# Métodos Cuantitativos

## Lectura Nr. 2
# Programación Lineal

**Docente:**
Ricardo Caballero, M.Sc.
ricardo.caballero@utp.ac.pa

# Conceptos básicos

La Programación Lineal (PL) es una técnica matemática que ayuda a tomar decisiones de asignación de recursos. Involucra la planeación de actividades para obtener un resultado óptimo.

Los modelos de Programación Lineal están compuestos por:

1. **Variables de decisión**
2. **Función objetivo:** enunciado matemático que representa la meta que se necesita optimizar (maximizar o minimizar).
3. **Restricciones:** limitaciones de recursos y capacidad que la solución debe satisfacer (se representan como desigualdades o ecuaciones)

## Propiedades

- Deben haber **alternativas disponibles**
- Las relaciones matemáticas son **lineales**
- Se supone existen condiciones de **certeza**, se conocen con certeza el número en el objetivo y en las restricciones y no varían durante el periodo de estudio (parámetros dados)
- Se supone **divisibilidad.** Las soluciones no necesitan números enteros, pueden tomar cualquier valor fraccionario
- **No negatividad**. Se supone que todas las respuestas o variables son no negativas. Los valores negativos de cantidades físicas son imposibles.

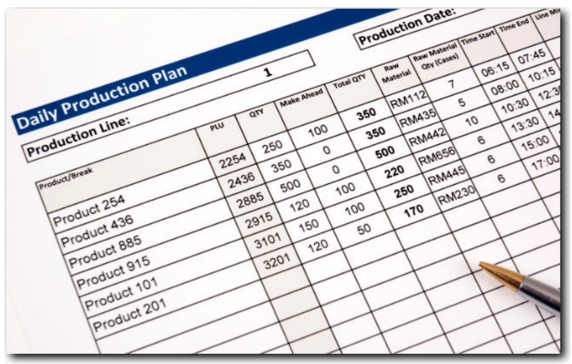
# ¿Para qué es aplicable la Programación Lineal?

## Marketing


## Logística

## Finanzas

## Producción




# Formulación del problema

- Proceso de traducir una descripción verbal de un problema en un enunciado matemático.
- El enunciado matemático del problema se conoce como modelo matemático.

Pasos para formulación son:

| | |
|---|---|
| 1 | Entender el problema |
| 2 | Definir las variables de decisión |
| 3 | Formular la función objetivo y restricciones |
| 4 | Resolver |
| 5 | Tomar decisión |

# Ejemplo 1: Formulación de un problema de maximización

Furniture City fabrica mesas y sillas de bajo precio. El proceso de fabricación de cada producto se parece en que ambos requieren cierto número de horas de trabajo de carpintería, así como cierto número de horas de trabajo en el departamento de pintura y barnizado. Cada mesa requiere de 4 horas de carpintería y 2 horas en el taller de pintura y barnizado. Cada silla requiere de 3 horas de carpintería, y 1 hora en la pintura y barnizado. Durante el periodo de producción actual, hay 240 horas de tiempo de carpintería disponibles, así como 100 horas de tiempo disponibles en pintura y barnizado. Cada mesa vendida genera una utilidad de $70; cada silla fabricada se vende con una utilidad de $50.

El problema de Furniture City es determinar la mejor combinación posible de mesas y sillas a fabricar, con la finalidad de alcanzar la utilidad máxima. La empresa desea que esta situación de mezcla de producción se formule como un problema de programación lineal.

# Ejemplo 1: Formulación de un problema de maximización

| Departamento | Horas necesarias para producir 1 unidad | | Horas disponibles en la semana |
|---|---|---|---|
| | Mesas | Sillas | |
| Carpintería | 4 | 3 | 240 |
| Pintura y barnizado | 2 | 1 | 100 |
| Utilidad por unidad | \$70 | \$50 | |

- El problema nos solicita

$$\textit{Maximizar la utilidad}$$

- Las restricciones son:
  - *Las horas de tiempo de carpintería utilizadas no pueden exceder las 240 horas disponibles por semana.*
  - *Las horas de tiempo de pintura y barnizado utilizadas no pueden exceder las 100 horas disponibles por semana.*
- Las variables de decisión que representan las decisiones reales que tomarán se definen como:

$$T = \textit{número de mesas producidas por semana}$$

$$C = \textit{número de sillas producidas por semana}$$

# Ejemplo 1: Formulación de un problema de maximización

Función objetivo:

$$Maximizar\ Z = 70T + 50C$$

s.a.:

$$4T + 3C \leq 240$$ Restricción de carpintería

$$2T + C \leq 100$$ Restricción de pintura y barnizado

$$T, C \geq 0$$ Restricción de no negatividad

# Ejemplo 2: Formulación de un problema de minimización

Ganadera Esquivel está considerando comprar dos marcas diferentes de alimento para gallina, y mezclarlos para ofrecer una buena dieta de bajo costo para sus aves. Cada alimento contiene, en proporciones variables, algunos o los tres ingredientes nutricionales esenciales para gallinas de engorde. Por ejemplo, cada libra de la marca 1 contiene 5 onzas del ingrediente A, 4 onzas del ingrediente B y 0.5 onzas del ingrediente C. Cada libra de la marca 2 contiene 10 onzas del ingrediente A, 3 onzas del ingrediente B, pero nada del ingrediente C. La marca 1 de alimento cuesta al rancho 2 centavos de dólar por libra; en tanto que la marca 2 de alimento le cuesta 3 centavos de dólar por libra. La Ganadera desea utilizar programación lineal para determinar la dieta con costo mínimo que cumpla con el requisito mínimo de ingesta mensual de cada ingrediente nutricional.

| Ingrediente | Composisción de cada libra de alimento (oz.) | | Requerimiento mensual mínimo por gallina (oz.) |
|---|---|---|---|
| | Alimento Marca 1 | Alimento Marca 2 | |
| A | 5 | 10 | 90 |
| B | 4 | 3 | 48 |
| C | 0.5 | 0 | 1.5 |
| Costo por libra | 0.02$ | 0.03$ | |

# Ejemplo 2: Formulación de un problema de minimización

Variables de decisión

$$x_1 = \textit{número de libras de la marca 1 de alimento comprada}$$
$$x_2 = \textit{número de libras de la marca 2 de alimento comprada}$$

La función objetivo del problema sería

$$Minimizar\ Z = 0.02x_1 + 0.03x_2$$

Las restricciones del problema serían las siguientes:

s.a.:

$$5x_1 + 10x_2 \geq 90 \quad \text{Restricción del ingrediente A}$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 48 \quad \text{Restricción del ingrediente B}$$
$$0.5x_1 \geq 1.5 \quad \text{Restricción del ingrediente C}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{Restricción de no negatividad}$$

# Solución gráfica para problemas de PL

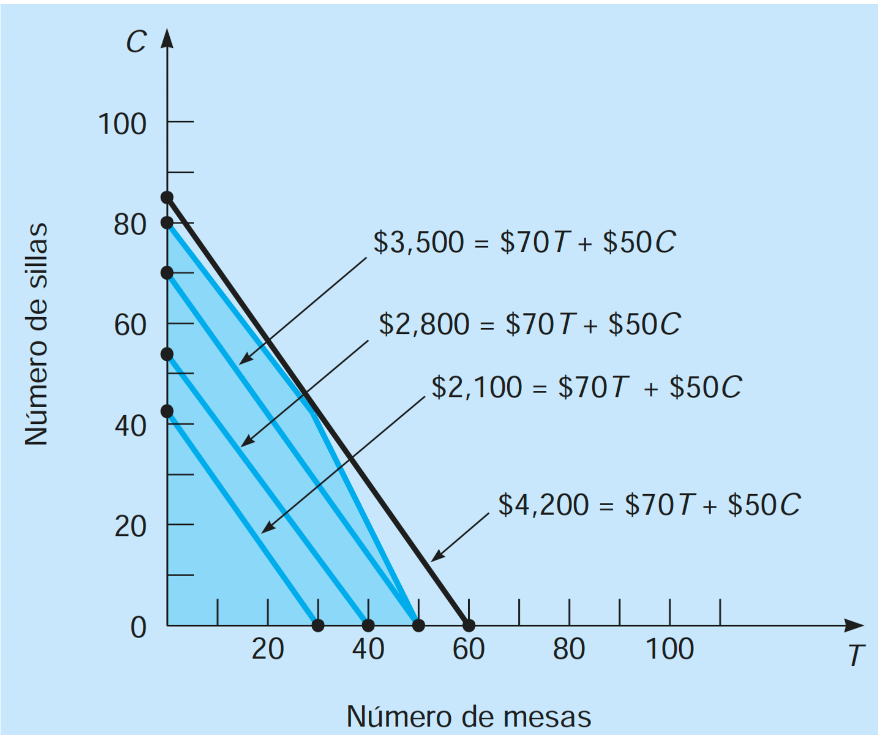
- La **solución factible** es aquella para la que todas las restricciones se satisfacen y proporciona el valor más favorable de la función objetivo.
- Para encontrar la solución óptima, primero se debe identificar la **región factible** (conjunto de puntos que satisfacen todas las restricciones)
- El primer paso consiste en graficar cada restricción del problema y encontrar encontrar los puntos donde la recta interseca los ejes

**Métodos para obtener la solución óptima**

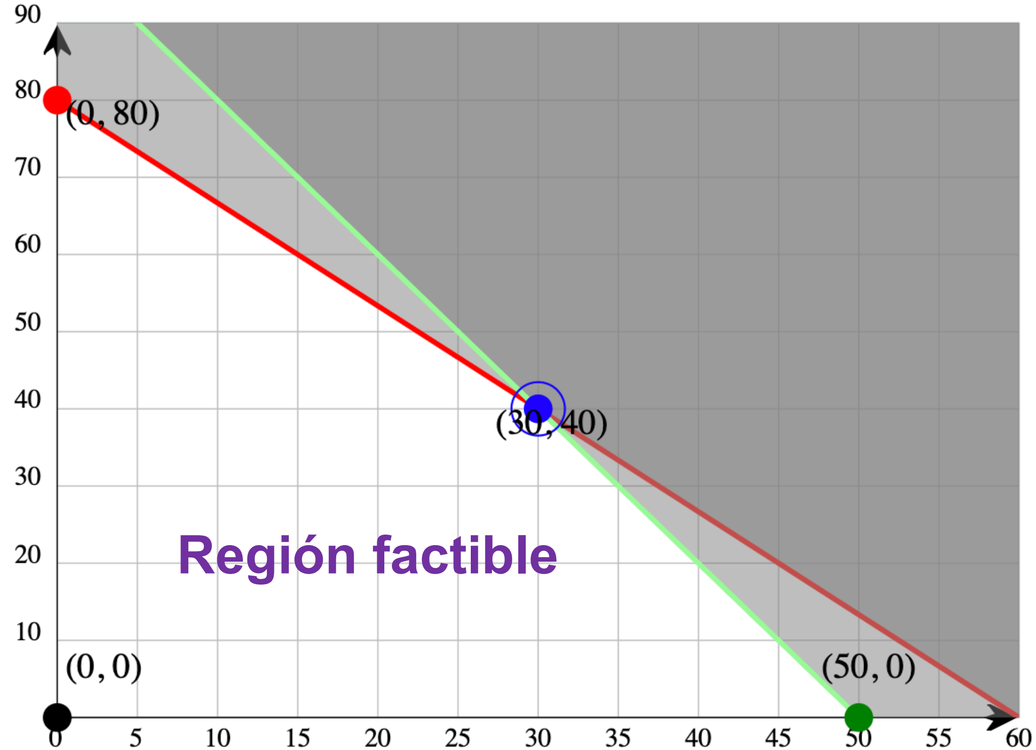
| Método de isoutilidad | Punto de esquina |
| --- | --- |
| Se traza una serie de rectas de isoutilidad paralelas, hasta que se encuentra la de isoutilidad máxima, es decir, aquella que tiene la solución óptima | La solución óptima se encuentra en uno de los puntos de esquina de la region factible. |

# Ejemplo 1: Solución gráfica

Metodo de isoutilidad




Metodo de punto de esquina

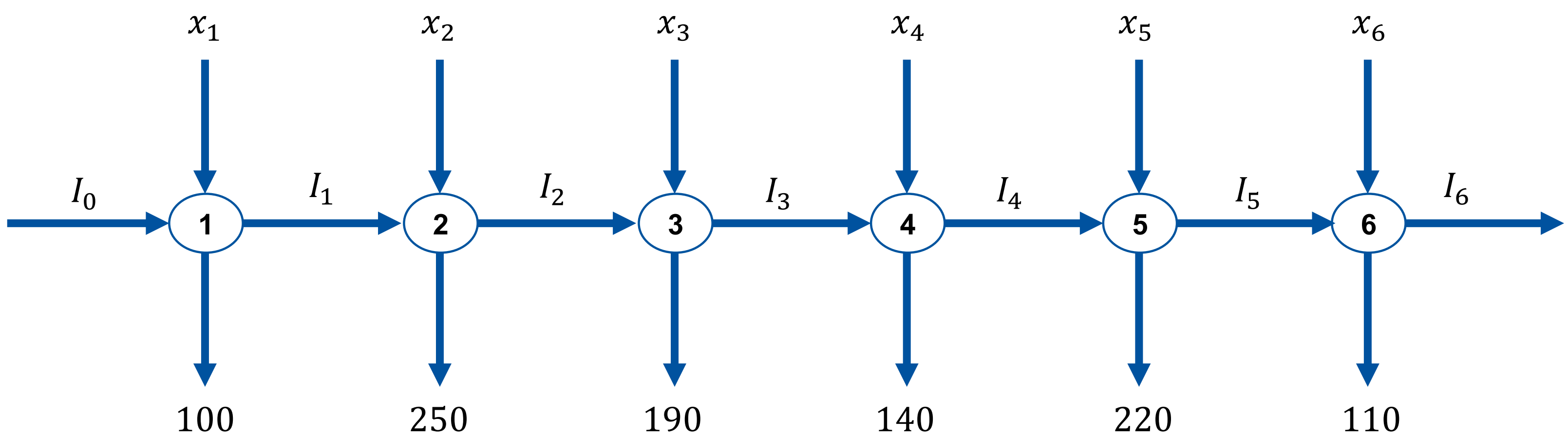


## Ejemplo 3: Modelo de producción en inventario durante periodos múltiples

Hopsa firmó un contrato para entregar 100, 250, 190, 140, 220 y 110 ventanas para casa durante los siguientes seis meses. El costo de producción (mano de obra, material y servicios) por ventana varia por periodo y se estima que será de $50, $45, $55, $48, $52 y $50 durante los próximos seis meses. Para aprovechar las fluctuaciones del costo de fabricación, Hopsa puede producir más ventanas de las necesarias en un mes dado y conservar las unidades adicionales para entregarles en meses posteriores. Esto supondrá un costo de almacenamiento a razón de $8 por ventana por mes, estimado en el inventario de fin de mes. Desarrollo un programa lineal para determinar el programa de producción óptimo

# Ejemplo 3: Modelo de producción en inventario durante periodos múltiples

El problema desea determinar las relaciones entre cantidades producidas, demanda mensual y el inventario óptimo para los 6 meses de manera que los costos sean mínimos




$= mes$

$x \quad =$ cantidades producidas de producto

$I_0 =$ inventario inicial

$I \quad = inventario\ de\ fin\ de\ mes$

$Inventario\ final$

$=$ cantidad producida + inventario inicial $-$ demanda

# Ejemplo 3: Modelo de producción en inventario durante periodos múltiples

- Las variables de decisión son:

$$x_i \ = cantidad\ de\ unidades\ producidas\ en\ el\ mes\ i$$
$$I_i \ = unidades\ que\ quedan\ en\ el\ inentario\ de\ fin\ de\ mes\ i$$

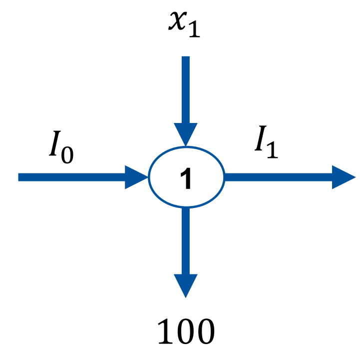
Sea $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

- Se busca en el problema minimizar los costos totales de producción e inventario, por ende la función objetivo sería:

F.O.: MinZ = $\underbrace{50x_1 \ + 45x_2 \ + 55x_3 \ + 48x_4 \ + 52x_5 \ + 50x_6}_{\text{Costos totales de producción}} \ + \underbrace{8(I_1 \ + I_2 \ + I_3 \ + I_4 \ + I_5 \ + I_6)}_{\text{Costos de inventario}}$

# Ejemplo 3: Modelo de producción en inventario durante periodos múltiples

$$Demanda = \text{cantidad producida} + \text{inventario inicial} - \text{inventario final}$$




- La formulación del problema sería:

F.O.: MinZ = $50x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 48x_4 + 52x_5 + 50x_6 + 8(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)$

s.a.:

$$x_1 - I_1 = 100$$
$$I_1 + x_2 - I_2 = 250$$
$$I_2 + x_3 - I_3 = 190$$
$$I_3 + x_4 - I_4 = 140$$
$$I_4 + x_5 - I_5 = 220$$
$$I_5 + x_6 = 110$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4,5,6 \quad ; \quad I_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4,5$$

# Ejemplo 4: Selección de medios de comunicación

Una empresa desea promocionar su producto estrella y tiene un presupuesto de hasta $8,000 semanales para anuncios locales. El dinero se asignará entre cuatro medios de comunicación: spots en televisión, anuncios en periódicos y dos tipos de comerciales en radio. El objetivo de la empresa es llegar a la audiencia de mayor potencial más grande posible, usando los diferentes medios de comunicación. La siguiente tabla presenta el número de clientes potenciales expuestos mediante un anuncio en cada uno de los cuatro medios. También proporciona el costo por anuncio colocado y el máximo número de ellos que se puede comprar por semana.

| Medio | Audiencia alcanzada | Costo por anuncio ($) | Máximo de anuncio por semana |
|---|---|---|---|
| Spot en TV (1 minuto) | 5000 | 800 | 12 |
| Periódico (una plana) | 8500 | 925 | 5 |
| Spot en radio (30 segundos, horario estelar) | 2400 | 290 | 25 |
| Spot de radio (1 minuto, en la tarde) | 2800 | 380 | 20 |

El contrato requiere que se coloquen al menos cinco spots de radio cada semana. Para asegurar una campaña promocional de amplio espectro, la gerencia también insiste en que no se gasten más de $1,800 por semana en los comerciales de radio.

# Ejemplo 4: Selección de medios de comunicación

La formulación del problema es

$X_1$ = número de spots de TV de 1 minuto en cada semana
$X_2$ = número de anuncios de 1 plana en el periódico en cada semana
$X_3$ = número de spots de radio de 30 segundos en cada semana
$X_4$ = número de spots de radio de 1 minuto por la tarde en cada semana

Función objetivo :

$$\text{Max. } Z = 5{,}000X_1 + 8{,}500X_2 + 2{,}400X_3 + 2{,}800X_4$$

Sujeta a

$$\begin{aligned}
X_1 &\le 12 && \text{(máx. de spots en TV/semana)}\\
X_2 &\le 5 && \text{(máx. de anuncios en periódico/sem)}\\
X_3 &\le 25 && \text{(máx. de spots de 30 s en radio/sem)}\\
X_4 &\le 20 && \text{(máx. de spots de 1 min en radio/sem)}\\
800X_1 + 925X_2 + 290X_3 + 380X_4 &\le \$8{,}000 && \text{(presupuesto semanal de publicidad)}\\
X_3 + X_4 &\ge 5 && \text{(mín. de spots en radio contratados)}\\
290X_3 + 380X_4 &\le \$1{,}800 && \text{(máx. de dólares gastados en radio)}\\
X_1, X_2, X_3, X_4 &\ge 0
\end{aligned}$$

# Ejemplo 5: Modelo de producción de un periodo único

- En preparación para la temporada invernal, una compañía fabricante de ropa está manufacturando abrigos de piel con capucha y chamarras con relleno de plumas de ganso, pantalones con aislamiento y guantes. Todos los productos se elaboran en cuatro departamentos diferentes: corte aislamiento, costura y empaque. La compañía recibió pedidos de sus productos. El contrato estipula una penalización por los artículos no surtidos. Elabore un plan de producción óptimo para la compañía, con base en los siguientes datos:

| | Tiempo por unidades (h) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Departamento** | **Chamarras** | **Relleno** | **Pantalones** | **Guantes** | **Capacidad (h)** |
| Corte | .30 | .30 | .25 | .15 | 1000 |
| Aislamiento | .25 | .35 | .30 | .10 | 1000 |
| Costura | .45 | .50 | .40 | .22 | 1000 |
| Empaque | .15 | .15 | .1 | .05 | 1000 |
| Demanda | 800 | 750 | 600 | 500 | |
| Utilidad unitaria | $30 | $40 | $20 | $10 | |
| Penalización por unidad | $15 | $20 | $10 | $8 | |

# Ejemplo 5: Modelo de producción de un periodo único

- Las variables de decisión son:

$$x_1 = cantidad\ de\ chamarras\ con\ capucha$$
$$x_2 = cantidad\ de\ chamarras\ con\ relleno\ de\ plumas$$
$$x_3 = cantidad\ de\ pantalones$$
$$x_4 = cantidad\ de\ pares\ de\ guantes$$

- Además, se debe tomar en cuenta la escasez de la demanda de cada producto por la cual se penalizará. Esto genera una nueva variable $s$

$$s_1 = escasez\ de\ chamarras\ con\ capucha$$
$$s_2 = escasez\ de\ chamarras\ con\ relleno\ de\ plumas$$
$$s_3 = escasez\ de\ pantalones$$
$$s_4 = escasez\ de\ pares\ de\ guantes$$

# Ejemplo 5: Modelo de producción de un periodo único

- El objetivo es maximizar la utilidad neta, se define como:

$$Utilidad = Utilidad\ total\ - Penalización\ total$$

- Por ende, la función objetivo será:

F.O.: MaxZ = $\underbrace{30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4}_{\text{utilidad por producto producido}} - \underbrace{(15s_1 + 20s_2 + 10s_3 + 8s_4)}_{\text{Penalización por falta de producto}}$

Restricciones con respecto a la capacidad de producción

$$\begin{cases} .30x_1 + .30x_2 + .25x_3 + .15x_4 \leq 1000 \\ .25x_1 + .35x_2 + .30x_3 + .10x_4 \leq 1000 \\ .45x_1 + .50x_2 + .40x_3 + .22x_4 \leq 1000 \\ .15x_1 + .15x_2 + .10x_3 + .05x_4 \leq 1000 \end{cases}$$

Restricciones con respecto a la demanda tomando en cuenta la escasez del producto

$$\begin{cases} x_1 + s_1 = 800 \\ x_2 + s_2 = 750 \\ x_3 + s_3 = 600 \\ x_4 + s_4 = 500 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0$$
$$s_j \geq 0$$
$$j = 1,2,3,4$$

## Ejemplo 6: **Modelo de programación de personal**

Copa Airlines va a agregar vuelos desde y hacia su aeropuerto base, por lo cual necesita contratar más agentes de servicio a clientes. Sin embargo, no está claro cuántos más debe contratar. La administración reconoce la necesidad de controlar el costo y al mismo tiempo proporcionar de manera permanente un nivel satisfactorio de servicio. Por todo esto, un equipo estudia la forma de programar a los agentes para proporcionar un servicio satisfactorio con el menor costo en personal. Con base en la nueva programación de vuelos, se ha realizado un análisis del número mínimo de agentes de servicio a clientes que deben encontrarse de guardia en diferentes momentos del día para proporcionar un nivel satisfactorio de servicio. La columna de la derecha de la tabla muestra el número de agentes necesario para los periodos dados en la primera columna. Los otros datos de la tabla reflejan uno de los acuerdos del contrato colectivo vigente entre la compañía y el sindicato que representa a los agentes de servicio a clientes. El acuerdo es que cada agente trabaje un turno de 8 horas 5 días a la semana, y los turnos autorizados son:

Turno 1: 6:00 a.m. a 2:00 p.m.
Turno 2: 8:00 a.m. a 4:00 p.m.
Turno 3: 12:00 a.m. (mediodía) a 8:00 p.m.
Turno 4: 4:00 p.m. a 12 p.m. (medianoche)
Turno 5: 10:00 p.m. a 6:00 a.m.

## Ejemplo 6: Modelo de programación de personal

La muestra las horas cubiertas por los turnos respectivos. Como algunos turnos son menos deseables que otros, los salarios que se especifican en el contrato difieren de uno a otro.
En el último renglón se muestra la compensación diaria por cada agente para cada turno.
El problema consiste en determinar cuántos agentes deben asignarse a los turnos respectivos cada día para minimizar el costo total de personal debido a los agentes, de acuerdo con este último renglón, al mismo tiempo que se cumplen (o se sobrepasan) las necesidades de servicio dados en la columna de la extrema derecha

| | **Periodos cubiertos** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Turno** | | | | | |
| **Periodo** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **Número mínimo necesario de agentes** |
| 6:00 a.m. a 8:00 a.m. | ✔ | | | | | 48 |
| 8:00 a.m. a 10:00 a.m. | ✔ | ✔ | | | | 79 |
| 10:00 a.m. a 12 a.m. | ✔ | ✔ | | | | 65 |
| 12 a.m. a 2:00 p.m. | ✔ | ✔ | ✔ | | | 87 |
| 2:00 p.m. a 4:00 p.m. . | | ✔ | ✔ | | | 64 |
| 4:00 p.m. a 6:00 p.m. | | | ✔ | ✔ | | 73 |
| 6:00 p.m. a 8:00 p.m. | | | ✔ | ✔ | | 82 |
| 8:00 p.m. a 10:00 p.m.. | | | | ✔ | | 43 |
| 10:00 p.m. a 12:00 p.m. | | | | ✔ | ✔ | 52 |
| 12:00 p.m. a 6:00 a.m. | | | | | ✔ | 15 |
| Costo diario por agente | $170 | $160 | $175 | $180 | $195 | |

# Ejemplo 6: Modelo de programación de personal

$x_j$ = número de agentes asignados al turno $j$, para $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

$$\text{Minimizar} \quad Z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5,$$

sujeta a

$$
\begin{array}{llll}
x_1 & & \geq 48 & \text{(6-8 a.m.)} \\
x_1 + x_2 & & \geq 79 & \text{(8-10 a.m.)} \\
x_1 + x_2 & & \geq 65 & \text{(10-12 a.m.)} \\
x_1 + x_2 + x_3 & & \geq 87 & \text{(12 a.m.-2 p.m.)} \\
x_2 + x_3 & & \geq 64 & \text{(2-4 p.m.)} \\
x_3 + x_4 & & \geq 73 & \text{(4-6 p.m.)} \\
x_3 + x_4 & & \geq 82 & \text{(6-8 p.m.)} \\
x_4 & & \geq 43 & \text{(8-10 p.m.)} \\
x_4 + x_5 & & \geq 52 & \text{(10-12 p.m.)} \\
x_5 & & \geq 15 & \text{(12 p.m.-6 a.m.)}
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0, \quad \text{para } j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

## Ejemplo 7: Modelo de préstamo bancario

Banco Panamá está desarrollando una política de préstamos que implica un máximo de \$12 millones. La tabla siguiente muestra los datos pertinentes en relación con los préstamos disponibles

| Tipo de préstamo | Tasa de interés | % de deudas impagables |
|---|---|---|
| Personal | .140 | .10 |
| Automóvil | .130 | .07 |
| Casa | .120 | .03 |
| Agrícola | .125 | .05 |
| Comercial | .100 | .02 |

Las deudas impagables son irrecuperables y no producen ingresos por intereses. La competencia con otras instituciones financieras dicta la asignación de 40% mínimo de los fondos para préstamos agrícolas y comerciales. Para ayudar a la industria de la construcción de viviendas en la región, los préstamos para casa deben ser por lo menos 50% de los préstamos personales, para automóvil, y para casa. El banco limita la proporción total de las deudas impagables en todos los préstamos a un máximo de 4%. El objetivo del banco es maximizar el rendimiento neto, la diferencia entre el ingreso por intereses y la pérdida por deudas impagables. El ingreso por intereses se acumula sobre los préstamosal corriente.

# Ejemplo 7: Modelo de préstamo bancario

La función objetivo combina el ingreso por intereses y la deuda impagable como sigue

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar } z &= \text{Interés total} - \text{Deuda impagable} \\
&= (.126x_1 + .1209x_2 + .1164x_3 + .11875x_4 + .098x_5) \\
&\quad - (.1x_1 + .07x_2 + .03x_3 + .05x_4 + .02x_5) \\
&= .026x_1 + .0509x_2 + .0864x_3 + .06875x_4 + .078x_5
\end{aligned}
$$

sujeto a:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 12$$

$$x_4 + x_5 \ge .4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$x_3 \ge .5(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$.1x_1 + .07x_2 + .03x_3 + .05x_4 + .02x_5 \le .04(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0$$

# Ejemplo 8: **Modelo de renovación urbana**

La ciudad de David enfrenta un grave recorte de presupuesto. Buscando una solución a largo plazo para mejorar la base tributaria, el consejo de la ciudad propone la demolición de un área de viviendas dentro de la ciudad, y su reemplazo con un moderno desarrollo. El proyecto implica dos fases: (1) demolición de casas populares para obtener el terreno para el nuevo desarrollo, y (2) construcción del nuevo desarrollo. Resumen de la situación actual:

- Se pueden demoler 300 casas populares. Cada casa ocupa un lote de .25 acres. El costo de demoler una casa es de $2000.
- Los tamaños de los lotes para construir casas unifamiliares, dobles, triples y cuádruples, son de .18, .28, .4 y .5 acres, respectivamente. Las calles, los espacios abiertos y el área para la instalación de servicios, ocupan 15% del área disponible.
- En el nuevo desarrollo, las unidades triples y cuádruples ocupan por lo menos 25% del total. Las unidades sencillas deben ser al menos 20% de todas las unidades, y las unidades dobles deben ocupar un mínimo de 10%.
- El impuesto por unidad aplicado a las unidades sencillas, dobles, triples y cuádruples es de $1000, $1900, $2700 y $3400, respectivamente.
- El costo de construcción por unidad de las casas sencillas, dobles, triples y cuádruples es de $50,000, $70,000, $130,000 y $160,000, respectivamente. El financiamiento a través de un banco local está limitado a $15 millones.

¿Cuántas unidades de cada tipo se deben construir para maximizar la recaudación de impuestos?

# Ejemplo 8: Modelo de renovación urbana

$x_1$ = Cantidad de casas unifamiliares

$x_2$ = Cantidad de casas dobles

$x_3$ = Cantidad de casas triples

$x_4$ = Cantidad de casas cuádruples

$x_5$ = Cantidad de casas viejas a demoler

$$\text{Maximizar } z = 1000x_1 + 1900x_2 + 2700x_3 + 3400x_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
.18x_1 + .28x_2 + .4x_3 + .5x_4 - .2125x_5 &\leq 0 \\
x_5 &\leq 300 \\
-.8x_1 + .2x_2 + .2x_3 + .2x_4 &\leq 0 \\
.1x_1 - .9x_2 + .1x_3 + .1x_4 &\leq 0 \\
.25x_1 + .25x_2 - .75x_3 - .75x_4 &\leq 0 \\
50x_1 + 70x_2 + 130x_3 + 160x_4 + 2x_5 &\leq 15000 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

# Solución de problemas de PL con ExcelQM o QM

POM-QM para Windows es el software de Windows más fácil de usar disponible. Este paquete de software presenta módulos separados que cubren temas tanto de la administración de operaciones como de la ciencia de la administración.

Excel QM es un complemento para Microsoft Excel que facilita el desarrollo de problemas con modelos determinísticos y probabilísticos.

Estos softwares proporciona análisis matemático para la gestión de operaciones y diversos modelos de métodos cuantitativos

Enlace para descargar el software QM (para Windows) o el Add-In ExcelQM (para MacOS):

https://wps.prenhall.com/bp_taylor_introms_11/220/56508/14466195.cw/content/

Para la solución gráfica

https://www.zweigmedia.com/utilities/lpg/index.html?lang=en

## Ejemplo 1: Formulación de un problema de maximización

Furniture City fabrica mesas y sillas de bajo precio. El proceso de fabricación de cada producto se parece en que ambos requieren cierto número de horas de trabajo de carpintería, así como cierto número de horas de trabajo en el departamento de pintura y barnizado. Cada mesa requiere de 4 horas de carpintería y 2 horas en el taller de pintura y barnizado. Cada silla requiere de 3 horas de carpintería, y 1 hora en la pintura y barnizado. Durante el periodo de producción actual, hay 240 horas de tiempo de carpintería disponibles, así como 100 horas de tiempo disponibles en pintura y barnizado. Cada mesa vendida genera una utilidad de $70; cada silla fabricada se vende con una utilidad de $50.

El problema de Furniture City es determinar la mejor combinación posible de mesas y sillas a fabricar, con la finalidad de alcanzar la utilidad máxima. La empresa desea que esta situación de mezcla de producción se formule como un problema de programación lineal.

# Ejemplo 1: Formulación de un problema de maximización

Función objetivo:

$$Maximizar\ Z = 70T + 50C$$

s.a.:

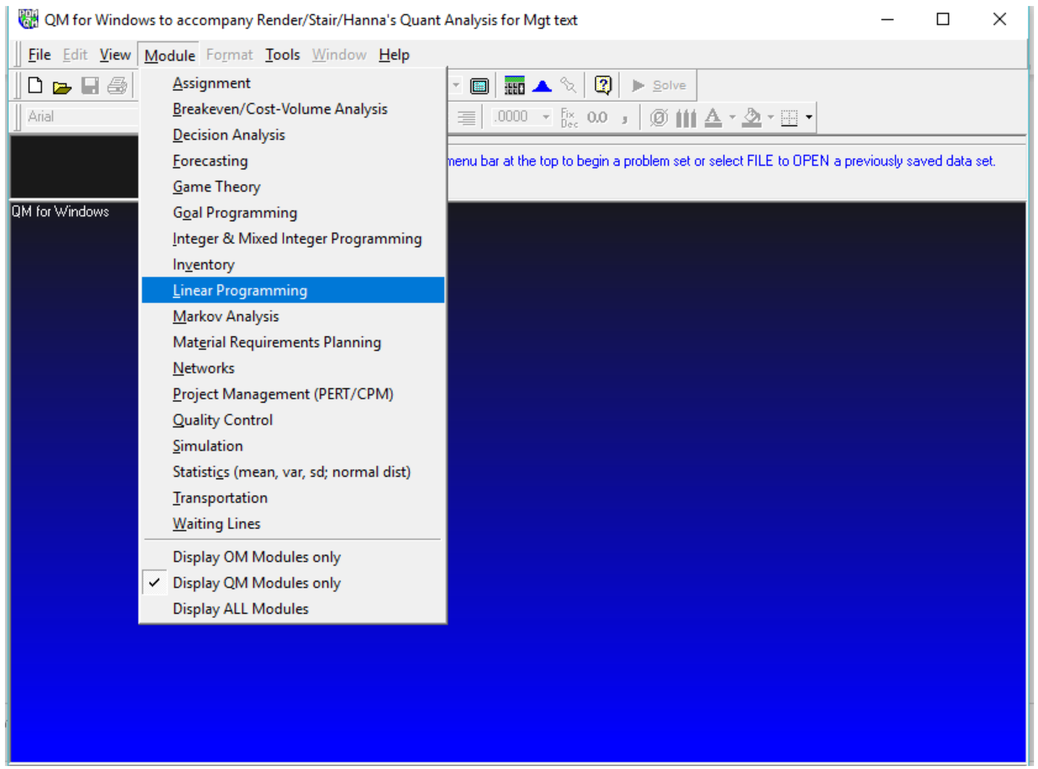
$$4T + 3C \leq 240$$ Restricción de carpintería

$$2T + C \leq 100$$ Restricción de pintura y barnizado

$$T, C \geq 0$$ Restricción de no negatividad

# Ejemplo 1: Resolución por QM

- Abrir el software
- Dar click en la opción Módulo (Module)
- Seleccionar el tipo de modelo que se desea resolver. En este caso programación lineal (Linear Programming)



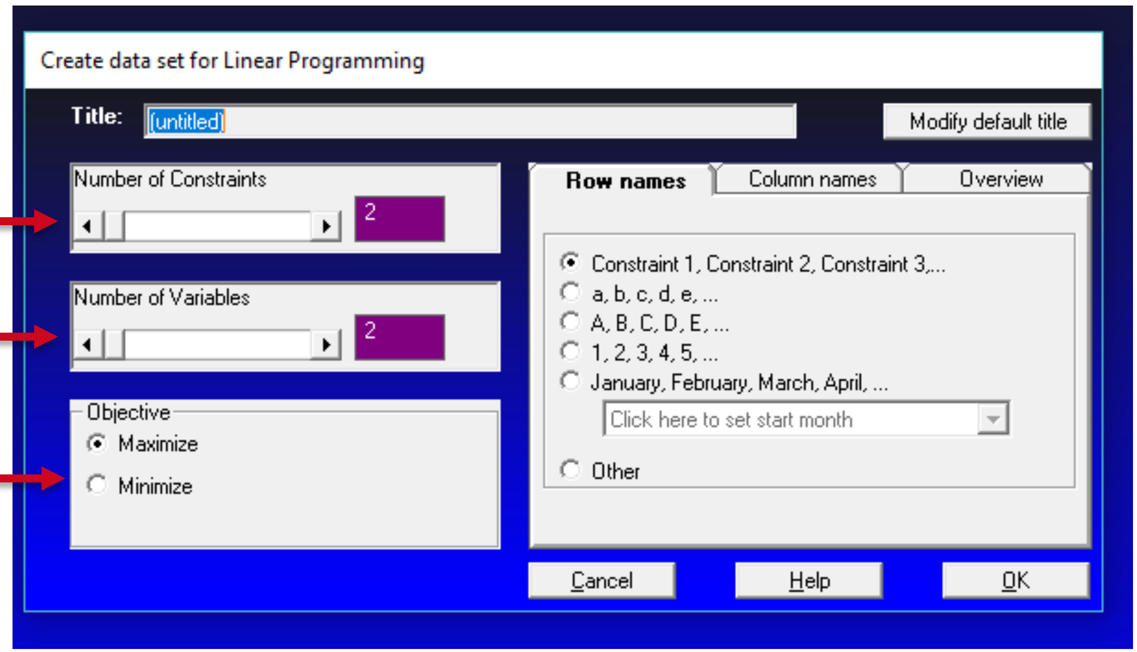
# Ejemplo 1: Resolución por QM

- Dar click en New
- Aparecerá una pantalla como se muestra a continuación. En ella debe seleccionar el número de variables, número de restricciones (constraints) y el tipo de función objetivo del problema (maximización o minimización) a resolver.

Número de restricciones serían 2 para el ejemplo que se desea resolver

Número de variables serían dos, T para mesas y C para sillas

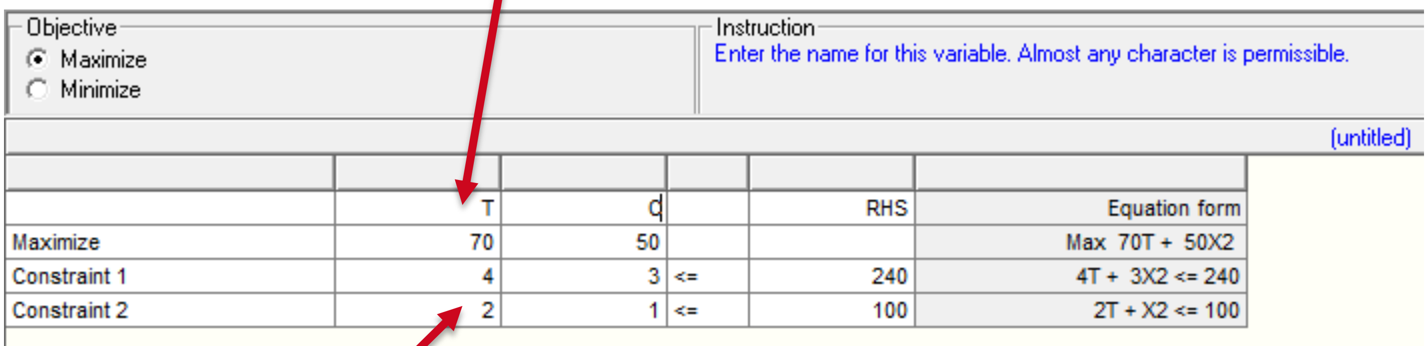
El problema que se desea resolver es un problema de maximización



# Ejemplo 1: Resolución por QM

- Cambie el nombre de las variables si desea
- Ingresar los coeficientes para la función objetivo
- Ingresar los coeficientes para cada restricción.

Escriba sobre X1 y X2 para cambiar los nombres de las variables




| | T | q | | RHS | Equation form |
|---|---|---|---|---|---|
| Maximize | 70 | 50 | | | Max 70T + 50X2 |
| Constraint 1 | 4 | 3 | <= | 240 | 4T + 3X2 <= 240 |
| Constraint 2 | 2 | 1 | <= | 100 | 2T + X2 <= 100 |

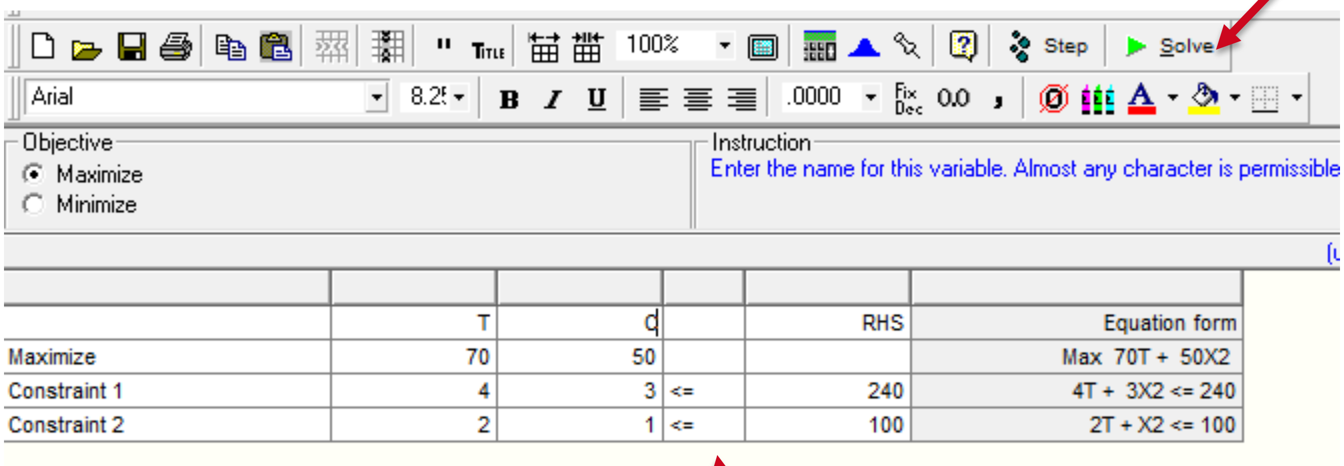
Introduzca los coeficientes en las columnas adecuadas

Las ecuaciones aparecerán automáticamente al introducir los coeficientes en las otras columnas

# Ejemplo 1: **Resolución por QM**

- Cambie el tipo de restricción
- Luego, haga clic en Solve después de introducir da.

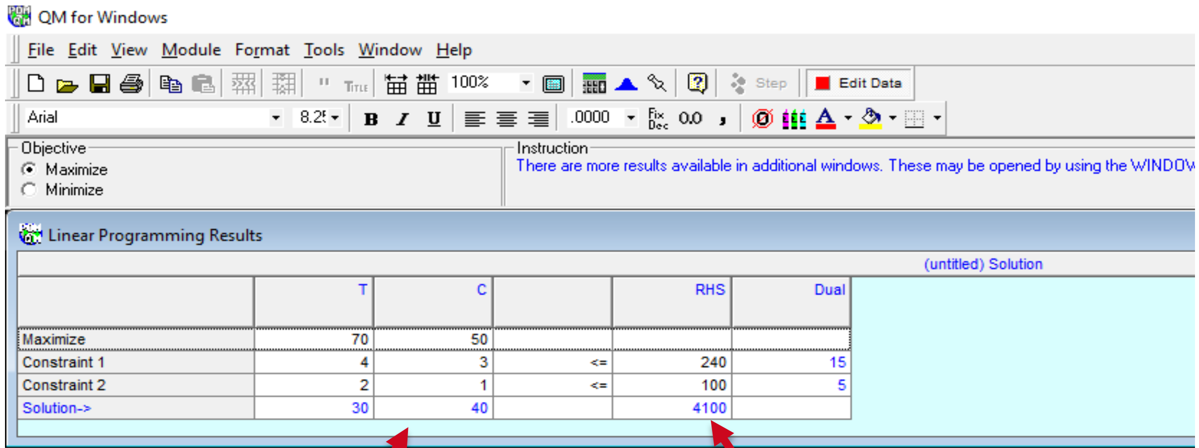
Clic en SOLVE para resolver el modelo




Haga clic aquí para cambiar el tipo de restricción

# Ejemplo 1: Resolución por QM

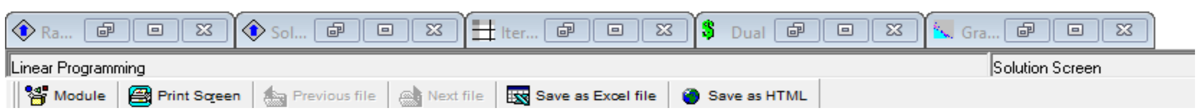
- Resultados




Los valores de la variables se muestran aquí

El valor de la función objetivos (utilidad) se muestra aquí

Las diversas ventajas muestran la resolución por método gráfico, el problema dual, las iteraciones por método simplex y las holguras del problema

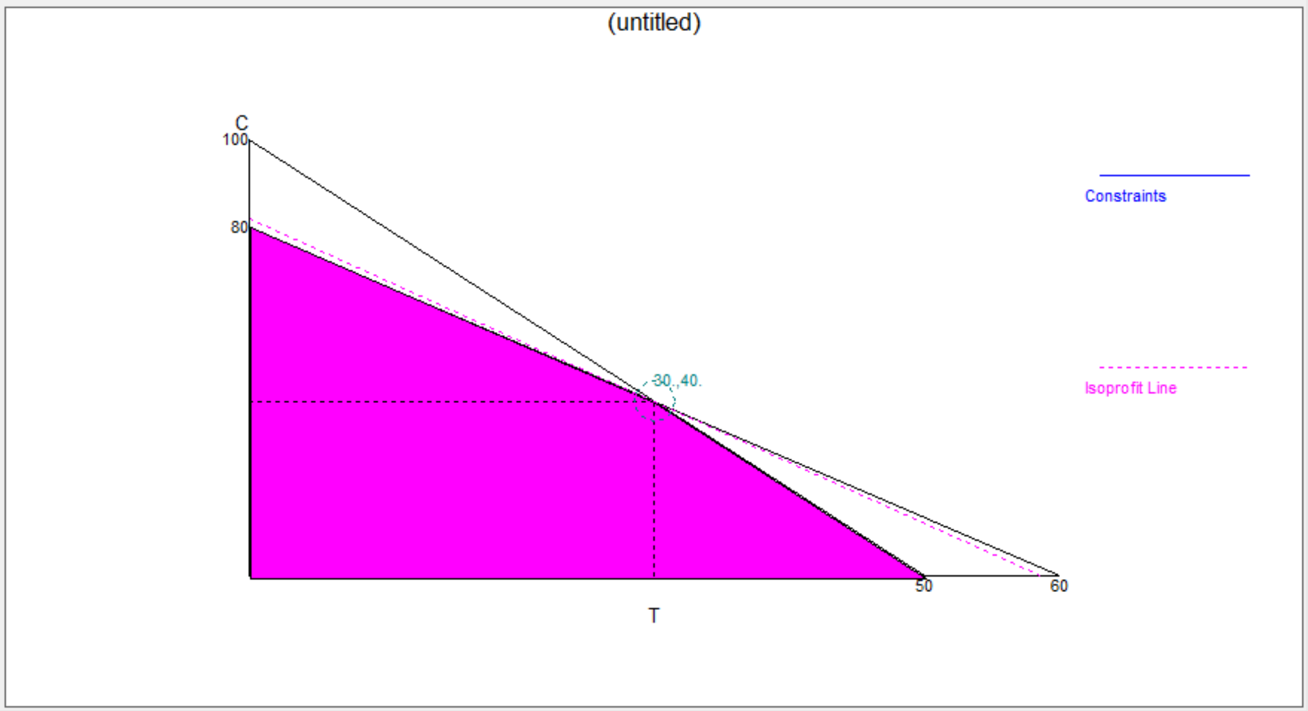


# Ejemplo 1: Resolución por QM

- Solución gráfica

Objective
- (•) Maximize
- ( ) Minimize

Instruction
Other output can be viewed by using WINDOW.




**Constraint Display**
- ( ) Max 70T+50C
- ( ) 4T+3C<=240
- ( ) 2T+1C<=100
- (•) none

Corner Points

| T | C | Z |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0. |
| 0 | 80 | 4,000. |
| 50 | 0 | 3,500. |
| 30 | 40 | 4,100. |

# Análisis de sensibilidad

- El análisis de sensibilidad permite que los administradores experimenten con los valores de los parámetros de entrada. Lleva a preguntarse ¿Qué pasaría si...?

- Se busca determinar ¿Qué tan sensible es la solución óptima ante los cambios en las utilidades, los recursos u otros parámetros de entrada?

- Enfoques:
  - Prueba y error
  - Método de post-optimalidad analítica

# Ejemplo 1

Variables de decisión

$$x_1 = producción\ de\ altavoces$$
$$x_2 = producción\ de\ receptores$$

La función objetivo del problema sería

$$Maximizar\ Z = 50x_1 + 120x_2$$

Las restricciones del problema serían las siguientes:

s.a.:

$2x_1 + 4x_2 \leq 80$ } Horas de tiempo de electricistas disponibles

$3x_1 + x_2 \leq 60$ } Horas de tiempo de técnicos de audio disponible

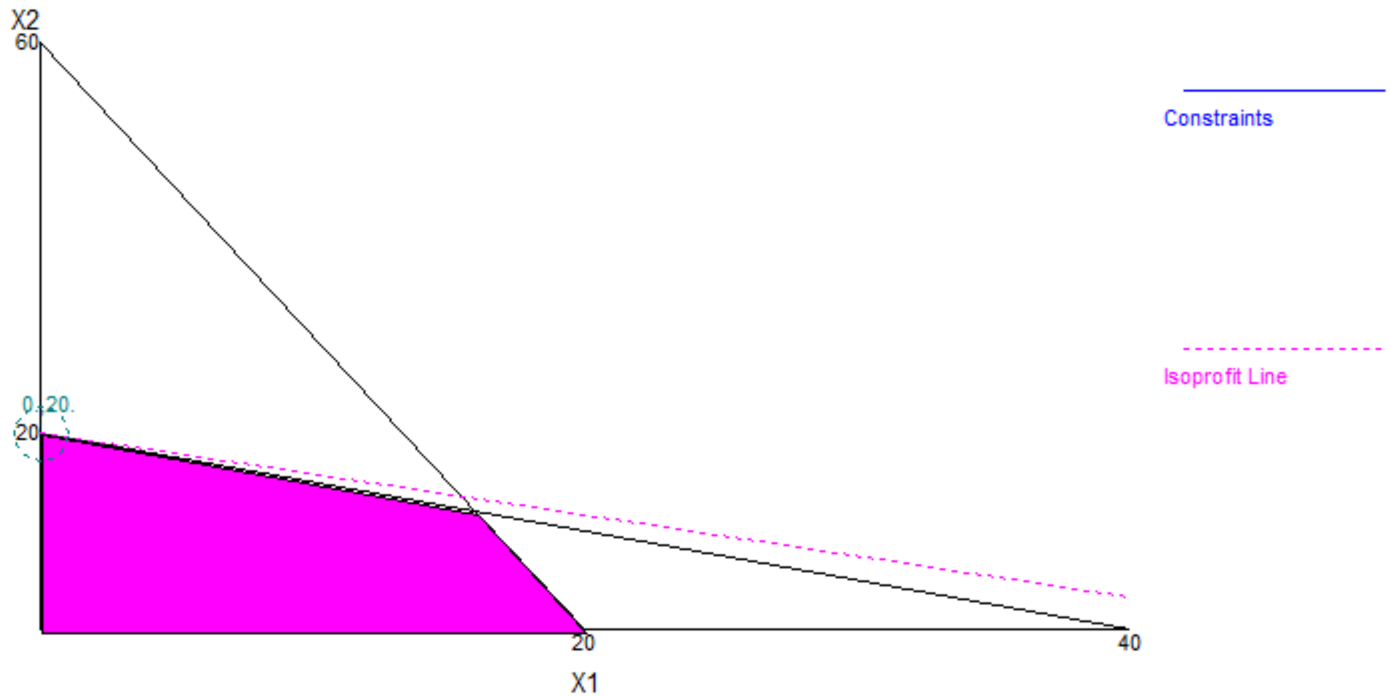
$x_1, x_2 \geq 0$ } Restricción de no negatividad

# Ejemplo 1

Solución

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 20$$
$$Z = 2400$$

| Corner Points | | |
|---|---|---|
| X1 | X2 | Z |
| 0 | 0 | 0. |
| 0 | 20 | 2,400. |
| 20 | 0 | 1,000. |
| 16 | 12 | 2,240. |



# Ejemplo 1: **análisis dual**

Primero se realiza el análisis de las tasas de contribución (utilidad o el costo)

- ¿Qué pasaría sí hubiera un gran avance técnico reciente que elevara la utilidad por receptor estéreo ($x_2$) de \$120 a \$150? ¿Sigue la solución siendo óptima?

$$\$50x_1 + \$20x_2 = 50(0) + 150(20)$$
$$Z = \$3000$$

- Si un coeficiente de la función objetivo disminuye o aumenta demasiado, un nuevo vértice se vuelve óptimo

- La solución actual sigue siendo óptima, a menos que un coeficiente de la función objetivo se incremente hasta un valor por encima del límite superior o disminuya hasta un valor por debajo del límite inferior

# Cambios en los coeficientes de la función objetivo

- En la solución de QM se puede verificar información adicional en la ventana de Ranging

- Se puede notar que la utilidad de los altavoces era de $50, lo cual se indica como el valor original en la salida. Este coeficiente de la función objetivo tiene un límite inferior de infinito negativo y un límite superior de $60. Esto significa que el vértice de solución actual sigue siendo óptimo, siempre que la utilidad en los altavoces no exceda $60.

- La utilidad de los altavoces  puede disminuir cualquier cantidad, como lo indica el infinito negativo , en tanto el vértice óptimo no cambiará.

- La utilidad de los receptores tiene un límite superior de infinito (puede aumentar en cualquier cantidad) y un límite inferior de $100.

- Se puede realizar el cambio de un solo coeficiente de la función objetivo a la vez

Ranging

| Variable | Value | Reduced Cost | Original Val | Lower Bound | Upper Bound |
|---|---|---|---|---|---|
| X1 | 0 | 10 | 50 | -Infinity | 60 |
| X2 | 20 | 0 | 120 | 100 | Infinity |
| Constraint | Dual Value | Slack/Surplus | Original Val | Lower Bound | Upper Bound |
| Constraint 1 | 30 | 0 | 80 | 0 | 240 |
| Constraint 2 | 0 | 40 | 60 | 20 | Infinity |

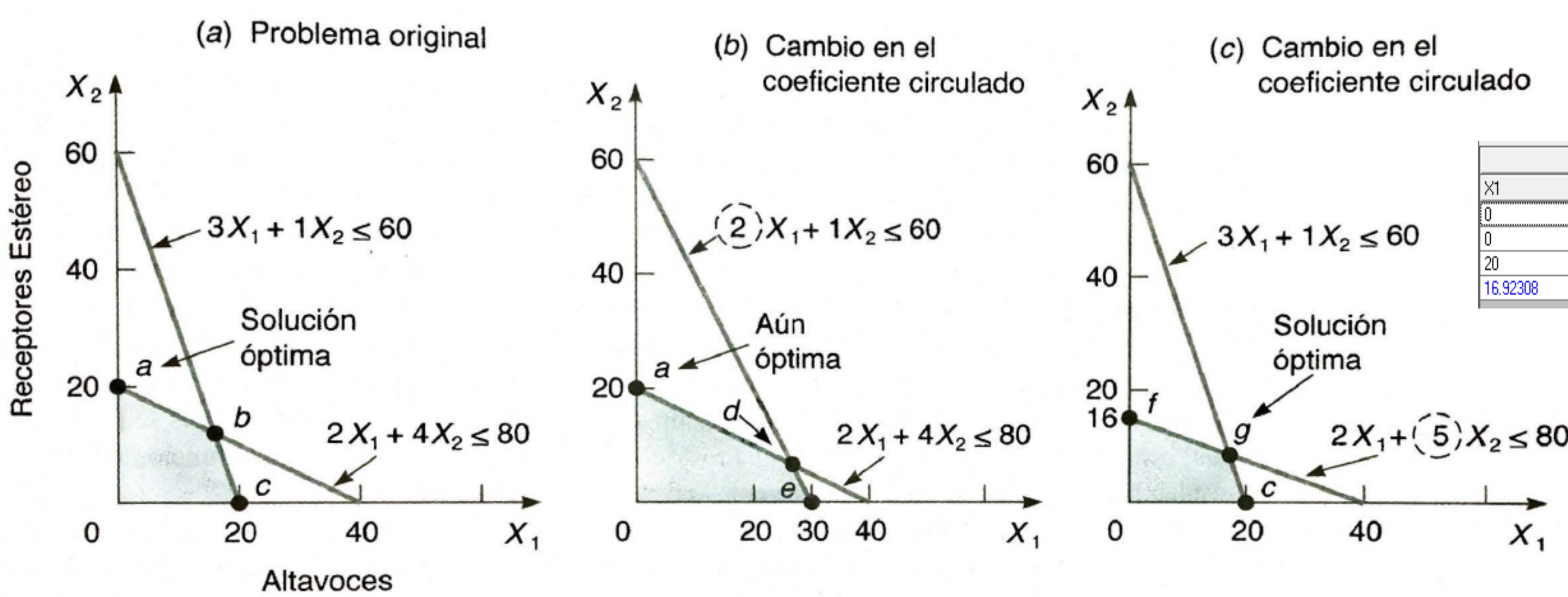
# Cambios en los coeficientes tecnológicos

- Los cambios en los coeficientes tecnológicos afectan la forma de la región de soluciones factibles
- Si se necesitan menos recursos para producir un producto, cambiarían los coeficientes en las ecuaciones de restricción
- Estos cambios no afectan la función objetivo pero si afecta la solución de utilidad o costo óptimo.

Ejemplo:

Cambio den la restricción $3x_1 + x_2 \leq 60$ a $2x_1 + x_2 \leq 60$

Cambio den la restricción $2x_1 + 4x_2 \leq 80$ a $2x_1 + 5x_2 \leq 80$




| Corner Points | | |
| --- | --- | --- |
| X1 | X2 | Z |
| 0 | 0 | 0. |
| 0 | 16 | 1,920. |
| 20 | 0 | 1,000. |
| 16.92308 | 9.230769 | 1,953.85 |

# Cambios en los recursos

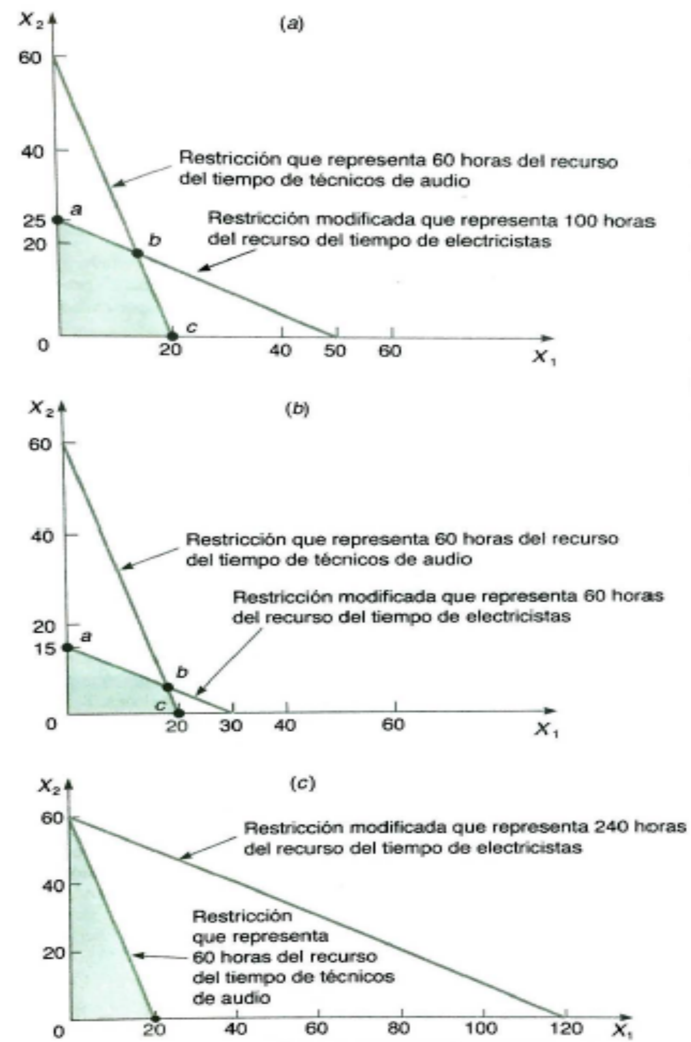
- Los valores del lado derecho representan los recursos. Dichos recursos pueden ser horas, dinero, materiales, tiempo, etc

- En el ejemplo , se tienen 80 horas de tiempo de electricistas disponible cada semana ý la máxima utilidad posible es de $2400. No hay holgura para esta restricción, por lo que es una restricción vinculante. Si las horas de electricista disponible incrementara a 100 horas, la nueva solución óptima que se observa en la figura (a) es  (0,25) y la utilidad es de $3000. Por lo tanto las 20 horas extras dieron lugar a un aumento en la utilidad de $600 o de $30 por hora ($3000/$100 = $30)

- Si se redujeran las horas disponibles de los electricistas a 60, se tendría entonces una nueva solución óptima en (0,15) con una utilidad de $1800, representando en una disminución de $600. Vea figura (b). Este cambio de $30 por hora en la utilidad que resulta del cambio de horas disponibles se llama precio dual o valor dual

- El **precio dual (precio sombra)**para una restricción es la mejora en el valor de la función objetivo que resulta de un aumento de una unidad en el lado derecho de la restricción

- Existe un límite. Si el total de horas de tiempo de electricista fuera 240 horas,  la solución optima sería (0, 60) como se muestra en la figura © y la utilidad sería $7200. Si se aumenta a más de 240, entonces la utilidad ya no aumentará , dejando así holgura en las horas disponibles de electricista



# Fundamentos básicos: R y RStudio

R es un lenguaje de programación y un entorno de software libre para la computación estadística y gráficos respaldados por la Fundación R para Computación Estadística.

El lenguaje R se usa ampliamente entre estadísticos y mineros de datos para desarrollar análisis de datos. R muestra aumentos sustanciales en popularidad

R y sus bibliotecas implementan varias técnicas estadísticas y gráficas, que incluyen modelado lineal y no lineal, pruebas estadísticas clásicas, análisis espacial y de series de tiempo, clasificación, agrupamiento y otros. R es fácilmente extensible a través de funciones y extensiones, y la comunidad R se destaca por sus contribuciones activas en términos de paquetes.

RStudio es un entorno de desarrollo integrado para R

Para descargar R y Rstudio utilizar los siguientes links:

https://www.r-project.org/
https://rstudio.com/products/rstudio/download/

# Argumentos del paquete LpSolve

- **direction**
  indica la dirección de la optimización: "mín."(por default) o "máx."

- **objective.in**
  Vector numérico de los coeficientes de la función objetivo

- **const.mat**
  Matriz de los coeficientes numéricos de las restricciones, una fila por restricción, una columna por variable (a menos que use transpose.constraints = FALSE).

- **const.dir**
  Vector de cadena de caracteres que dan la dirección de la restricción: cada valor debe ser uno de los siguientes "<," "<=," "=," "==," ">," o ">=".

- **const.rhs**
  Vector de valores numéricos para la parte derecha de las restricciones (los recursos)

Para más información puede referirse al siguiente link
https://www.rdocumentation.org/

# Ejemplo 2

La corporación Outdoor Furniture fabrica dos productos, bancos y mesas de picnic, para su uso en jardines y parques.

La empresa cuenta con dos recursos principales: sus carpinteros (mano de obra) y el suministro de madera de secoya para fabricar muebles. Durante el siguiente ciclo de producción están disponibles 1,200 horas de mano de obra de acuerdo con el sindicato. La empresa también cuenta con un inventario de 3,500 pies de secoya de buena calidad. Cada banco que produce Outdoor Furniture requiere de 4 horas de mano de obra y de 10 pies de secoya, en tanto que cada mesa de picnic toma 6 horas de mano de obra y 35 pies de secoya. Los bancos terminados darán una utilidad de $9 cada uno; y las mesas una utilidad de $20 cada una.

¿Cuántos bancos y mesas debería fabricar Outdoor Furniture para obtener la mayor utilidad posible?

# Ejemplo 2: Código en R

```
require(lpSolve)

fobjetivo <- c(2500, 3000)

restrizq <- matrix(c(1, 0, 0, 1, 1, 1), nrow=3, byrow=TRUE)

restrider <- c(30, 20, 60)

constdir <- c(">=", ">=", ">=")

sol <- lp(
    direction="max",
    objective.in = fobjetivo,
    const.mat = restrizq,
    const.dir = constdir,
    const.rhs = restrider
)

print(sol$status)

print(sol$solution)
```

# Ejemplo 3

El decano del Western College of Business debe planear la oferta de cursos de la escuela para el semestre de otoño. Las demandas de los estudiantes hacen que sea necesario ofrecer un mínimo de 30 cursos de licenciatura y 20 de posgrado durante el semestre. Los contratos de los profesores también dictan que se ofrezcan al menos 60 cursos en total. Cada curso de licenciatura impartido cuesta a la universidad un promedio de $2,500 en salarios de docentes, y cada curso de posgrado cuesta $3,000. ¿Cuántos cursos de licenciatura y posgrado se deberían impartir en otoño, de manera que los salarios totales del profesorado se reduzcan al mínimo?

## Ejemplo 3: **Código en R**

```
require(lpSolve)

fobjetivo <- c(9, 20)

restrizq <- matrix(c(1, 0, 0, 1, 4, 6, 10, 35), nrow=4, byrow=TRUE)

restrider <- c(0, 0, 1200, 3500)

constdir <- c(">=", ">=", "<=", "<=")

sol <- lp(
    direction="max",
    objective.in = fobjetivo,
    const.mat = restrizq,
    const.dir = constdir,
    const.rhs = restrider
)

print(sol$status)

print(sol$solution)
```

# Bibliografía


- Render, B. (2016). *Métodos cuantitativos para los negocios*. Editorial Pearson.
- Taha, H. (2011). *Investigación de operaciones*. Editorial Pearson.
- Render, B. & Heizer, J. (2014). *Principios de administración de operaciones*. Pearson
- Chase, R. & Jacobs, F. (2014). *Administración de operaciones, producción y cadena de suministro.* McGraw – Hill
- Hillier, F. & Lieberman, G. (2015). *Investigación de operaciones*. McGraw-Hill
- Anderson, D. & Sweeny, D. (2019). *Métodos cuantitativos para los negocios*. Cengage
- https://wps.prenhall.com/bp_taylor_introms_11/220/56508/14466195.cw/content/
- https://rstudio.com/products/rstudio/download/
- https://www.r-project.org/

# Contacto


Ricardo Caballero, M.Sc.

Docente Tiempo Completo
Facultad de Ingeniería Industrial
Centro Regional de Chiriquí
Universidad Tecnológica de Panamá

E-mail: ricardo.caballero@utp.ac.pa

https://www.academia.utp.ac.pa/ricardo-caballero