Simulación Aplicada a la Logística

Lectura Nr. 3
Generación de Números Aleatorios

Profesor:
Ricardo Caballero, M.Sc.
ricardo.caballero@utp.ac.pa

Números aleatorios

- Para poder realizar una simulación que incluya variabilidad dentro de sus eventos, es preciso generar una serie de números aleatorios
- Los números aleatorios uniformes (0,1) desempeñan un papel clave en el muestreo de distribuciones.
- La única forma factible de generar números aleatorios (0,1) para usarlos en una simulación está basada en operaciones aritméticas. Tales números no son verdaderamente aleatorios debido a que toda la secuencia puede generarse con anticipación. Por eso se les denomina **números pseudoaleatorios**

TABLA 19.1 Una lista breve de números aleatorios 0-1

.0589	.3529	.5869	.3455	.7900	.6307
.6733	.3646	.1281	.4871	.7698	.2346
.4799	.7676	.2867	.8111	.2871	.4220
.9486	.8931	.8216	.8912	.9534	.6991
.6139	.3919	.8261	.4291	.1394	.9745
.5933	.7876	.3866	.2302	.9025	.3428
.9341	.5199	.7125	.5954	.1605	.6037

Propiedades

- Las secuencias deben ser no correlacionadas. Esto significa que en una sucesión de números aleatorios, una subsecuencia no puede estar relacionada con ninguna otra.

- **Independencia estadística y aleatoriedad**. Esto implica que la probabilidad de que un número específico aparezca en la sucesión debe ser la misma para cada uno de los elementos del conjunto de los números aleatorios. Esto es precisamente una característica de la función de probabilidad uniforme. Igualmente, la aparición de un número dentro de la sucesión no implica la aparición de otro.

- Deben tener período máximo. En otras palabras, los generadores pseudo aleatorios son cíclicos, por lo cual es deseable que cada uno de los elementos aparezca una vez en la secuencia antes que la misma se repita. El período y las propiedades de la secuencia no deben depender del valor inicial.

Generación de números aleatorios

- Actualmente, las computadores pueden generar una cantidad de números aleatorios para su uso al ejecutar la simulación

- También, existen tablas predeterminadas con números aleatorios entre 0 y 1
- Un **generador de números aleatorios** es un algoritmo que produce secuencias de números que siguen una distribución de probabilidad específi ca y tienen la apariencia de aleatoriedad.

TABLA 19.1 Una lista breve de números aleatorios 0-1

.0589	.3529	.5869	.3455	.7900	.6307
.6733	.3646	.1281	.4871	.7698	.2346
.4799	.7676	.2867	.8111	.2871	.4220
.9486	.8931	.8216	.8912	.9534	.6991
.6139	.3919	.8261	.4291	.1394	.9745
.5933	.7876	.3866	.2302	.9025	.3428
.9341	.5199	.7125	.5954	.1605	.6037
.1782	.6358	.2108	.5423	.3567	.2569
.3473	.7472	.3575	.4208	.3070	.0546
.5644	.8954	.2926	.6975	.5513	.0305

Método congruencial para generar números aleatorios

- El **método congruencial mixto** genera una sucesión de números aleatorios enteros en un intervalo de 0 a m – 1 .
- Este algoritmo genera una secuencia de números enteros por medio de una ecuación recursiva

$$X_{i+1} = (aX_i + C)mod(m) \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots n$$

donde

$X_0 = semilla$
$a = constante\ multiplicativa$
$c = constante\ aditiva$
$m = módulo$

$$R = \frac{X_i}{m-1}$$

donde

$R = Número\ aleatorio\ generado$

Generador lineal congruencial: Ejemplo

Generar los primeros 3 números aleatorios entre 0 y 1 con los siguientes parámetros

$X_0 = 11$ $\quad a = 9$ $\quad c = 5$ $\quad \mathrm{m} = 12$

$$X_{i+1} = (aX_i + C)mod(m)$$

$$X_1 = (aX_0 + C)mod(m)$$

$$X_1 = [(9)(11) + 5]mod(12)$$

$$X_1 = 104mod(12)$$

$$\frac{104}{12} = 8.6666$$

$$104 \div 12 = 8.66$$

$$\underline{-96}$$

$$8$$

$$\boxed{X_1 = 8}$$

El resultado de esta operación será el residuo de la división

Generador lineal congruencial: Ejemplo

$$X_2 = (aX_1 + C)mod(m)$$

$$X_2 = [(9)(8) + 5]mod(12)$$

$$X_2 = 77mod(12)$$

$$77 \div 12 = 6.4166$$

$$\frac{-72}{5}$$

$$X_2 = 5$$

$$X_3 = (aX_2 + C)mod(m)$$

$$X_3 = [(9)(5) + 5]mod(12)$$

$$X_3 = 50mod(12)$$

$$50 \div 12 = 4.166$$

$$\frac{-48}{2}$$

$$X_3 = 2$$

Se obtiene una secuencia de números enteros no negativos {8, 5, 2}.

Generador lineal congruencial: Ejemplo

Para transformar la secuencia de números aleatorios a una secuencia de números entre valores 0 y 1 se debe dividir el valor de X_i entre $m-1$

$X_1 = 8$ $\qquad$ $R = \frac{X_i}{m-1} = \frac{8}{11} = 0.7272$

$X_2 = 5$ $\qquad$ $R = \frac{X_i}{m-1} = \frac{5}{11} = 0.4545$

$X_3 = 2$ $\qquad$ $R = \frac{X_i}{m-1} = \frac{2}{11} = 0.1818$

Se obtiene una secuencia de números aleatorios entre 0 y 1 {0.7272, 0.4545, 0.1818}.

Generación de variables aleatorias

- En la sección anterior, vimos cómo generar números aleatorios, es decir, el caso especial de las variables aleatorias de la distribución U [0,1].
- En esta sección, asumiremos que hay disponible una secuencia de números aleatorios y nos concentraremos en el tema de cómo transformarla para obtener una secuencia de variables aleatorias a partir de una distribución de probabilidad específicaF (x).

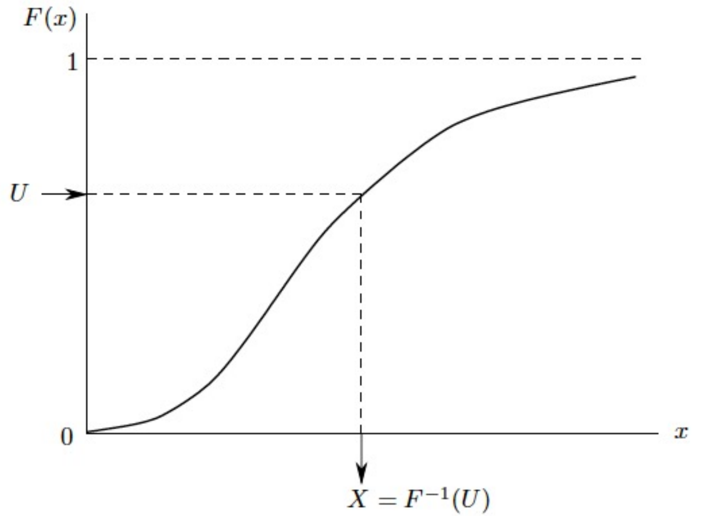
- Hay una serie de técnicas que se utilizan para la generación de variantes aleatorias como:
  - Método de transformación inversa
  - Método de convolucón
  - Método de aceptación-rechazo

Método de la transformada inversa

El método de la transformada inversa puede utilizarse para simular variables aleatorias, lo cual se logra mediante la función acumulada $F(x)$ y la generación de números pseudoaleatorios $R(0\,,1)$.

El método consiste en:

1. Generar un numero aleatorio $R(0\,,1)$
2. Calcular la muestra deseada $x = F^{-1}(R)$



Método inverso: Distribución exponencial

La función de densidad de probabilidad exponencial

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$$

representa el tiempo de llegadas $\boldsymbol{t}$ a una instalación con valor medio de $\boldsymbol{\frac{1}{\lambda}}$

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\, dx$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad t > 0$$

Estableciendo $R = F(t)$, podemos resolver t como:

$$t = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - R)$$

Podemos observar que $\ln(1 - R)$ puede ser reemplazado con $\ln(R)$ porque $1 - R$ es complemento de R

$$\boxed{t = -\frac{1}{\lambda}\ln(R)}$$

Muestreo de distribución exponencial: **Ejemplo 2**

Los datos históricos del tiempo de servicio en la caja de un banco se comportan de forma exponencial con media de 3 minutos por cliente. Una lista de números pseudoaleatorios $R(0,1)$ y la ecuación generadora exponencial nos permiten simular el comportamiento de la variable aleatoria

Cliente	R_i	Tiempo de servicio (min)
1	0.64	
2	0.83	
3	0.03	
4	0.50	
5	0.21	

Muestreo de distribución exponencial: Ejemplo 2

$$t = -3\ln(1 - r)$$

Cliente	R_i	Tiempo de servicio (min)
1	0.64	3.06
2	0.83	5.31
3	0.03	0.09
4	0.50	2.07
5	0.21	0.70

Método inverso: Distribución uniforme

Suponga la siguiente distribución uniforme

$$f(t) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \leq \ t \leq b$$

Dado un número aleatorio R se puede determinar la siguiente expresión para t

$$F(t) = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dt$$

$$F(t) \ = \frac{t-a}{b-a}, \qquad a \leq \ t \leq b$$

Estableciendo $R = F(t)$, podemos resolver t como:

$$\boxed{t = a + (b-a)R}$$

Método de convolución

En algunas distribuciones de probabilidad la variable aleatoria a simular, y ,puede generarse mediante la suma de otras variables aleatorias x de manera más rápida que a través de otros métodos.

La idea básica del método de convolución es expresar la muestra deseada como la suma estadística de otras variables aleatorias fáciles de muestrear.

Típicas entre estas distribuciones están las de Erlang, Normal y las de Poisson, cuyas muestras pueden obtenerse con las muestras de la distribución exponencia

Método de convolución: Distribución Erlang

La variable aleatoria m se define como la suma estándar (convoluciones) de m variables aleatorias exponenciales independientes e idénticamente distribuidas. Sea y la variable aleatoria m Erlang, entonces

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$$

$donde\ y_i, i = 1, 2, \ldots, m$ son exponenciales independientes e identicamante distribuidas con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(y_i) = \lambda e^{-\lambda y_i}, \qquad y_i > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Tomando el ejemplo anterior, una muestra de la $i - ésima$ distribución exponencial se calcula como:

$$y_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(r_i)$$

Por lo tanto la muestra m Erlang se calcula como

$$y_i = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)[\ln(r_1) + \ln(r_2) + .. + \ln(r_m)] \qquad = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\prod_{i=1}^{m} r_i\right)$$

Distribución Erlang: Ejemplo

Para ilustrar el uso de la formula, suponga que $\mathrm{m} = 3$ y $\lambda = 4$ eventos por hora. Los tres primeros números aleatorios de la columna 1 de la tabla son

TABLA 19.1 Una lista breve de números aleatorios 0-1

.0589	.3529	.5869	.3455	.7900	.6307
.6733	.3646	.1281	.4871	.7698	.2346
.4799	.7676	.2867	.8111	.2871	.4220
.9486	.8931	.8216	.8912	.9534	.6991
.6139	.3919	.8261	.4291	.1394	.9745
.5933	.7876	.3866	.2302	.9025	.3428
.9341	.5199	.7125	.5954	.1605	.6037
.1782	.6358	.2108	.5423	.3567	.2569
.3473	.7472	.3575	.4208	.3070	.0546
.5644	.8954	.2926	.6975	.5513	.0305

$$y_i = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\prod_{i=1}^{m} r_i\right)$$

$$y_i = -\frac{1}{4}\ln[(0.0589)(0.6733)(0.4799)]$$

$$y = -\frac{1}{4}\ln(0.019)$$

$$y = 0.991\ horas$$

Método de convolución: Distribución Normal

El teorema del limite central expresa que la suma (convolución) de n variables aleatorias independientes o idénticamente distribuidas se hace asintóticamente normal a medida que n se hace lo bastante grande.
La variable aleatoria es asintóticamente normal de acuerdo con el teorema. Dado que el numero aleatorio (0,1) uniforme r tiene una medida de ½ y una varianza de $\frac{1}{12}$, se desprende que la muestra aleatoria y de una distribución normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ se calcula a partir de x como:

$$y = \mu + \sigma \left(\frac{x - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \right)$$

En la practica, se considera que n=12 por conveniencia lo cual reduce la formula a

$$n = 12$$

$$y = \mu + \sigma(x - 6)$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i$$

Resumen

Algunas funciones generradoras a partir de funciones discretas y continuas, donde Ri es un número aleatorio uniformemente distribuido entre (0,1)

Distribución uniforme

Sean a y b los límites de un conjunto de números distribuidos uniformemente, es posible generar un valor $\mathrm{a} \leq Ui \leq b$ en base a la siguiente función aleatoria

$$\boxed{t = a + (b - a)R}$$

Distribución exponencial

Sea $\frac{1}{\lambda}$ el número promedio de eventos por unidad de tiempo o espacio, se puede generar una variable aleatoria t tal que

$$\boxed{t = -\frac{1}{\lambda}\ln(R)}$$

Bibliografía

- Cassandras & Lafortune. (2008). *Introduction to Discrete Event Systems*. Springer
- García et al. (2013). *Simulación y Análisis de Sistemas con ProModel*. Editorial Pearson.
- Render, B. (2016). *Métodos cuantitativos para los Negocios*. Editorial Pearson.
- Taha, H. (2011). *Investigación de Operaciones*. Editorial Pearson.
- Schroeder et al. (2011). *Administración de Operaciones*. McGraw-Hill
- Render, B. & Heizer, J. (2014). *Principios de Administración de Operaciones*. Pearson
- Chase, R. & Jacobs, F. (2014). *Administración de Operaciones, Producción y Cadena de Suministro.* McGraw – Hill
- Hillier, F. & Lieberman, G. (2015). *Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill
- Anderson, D. & Sweeny, D. (2019). *Métodos Cuantitativos para los Negocios*. Cengage
- Nahmias, S. (2007). *Análisis de la Producción y las Operaciones*. McGraw-Hill
- Rees, M. (2015). *Business Risk and Simulation Modeling in Practice*. John Wiley & Sons Ltd
- Sterman, J. (2000). *Business Dynamics – Systems Thinking and Modeling for a Complex World*. McGraw-Hill
- Winston, W. (2017) *Microsoft Excel 2016 – Data Analysis and Busines Modeling*. Microsoft press
- Slack, N., et al. (2016) . *Operations Management*. Pearson
- Stevenson, W. (2015*). Operations Management*. McGraw-Hill
- Alvarez, H. (2011). *Introducción a la Simulación*. Universidad Tecnológica de Panamá
- Schaffernicht, M. (2006). *Dinámica de Sistemas – Tomo 1: Fundamentos*.
- Aracil, J. (1995). *Dinámica de Sistemas*. Isdefe

Contacto

Ricardo Caballero, M.Sc.

Docente Tiempo Completo
Facultad de Ingeniería Industrial
Centro Regional de Chiriquí
Universidad Tecnológica de Panamá

E-mail: ricardo.caballero@utp.ac.pa

https://www.academia.utp.ac.pa/ricardo-caballero