Simulación Aplicada a la Logística

Lectura Nr. 2

Distribuciones de Probabilidad

Profesor:
Ricardo Caballero, M.Sc.
ricardo.caballero@utp.ac.pa

Probabilidades

Una probabilidad es un número entre 0 y 1 que mide la probabilidad de que ocurra algún evento.

Variable aleatoria: variable que asume un valor numérico único para cada uno de los resultados en el espacio muestral de un experimento de probabilidad

Variable aleatoria discreta: variable aleatoria cuantitativa que puede asumir un número contable de valores

Variable aleatoria continua: variable aleatoria cuantitativa que puede asumir un número incontable de valores

¿Cómo se puede caracterizar la incertidumbre?

Maneras de caracterizar una distribución o un conjunto de datos:

- **Medidas de tendencia central**

Indicadores estadístico de posición que dan una descripción compacta de como están centrado los datos y una visualización más clara del nivel que alcanza la variable.

- **Medidas de dispersión**

Grado en que los datos numéricos tienden a esparcirse alrededor de un valor promedio, es la variabilidad de un conjunto de datos.

	Ventas por semana por tienda		
Semana	**Tienda A**	**Tienda B**	**Tienda C**
1	1	4	7
2	5	2	8
3	3	0	7
4	2	1	6
5	3	2	7
6	3	5	7
7	3	1	6
8	2	2	6
9	5	2	7
10	2	2	6
11	3	0	8
12	2	4	7
13	3	3	7
14	4	2	8
15	2	3	7
16	1	3	6
17	3	3	6
18	4	3	5
19	4	1	6
20	3	4	5
21	2	2	8
22	4	0	7
23	4	0	6
24	3	2	7
25	4	1	7
26	1	2	5
27	2	3	6
28	3	1	6
29	4	1	8
30	4	2	5
31	1	0	7
32	2	1	7
33	3	0	7
34	4	4	7
35	5	2	7
36	5	3	7
37	1	0	5
38	5	1	8
39	5	2	5
40	1	2	6
41	2	1	7
42	3	1	6
43	3	2	8
44	3	4	8
45	4	1	7
46	1	1	7
47	2	1	6
48	3	1	5
49	4	1	6
50	2	0	7

Medidas de tendencia central: Mediana y moda

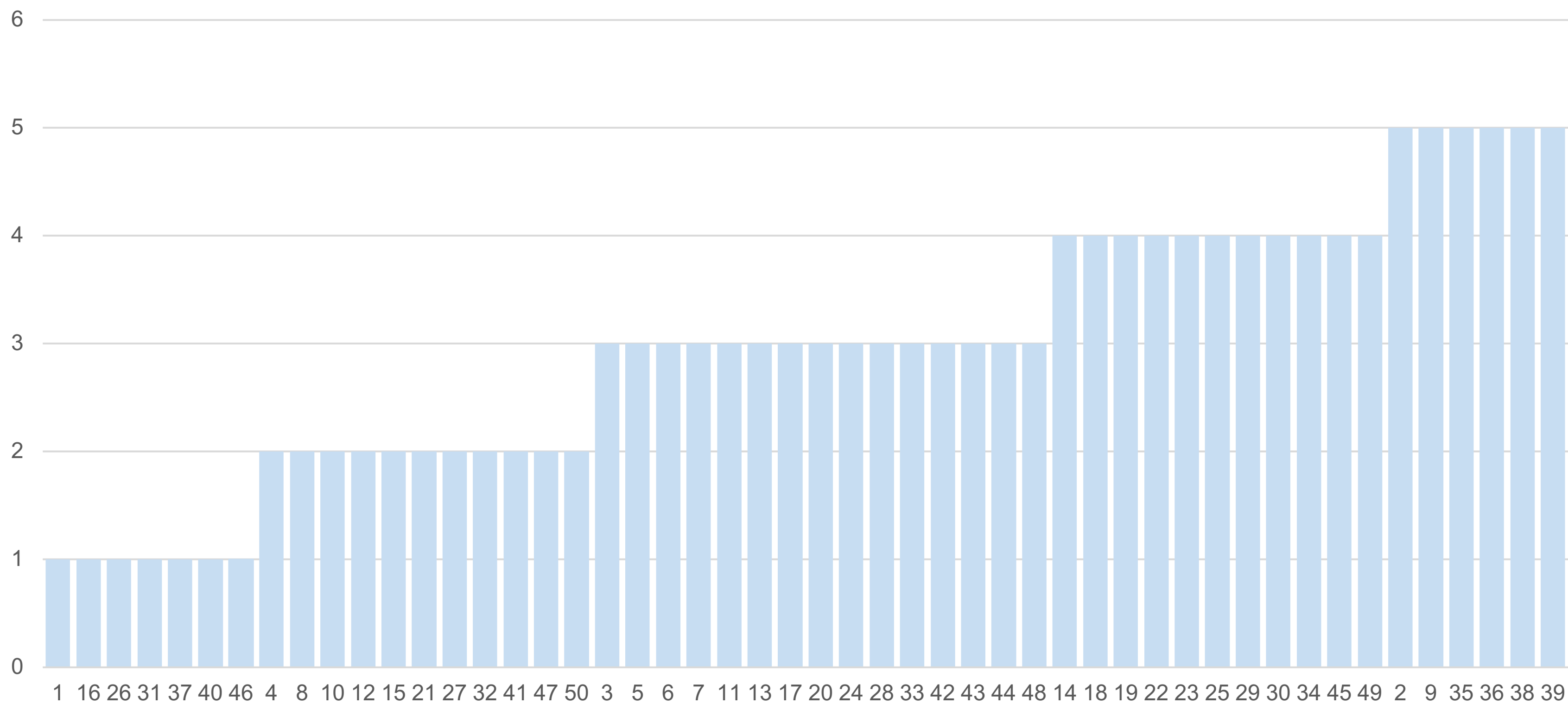
Mediana

- Punto medio de los valores una vez que se han ordenado de menor a mayor o de mayor a menor
- Es el valor de la observación que ocupa la posición central de un conjunto de datos ordenados según su magnitud.

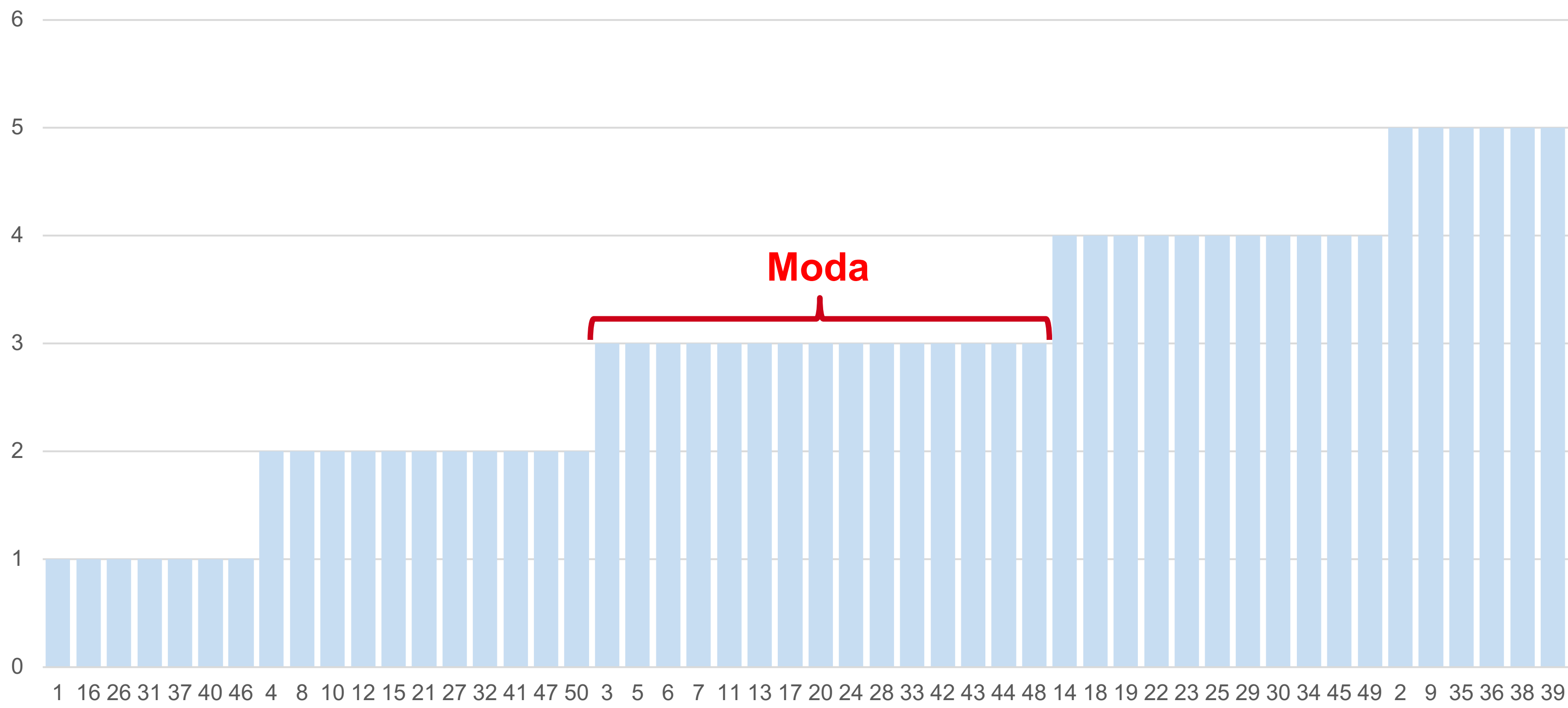
Moda

- Valor de la observación que aparece con mayor frecuencia.
- Es el valor de un conjunto de datos que ocurre más frecuentemente, se considera como el valor más típico de una serie de datos. El conjunto de datos puede ser unimodal (una moda), bimodal (dos modas), multimodal (varias modas) o no tener moda.

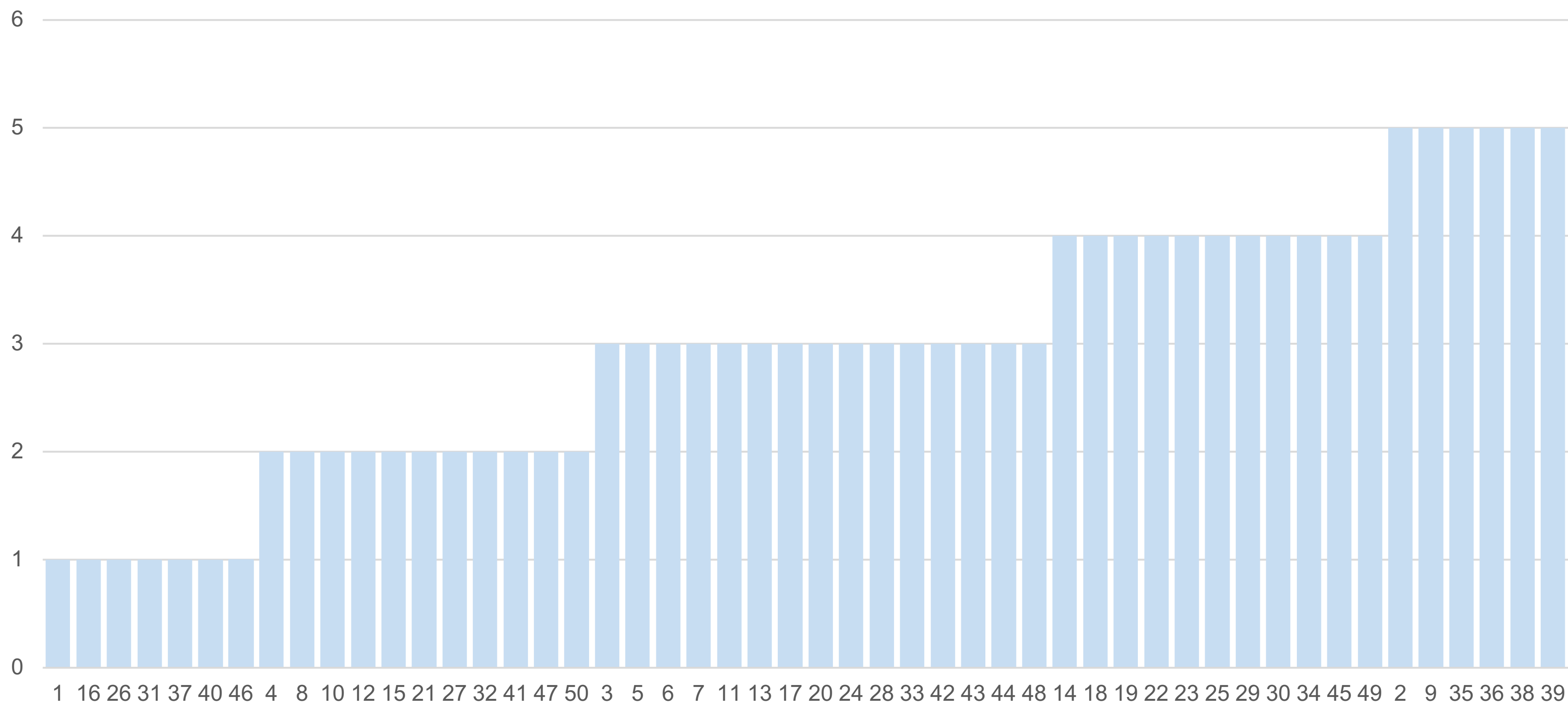
Ejemplo1: Caracterizando incertidumbre - 1



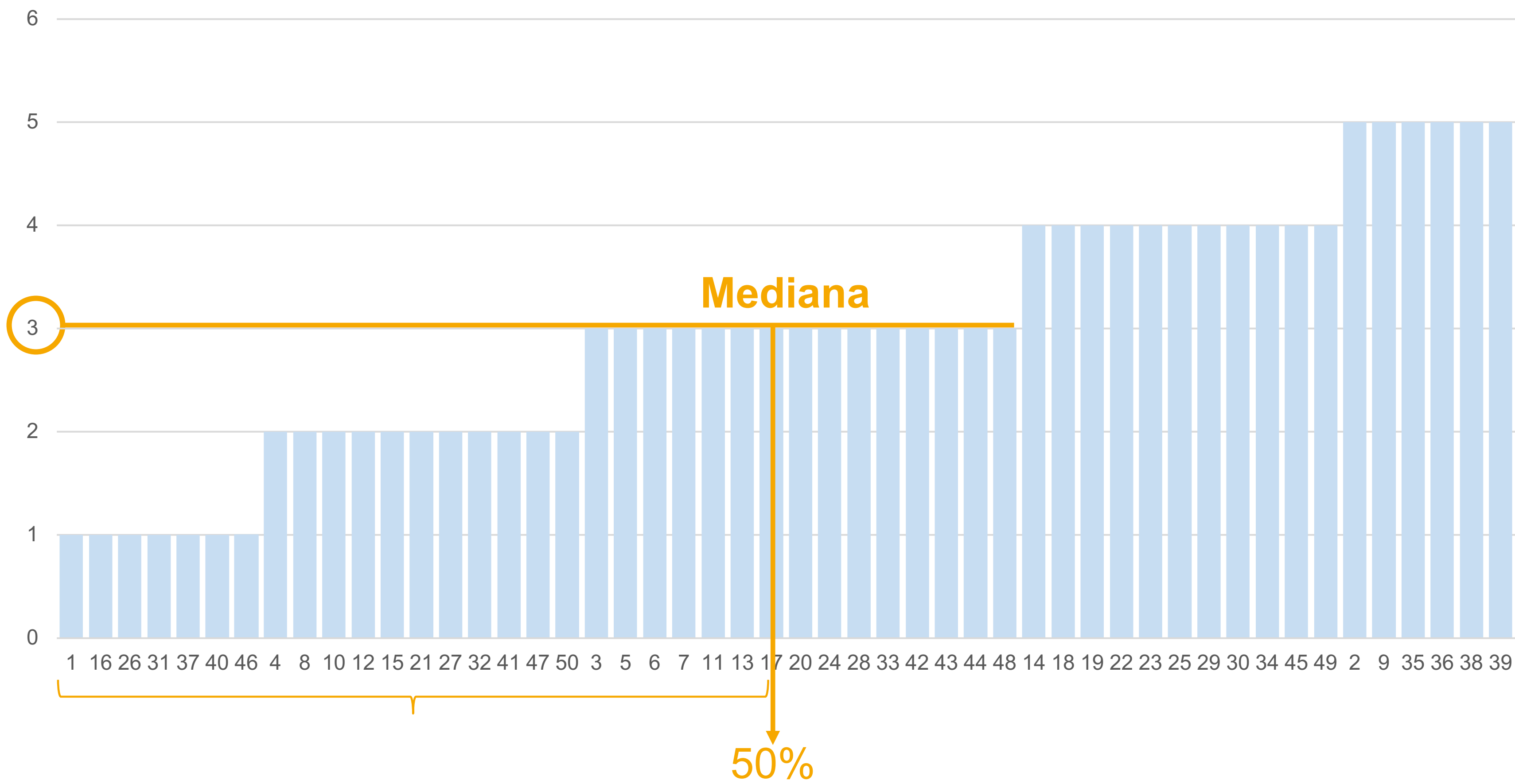
Ejemplo1: Caracterizando incertidumbre - moda



Ejemplo1: Caracterizando incertidumbre - mediana



Ejemplo1: Caracterizando incertidumbre - mediana



Medidas de tendencia central: Media

- Es una medida estadística que representa el comportamiento de todos los datos.
- Medida de ubicación más utilizada.

Media aritmética

Se encuentra al sumar todos los valores de la variable x y dividir la suma entre el numero total de datos.

Media poblacional

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N}$$

Donde:

$\mu =$ media poblacional

x_i = valores de los datos

N = población

Media muestral

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Donde:

$\bar{X} =$ media muestral

x_i = valores de los datos

n = muestra

Valor esperado (esperanza matemática)

Promedio ponderado de los valores de la variable aleatoria

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$$

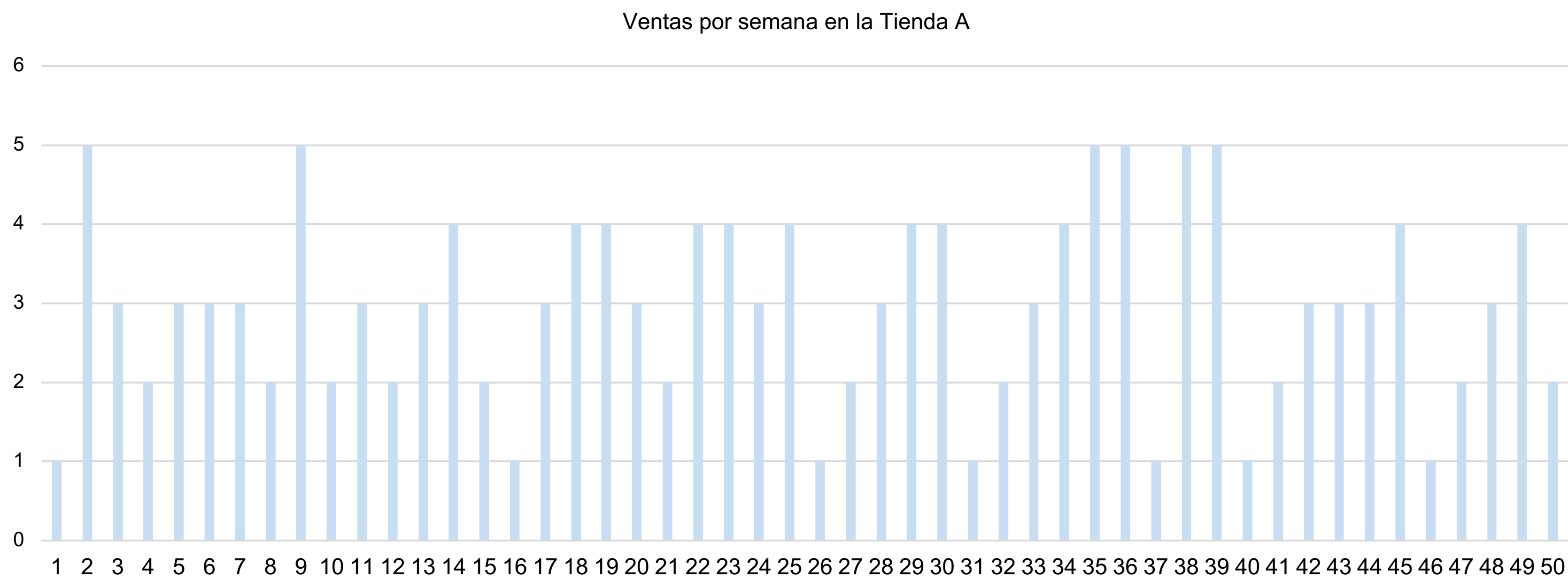
Donde:

$x_i = valores\ posibles\ de\ la\ variable\ aleatoria$

$P(x_i) = probabilidad\ de\ cada\ valor\ posible\ de\ la\ variable\ aleatoria$

$E(x) = valor\ esperado\ o\ media\ de\ la\ variable\ aleatoria$

Ejemplo1: Caracterizando incertidumbre – media aritmética



Semana	Unidades vendidas
1	1
2	5
3	3
4	2
5	3
6	3
7	3
8	2
9	5
10	2
11	3
12	2
13	3
14	4
15	2
16	1
17	3
18	4
19	4
20	3
21	2
22	4
23	4
24	3
25	4
26	1
27	2
28	3
29	4
30	4
31	1
32	2
33	3
34	4
35	5
36	5
37	1
38	5
39	5
40	1
41	2
42	3
43	3
44	3
45	4
46	1
47	2
48	3
49	4
50	2

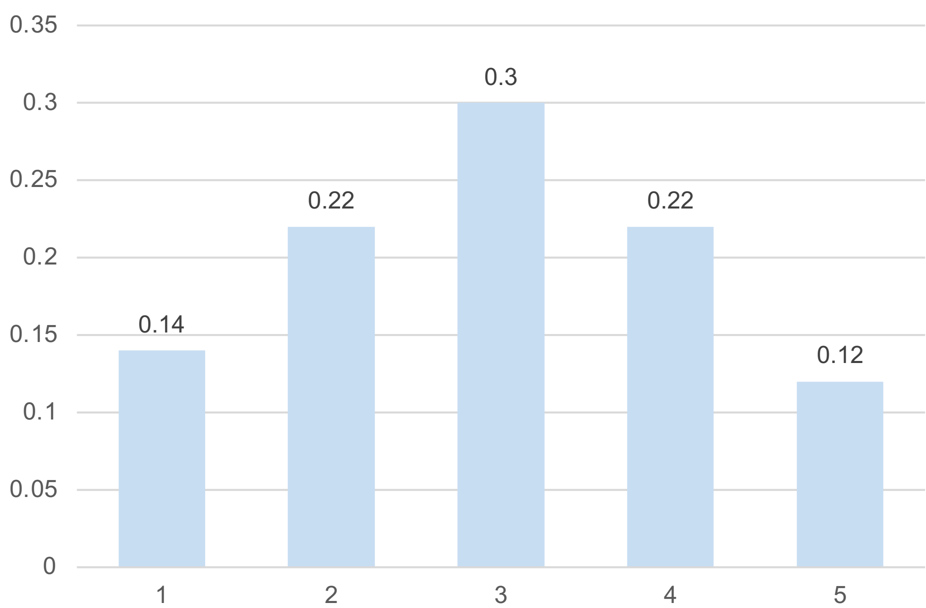
$$n = 50\ semanas$$

$$\sum_{1}^{50} x_1 + x_2 + .. + x_{50} = 148\ unidades$$

$$\mu = \frac{148\ unidades}{50\ semanas} = 2.96\ unidades/semana$$

Ejemplo1: Caracterizando incertidumbre – valor esperado

Unidades vendidas	Semanas	Probabilidad
1	7	0.14
2	11	0.22
3	15	0.3
4	11	0.22
5	6	0.12
	50	



$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$$

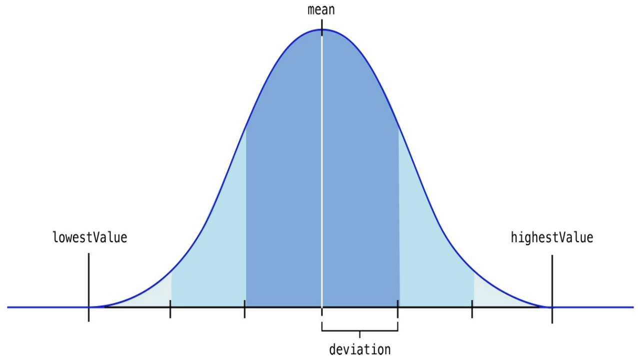
$$E(x) = \sum_{i=1}^{6} x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + \ldots$$

$$= (1)(0.14) + 2(0.22) + 3(0.3) + 4(0.22) + 5(0.12)$$

$$E(x) = 2.96\, unidades/semana$$

Medidas de dispersión

- Grado en que los datos numéricos tienden a esparcirse alrededor de un valor promedio, es la variabilidad de un conjunto de datos.
- Si los datos se encuentran muy dispersos, la posición central es menos representativa de los datos, como un todo, que cuando estos se agrupan mas cerca alrededor de la media.



1. Rango

Se define como la distancia entre el valor más máximo y el valor mínimo de un conjunto total de datos.

$$Rango = Valor\ máximo\ - Valor\ mínimo$$

Características:

- Fácil de encontrar
- Puede haber valores muy alto y muy bajos que no necesariamente representan la media
- Solo consideran dos valores del total de datos
- Menos útil

2. Varianza

Es el promedio de las observaciones respecto a su media elevada al cuadrado

Significa que:

- Se encuentra la cantidad por la cual cada observación se desvía de la media.
- Se elevan al cuadrado tales desviaciones.
- Se halla la media de tales desviaciones elevadas al cuadrado

Para datos **no agrupados**

Varianza poblacional

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N}$$

Varianza muestral

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

Para **datos agrupados**

Varianza poblacional

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \mu)^2}{N}$$

Varianza muestral

$$S^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

Medidas de dispersión

3. Desviación estándar

Es útil para describir como se apartan de la media la distribución de los elementos de forma individual.

Características:

- Uno de los parámetros estadísticos más importantes
- Más útil
- Calcula la distancia promedio en que los valores se alejan de la media
- Nunca negativa
- Solo 0 cuando todos sus datos son iguales.
- Es la raíz cuadrada de la varianza

Para datos **no agrupados**

Desviación estándar poblacional

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N}}$$

Desviación estándar muestral

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

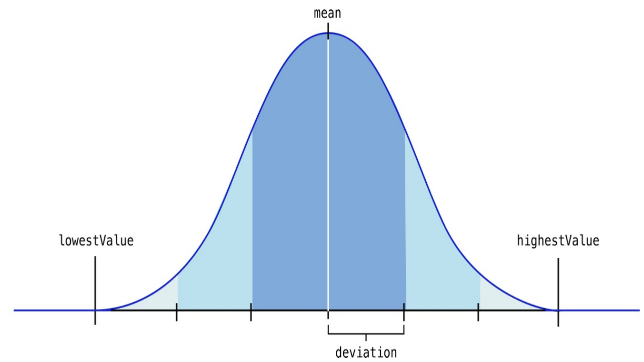
Para **datos agrupados**

Desviación estándar poblacional

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \mu)^2}{N}}$$

Desviación estándar muestral

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$



4. Coeficiente de variación

Medida relativa de dispersión, que puede compararse para diferentes distribuciones y que expresa la desviación estándar como porcentaje de la media

Útil para la comparación de dos conjuntos de datos.

$$C.V. = \frac{S}{\bar{X}} * 100$$

Medidas de posición

Consiste en determinar la ubicación de los valores que dividen un conjunto de observaciones en partes iguales. Estas medidas incluyen los cuartiles, deciles y percentiles.

Cuartiles (Q_i)

- Dividen a un conjunto de observaciones en cuatro partes iguales.
- El **primer cuartil** se representa mediante Q_1, es el valor bajo el cual se preseta **25%** de las observaciones
- El **segundo cuartil** (Q_2) representa el valor bajo el cual se presenta el **50%** de las observaciones. Es el valor de la mediana
- **El tercer cuartil** (Q_3), es el valor bajo el cual se presenta el **75%** de las observaciones

Deciles (D_i)

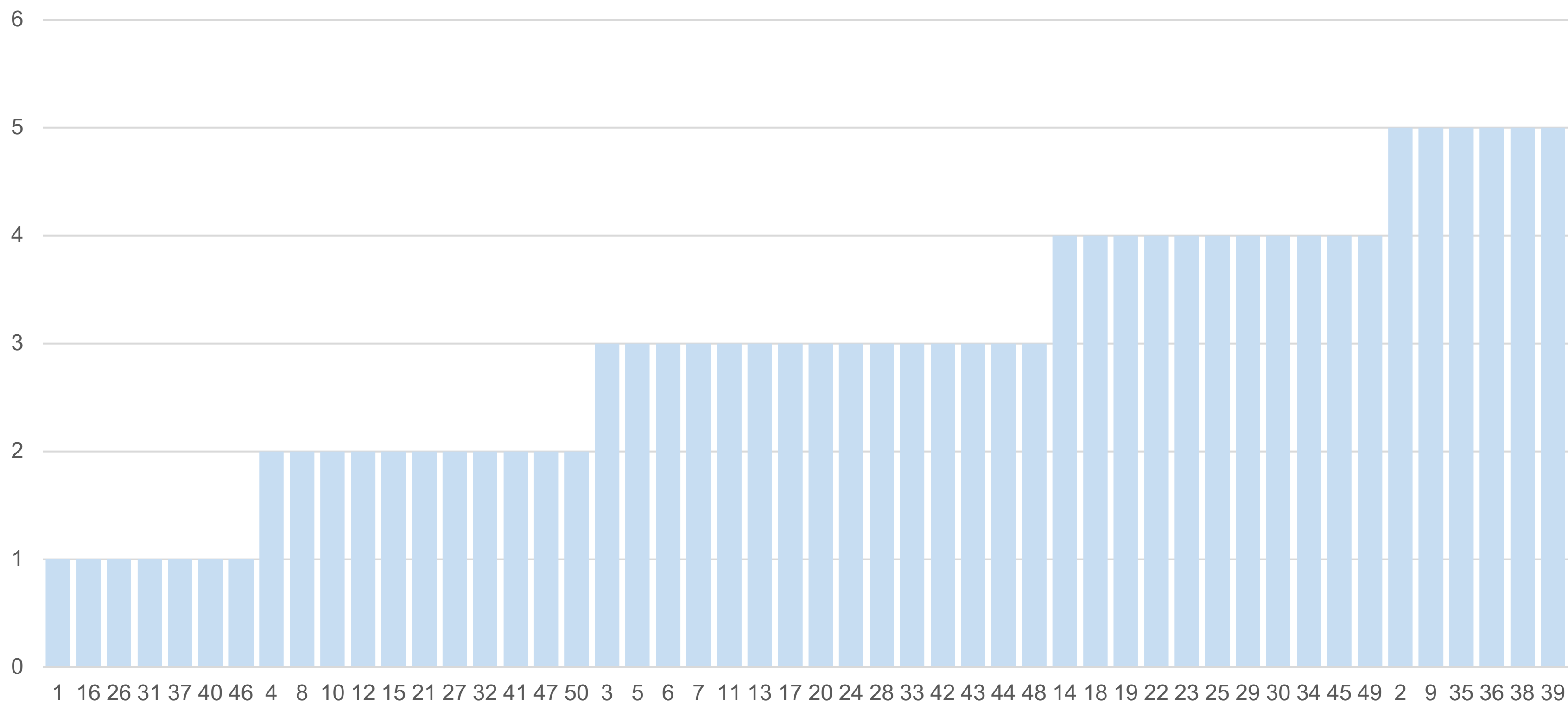
- Dividen un conjunto de observaciones en 10 partes iguales
- Se representan mediante la letra (D)
- El **primer decil** (D_1), es el valor bajo el cual se presenta el **10%** de las observaciones
- El **segundo decil** (D_2), es el valor bajo el cual se presenta el **20%** de las observaciones.
- El **tercer decil** (D_3), es el valor bajo el cual se presenta el **30%** de las observaciones
- Y así sucesivamente…

Percentiles (P_i)

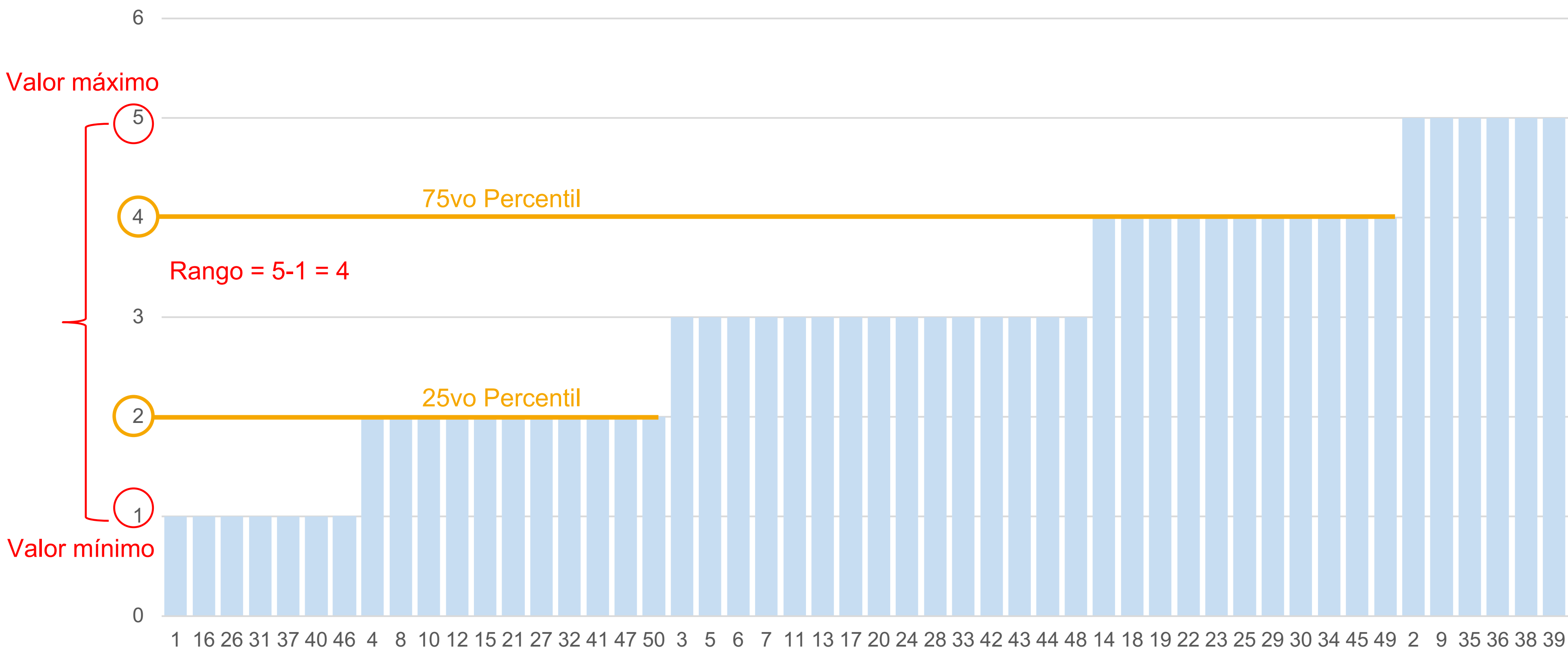
- Dividen un conjunto de observaciones en 100 partes iguales
- Se representan mediante la letra (P)
- El **octavo percentil**(P_8), es el valor bajo el cual se presenta el **8%** de las observaciones
- El **noveno percentil** (P_9), es el valor bajo el cual se presenta el **9%** de las observaciones.
- Y así sucesivamente…

$$L_p = (n+1)\frac{P}{100}$$

Ejemplo 1: Caracterizando incertidumbre - Dispersión



Ejemplo 1: Caracterizando incertidumbre - Dispersión



Ejemplo 1: Caracterizando incertidumbre - Dispersión

Unidades vendidas (xi)	Semanas	Probabilidad (pi)	xipi	xi-μ	$(\text{xi}-\mu)^2$	pi $(\text{xi}-\mu)^2$
1	7	0.14	0.14	-1.96	3.84	0.5378
2	11	0.22	0.44	-0.96	0.92	0.2028
3	15	0.3	0.9	0.04	0.00	0.0005
4	11	0.22	0.88	1.04	1.08	0.2380
5	6	0.12	0.6	2.04	4.16	0.4994
	50		2.96			

Varianza

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)(x_i - \mu)^2$$

$$\sigma^2 = 1.4784$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{1.4784}$$

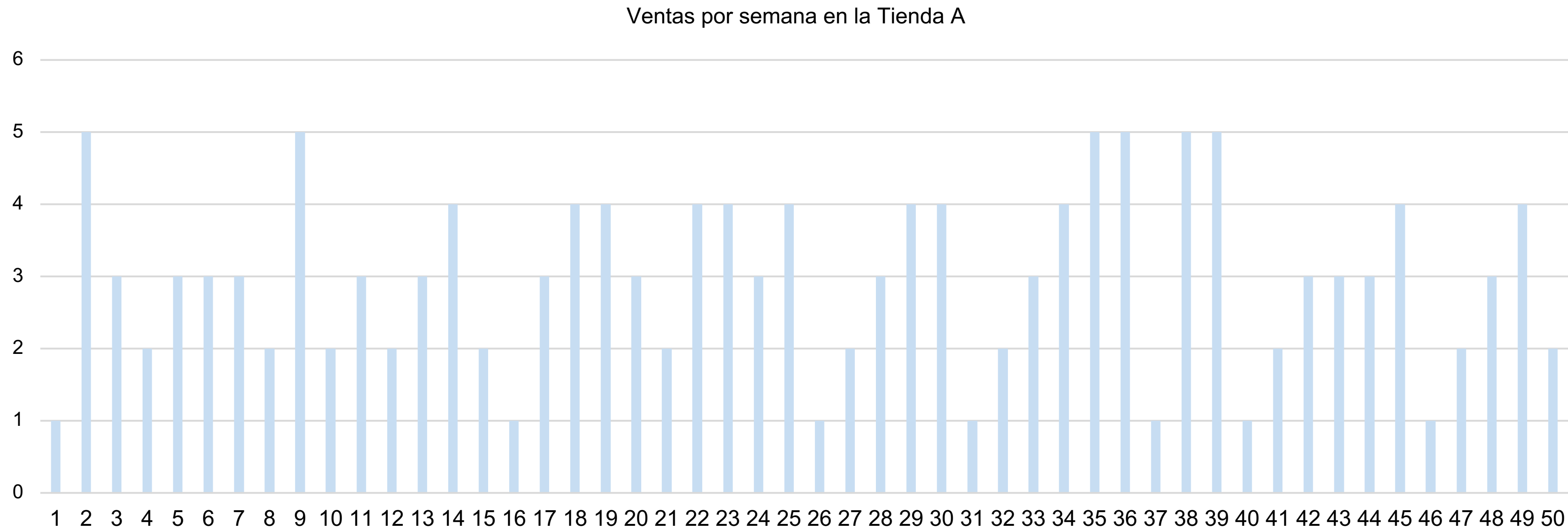
$$\sigma = 1.2159$$

Coeficiente de variación

$$C.V. = \frac{\sigma}{\mu} * 100$$

$$C.V. = \frac{1.2159}{2.96} * 100 = 0.411$$

Ejemplo 1: Caracterizando incertidumbre - Resumen



Valor mínimo = 1

Percentil 25 = 2

Media = 2.96

Mediana = Percentil 50 = 3

Moda = 3

Percentil 75 = 4

Valor máximo = 5

Rango = 4

Varianza = 1.48

Desviación estándar = 1.215

Coeficiente de variación = 0.411

Distribuciones de probabilidad

Distribución de probabilidad	Es una función que asigna a cada suceso definido sobre la variable de probabilidad de que dicho suceso ocurre. está definida sobre el conjunto de todos los sucesos y cada uno de los sucesos es el rango de valores de la variable aleatoria. También puede decirse que tiene una relación estrecha con las distribuciones de frecuencia.
Función de distribución acumulada (CDF)	Función de probabilidad acumulada asociada a una variable aleatoria real X sujeta a cierta ley de distribución de probabilidad. Describe la probabilidad que X tenga un valor menor o igual a x
Función de probabilidad (PMF)	es una función que asocia a cada punto de su espacio muestral X la probabilidad de que esta lo asuma

Distribución de probabilidad discreta

- Describe el comportamiento de una variable aleatoria.
- Los valores de la distribución son valores enteros
- Los valores de una distribución discreta pueden pueden provenir de fuentes:
  - **Empíricas** → basado en data actual o real (e.g. medidas, reportes de ventas, etc)
  - **Teórica** →basado en formas matemáticas
- Qué tipo de fuente es mejor?
  - Depende de lo que se desee alcanzar
  - Las distribuciones empíricas siguen un historial pasado
  - Las distribuciones teóricas permiten un modelado más robusto
  - Usualmente, se busca por la distribución teórica que encaje con los datos.

Distribución Uniforme Discreta

La distribución uniforme discreta es una distribución de probabilidad discrete que surge en en situaciones donde n resultados diferentes tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Notación

$$U(a, b)$$

$$n = b - a + 1$$

Donde:
$a =$ valor *mínimo*
b $=$ valor *máximo*

Media y mediana

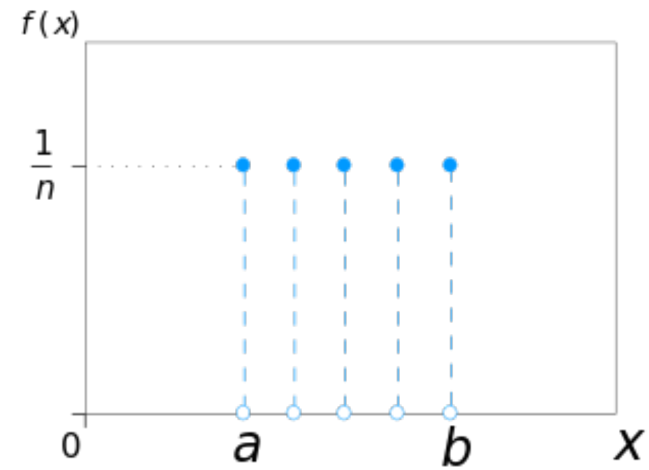
$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

Varianza

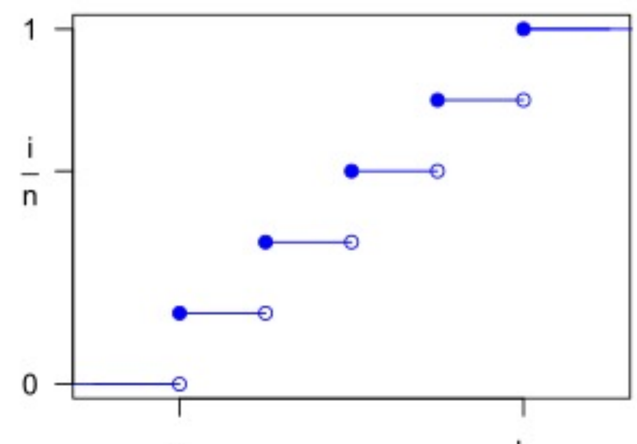
$$\sigma^2 = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

Función de densidad (PMF)

$$P[X = x] = f(x|a, b) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & a \leq x \leq b \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$



PMF



CDF

Ejemplo 2: Distribución Uniforme Discreta

Suponga que se lanza un dado. Cuál es la probabilidad que salga 1, 2, 3, 4, 5 o 6?

$$U(a,b)$$

$$U(1,6)$$

xi	fi	pi
1	1	0.1667
2	1	0.1667
3	1	0.1667
4	1	0.1667
5	1	0.1667
6	1	0.1667
	6	

Media

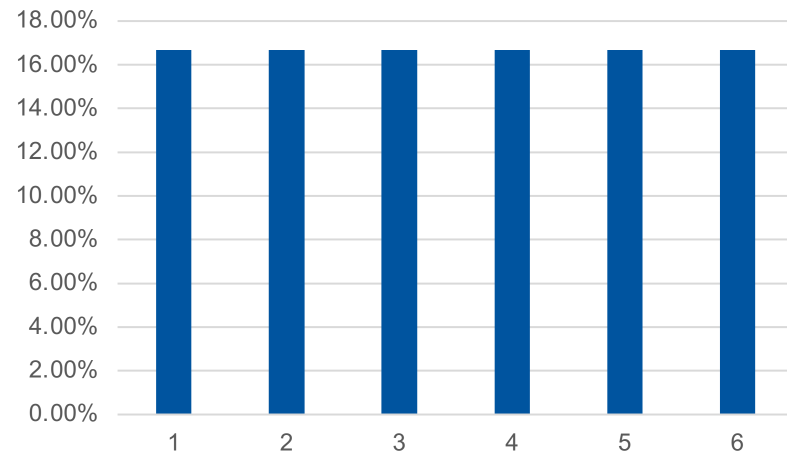
$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{1+6}{2} = 3.5$$

Varianza

$$\sigma^2 = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12} = \frac{(6-1+1)^2 - 1}{12} = 2.916$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1.708$$



Distribución de Poisson

Es una distribución de probabilidad discreta que expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierto período de tiempo.

$$P[X = x] = f(x|\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad para\ x = 0,1,2,\dots n$$

Donde:
λ = es el número promedio de resultados por unidad de tiempo, distancia,
e = 2.71828…
x! = factorial de x

Media λ

Ejemplo 3: Distribución de Poisson

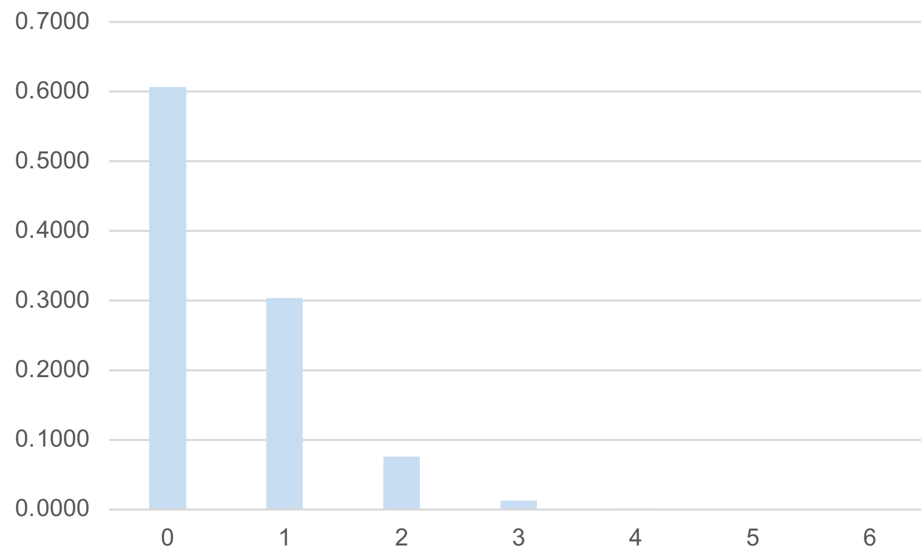
Suponga que $\lambda = 0.5$. Cómo se comportará la distribución?
Luego pruebe con $\lambda = 2\ , 5, 7\ y\ 10$

Ejemplo 3: Distribución de Poisson

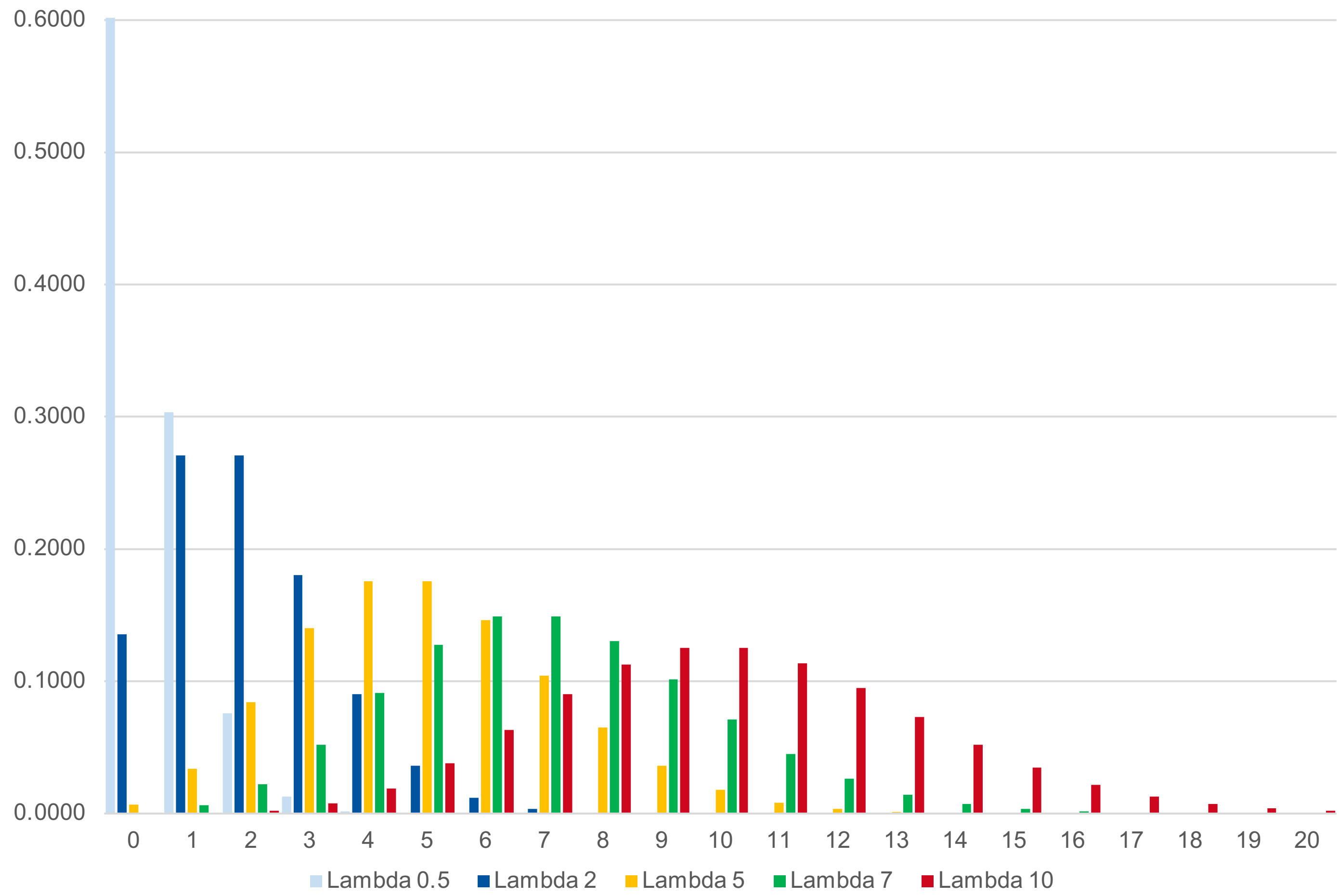
Suponga que $\lambda = 0.5$. Cómo se comportará la distribución?

$\lambda\ = 0.5$

xi	Pi
0	0.6065
1	0.3033
2	0.0758
3	0.0126
4	0.0016
5	0.0002
6	0.0000



Ejemplo 3: Distribución de Poisson



	Lambda				
xi	0.5	2	5	7	10
0	0.6065	0.1353	0.0067	0.0009	0.0000
1	0.3033	0.2707	0.0337	0.0064	0.0005
2	0.0758	0.2707	0.0842	0.0223	0.0023
3	0.0126	0.1804	0.1404	0.0521	0.0076
4	0.0016	0.0902	0.1755	0.0912	0.0189
5	0.0002	0.0361	0.1755	0.1277	0.0378
6	0.0000	0.0120	0.1462	0.1490	0.0631
7	0.0000	0.0034	0.1044	0.1490	0.0901
8	0.0000	0.0009	0.0653	0.1304	0.1126
9	0.0000	0.0002	0.0363	0.1014	0.1251
10	0.0000	0.0000	0.0181	0.0710	0.1251
11	0.0000	0.0000	0.0082	0.0452	0.1137
12	0.0000	0.0000	0.0034	0.0263	0.0948
13	0.0000	0.0000	0.0013	0.0142	0.0729
14	0.0000	0.0000	0.0005	0.0071	0.0521
15	0.0000	0.0000	0.0002	0.0033	0.0347
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0014	0.0217
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0006	0.0128
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0071
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0037
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0019

Ejemplo 4: Distribución de Poisson

Un taller de reparación de motores pequeños llegan trabajos de reparación a razón de 10 por día.

a. ¿Cuál es el número promedio de trabajos que se reciben a diario en el taller?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que no lleguen trabajos durante cualquier hora, suponiendo que el taller está abierto 8 horas al día?

Ejemplo 4: Distribución de Poisson

Un taller de reparación de motores pequeños llegan trabajos de reparación a razón de 10 por día.

a. ¿Cuál es el número promedio de trabajos que se reciben a diario en el taller?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que no lleguen trabajos durante cualquier hora, suponiendo que el taller está abierto 8 horas al día?

El número promedio de trabajos recibidos por día es igual a λ = 10 trabajos por día.

Para calcular la probabildiad de que lleguen trabajos por hora, temenos que calcular la tasa d ellegada por hora; es decir $\lambda = \frac{10}{8} = 1.25$ trabajos de reparación por hora. Por lo tanto

$$x = 0$$
$$\lambda = 1.25$$

$$p(x;\ \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$p(no\ hay\ llegadas\ por\ hora) = \frac{1.25^0 e^{-1.25}}{0!}$$

$$p(no\ hay\ llegadas\ por\ hora) = 0.2865$$

Ejemplo 5: Distribución de Poisson

Suponga que está atendiendo un centro de atención al cliente. Las llamadas de los clients llegan a una tasa de 2.2 llamadas por minute.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya llamadas en el próximo minuto?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que dos o menos llamadas entren en el próximo minuto?
c. ¿Cuál es la probabilidad de al menos una llamada entre en el próximo minuto?

Ejemplo 5: Distribución de Poisson

a. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya llamadas en el próximo minuto?

$$P[X=0]=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}=\frac{2.2^0 e^{-2.2}}{0!}=0.11 \;\rightarrow 11\%$$

b. ¿Cuál es la probabilidad de que dos o menos llamadas entren en el próximo minuto?

$$P[X=0]=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}=\frac{2.2^0 e^{-2.2}}{0!}=0.11 \;\rightarrow 11\%$$

$$P[X=1]=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}=\frac{2.2^1 e^{-2.2}}{1!}=0.24 \;\rightarrow 24\%$$

$$P[X\leq 2]=62\%$$

$$P[X=2]=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}=\frac{2.2^2 e^{-2.2}}{2!}=0.27 \;\rightarrow 27\%$$

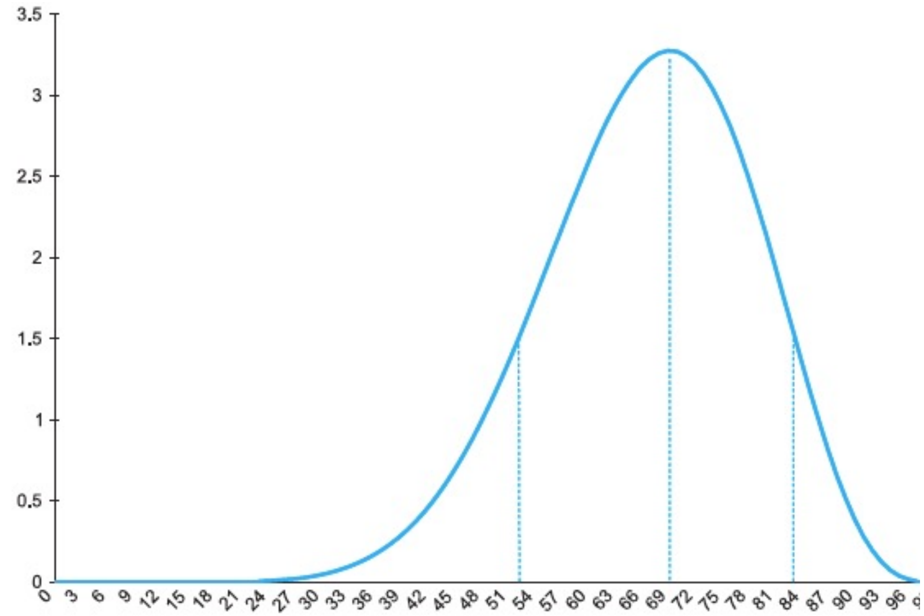
c. ¿Cuál es la probabilidad de al menos una llamada entre en el próximo minuto?

$$P[X>0]=1-P[X=0]=1-0.11=0.89 \;\rightarrow 89\%$$

Distribución de probabilidad continua

Una distribución de probabilidad en la que la variable aleatoria X puede tomar cualquier valor (es continua). Debido a que existen infinitos valores que X podría asumir, la probabilidad de que X adopte cualquier valor específico es cero.

Una **función de densidad**, generalmente denotada por f (x), especifica la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua X. Cuanto mayor es f (x), más probable es x. Además, el área total entre la gráfica de f (x) y el eje horizontal, que representa la probabilidad total, es igual a 1. Finalmente, f (x) no es negativo para todos los valores posibles de X.

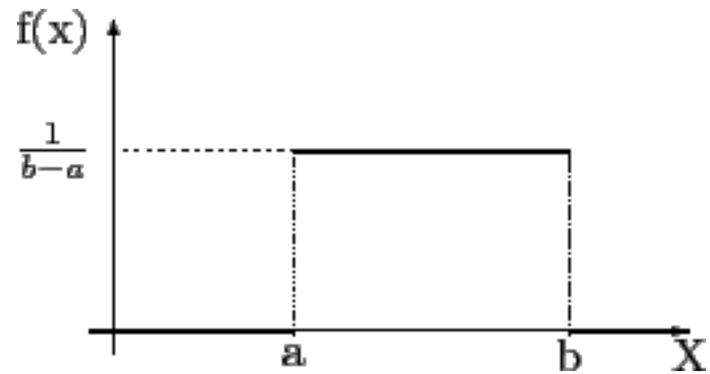


Distribución Uniforme Continua

Esta distribución se caracteriza por una función de densidad que es “plana”, por lo cual la probabilidad es uniforme en un intervalo cerrado, [a, b].

La **función de densidad (pmf)** de la variable aleatoria continua X en el intervalo [a, b] es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$



La función de densidad forma un rectángulo con base $b - a$ y altura $\frac{1}{b-a}$

Media y mediana

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

Varianza

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Función de distribución (cdf)

$$F(t|a,b) = \begin{cases} 0 & if\ t < a \\ \dfrac{t-a}{b-a} & if\ a \leq t \leq b \\ 1 & if\ t > b \end{cases}$$

Ejemplo 6: **Distribución uniforme contínua**

Una empresa tiene un departamento de entrega a domicilio. Distribuyen el producto desde una locación en el centro de la ciudad hacia residencias y oficinas en la ciudad. Las entregas son realizadas en scooters y entregada directamente a cada cliente. Se registra que la distancia entre cada cliente es 2.75 km a 6.50 km. Asuma una distribución uniforme contínua

a. ¿Cuál es la distancia promedio y el coeficiente de varianza?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia sea mayor que 5 km?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia es +/- 1σ de μ?

Ejemplo 6: Distribución uniforme contínua

a. ¿Cuál es la distancia promedio, la desviación estándar y coeficiente de variación?

$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{2.75+6.50}{2} = 4.625\ km$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(6.50-2.75)^2}{12} = 1.1719 \rightarrow \sigma = \sqrt{1.1719} = 1.0825$$

$$C.V. = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{1.0825}{4.625} = 0.23$$

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia sea mayor que 5 km?

$$F[X \leq t] = P[X \leq t] = \frac{t-a}{b-a}$$

$$P[X \geq 5] = 1 - P[X \leq t]$$

$$= 1 - \frac{t-a}{b-a} = 1 - \frac{5-2.75}{6.5-2.75} = 0.4 \rightarrow 40\%$$

Ejemplo 6: Distribución uniforme contínua

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia es +/- 1σ de μ?

$\sigma = 1.0825$

$\mu = 4.625$

$$\mu + \sigma = 4.625 + 1.0825 = 5.7075$$
$$\mu - \sigma = 4.625 - 1.0825 = 3.5425$$

$$P[X \leq 5.7075] = \frac{5.7075 - 2.75}{6.5 - 2.75} = 0.789$$

$$P[X \geq 3.5425] = \frac{3.5425 - 2.75}{6.5 - 2.75} = 0.211$$

$$P[3.5425 \geq X \leq 5.7075] = 0.789 - 0.211 = 58\%$$

Distribución Exponencial

Esta distribución con frecuencia describe el tiempo requerido para atender a un cliente.

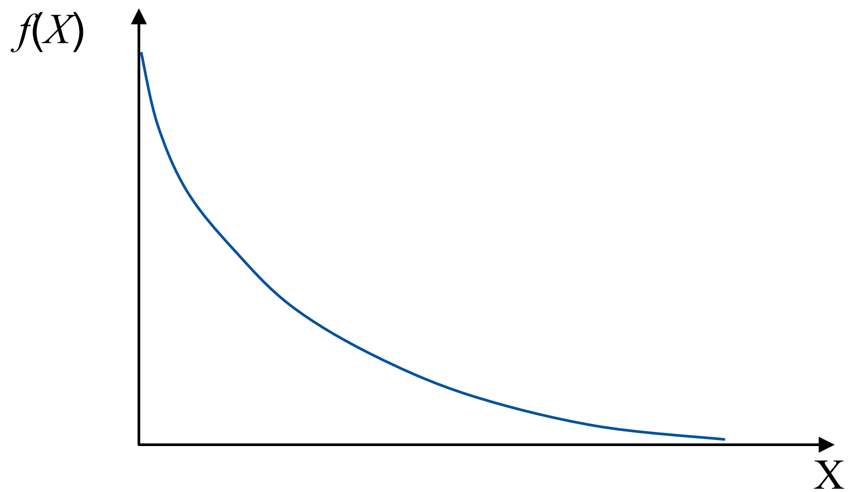
La distribución exponencial es una distribución continua.

Su función de probabilidad está dada por

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}$$

donde

$x = variable\ aleatoria\ (tiempo\ de\ servicio)$
$\mu = número\ promedio\ de\ unidades\ que\ puede\ manejar\ la\ estación\ de\ servicio\ en\ un\ periodo\ específico$
$e = 2.71828$



El valor esperado puede calcularse como $= \frac{1}{\mu}$, tiempo de servicio promedio

Ejemplo 7: Distribución Exponencial

Los automóviles llegan al azar a una gasolinera. El tiempo promedio entre llegadas es de 2 minutos.

Determine la probabilidad de que el tiempo entre llegadas no exceda de 1 minuto.

Ejemplo 7: Distribución Exponencial

Los automóviles llegan al azar a una gasolinera. El tiempo promedio entre llegadas es de 2 minutos.
Determine la probabilidad de que el tiempo entre llegadas no exceda de 1 minuto.

La tasa de llegadas es de $\mu = \frac{1}{2}$ llegadas por minuto. El valor de x = 1

$$P(X \leq 1) = 1 - e^{-\mu x}$$

$$P(X \leq 1) = 1 - e^{-\left(\frac{1}{2}\right)(1)}$$

$$P(X \leq 1) = 0.3934$$

Ejemplo 8: Distribución Exponencial

El taller Arnold's Muffler instala silenciadores en automóviles y camiones pequeños. El mecánico puede instalar silenciadores nuevos a una tasa aproximada de tres por hora y este tiempo de servicio sigue una distribución exponencial. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo para instalar un silenciador nuevo sea de ½ hora o menos?

Ejemplo 8: Distribución Exponencial

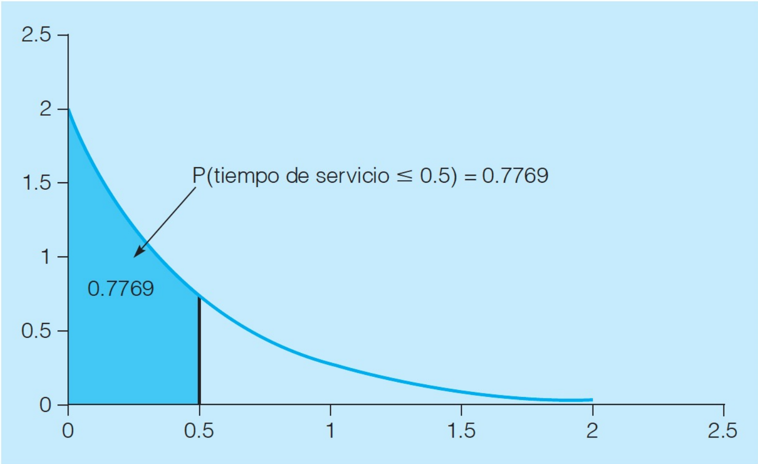
$x = tiempo\ de\ servicio\ con\ distribución\ exponencial$
$\mu = número\ promedio\ que\ se\ puede\ atender\ por\ periodo = 3\ por\ hora$
$t = 0.5\ hora$

$$P(x \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$$

$$P(x \leq 0.5) = 1 - e^{-(3)(0.5)}$$

$$P(x \leq 0.5) = 1 - 0.2231$$

$$P(x \leq 0.5) = 0.7769$$



La grafica muestra el area bajo la curva de 0 a 0.5 es de 0.7769.
Entonces hay una probabilidad cercana a 78% de que el tiempo no sea mayor que 0.5 horas y de 22% de que el tiempo sea más largo. 3

Ejemplo 8: Distribución Exponencial

De manera similar, determinamos la probabilidad de que el tiempo de servicio no sea mayor que 1/3 de hora o 2/3 de hora, como sigue

$$P\left(x \leq \frac{1}{3}\right) = 1 - e^{-(3)\left(\frac{1}{3}\right)} = 1 - 0.3679 = 0.6321$$

$$P\left(x \leq \frac{2}{3}\right) = 1 - e^{-(3)\left(\frac{2}{3}\right)} = 1 - 0.1353 = 0.8647$$

Mientras que la ecuación da la probabilidad de que el tiempo (X) sea menor o igual que un valor dado de t, la probabilidad de que el tiempo sea mayor que un valor dado de t se encuentra observando que estos dos eventos son complementarios.

Por ejemplo, para encontrar la probabilidad de que el mecánico del taller Arnold's Muffler tarde más de 0.5 horas, tenemos

La distribución de Poisson y la distribución exponencial están relacionadas

La distribución de probabilidad exponencial continua se relaciona con la distribución discrete de Poisson. La distribución de Poisson proporciona una descripción apropiada del número de ocurrencias por intervalo y la distribución exponencial proporciona una descripción de la longitud del intervalo entre ocurrencias.

Si el número de ocurrencias por periodo sigue una distribución de Poisson, entonces, el tiempo entre ocurrencias sigue una distribución exponencial:

- Suponga que el número de llamadas telefónicas que llegan a un centro de servicio a clientes sigue una distribución de Poisson con media de 10 llamadas por hora. El tiempo entre cada llamada será exponencial con tiempo medio entre llamadas de 1/10 horas (6 minutos).

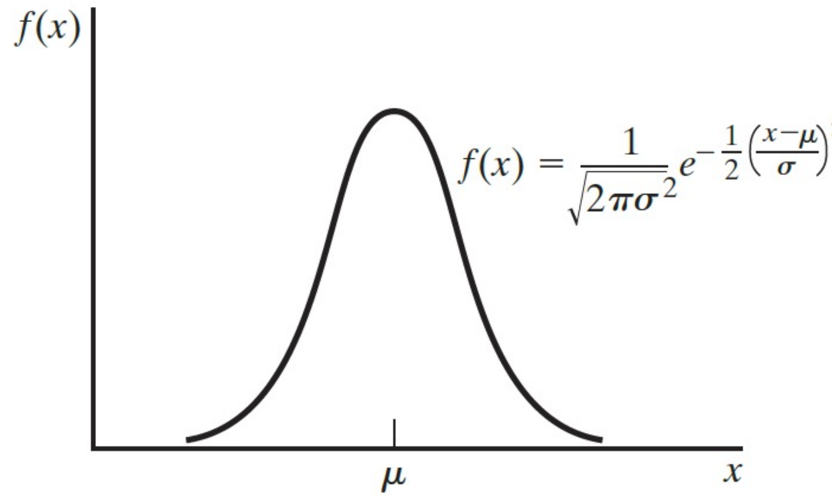
- Para ilustrar esta relación, suponga que la cantidad de automóviles que llega a un centro de lavado durante 1 hora se describe mediante una distribución de probabilidad de Poisson con una media de 10 automóviles por hora. Por tanto, la función de probabilidad de Poisson que proporciona la probabilidad de x llegadas por hora es $f(x;\, \lambda) = \frac{10^x e^{-10}}{x!}$,el número medio de llegadas es de 10 automóviles por hora así que el tiempo medio entre los automóviles que llegan es 1 hora/ automóviles = 0,1 hora/auto. Por lo tanto , la distirbución exponencial correspondiante que describe el tiempo entre la llegada de. Automóviles tiene una media de 0.1 horas por automovil. La función de densidad de probabildiad exponencial apropiada sería: $f(x) = \frac{1}{0.1} e^{-10t}$

Distribución Normal

Es una de las distribuciones de probabilidades continuas más populares y útiles.

La función de densidad de probabilidad está dada por la fórmula :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



- La distribución normal queda especificada por completo cuando se conocen los valores de la media, μ, y la desviación estándar, σ.
- La distribución normal es simétrica y su punto medio está en la media.
- Cambiando la media no cambia la forma de la distribución.
- Los valores en el eje X se miden en términos de cuántas desviaciones estándar están separados de la media.
- Cuando la desviación estándar se hace más grande, la curva se aplana.
- Cuando la desviación estándar se hace más pequeña, la curva es más pronunciada.

Distribución Normal: Propiedades

1. La moda, que es el punto sobre el eje horizontal donde la curva tiene su punto máximo, ocurre en $x = \mu$.
2. La curva es simétrica alrededor de un eje vertical a través de la media μ.
3. La curva tiene sus puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$, es cóncava hacia abajo si $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$, y es cóncava hacia arriba en otro caso.
4. La curva normal se aproxima al eje horizontal de manera asintótica, conforme nos alejamos de la media en cualquier dirección.
5. El área total bajo la curva y sobre el eje horizontal es igual a uno.

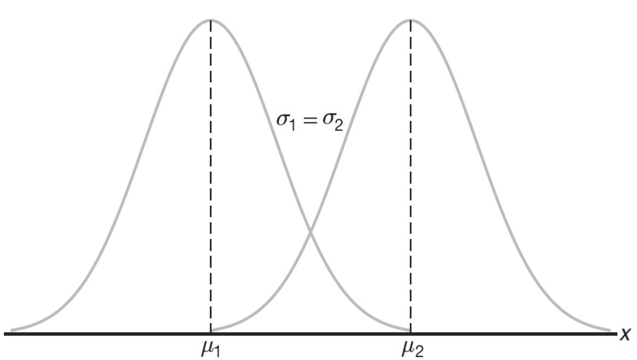


Figura 6.3: Curvas normales con $\mu_1 < \mu_2$ y $\sigma_1 = \sigma_2$.

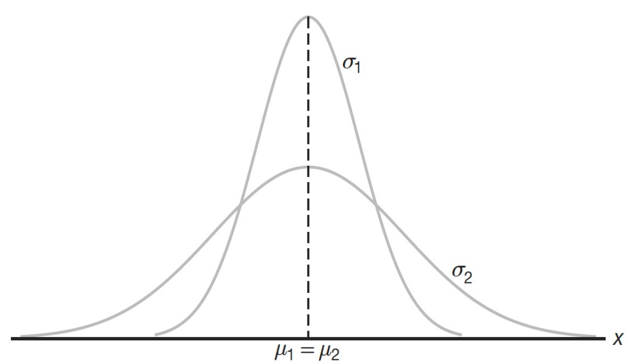


Figura 6.4: Curvas normales con $\mu_1 = \mu_2$ y $\sigma_1 < \sigma_2$.

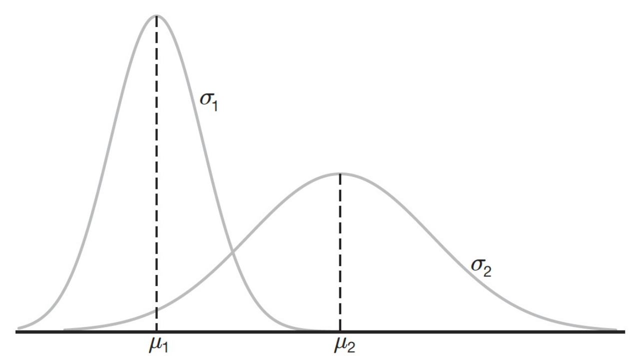


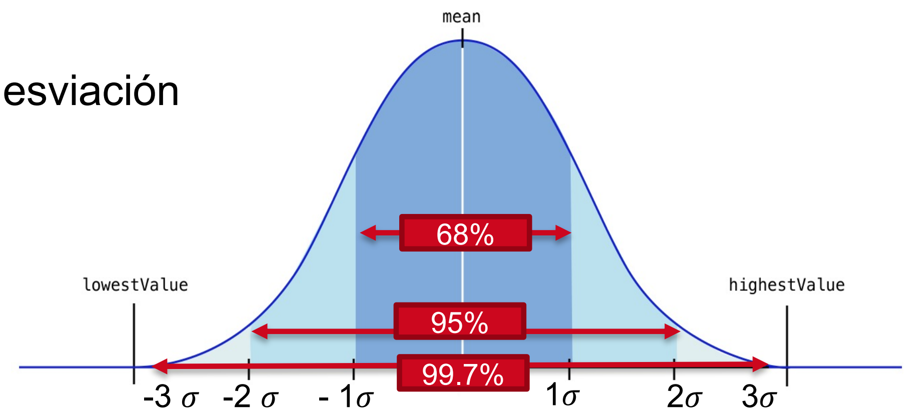
Figura 6.5: Curvas normales con $\mu_1 < \mu_2$ y $\sigma_1 < \sigma_2$.

Área bajo la curva normal

Distribución normal es una distribución de datos continuos (no discretos) que produce una curva simétrica en forma de campana

Regla empírica:

- El 68% de los datos están entro de mas o menos una desviación estándar de la media,
  (entre - 1σ y 1σ)
- El 95% de los datos están entro de mas o menos dos desviaciones estándar de la media
  (entre - 2σ y 2σ)
- El 99.7% de los datos están entro de mas o menos tres desviaciones estándar de la media
  (entre - 3σ y 3σ)



Variable estandarizada Z

- Es la variable que mide la desviación respecto a la media en términos de unidades de desviaciones estándar
- Permite comparar la desviación estándar entre dos conjunto de datos
- Da como resultado cuantas desviaciones estándar lejos de la media se encuentra el valor analizado.

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Algunas funciones de Excel para estadísticas

Función	Fórmula
Mínimo	=MIN()
Mediana	=MEDIAN()
Moda	=MODE()
Media	=AVERAGE()
Maximo	=MAX()
Percentil	=PERCENTIL.INC()
Varianza poblacional	=VAR.P()
Varianza muestral	=VAR.S()
Desviación estándar poblacional	=STDEV.P()
Desviación estándar muestral	STDEV.S()
Distribución de Poisson	=POISSON.DIST(x, lambda, cumulativa)
Distribución exponencial	=EXPON.DIST(x, lambda, cumulativa)

Referencias bibliográficas

- Spiegel, M & Stephens, L. (2009). *Estadística*. McGraw-Hill. México
- Mittag, H. (2017). *Statistik: Eine Einfürung mit Interaktiven Elementen*. Springer-Verlag
- Spiegel & Murray. *Estadística*. McGraw-Hill.
- Johnson, R. & Kuby, P. (2016). *Estadística elemental*. Cengage
- Walpole et al. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias.* Pearson
- Lind et al. (2015). *Estadística aplicada a los negocios y a la economía*. McGraw-Hill
- Daly et al. (2017). *Estadística general con aplicaciones*. Editorial Tecnológica
- Cassandras & Lafortune. (2008). *Introduction to Discrete Event Systems*. Springer
- García et al. (2013). *Simulación y Análisis de Sistemas con ProModel*. Editorial Pearson.
- Render, B. (2016). *Métodos cuantitativos para los Negocios*. Editorial Pearson.
- Taha, H. (2011). *Investigación de Operaciones*. Editorial Pearson.
- Cassandras & Lafortune. (2008). *Introduction to Discrete Event Systems*. Springer
- García et al. (2013). *Simulación y Análisis de Sistemas con ProModel*. Editorial Pearson.
- Albright & Winston.(2013). Business Analytics: Data Analysus and Decision Making. Cengage

Contacto

Ricardo Caballero, M.Sc.

Docente Tiempo Completo
Facultad de Ingeniería Industrial
Centro Regional de Chiriquí
Universidad Tecnológica de Panamá

E-mail: ricardo.caballero@utp.ac.pa

https://www.academia.utp.ac.pa/ricardo-caballero