Simulación Aplicada a la Logística

Lectura 3

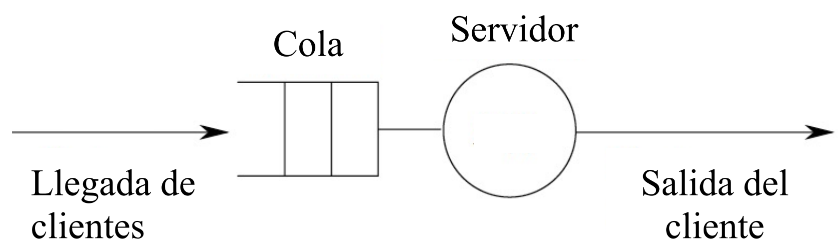
Teoría de Colas

Profesor:
Ricardo Caballero, M.Sc.
ricardo.caballero@utp.ac.pa

Generalidades

- La **teoría de colas** es el estudio de filas de espera utilizando modelos para representar distintos sistemas y cuantificándolos por medio de medidas de desempeño representativas como longitud promedio de la cola, tiempo de espera promedio de la cola y uso promedio de la instalación

- Una fila de espera consiste en el flujo de **clientes** hacia y a través de un sistema, que han de ser procesados o atendidos por uno o más **servidores**



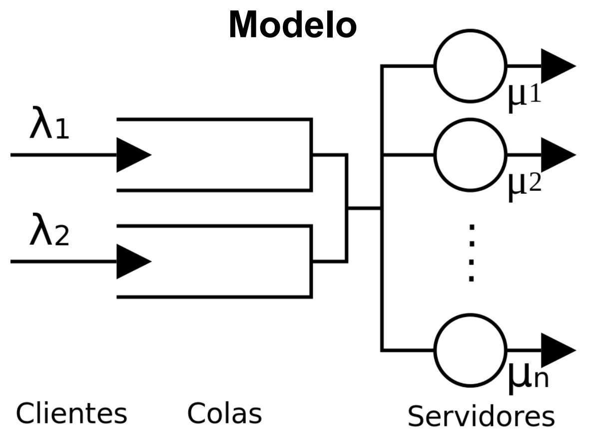
Algunos ejemplos

- Máquinas que esperan ser reparadas pueden provocar pérdidas de producción.
- Vehículos (incluso barcos y camiones) que deben esperar su descarga pueden retrasar envíos subsecuentes.
- Aviones que esperan despegar o aterrizar pueden desorganizar la programación posterior de vuelos.
- Retrasos de las transmisiones de telecomunicaciones por saturación de líneas pueden causar fallas inesperadas en los datos.
- Trabajos de manufactura esperan su proceso se puede perturbar el proceso de producción.
- El retraso de los trabajos de servicio respecto de su fecha de entrega es una causa de pérdida de negocios futuros.

Características

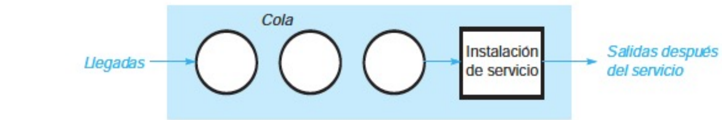
- El patrón de **llegadas de clientes** generalmente se describe mediante una distribución estadística que implica incertidumbre.
- La duración de los **tiempos de servicio** (y por lo tanto los tiempos de salida para cada cliente) también se describen mediante una distribución estadística.
- La cantidad de servidores idénticos (a veces llamados **canales**) que operan en paralelo es una característica importante. Si hay más de un servidor, cada uno puede tener su propia cola o todos los servidores pueden seleccionar clientes de una sola cola.
- El método por el cual se selecciona el próximo cliente de la cola para recibir el servicio se denomina **disciplina de cola**. La disciplina de cola más común es el **primero en entrar, el primero en salir (FIFO).**
- En algunos sistemas, existe un número máximo de clientes permitidos en la cola al mismo tiempo; esto se llama la **capacidad del sistema**. Si un sistema está lleno, no se permite que los recién llegados se unan al sistema.
- Los modelos en los que las llegadas se extraen de una población pequeña se denominan modelos de **fuente** finita. La fuente puede ser de tamaño finito o infinito

Preguntas al analizar una fila de espera

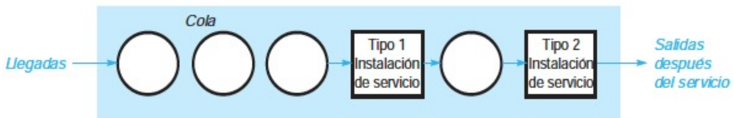


- ¿Cuánto tiempo están inactivos los servidores?
- ¿Cuál es el tiempo esperado que un cliente pasa en la cola?
- ¿Cuál es el número esperado de clientes presentes en la cola?¿Deberían agregarse servidores para intentar reducir la longitud promedio de la cola?
- ¿Cuál es la distribución de probabilidad del número de clientes presentes en la cola?
- ¿Cuál es la distribución de probabilidad del tiempo de espera de un cliente?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la cola sea más larga que cierta longitud dada en cualquier momento?

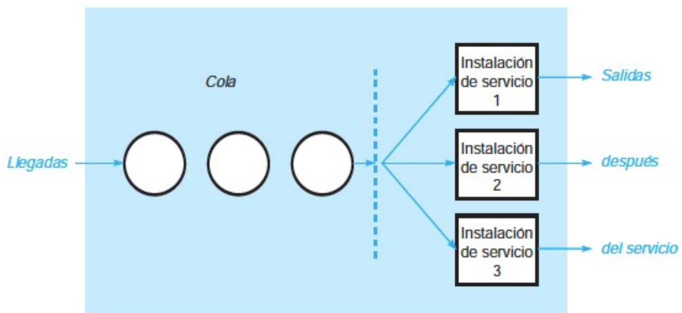
Configuraciones comunes



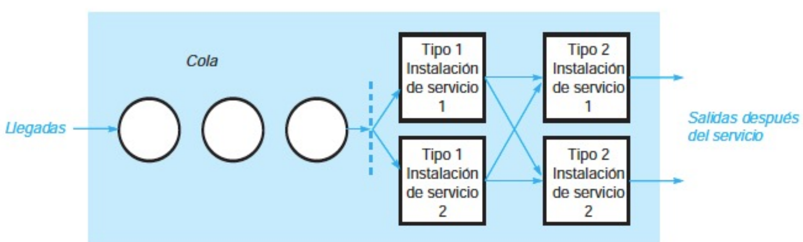
Sistema de un solo canal, una sola fase



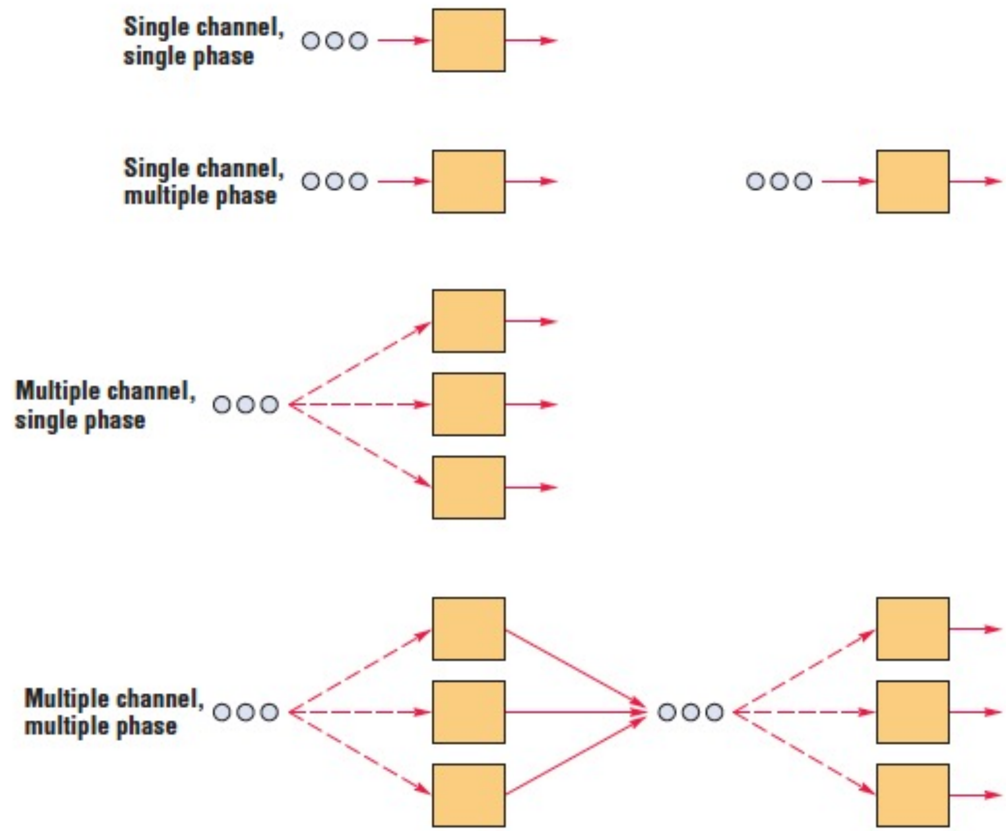
Sistema de un solo canal, multifase



Sistema multicanal de una sola fase



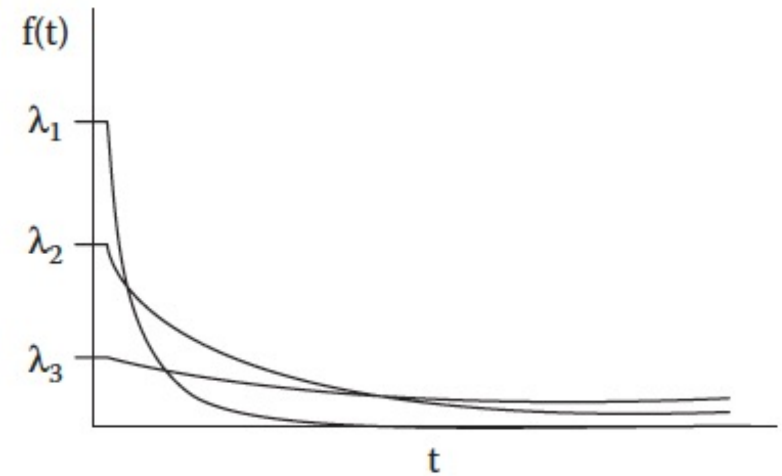
Sistema multicanal, multifase



Patrones de llegada y servicio

Los tiempos aleatorios entre llegadas y de servicio se describen cuantitativamente por medio de una distribución exponencial, la cual se define como

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad t > 0$$



Con los parámetros

$$E\{t\} = \frac{1}{\lambda} \qquad P\{t \leq T\} = \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda T}$$

La definición de E(t) muestra que λ es la tasa por unidad de tiempo a la cual se generan los eventos (llegadas o salidas)

La **propiedad de falta de memoria** de la distribución exponencial es importante porque implica que si queremos conocer la distribución de probabilidad del tiempo hasta la próxima llegada, entonces no importa cuánto tiempo haya pasado desde la última llegada.

Ejemplo 1:

Una máquina de servicio cuenta con una unidad de respaldo para su reemplazo inmediato si ocurre una falla. El tiempo para que falle la máquina (o su unidad de respaldo) es exponencial y ocurre cada 5 horas en promedio. El operador de máquina afirma que ésta "tiene el hábito" de fallar cada noche alrededor de las 8:30 P.M. Analice la afirmación del operador.

a. Si en este momento son las 8:20 PM, cuánto es la probabilidad que ocurra una falla a las 8:30 PM?
b. Si la hora en este momento es la 1:00 PM, cuánto es la probabilidad que ocurra una falla a las 8:30 PM?
c. El promedio de fallas en una semana, suponiendo que el servicio se ofrece las 24horas del día, 7 días a la semana.
d. La probabilidad de al menos una falla en un periodo de 24 horas.
e. La probabilidad de que la siguiente falla no ocurra dentro de 3 horas.
f. Si no ha ocurrido ninguna falla 3 horas después de la última falla, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo entre fallas sea al menos de 4 horas?

Ejemplo 1:

La tasa de fallas promedio de la máquina es

$$\lambda = \frac{1}{5} = 0.2\,fallas\ por\ hora$$

Por lo tanto, la distribución exponencial del tiempo para una falla es

$$f(t) = 0.2e^{-0.2t}$$

a. La probabilidad que ocurra una falla a las 8:30 PM siendo en este momento las 8:20 PM es

$$P\{t \leq T\} = 1 - e^{-\lambda T}$$

$$P\left\{t \leq \frac{10}{60}\right\} = 1 - e^{-0.2\left(\frac{10}{60}\right)} = 0.0328$$

b. La probabilidad que ocurra una falla a las 8:30 PM siendo en este momento las 1:00 PM es

$$P\{t \leq 7.5\} = 1 - e^{-0.2\,(7.5)} = 0.7769$$

Ejemplo 1:

c. El promedio de fallas en una semana, suponiendo que el servicio se ofrece las 24horas del día, 7 días a la semana.

$$\lambda = \frac{0.2 fallas}{hora} * \frac{24 horas}{día} * \frac{7 días}{semana} = 33.6 \frac{fallas}{semana}$$

d. La probabilidad de al menos una falla en un periodo de 24 horas.

$$P(t \leq 24) = 1 - e^{-0.2*24}$$

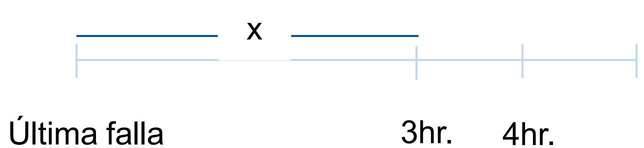
$$P(t \leq 24) = 0.9918 \approx 99.18\%$$

e. La probabilidad de que la siguiente falla no ocurra dentro de 3 horas.

$$P(t > 3) = 1 - P(t \leq 3) = e^{-\lambda t^{-0.2x^3}}$$

$$= 0.5488 \approx 54.88\%$$

f. Si no ha ocurrido ninguna falla 3 horas después de la última falla, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo entre fallas sea al menos de 4 horas?



$$P(t \leq 1) = 1 - e^{-0.2*1} = 0.1813 \approx 18.13\%$$

Patrones de llegada y servicio

Una distribución entre llegadas exponencial implica que el proceso de llegada tiene una distribución de Poisson.

Si los tiempos entre llegadas son exponenciales, entonces el número de llegadas por unidad de tiempo es un proceso de Poisson.

Una distribución de Poisson describe la probabilidad de tener precisamente n llegadas en las próximas t unidades de tiempo como:

$$\text{Probability}\ \{X(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Observe que cuando n = 0, la probabilidad

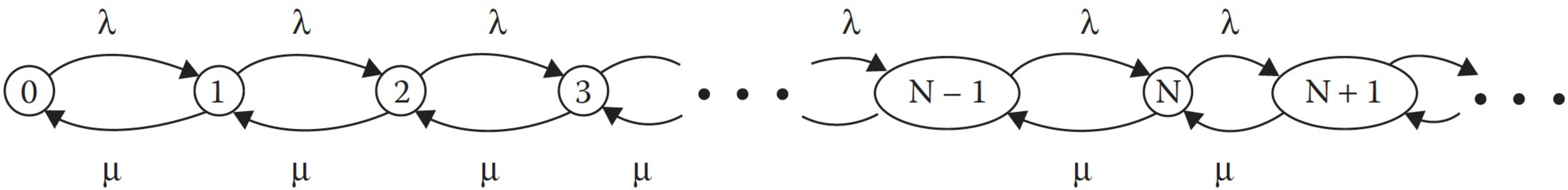
$$\text{Probability}\ \{X(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

es precisamente la distribución exponencial que la próxima llegada no ocurrirá hasta después de t unidades de tiempo.

Al definir modelos de colas, se refiere a:

- **las llegadas de Poisson** → llegadas por unidad de tiempo
- **los tiempos de servicio exponenciales** → la duración del servicio.

Proceso de nacimiento y muerte



El término **nacimiento** se refiere a la **llegada de un cliente**, y el término **muerte** se refiere a una **partida**.

Solo puede ocurrir un nacimiento o una muerte a la vez; por lo tanto, las transiciones siempre ocurren al siguiente estado superior o inferior. Las tasas a las que ocurren los nacimientos y las muertes están prescritas precisamente por los parámetros de las distribuciones exponenciales que describen los patrones de llegada y servicio.

En la teoría de colas, la tasa promedio de llegada de un cliente es universalmente denotada por λ y la tasa promedio de servicio (tasa de salida) es denotada por μ, donde λ y μ son parametros de distribución exponencial

Notación de Kendall

Kendall sugirió una notación que es útil cuando se trata de clasificar la amplia variedad de modelos de línea de espera diferentes que han sido desarrollados. La notación de tsímbolos de Kendall es la siguiente:

$$(A / B / C):(D / E / F)$$

donde

A	denota la distribución de probabilidad de llegadas
B	denota la distribución de probabilidad del tiempo de servicio
C	denota el número de canales o servidores paralelos
D	disciplina en las colas
E	número máximo (finito o infinito) permitido en el sistema (capacidad del sistema)
F	tamaño de la fuente (finita o infinita)

Notación de Kendall

La notación estándar para representar las distribuciones de las llegadas y salidas (símbolos a y b) es:

M	Distribución exponencial (markoviana) de tiempo entre llegadas y tiempos de servicios
D	Tiempo constante (determinístico)
G	Distribución general (genérica) del tiempo de servicio
GI	Distribución general (genérica) del tiempo entre llegadas
E_k	Distribución de Erlang con parámetros k

La notación para la disciplina en colas (símbolo D) incluye:

GD	Distribución general (es decir, cualquier tipo de disciplina)
FCFS	primero en llegar, primero en ser servido
LCFS	Último en llegar, primero en ser servido
SIRO	Servicio en orden aleatorio

Terminología y notación para las medidas de desempeño

Estado del sistema	Número de clientes en el sistema
Longitud de la cola	Número de clientes que esperan servicio (estado del sistema menos número de clientes a quienes se les brinda el servicio
λ	Tasa de llegada (número esperado de llegadas por unidad de tiempo).
μ	Tasa de salida de clientes de cada servidor en el sistema (número esperado de clientes que completan el servicio y salen del sistema por unidad de tiempo).
k	Número de servidores paralelos
ρ	Factor de utilización de la instalación de servicio (la fracción esperada de tiempo que los servidores están ocupados); a veces llamado intensidad de tráfico. Tenga en cuenta que $\rho < 1$ para que el sistema alcance el estado estacionario; de lo contrario, la carga de clientes en el sistema crece cada vez más sin límite

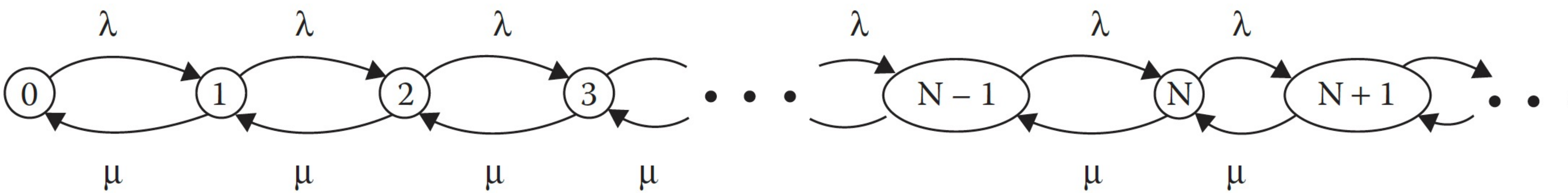
Terminología y notación para las medidas de desempeño

P_n	Probabilidad de estado estacionario de que el sistema se encuentre en el estado n, es decir, de que haya exactamente n clientes en el sistema.
L	Número esperado de clientes en el sistema.
L_q	Número esperado de clientes en cola; longitud media de la cola.
W	Tiempo de espera promedio para cada cliente en el sistema (incluye el tiempo de espera y el tiempo de servicio).
W_q	Tiempo promedio de espera pasado en la cola.

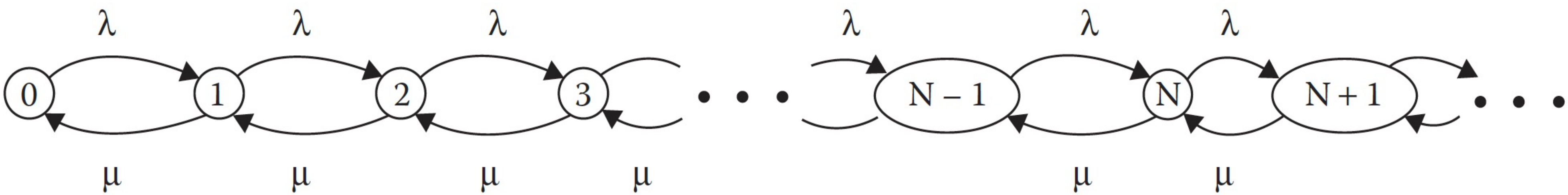
Medidas de rendimiento de estado estacionario

Cuando un sistema de colas apenas inicia su operación, el estado del sistema (el número de clientes que esperan en el sistema) se encuentra bastante afectado por el estado inicial y el tiempo que ha pasado desde el inicio. Se dice entonces que el sistema se encuentra en **condición transitoria**.

Una vez que ha pasado suficiente tiempo, el estado del sistema se vuelve, en esencia, independiente del estado inicial y del tiempo transcurrido, se puede decir que el sistema ha alcanzado su **condición de estado estable**



Medidas de rendimiento de estado estacionario



Cuando el sistema alcanza su estado estable

Tasa de entrada = Tasa de Salida

La tasa media de salida del estado 0 es la probabilidad de estar en el estado 0 multiplicada por la tasa de salidas del estado 0, $p_0\lambda$. La tasa media entrada es la probabilidad de estar en el estado 1 por la tasa de transiciones del estado 1 al estado 0, $p_1\mu$. Por lo tanto, la ecuación para el **estado 0** es

$$p_0\lambda = p_1\mu$$

Medidas de rendimiento de estado estacionario

Para todos los demás estados, hay dos arcos de entrada y dos arcos de salida. Aún así, el principio de tasa de entrada = tasa de salida se mantiene y podemos escribir para el **estado 1**

Tasa de entrada	$p_0\lambda + p_2\mu$
Tasa de salida	$p_1\lambda + p_1\mu$

$$p_0\lambda + p_2\mu = p_1\lambda + p_1\mu$$

De manera similar para el **estado 2**

$$p_1\lambda + p_3\mu = p_2\lambda + p_2\mu$$

Por consiguiente para **n estados**

$$p_{n-1}\lambda + p_{n+1}\mu = p_n\lambda + p_n\mu$$

Medidas de rendimiento de estado estacionario

Primero resolviendo la ecuación del estado 0 para p_1 en términos de p_0, podemos pasar a la ecuación del estado 1 y resolver para p_2 en términos de p_0, y sucesivamente resolver para todos los p_n de la siguiente manera:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda}{\mu} p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda}{\mu} p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0$$

.

.

.

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_{n-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

$$\boldsymbol{p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0}$$

Probabilidad de que haya n unidades en el sistema

Medidas de rendimiento de estado estacionario

Entonces, para el modelo de proceso de nacimiento y muerte en el que todas las llegadas se caracterizan por el parámetro λ y todas las salidas por el parámetro μ, cualquiera de los p_i puede calcularse en términos de los parámetros λ y μ y la probabilidad p_0. Para obtener el valor de p_0, solo observamos que la suma de todos los p_i debe ser igual a uno

$$p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

Entonces,

$$1 = p_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + \cdots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$= p_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]$$

La serie entre corchetes converge, si (λ/μ) < 1, a la cantidad $\dfrac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}$

Por consiguiente,

$$1 = p_0 \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

$$\boldsymbol{p_0 = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

Probabilidad de que no haya unidades en el sistema

Modelo de colas general de Poisson

El modelo general asume que tanto las tasas de entrada como de salida **dependen del estado**; lo que significa que dependen de la cantidad de clientes en la instalación de servicio

Defina

n = Cantidad de clientes en el sistema (haciendo cola, además de los que están siendo atendidos)
λ_n = Tasa de llegadas, si n clientes están en el sistema
μ_n = Tasa de salidas, si n clientes están en el sistema
p_n = Probabilidad de estado estable de que n clientes estén en el sistema

Ejemplo 2: Modelo de colas general de Poisson

El estacionamiento para visitantes en un local se limita a sólo 5 espacios. Los autos que utilizan estos espacios llegan de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 6 por hora. El tiempo de estacionamiento está distribuido exponencialmente con una media de 30 minutos. Los visitantes que no pueden encontrar un espacio vacío pueden esperar temporalmente en el estacionamiento hasta que un auto estacionado salga. El espacio temporal tiene cabida sólo para 3 autos. Otros que no pueden estacionarse o encontrar un espacio de espera temporal deben irse a otra parte. Determine lo siguiente:

a. La probabilidad, p_n, de que haya n autos en el sistema.
b. La tasa de llegadas efectiva de los autos que por lo general utilizan el estacionamiento.
c. El promedio de autos en el estacionamiento.
d. El tiempo promedio que un auto espera un espacio de estacionamiento.
e. El promedio de espacios de estacionamiento ocupados.
f. La utilización promedio del estacionamiento.

Ejemplo 2: Modelo de colas general de Poisson

a. La probabilidad, p_n, de que haya n autos en el sistema.

λ_n = 6 autos/hora , n = 1, 2, 3, 4, 5

$$\mu_n = \begin{cases} n\left(\frac{60}{30}\right) = 2n \; autos \; por \; hora, n = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 5\left(\frac{60}{30}\right) = 10 \; autos \; por \; hora, n = 6, 7, 8. \end{cases}$$

El valor de p_0 se calcula sustituyendo p_n, n =. 1, 2, 3, …, 8, en la siguiente ecuación

$$p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_8 = 1$$

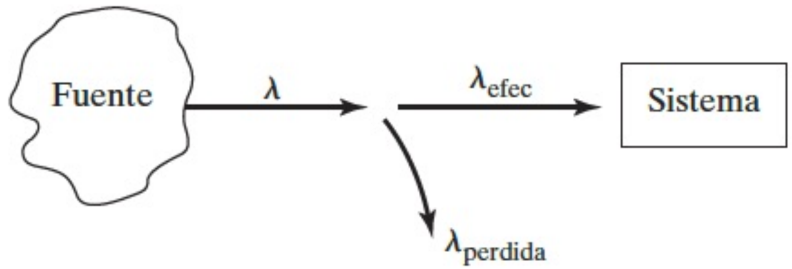
$$p_0 + p_0\left(\frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} + \frac{3^6}{5!\,5} + \frac{3^7}{5!\,5^2} + \frac{3^8}{5!\,5^3}\right) = 1$$

$$p_0 = 0.04812$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
p_n	0.14436	0.21654	0.21654	0.16240	0.09744	0.05847	0.03508	0.02105

Ejemplo 2: Modelo de colas general de Poisson

b. La tasa de llegadas efectiva de los autos que por lo general utilizan el estacionamiento.



Un auto no podrá entrar al estacionamiento si ya entraron 8.
Esto significa que la proporción de autos que no podrán entrar al estacionamiento es p_8.
Por lo tanto,

$$\lambda_{perdida} = \lambda p_8 = 6 \times 0.02105 = 0.1263\ autos/hora$$

$$\lambda_{efectiva} = \lambda - \lambda_{perdida} = 6 - 0.1263 = 5.8737\ autos/hora$$

Ejemplo 2: Modelo de colas general de Poisson

c. El promedio de autos en el estacionamiento.

El promedio de autos en el estacionamiento es igual a L, el promedio en el sistema. Podemos calcular L con p_n como

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} np_n$$

$$L = 0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 = 3.1286\ autos$$

Ejemplo 2: **Modelo de colas general de Poisson**

d. El tiempo promedio que un auto espera un espacio de estacionamiento.

Un auto que espera en el espacio temporal es en realidad un auto que está haciendo cola. Por lo tanto, su tiempo de espera hasta que encuentra un espacio es W_q.
Para determinar W_q se usa

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

Utilizando la Fórmula de Little $L = \lambda W$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{3.1286}{5.8737} = 0.53265\ horas$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = 0.53265 - \frac{1}{2} = 0.03265\ horas$$

Ejemplo 2: **Modelo de colas general de Poisson**

e. El promedio de espacios de estacionamiento ocupados.

El promedio de espacios de estacionamiento ocupados es igual al promedio de servidores ocupados,

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{5.8737}{2} = 2.9368\ espacios$$

f. La utilización promedio del lote estacionamiento

Uso del lote de estacionamiento = $\frac{\lambda/\mu}{k} = \frac{2.9368}{5} = 0.58736$

Modelo de línea de espera de un solo canal (M/M/1)

Las fórmulas siguientes se utilizan para calcular las características de operación constante de una línea de espera de canal único con llegadas Poisson y tiempos de servicio exponenciales, donde

$$\lambda = \textit{número medio de llegadas por periodo de tiempo (tasa de llegadas)}$$

$$\mu = \textit{número medio de servicios por periodo de tiempo (tasa de servicios)}$$

Probabilidad de que no haya unidades en el sistema

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Número promedio de unidades en la línea de espera

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Número promedio de unidades en el sistema

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Modelo de línea de espera de un solo canal (M/M/1)

Tiempo promedio que la unidad pasa en la línea de espera

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Factor de utilización : Probabilidad que una unidad que llega deba esperar por servicio

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Probabilidad de que haya n unidades en el sistema

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

Ejemplo 3: Modelo de línea de espera de un solo canal

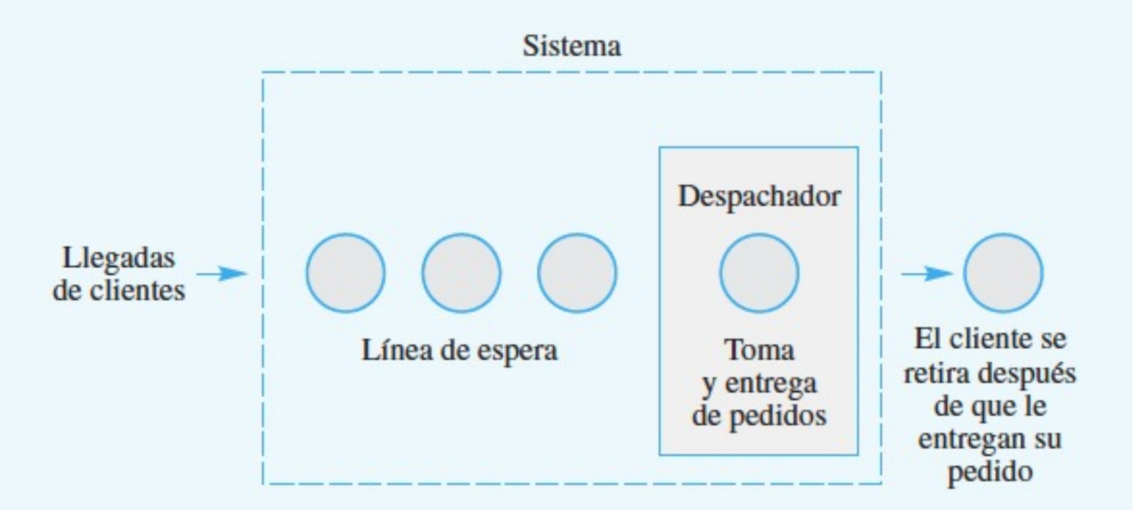
Para ilustrar las características básicas de un modelo de línea de espera, consideramos la línea de espera en el restaurante de comida rápida Burger King.
Burger King vende hamburguesas sencillas con queso, papas a la francesa, bebidas refrescantes y malteadas, así como un número limitado de artículos especiales y variedad de postres. Aunque a Burger King le gustaría atender de inmediato a cada cliente, en ocasiones llegaban más clientes de los que podían ser atendidos por el personal. Por tanto, los clientes hacían cola para hacer y recibir sus pedidos. A Burger King le preocupa que los métodos que actualmente utiliza para atender a los clientes ocasionen tiempos de espera excesivos. La gerencia desea estudiar la línea de espera para determinar el mejor método de reducir los tiempos de espera y mejorar el servicio.

En la operación actual de Burger King, un despachador toma el pedido de un cliente, determina el costo total del pedido, recibe el dinero del cliente y luego surte el pedido. Una vez que el pedido del primer cliente se surte, el despachador toma el pedido del siguiente que espera a que lo atiendan.Cada cliente que entra al restaurante Burger King debe pasar a través de un canal —una estación de toma y entrega de pedidos— para hacer un pedido, pagar la cuenta y recibir la comida. Cuando llegan más clientes de los que pueden ser atendidos de inmediato, forman una línea y esperan a que se desocupe la estación de toma y entrega de pedidos. Suponga que Burger King analizó los datos sobre llegadas de clientes y concluyó que la tasa de llegadas es de 45 clientes por hora.

En Burger King, el tiempo de servicio se inicia cuando un cliente comienza a hacer el pedido con el despachador y continúa hasta que el cliente recibe el pedido. Los tiempos de servicio rara vez son constantes. En Burger King, el número de productos y la combinación de estos pedidos varían considerablemente de un cliente al siguiente. Los pedidos pequeños pueden manejarse en cuestión de segundos, pero los grandes pueden requerir más de dos minutos. Suponga que Burger King estudió el proceso de toma y entrega de pedido y encontró que un despachador puede procesar un promedio de 60 pedidos por hora

Ejemplo 3: Modelo de línea de espera de un solo canal

Basado en la información previamente detallada, calcule las características de operación de la línea de espera de Burger King.



Ejemplo 3: Modelo de línea de espera de un solo canal

$Línea\ de\ espera\ de\ canal\ único$

$\lambda = 45\ clientes\ por\ hora$

$\mu = 60\ pedidos\ por\ hora$

$$\lambda = \frac{45\ clientes\ por\ hora}{60\ minutos} = 0.75\ clientes\ por\ minuto$$

$$\mu = \frac{60\ clientes}{60\ minutos} = 1\ cliente\ por\ minuto$$

Probabilidad de que no haya unidades en el sistema

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{0.75}{1} = 0.25 \rightarrow 25\%$$

Número promedio de unidades en la línea de espera

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{0.75^2}{1(1 - 0.75)} = 2.25\ clientes$$

Número promedio de unidades en el sistema

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 2.25 + \frac{0.75}{1} = 3\ clientes$$

Ejemplo 3: Modelo de línea de espera de un solo canal

Tiempo promedio que la unidad pasa en la línea de espera

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2.25}{0.75} = 3\ minutos$$

Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 3 + \frac{1}{1} = 4\ minutos$$

Probabilidad que una unidad que llega deba esperar por servicio

$$\rho = \frac{0.75}{1} = 75\%$$

Ejemplo 3: Modelo de línea de espera de un solo canal

Number	Probability	Cumulative Probability
0	0.250000	0.250000
1	0.187500	0.437500
2	0.140625	0.578125
3	0.105469	0.683594
4	0.079102	0.762695
5	0.059326	0.822021
6	0.044495	0.866516
7	0.033371	0.899887
8	0.025028	0.924915
9	0.018771	0.943686
10	0.014078	0.957765
11	0.010559	0.968324
12	0.007919	0.976243
13	0.005939	0.982182
14	0.004454	0.986637
15	0.003341	0.989977
16	0.002506	0.992483
17	0.001879	0.994362
18	0.001409	0.995772
19	0.001057	0.996829
20	0.000793	0.997622

Probabilidad de que haya n unidades en el sistema

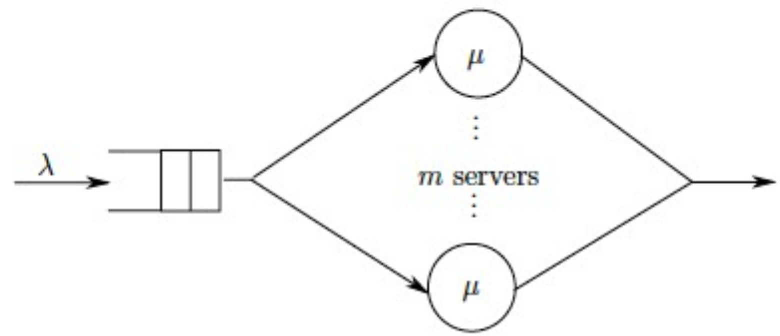
$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

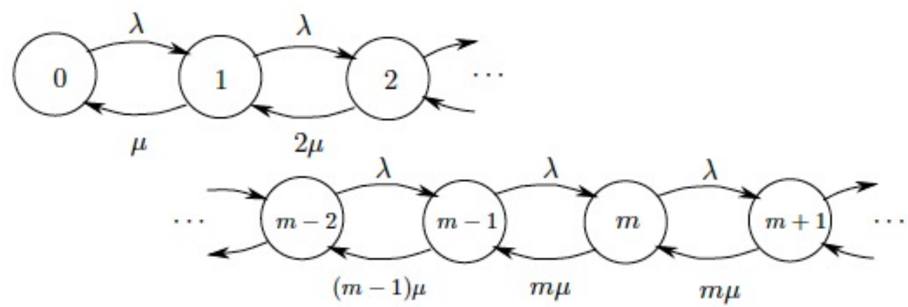
13.35 % de siete o más clientes en el sistema

Modelo de línea de espera de múltiples canales con llegadas Poisson y tiempos de servicios exponenciales (M/M/k)

Estas fórmulas son apropiadas si existen las siguientes condiciones:

1. Las llegadas siguen una distribución de probabilidad de Poisson.
2. El tiempo de servicio de cada canal sigue una distribución de probabilidad exponencial.
3. La tasa de servicios es la misma para cada canal.
4. Las llegadas esperan en una sola línea de espera y luego se dirigen al primer canal abierto para que las atiendan.





$$\lambda = \textit{tasa de llegadas del sistema}$$

$$\mu = \textit{tasa de servicios de cada canal}$$

$$k = \textit{número de canales}$$

Probabilidad de que no haya unidades en el sistema

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}\left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right)}$$

Modelo de línea de espera de múltiples canales con llegadas Poisson y tiempos de servicios exponenciales (M/M/k)

Número promedio de unidades en la línea de espera

$$L_q = \frac{\lambda\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2}P_0$$

Número promedio de unidades en el sistema

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Tiempo promedio que la unidad pasa en la línea de espera

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Modelo de línea de espera de múltiples canales con llegadas Poisson y tiempos de servicios exponenciales (M/M/k)

Probabilidad que una unidad que llega deba esperar por servicio

$$\rho = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right) P_0$$

Probabilidad de que haya n unidades en el sistema

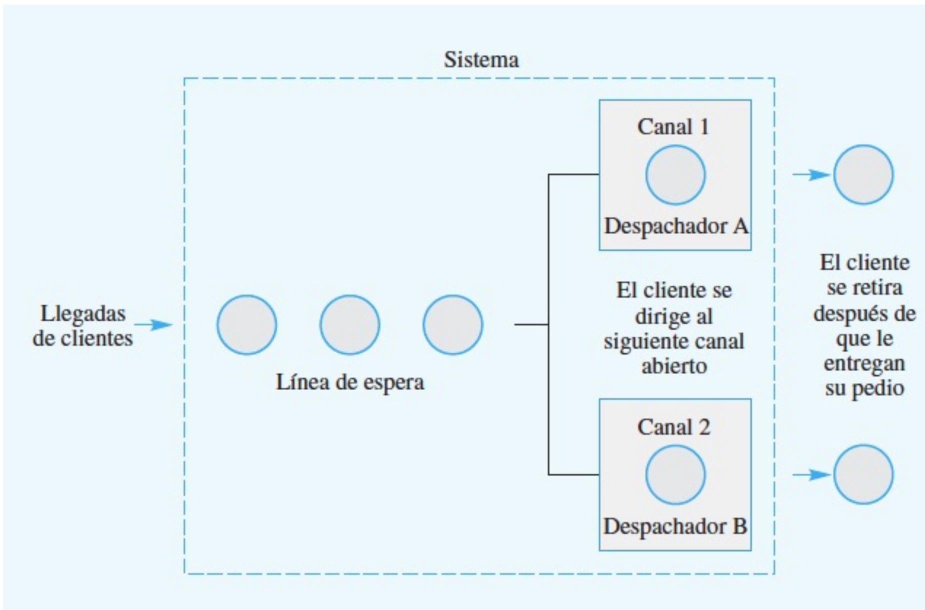
$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 \qquad con\ n \le k$$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{k!\,k^{(n-k)}} P_0 \qquad con\ n > k$$

Ejemplo 4: Modelo de línea de espera de múltiples canales (M/M/k)

Para ilustrar el modelo de línea de múltiples canales, volvamos al problema de la línea de espera del restaurante de comida rápida Burger King. Suponga que la gerencia desea evaluar la conveniencia de abrir una estación de procesamiento de pedidos de modo que dos clientes puedan ser atendidos al mismo tiempo. Suponga una línea de espera única con el primer cliente que se dirige al primer despachador disponible.

Evalué las características de operación de este sistema de dos canales.



Ejemplo 4: Modelo de línea de espera de múltiples canales (M/M/k)

$\lambda = 0.75\ clientes\ por\ minuto$

$\mu = 1\ cliente\ por\ munuto$

$k = 2\ canales$

Probabilidad de que no haya unidades en el sistema

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}\left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right)} = 0.4545 \rightarrow 45.45\%$$

Ejemplo 4: Modelo de línea de espera de múltiples canales (M/M/k)

Número promedio de unidades en la línea de espera

$$L_q = \frac{\lambda\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2}P_0 = \frac{(0.75)(1)(0.75)^2}{(2-1)!\,[(2)(1)-0.75]^2}(0.4545) = 0.1227\ cliente$$

Número promedio de unidades en el sistema

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0.1227 + \frac{0.75}{1} = 0.8727\ cliente$$

Tiempo promedio que la unidad pasa en la línea de espera

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.1227}{0.75} = 0.1636\ minuto$$

Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema

$$W = 0.1636 + \frac{1}{1} = 1.1636\ minutos$$

Ejemplo 4: **Modelo de línea de espera de múltiples canales (M/M/k)**

Ahora podemos comparar las características de operación constante del sistema de dos canales con las características de operación del sistema de canal único original

1. El tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema (tiempo de espera m.s tiempo de servicio) se reduce de W = 4 minutos a W = 1.1636 minutos.
2. El n.mero promedio de clientes formados en la línea de espera se reduce de Lq = 2.25 clientes a Lq = 0.1227 clientes.
3. El tiempo promedio que un cliente pasa en la línea de espera se reduce de Wq = 3 minutos a Wq = 0.1636 minutos.
4. La probabilidad de que un cliente tenga que esperar a que lo atiendan se reduce

Ejemplo 4: Modelo de línea de espera de múltiples canales (M/M/k)

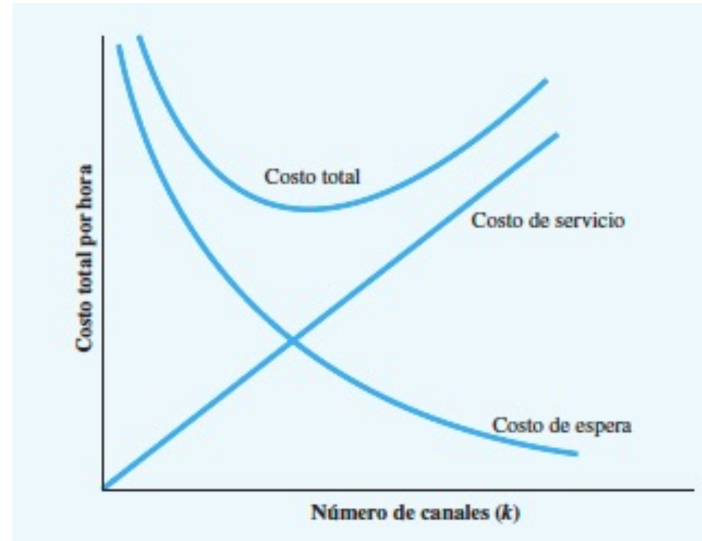
En este caso, Burger King adoptaría la siguiente politica: en los periodos que se espera que las llegadas de clientes promedien 45 clientes por hora, Burger King abriría dos canales de procesamiento de pedidos con un empleado asignado en cada uno.

Al cambiar la tasa de llegadas para reflejar su valor a diferentes horas del día, y luego calcular las características de operación, la gerencia de Burger King puede establecer
directrices y políticas que le indiquen a los gerentes cuándo programar operaciones de servicio con un solo canal, dos canales o incluso tres o más canales.

Number	Probability	Cumulative Probability
0	0.454545	0.454545
1	0.340909	0.795455
2	0.127841	0.923295
3	0.047940	0.971236
4	0.017978	0.989213
5	0.006742	0.995955
6	0.002528	0.998483
7	0.000948	0.999431
8	0.000356	0.999787
9	0.000133	0.999920
10	0.000050	0.999970
11	0.000019	0.999989
12	0.000007	0.999996
13	0.000003	0.999998
14	0.000001	0.999999
15	0.000000	1.000000

Análisis económico de los sistemas de espera

Para realizar un análisis económico de una línea de espera, se deben obtener estimaciones razonables del costo de espera y el costo del servicio.



$C_w = costo\ de\ espera\ por\ periodo\ de\ tiempo\ de\ cada\ unidad$

$C_s = costo\ de\ servicio\ por\ periodo\ de\ tiempo\ de\ cada\ canal$

$L = número\ promedio\ de\ unidades\ en\ el\ sistema$

$k = número\ de\ canales$

El costo total es la suma del costo de espera y el costo de servicio

$$TC = C_w L + C_s k$$

Ejemplo 5: Análisis costo económico

En el problema del restaurante Burger King, el costo de espera sería el costo por minuto que un cliente espera para que lo atiendan. El costo del servicio es el costo pertinente asociado con la operación de cada canal de servicio. En el problema de Burger King, este costo incluiría el salario y las prestaciones del despachador y cualesquiera otros costos directos asociados con la operación del canal de servicio. En Burger King se estima que este costo es de $7 por hora.Además, suponga que esta empresa desea asignar un costo de $10 por hora al tiempo de espera de un cliente.

Determine el costo total para el sistema de un solo canal y el Sistema de dos canales

Ejemplo 5: Análisis costo económico

Para obtener el costo por hora total del sistema con un solo servidor

$L = 3 \text{ clientes}$

$$TC = C_w L + C_s k$$

$$TC = 10(3) + 7(1)$$

$$TC = \$37 \; por \; hora$$

Para obtener el costo por hora total del sistema de dos servidores

$L = 0.8727 \text{ clientes}$

$$TC = C_w L + C_s k$$

$$TC = 10(0.8727) + 7(2)$$

$$TC = \$22.73 \; por \; hora$$

Por tanto, con base en los costos provistos por Burger King, el sistema de dos servidores opera de forma más económica.

Ejemplo 6

La tienda departamental Ashley, ubicada en la cuidad de Kansas, mantiene una exitosa división de ventas por cátalogos, donde un empleado toma los pedidos por teléfono. Si él está ocupado en la línea, las llamadas entrantes para esa división se responden de manera automática con una máquina y se pide a quienes llamen que permanezcan en espera. Tan pronto como el empleado está disponible, el cliente que ha esperado por más tiempo se transfiere y se atiende en primer lugar. Las llamadas llegan a una tasa aproximada de 12 por hora. El empleado puede tomar un pedido en un promedio de 4 minutos. Las llamadas tienden a seguir una distribución Poisson, y los tiempos de servicio suelen ser exponenciales. El empleado recibe un sueldo de $10 por hora, pero debido a la pérdida de buena voluntad por parte de los clientes y a las ventas en general, la tienda Ashley pierde aproximadamente $50 por hora de tiempo del cliente que espera para que el empleado pueda tomar el pedido.

a. ¿Cuál es el tiempo promedio que debe esperar el cliente de catálogos antes de que su llamada se transfiera al empleado que toma los pedidos?
b. ¿Cuál es el número promedio de personas que llaman y esperan para colocar un pedido?
c. Ashley evalúa la contratación de un segundo empleado para tomar las llamadas. La tienda pagaría a esa persona los mismos $10 por hora. ¿Debería contratar a otro empleado? Explique.

Ejemplo 6

$\lambda = 12\ llamadas\ por\ hora$ $\qquad\qquad$ $\mu = \frac{60}{4} = 15\ llamadas\ por\ hora$

Tiempo promedio que debe esperar el cliente de catálogos antes de que su llamada se transfiera al empleado que toma los pedidos

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{12}{15(15-12)} = 0.267 \rightarrow 16\ minutos$$

Número promedio de personas que llaman y esperan para colocar un pedido

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{12^2}{15(15-12)} = 3.2\ clientes$$

Ashley evalúa la contratación de un segundo empleado para tomar las llamadas. La tienda pagaría a esa persona los mismos $10 por hora. ¿Debería contratar a otro empleado? Explique.

$Para\ decidir\ si\ agregar\ o\ no\ el\ segundo\ empleado, debemos$
$(a) calcular\ el\ costo\ total\ actual,$
$(b) calcular\ el\ costo\ total\ con\ el\ segundo\ empleado\ y$
$(c)\ comparar\ los\ dos.$

Ejemplo 6

Costo total actual

$$TC_{actual} = C_w L + C_s k$$

$$TC_{actual} = \left(12 \frac{llamadas}{hora}\right)\left(0.267 \frac{horas}{llamada}\right)\left(50 \frac{\$}{hora}\right) + \$10$$

$$TC_{actual} = 170.20\ \$/hora$$

Costo total con dos servidores

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}\left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right)} = 0.429$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2} P_0}{\lambda} = \frac{\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!\,(k\mu-\lambda)^2} P_0 = 0.0127\ horas.$$

$$TC_{dos\ servidores} = C_w L + C_s k = \left(12 \frac{llamadas}{hora}\right)\left(0.0127 \frac{horas}{llamada}\right)\left(50 \frac{\$}{hora}\right) + (\$10)(2)$$

$$TC_{dos\ servidores} = \$27.62\ /hora$$

Hay un ahorro de \$170,20 – \$27,62 = \$142,5/hora. Por lo tantose debe agregar un segundo empleado

Ejemplo 7

CopyShop se encuentra en el proceso de comprar una copiadora comercial de alta velocidad. Los vendedores propusieron cuatro modelos cuyas especificaciones se resumen a continuación.

Modelo de copiadora	Costo de operación ($/h)	Velocidad (hojas/min)
1	15	30
2	20	36
3	24	50
4	27	66

Los trabajos llegan a CopyShop en una distribución Poisson a razón de cuatro trabajos por día de 24 horas. El tamaño del trabajo es aleatorio con promedios aproximadamente de 10,000 hojas por trabajo. Los contratos con los clientes especifican un costo de penalización por entrega retrasada de $80 por trabajos por día.

¿Cuál copiadora debe comprar CopyShop?

Ejemplo 7

La copiadora puede ser tratada como un modelo (M/M/1)

La tasa de llegadas es de $\lambda = 4\ trabajos/día$.

La tasa de servicios μ_i asociada con el modelo es

$$Tiempo\ promedio\ por\ trabajo = \frac{10{,}000\ hojas}{30\ hojas/min} \times \frac{1}{60} = 5.56\ horas$$

$$\mu_1 = \frac{24\ horas}{5.56\ horas} = 4.32\ trabajos/día$$

Modelo de copiadora	Tasa de servicio (μ_1) Trabajos/día
1	4.32
2	5.18
3	7.20
4	9.50

Ejemplo 7

Los valores de cantidad de trabajos en el sistema L_i

Modelo de copiadora	Tasa de servicio (μ_1) Trabajos/día	L_i Trabajos
1	4.32	12.50
2	5.18	3.39
3	7.20	1.25
4	9.50	0.73

El costo total esperado por día asociado con la copiadora i es

$$TC = C_w L_i + C_{si} k_i$$

$$TC = \$80 L_i + C_{si} \times 1 \times 24$$

Ejemplo 7

Los costos de los cuatro modelos son:

Modelo de copiadora	Costo de operación ($/h)	Velocidad (hojas/min)	Tasa de servicio (μ_1) Trabajos/día	L_i Trabajos	Costo de operación ($)	Costo por retrasos ($)	Costos Totales ($)
1	15	30	4.32	12.50	360	1000	1360
2	20	36	5.18	3.39	480	271	751
3	24	50	7.20	1.25	576	100	676
4	27	66	9.50	0.73	648	58.40	706.40

Se debe seleccionar el Modelo 3 dado que produce el costo mínimo

Modelos de línea de espera con fuentes finitas

El modelo se basa en los siguientes supuestos:

1. Las llegadas de cada unidad sigue una distribución de probabilidad de Poisson, con tasa de llegadas λ
2. Los tiempos de servicio siguen una distribución de probabildad exponencial, con tasas de servicio μ
3. La población de unidades que buscan ser atendidas es finite
4. Se le denomina también modelo de servicio de máquinas

Con un solo canal, el modelo de línea de espera se conoce como modelo **MM/1 con una población con fuente finita.**

$\lambda = tasa\ de\ llegadas\ de\ cada\ unidad$

$\mu = tasa\ de\ servicios$

$N = tamaño\ de\ la\ población$

Probabilidad de que no haya unidades en el sistema

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

Modelos de línea de espera con fuentes finitas

Número promedio de unidades en la línea de espera

$$L_q = N - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1 - P_0)$$

Número promedio de unidades en el sistema

$$L = L_q + (1 - P_0)$$

Tiempo promedio que la unidad pasa en la línea de espera

$$W_q = \frac{L_q}{(N - L)\lambda}$$

Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Factor de utilización : Probabilidad que una unidad que llega deba esperar por servicio

$$\rho = 1 - P_0$$

Probabilidad de que haya n unidades en el sistema

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \qquad n = 0,1,..N$$

Ejemplo 8: Modelos de línea de espera con fuentes finitas

Fabrica Co utiliza un grupo de seis máquinas idénticas; cada una funciona un promedio de 20 horas entre descomposturas. Con las descoposturas ocurriendo al azar, se utiliza la distribución de probabilidad de Poisson para describir el proceso de llegada de máquinas descompuestas. Una persona del departamento de mantenimiento proporciona el servicio de reparación de canal único para las seis máquinas. Los tiempos de servicio exponencialmente distribuidos tienen una media de dos horas por máquina.

Calcule las características del sistema

Ejemplo 8: Modelos de línea de espera con fuentes finitas

$$\lambda = \frac{1}{20} = 0.05\ por\ hora$$

$$\mu = \frac{1}{2} = 0.50\ máquinas\ por\ hora$$

Probabilidad de que no haya unidades en el sistema

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = 0.4845 \rightarrow 48.45\%$$

Número promedio de unidades en la línea de espera

$$L_q = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda}(1 - P_0) = 6 - \frac{0.05 + 0.50}{0.05}(1 - 0.4845) = 0.3297\ \text{m}á\text{quina}$$

Número promedio de unidades en el sistema

$$L = L_q + (1 - P_0) = 0.3297 + (1 - 0.4845) = 0.8451\ \text{m}á\text{quina}$$

Ejemplo 8: Modelos de línea de espera con fuentes finitas

Tiempo promedio que la unidad pasa en la línea de espera

$$W_q = \frac{L_q}{(N-L)\lambda} = \frac{0.3295}{(6-0.845)0.50} = 1.279\ horas$$

Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 1.279 + \frac{1}{0.50} = 3.279\ horas$$

Factor de utilización : Probabilidad que una unidad que llega deba esperar por servicio

$$\rho = 1 - P_0 = 1 - 0.4845 = 0.5155$$

Ejemplo 8: Modelos de línea de espera con fuentes finitas

Probabilidad de que haya cualquier número de máquinas en el sistema de reparación

Number, n	Probability	Cumulative Probability
0	0.4845149	0.4845149
1	0.2907089	0.7752238
2	0.1453545	0.9205783
3	0.0581418	0.9787201
4	0.0174425	0.9961626
5	0.0034885	0.9996511
6	0.0003489	1

Las características de operación muestran que una máquina descompuesta espera un promedio de 1.279 horas antes que se inicie el mantenimiento y el hecho de que más de 50% de las máquinas descompuestas esperen el servicio de reparación, indica que puede que se necesite un sistema de dos canales para mejorar el servicio de reparación

Modelo de línea de espera de canal único con llegadas Poisson y tiempos de servicios arbitrarios (M/G/1)

El modelo se basa en los siguientes supuestos:

1. El tamaño de la cola es infinito
2. El servidor no está exponencialmente distribuido
3. G denota una distribución de probabilidad general o no especificada
4. Se toma toma en consideración un valor para la desviación estándar del tiempo de servicio σ

$\lambda = tasa\ de\ llegadas$
$\mu\ = tasa\ de\ servicios$
$\sigma = desviación\ estándar\ del\ tiempo\ de\ servicio$

Número promedio de unidades en la línea de espera

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + (\lambda/\mu)^2}{2\left(1 - \lambda/\mu\right)}$$

Modelo de línea de espera de canal único con llegadas aleatorias y tiempos de servicios constantes

Una línea de espera como esta puede ocurrir en entornos de producción y manufactura donde los tiempos de servicio controlados por las másquinas son constantes

El modelo M/D/1 describe esta línea de espera, donde D denota los tiempos de servicio determinísticos

El valor de σ será 0

$\lambda = tasa\ de\ llegadas$
$\mu\ = tasa\ de\ servicios$
$\sigma = desviación\ estándar\ del\ tiempo\ de\ servicio$

Número promedio de unidades en la línea de espera

$$L_q = \frac{({}^{\lambda}/_{\mu})^2}{2\left(1 - {}^{\lambda}/_{\mu}\right)}$$

Modelo de múltiples canales, con tiempos de servicio arbitrarios y sín línea de espera (M/G/k)

El modelo se basa en los siguientes supuestos:

1. El sistema tiene k canales.
2. Las llegadas siguen una distribución de probabilidad de Poisson, con tasa de llegadas λ
3. El tiempo de servicio de cada canal puede tener cualquier distribución de probabilidad
4. La tasa de servicio μ es la misma para cada canal
5. Una llegada entra al sistema solo si por lo menos un canal está disponible. Una llegada que ocurre cuando todos los canales están oupados es bloqueada, es decir se le niega el servicio y no se le permite entrar al sistema

Probabilidad de que j de los k canales estén ocupados

$$P_j = \frac{\left(\lambda/\mu\right)^j/j!}{\sum_{i=0}^{k}\left(\lambda/\mu\right)^i/i!}$$

$\lambda = tasa\ de\ llegadas$

$\mu\ = tasa\ de\ servicios\ de\ cada\ canal$

$k\ = número\ de\ canales$

$P_j = probabilidad\ de\ que\ j\ de\ los\ k\ canales\ estén\ ocupados\ con\ j = 0,1,2 \ldots k$

Número promedio de unidades en el sistema

$$L = \frac{\lambda}{\mu}(1 - P_k)$$

Resumen de fórmulas

Las ecuaciones 13-1 a 13-7 describen características operativas en el modelo de un solo canal que tiene llegadas de Poisson y tasas de servicio exponenciales.

(13-1) L = número promedio de unidades (clientes) en el sistema

$$= \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

(13-2) W = número promedio que una unidad pasa dentro del sistema (tiempo de espera + tiempo de servicio)

$$= \frac{1}{\mu - \lambda}$$

(13-3) L_q = número promedio de unidades en la cola

$$= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

(13-4) W_q = tiempo promedio que una unidad pasa esperando en la cola

$$= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

(13-5) ρ = factor de utilización para el sistema $= \frac{\lambda}{\mu}$

(13-6) P_0 = probabilidad de 0 unidades en el sistema (es decir, la unidad de servicio está ociosa o inactiva)

$$= 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

(13-7) $P_{n>k}$ = probabilidad de más de k unidades estén en el sistema

$$= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$$

Las ecuaciones 13-8 a 13-12 se utilizan para encontrar los costos de un sistema de colas

(13-8) Costo total del servicio = mC_s

donde

m = número de canales

C_s = costo de servicio (costo de mano de obra) de cada canal

(13-9) Costo total por periodo de tiempo de espera = $(\lambda W)\, C_w$

C_w = costo de espera

Costo de tiempo basado en el tiempo en el sistema.

(13-10) Costo total por periodo de tiempo de espera = $(\lambda W_q)\, C_w$

Costo del tiempo de espera en función del tiempo en la cola.

(13-11) Costo total = $mC_s + \lambda W C_w$

Costo del tiempo de espera en función del tiempo en el sistema.

(13-12) Costo total = $mC_s + \lambda W_q C_w$

Costo del tiempo de espera en función del tiempo en la cola.

Resumen de fórmulas

Las ecuaciones 13-13 a 13-18 describen las características operativas en los modelos multicanal que tienen llegadas de Poisson y tasas de servicio exponenciales, donde m = el número de canales abiertos.

(13-13) $$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{m\mu}{m\mu - \lambda}}$$

para $m\mu > \lambda$

Probabilidad de que no haya personas o unidades en el sistema.

(13-14) $$L = \frac{\lambda\mu(\lambda/\mu)^m}{(m-1)!(m\mu-\lambda)^2}P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

Número promedio de personas o unidades en el sistema.

(13-15) $$W = \frac{\mu(\lambda/\mu)^m}{(m-1)!(m\mu-\lambda)^2}P_0 + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$$

Tiempo promedio que pasa una unidad en la línea de espera o recibiendo servicio (a saber, en el sistema).

(13-16) $$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu}$$

Número promedio de clientes o unidades en que esperan en la fila para recibir servicio.

(13-17) $$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda}$$

Tiempo promedio que pasa una persona o una unidad en la cola para recibir servicio.

(13-18) $$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$

Tasa de utilización.

Las ecuaciones 13-19 a 13-22 describen las características operativas de los modelos de un solo canal que tienen llegadas de Poisson y tasas de servicio constantes.

(13-19) $$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)}$$

Longitud promedio de la cola.

(13-20) $$W_q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)}$$

Tiempo de espera promedio en la cola

(13-21) $$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Número promedio de clientes en el sistema.

(13-22) $$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Tiempo de espera promedio en el sistema.

Resumen de fórmulas

Las ecuaciones 13-23 a 13-28 describen las características operativas de los modelos de un solo canal que tienen llegadas de Poisson y tasas de servicio exponenciales, así como población potencial finita.

(13-23) $P_0 = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$

Probabilidad de que el sistema esté vacío.

(13-24) $L_q = N - \left(\dfrac{\lambda + \mu}{\lambda}\right)(1 - P_0)$

Longitud promedio de la cola.

(13-25) $L = L_q + (1 - P_0)$

Número promedio de unidades en el sistema.

(13-26) $W_q = \dfrac{L_q}{(N - L)\lambda}$

Tiempo promedio en la cola.

(13-27) $W = W_q + \dfrac{1}{\mu}$

Tiempo promedio en el sistema.

(13-28) $P_n = \dfrac{N!}{(N-n)!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad \text{para } n = 0, 1, \ldots, N$

Probabilidad de n unidades en el sistema.

Las ecuaciones 13-29 a 13-31 son las ecuaciones de flujo de Little, que se pueden utilizar cuando exista una condición de estado estable.

(13-29) $L = \lambda W$

(13-30) $L_q = \lambda W_q$

(13-31) $W = W_q + 1/\mu$

Bibliografía

- Cassandras & Lafortune. (2008). *Introduction to Discrete Event Systems*. Springer
- García et al. (2013). *Simulación y Análisis de Sistemas con ProModel*. Editorial Pearson.
- Render, B. (2016). *Métodos cuantitativos para los Negocios*. Editorial Pearson.
- Taha, H. (2011). *Investigación de Operaciones*. Editorial Pearson.
- Schroeder et al. (2011). *Administración de Operaciones*. McGraw-Hill
- Render, B. & Heizer, J. (2014). *Principios de Administración de Operaciones*. Pearson
- Chase, R. & Jacobs, F. (2014). *Administración de Operaciones, Producción y Cadena de Suministro.* McGraw – Hill
- Hillier, F. & Lieberman, G. (2015). *Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill
- Anderson, D. & Sweeny, D. (2019). *Métodos Cuantitativos para los Negocios*. Cengage
- Nahmias, S. (2007). *Análisis de la Producción y las Operaciones*. McGraw-Hill
- Rees, M. (2015). *Business Risk and Simulation Modeling in Practice*. John Wiley & Sons Ltd
- Sterman, J. (2000). *Business Dynamics – Systems Thinking and Modeling for a Complex World*. McGraw-Hill
- Winston, W. (2017) *Microsoft Excel 2016 – Data Analysis and Busines Modeling*. Microsoft press
- Slack, N., et al. (2016) . *Operations Management*. Pearson
- Stevenson, W. (2015*). Operations Management*. McGraw-Hill
- Albright, C. & Winston, W. (2015). Business Analytics: Data Analysis and Decision Making. Cengage
- Alvarez, H. (2011). *Introducción a la Simulación*. Universidad Tecnológica de Panamá
- Schaffernicht, M. (2006). *Dinámica de Sistemas – Tomo 1: Fundamentos*.
- Aracil, J. (1995). *Dinámica de Sistemas*. Isdefe
- Eppen, G. et al (2000) *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa*. Prentice-Hall

Contacto

Ricardo Caballero, M.Sc.

Docente Tiempo Completo
Facultad de Ingeniería Industrial
Centro Regional de Chiriquí
Universidad Tecnológica de Panamá

E-mail: ricardo.caballero@utp.ac.pa

https://www.academia.utp.ac.pa/ricardo-caballero