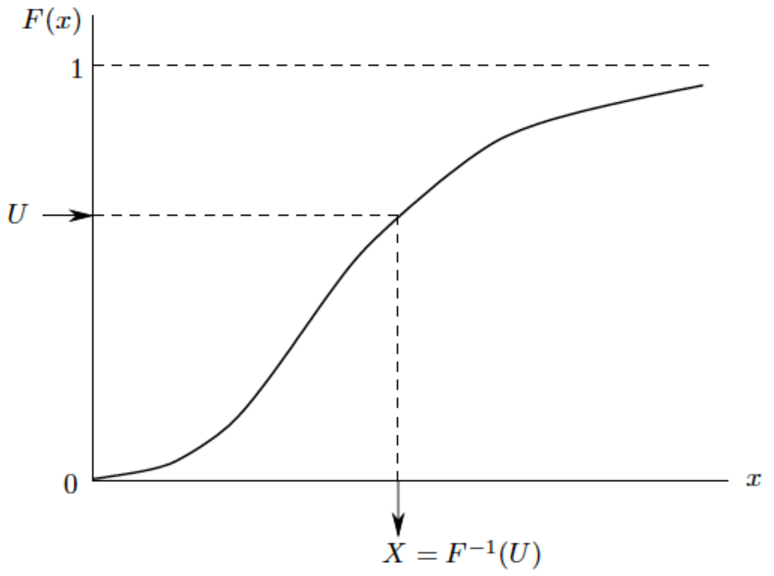
- Hay una serie de técnicas que se utilizan para la generación de variantes aleatorias como:
  - Método de transformación inversa
  - Método de convolucón
  - Método de aceptación-rechazo

Método de la transformada inversa

El método de la transformada inversa puede utilizarse para simular variables aleatorias, lo cual se logra mediante la función acumulada $F(x)$ y la generación de números aleatorios $R(0\,,1)$.

El método consiste en:

1. Generar un numero aleatorio $R(0\,,1)$
2. Calcular la muestra deseada $x = F^{-1}(R)$



Método inverso: Distribución exponencial

La función de densidad de probabilidad exponencial

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$$

representa el tiempo de llegadas $\boldsymbol{t}$ a una instalación con valor medio de $\boldsymbol{\frac{1}{\lambda}}$

$$F(t) = \int_{0}^{t} \lambda e^{-\lambda t}\, dx$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad t > 0$$

Estableciendo $R = F(t)$, podemos resolver t como:

$$t = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - R)$$

Podemos observar que $\ln(1 - R)$ puede ser reemplazado con $\ln(R)$ porque $1 - R$ es complemento de R

$$\boxed{t = -\frac{1}{\lambda}\ln(R)}$$

Método inverso: Distribución uniforme

Suponga la siguiente distribución uniforme

$$f(t) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \leq t \leq b$$

Dado un número aleatorio R se puede determinar la siguiente expresión para t

$$F(t) = \int_a^b \frac{1}{b-a} dt$$

$$F(t) = \frac{t-a}{b-a}, \qquad a \leq t \leq b$$

Estableciendo $R = F(t)$, podemos resolver t como:

$$\boxed{t = a + (b-a)R}$$

Ejemplo 1: Simulación con problemas de teoría de colas

- El tiempo entre llegadas de los clientes a la peluquería Rizos es exponencial con media de 15 minutos. La peluquería es atendida por solo un peluquero, y se lleva entre 10 y 15 minutos, distribuidos de manera uniforme, para realizar un corte de pelo Los clientes son atendidos con base en la disciplina primero en llegar, primero en salir (FIFO).

- El objetivo de la simulación es calcular las siguientes medidas de desempeño:
  - La utilizacion promedio de la peluquería
  - La cantidad promedio de clientes que esperan
  - El tiempo promedio que un cliente espera en la cola

La lógica del modelo de simulacion se puede describir en función de las acciones asociadas con los eventos de llegada y salida del modelo

Simular manualmente las primeras 5 llegadas

Ejemplo 1: Datos del problema

- Tiempo de llegadas
  → distribución exponencial
  → Media de 15 minutos

$$t = -15 \ln R$$

- Tiempo de servicio
  → distribución uniforme
  → Entre 10 a 15 minutos

$$t = a + (b - a)R$$
$$t = 10 + 5R$$

- Número de servidores
  → 1 peluquero

Ejemplo 1: Tabla de números aleatorios

TABLA 19.1 Una lista breve de números aleatorios 0-1

.0589	.3529	.5869	.3455	.7900	.6307
.6733	.3646	.1281	.4871	.7698	.2346
.4799	.7676	.2867	.8111	.2871	.4220
.9486	.8931	.8216	.8912	.9534	.6991
.6139	.3919	.8261	.4291	.1394	.9745
.5933	.7876	.3866	.2302	.9025	.3428
.9341	.5199	.7125	.5954	.1605	.6037
.1782	.6358	.2108	.5423	.3567	.2569
.3473	.7472	.3575	.4208	.3070	.0546
.5644	.8954	.2926	.6975	.5513	.0305

Ejemplo 1: Llegada del cliente 1 en el instante t = 0

- Debido a que la instalación está ociosa en el instante t = 0, el cliente inicia el servicio de inmediato

- Genere la **llegada del cliente 2** en el instante

$$t = 0 + [-15 \ln R]$$

$$t = 0 + [-15 \ln(0.0589)]$$

$$\boldsymbol{t = 42.48\ minutos}$$

- La **salida del cliente 1** se calcula de la siguiente manera

$$t = 0 + (10 + 5R)$$

$$t = 0 + [10 + (5 \times 0.6733)]$$

$$\boldsymbol{t = 13.37\ minutos}$$

Ejemplo 1: Salida del cliente 1 y llegada de cliente 2

- Debido a que la cola esta vacía, la instalación se declara ociosa. Al mismo tiempo, registramos que la instalación ha estado ocupada entre t = 0 y t = 13.37 minutos

- Llegada del cliente 2 en el instante t = 42.48.
- El **cliente 3 llegara** en el instante

$$t = 42.48 + [-15 \ln R]$$

$$t = 42.48 + [-15 \ln(0.4799)]$$

$$\boldsymbol{t = 53.49\, minutos}$$

- Debido a que la instalación esta ociosa, el cliente 2 inicia el servicio y la instalación se declara ocupada.
- La **salida del cliente 2** se calcula de la siguiente manera

$$t = 42.48 + (10 + 5R)$$

$$t = 42.48 + [10 + (5 \times 0.9486)]$$

$$\boldsymbol{t = 57.22\, minutos}$$

Ejemplo 1: Llega cliente 3 en el instante t = 53.49

- El **cliente 3 llegara** en el instante t = 53. 49 minutos
- Debido a que actualmente la instalación esta ocupada hasta t = 57.22 minutos, el cliente 3 se coloca en la cola en el instante t = 53.49
- El **cliente 2 sale** en el instante t = 57.22. El cliente 3 se retira de la cola para iniciar el servicio.
- El **cliente 3 tiene un tiempo de espera de**

$$W_3 = 57.22 - 53.49 = 3.73\, minutos$$

Ejemplo 1: **Llega cliente 4**

- El **cliente 4 llegara** en el instante

$$t = 53.49 + [-15 \ln(0.61.39)]$$

$$\boldsymbol{t = 60.81\, minutos}$$

- Debido a que actualmente la instalación esta ocupada, el cliente 4 se coloca en la cola

- El **cliente 3 sale** en el instante

$$t = 57.22 + [10 + (5 \times 0.5933)]$$

$$\boldsymbol{t = 70.19\, minutos}$$

Ejemplo 1: **Llega cliente 5**

- El **cliente 5 llegara** en el instante

$$t = 60.81 + [-15\ln(0.9341]$$

$$\boldsymbol{t = 61.83\ minutos}$$

- La simulación se limita a 5 llegadas, por consiguiente no se generan más. La instalación sigue ocupada porque el cliente se coloca en la cola
- Sale el cliente 3 en el instante t = 70.19, por consiguiente entra el cliente 4
- El **cliente 4 sale** en el instante

$$t = 70.19 + [10 + (5 \times 0.1782)]$$

$$\boldsymbol{t = 81.08\ minutos}$$

Ejemplo 1: Sale el cliente 4, entra el cliente 5

- El **cliente 5 saldrá** en el instante

$$t = 81.08 + [10 + (5 \times 0.3473)]$$

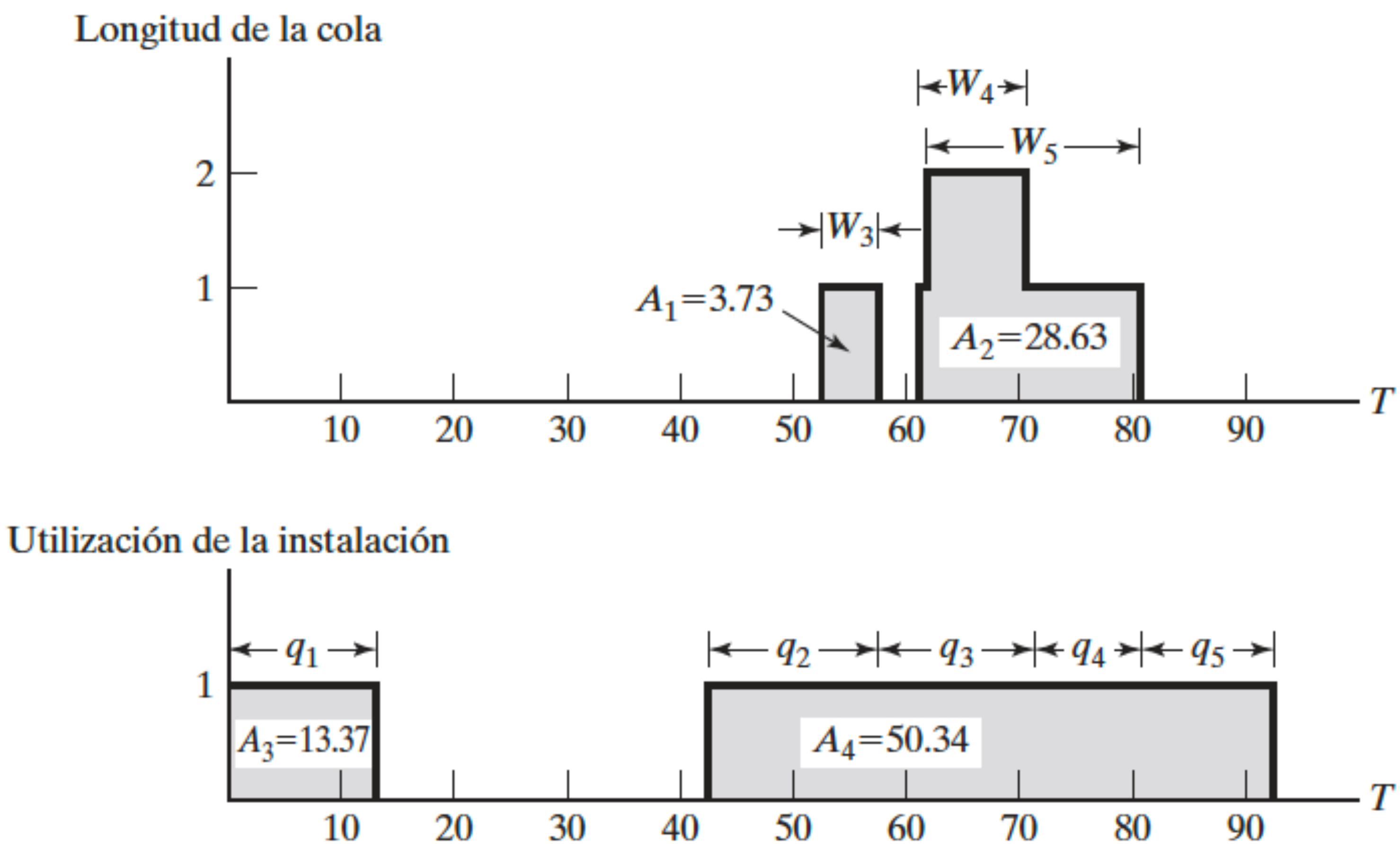
$$\boldsymbol{t = 92.82\ minutos}$$

- No hay más clientes en el sistema, la simulación termina.

Ejemplo 1: Lista de eventos

Tiempo (minutos)	Evento
13.37	Sale cliente 1
42.48	Llega cliente 2
53.49	Llega cliente 3
57.22	Sale cliente 2
60.81	Llega cliente 4
61.83	Llega cliente 5
70.19	Sale cliente 3
81.08	Sale cliente 4
92.82	Sale cliente 5

Ejemplo 1: Cambios en la longitud de la cola y de utilización de instalación como una función del tiempo de simulación T



Ejemplo 1: Características de operación

- La longitud de la cola y la utilización de la instalación se conocen como variables basadas en el tiempo porque su variación es una función del tiempo. Por consiguiente, sus valores promedios se calcula de la siguiente manera

$$\text{Valor promedio de una variable basada en el tiempo} = \frac{\text{área bajo la curva}}{\text{periodo simulado}}$$

- El tiempo de espera promedio en la cola es una variable basada en observaciones. Por consiguiente su valor promedio se calcula de la siguiente manera

$$\text{Valor promedio de una variable basada en observaciones} = \frac{\text{Suma de las observaciones}}{\text{Cantidad de observaciones}}$$

Ejemplo 1: Características de operación

$$Longitud\ promedio\ de\ la\ cola$$

$$L_q = \frac{área\ bajo\ la\ curva}{periodo\ simulado} = \frac{A_1 + A_2}{92.82} = \frac{32.36}{92.82} = 0.349\ clientes$$

$$Utilización\ promedio\ de\ la\ instalación\ (\%\ de\ tiempo\ que\ el\ peluquero\ está\ ocupado)$$

$$\rho = \frac{área\ bajo\ la\ curva}{periodo\ simulado} = \frac{A_3 + A_4}{92.82} = \frac{63.71}{92.82} = 0.686$$

$$Tiempo\ de\ espera\ promedio$$

$$W_q = \frac{Suma\ de\ las\ observaciones}{Cantidad\ de\ observaciones} = \frac{W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5}{5}$$

$$W_q = \frac{0 + 0 + 3.73 + 9.38 + 19.25}{5} = 32.36\ minutos$$

Resumen

Algunas funciones generadoras a partir de funciones discretas y continuas, donde Ri es un número aleatorio uniformemente distribuido entre (0,1)

Distribución uniforme

Sean a y b los límites de un conjunto de números distribuidos uniformemente, es posible generar un valor $\mathrm{a} \leq Ui \leq b$ en base a la siguiente función aleatoria

$$\boxed{t = a + (b - a)R}$$

Distribución exponencial

Sea $\frac{1}{\lambda}$ el número promedio de eventos por unidad de tiempo o espacio, se puede generar una variable aleatoria t tal que

$$\boxed{t = -\frac{1}{\lambda}\ln(R)}$$

Bibliografía

- Cassandras & Lafortune. (2008). *Introduction to Discrete Event Systems*. Springer
- García et al. (2013). *Simulación y Análisis de Sistemas con ProModel*. Editorial Pearson.
- Render, B. (2016). *Métodos cuantitativos para los Negocios*. Editorial Pearson.
- Taha, H. (2011). *Investigación de Operaciones*. Editorial Pearson.
- Schroeder et al. (2011). *Administración de Operaciones*. McGraw-Hill
- Render, B. & Heizer, J. (2014). *Principios de Administración de Operaciones*. Pearson
- Chase, R. & Jacobs, F. (2014). *Administración de Operaciones, Producción y Cadena de Suministro.* McGraw – Hill
- Hillier, F. & Lieberman, G. (2015). *Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill
- Anderson, D. & Sweeny, D. (2019). *Métodos Cuantitativos para los Negocios*. Cengage
- Nahmias, S. (2007). *Análisis de la Producción y las Operaciones*. McGraw-Hill
- Rees, M. (2015). *Business Risk and Simulation Modeling in Practice*. John Wiley & Sons Ltd
- Sterman, J. (2000). *Business Dynamics – Systems Thinking and Modeling for a Complex World*. McGraw-Hill
- Winston, W. (2017) *Microsoft Excel 2016 – Data Analysis and Busines Modeling*. Microsoft press
- Slack, N., et al. (2016) . *Operations Management*. Pearson
- Stevenson, W. (2015*). Operations Management*. McGraw-Hill
- Alvarez, H. (2011). *Introducción a la Simulación*. Universidad Tecnológica de Panamá
- Schaffernicht, M. (2006). *Dinámica de Sistemas – Tomo 1: Fundamentos*.
- Aracil, J. (1995). *Dinámica de Sistemas*. Isdefe

Contacto

Ricardo Caballero, M.Sc.

Docente Tiempo Completo
Facultad de Ingeniería Industrial
Centro Regional de Chiriquí
Universidad Tecnológica de Panamá

E-mail: ricardo.caballero@utp.ac.pa

https://www.academia.utp.ac.pa/ricardo-caballero