

Investigación de Operaciones

Tema 2

Programación Lineal

Profesor:

Ricardo Caballero, M.Sc.

✉ ricardo.caballero@utp.ac.pa



Conceptos básicos

La Programación Lineal (PL) es una técnica matemática que ayuda a tomar decisiones de asignación de recursos. Involucra la planeación de actividades para obtener un resultado óptimo.

Los modelos de Programación Lineal están compuestos por:

1. **Variables de decisión**
2. **Función objetivo:** enunciado matemático que representa la meta que se necesita optimizar (maximizar o minimizar).
3. **Restricciones:** limitaciones de recursos y capacidad que la solución debe satisfacer (se representan como desigualdades o ecuaciones)

Propiedades

- Deben haber **alternativas disponibles**
- Las relaciones matemáticas son **lineales**
- Se supone existen condiciones de **certeza**, se conocen con certeza el número en el objetivo y en las restricciones y no varían durante el periodo de estudio (parámetros dados)
- Se supone **divisibilidad**. Las soluciones no necesitan números enteros, pueden tomar cualquier valor fraccionario
- **No negatividad**. Se supone que todas las respuestas o variables son no negativas. Los valores negativos de cantidades físicas son imposibles.

Formulación del problema

- Proceso de traducir una descripción verbal de un problema en un enunciado matemático.
- El enunciado matemático del problema se conoce como modelo matemático.

Pasos para formulación son:

1

Entender el problema

2

Definir las variables de decisión

3

Formular la función objetivo y restricciones

4

Resolver

5

Tomar decisión

Forma canónica para un problema de Programación Lineal

Lo primero será identificar las variables de decisión x_i , donde $i = 1, \dots, n$.

Entonces se establecerá el criterio objetivo: **maximizar** o **minimizar** alguna función de la forma

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{i=1}^n c_ix_i$$

donde c_i representa constantes dependientes del problema.

Las limitaciones de recursos y los límites de las variables de decisión se escribirán como ecuaciones o desigualdades que relacionan una función lineal de las variables de decisión con los coeficientes dependiente del problema siendo menor o mayor que otra constante b_i (valor de restricción); por ejemplo,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

Finalmente, se formula la restricción de no negatividad para toda variable x_i en el conjunto de los números reales

$$x_i \geq 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, n \quad \forall x_i \in \mathbb{R}$$

Forma canónica para un problema de Programación Lineal

Se obtiene una notación aún más compacta con la notación de matriz vectorial del álgebra lineal. Para ello, sea x el vector columna de las variables de decisión, c el vector columna de los coeficientes de la función objetivo, b el vector columna de los valores de restricción y A la matriz de los coeficientes.

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con

$$c^T = (c_1, \dots, c_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1: Formulación de un problema de maximización

Furniture City fabrica mesas y sillas de bajo precio. El proceso de fabricación de cada producto se parece en que ambos requieren cierto número de horas de trabajo de carpintería, así como cierto número de horas de trabajo en el departamento de pintura y barnizado. Cada mesa requiere de 4 horas de carpintería y 2 horas en el taller de pintura y barnizado. Cada silla requiere de 3 horas de carpintería, y 1 hora en la pintura y barnizado. Durante el periodo de producción actual, hay 240 horas de tiempo de carpintería disponibles, así como 100 horas de tiempo disponibles en pintura y barnizado. Cada mesa vendida genera una utilidad de \$70; cada silla fabricada se vende con una utilidad de \$50.

El problema de Furniture City es determinar la mejor combinación posible de mesas y sillas a fabricar, con la finalidad de alcanzar la utilidad máxima. La empresa desea que esta situación de mezcla de producción se formule como un problema de programación lineal.

Ejemplo 1: Formulación de un problema de maximización

Departamento	Horas necesarias para producir 1 unidad		Horas disponibles en la semana
	Mesas	Sillas	
Carpintería	4	3	240
Pintura y barnizado	2	1	100
Utilidad por unidad	\$70	\$50	

- El problema nos solicita

Maximizar la utilidad

- Las restricciones son:

- *Las horas de tiempo de carpintería utilizadas no pueden exceder las 240 horas disponibles por semana.*
- *Las horas de tiempo de pintura y barnizado utilizadas no pueden exceder las 100 horas disponibles por semana.*

- Las variables de decisión que representan las decisiones reales que tomarán se definen como:

x_1 = número de mesas producidas por semana

x_2 = número de sillas producidas por semana

Ejemplo 1: Formulación de un problema de maximización

Función objetivo:

$$\text{Maximizar } Z = 70x_1 + 50x_2$$

s.a.:

$$\begin{array}{ll} 4x_1 + 3x_2 \leq 240 & \text{Restricción de carpintería} \\ 2x_1 + x_2 \leq 100 & \text{Restricción de pintura y barnizado} \\ x_i \geq 0 \quad ; i = 1,2 & \text{Restricción de no negatividad} \end{array}$$

Ejemplo 2: Formulación de un problema de minimización

QUIMICOS SA fabrica dos productos que se venden como materias primas a empresas que elaboran jabones de baño y detergentes para lavar ropa. Con base en un análisis de los niveles de inventario actuales y la demanda potencial para el próximo mes, la gerencia de QUIMICOS SA ha especificado que la producción combinada de los productos A y B debe sumar un total de 350 galones como mínimo. Por otra parte, también debe surtir el pedido de 125 galones del producto A con un cliente importante. El producto A requiere 2 horas de tiempo de procesamiento por galón, mientras que el producto B requiere 1 hora de tiempo de procesamiento por galón, y para el próximo mes, se cuenta con 600 horas de tiempo de procesamiento disponibles. El objetivo de QUIMICOS SA es satisfacer estos requerimientos con un costo de producción total mínimo. Los costos de producción son \$2 por galón del producto A y \$3 por galón del producto B

Ejemplo 2: Formulación de un problema de minimización

Variables de decisión

x_1 = número de galones del producto A

x_2 = número galones del producto B

La función objetivo del problema sería

$$\text{Minimizar } Z = 2x_1 + 3x_2$$

Las restricciones del problema serían las siguientes:

s.a.:

$x_1 \geq 125$	}	Demanda del producto A
$x_1 + x_2 \geq 350$	}	Producción total
$2x_1 + x_2 \leq 600$	}	Tiempo de procesamiento
$x_1, x_2 \geq 0$	}	Restricción de no negatividad

Ejemplo 3: Problemas de dieta

Una mezcla de vegetales liofilizados debe estar compuesta de frijoles, maíz, brócoli, repollo y papas. La mezcla debe contener (en peso) como máximo un 40 % de frijoles y como máximo un 32 % de patatas. La mezcla debe contener al menos 5 gramos de hierro, 36 gramos de fósforo y 28 gramos de calcio. Los nutrientes de cada vegetal y los costos se muestran en la siguiente tabla.

	Miligramos de nutriente por libra de verdura			
Vegetales	Hierro	Fósforo	Calcio	Costo por libra (cents)
Frijoles	0.5	10	200	20
Maíz	0.5	20	280	18
Brócoli	1.2	40	800	32
Repollo	0.3	30	420	28
Patatas	0.4	50	360	16

Se debe determinar la cantidad de cada verdura a incluir de manera que se minimice el costo de la mezcla.

Ejemplo 3

Sea

x_i = número de libras de frijoles, maíz, brócoli, repollo y papas

La función objetivo es:

$$\text{Min } Z = 20 x_1 + 18 x_2 + 32 x_3 + 28 x_4 + 16 x_5$$

Las restricciones son

$$x_1 \leq 0.4 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$x_5 \leq 0.32 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 + 1.2x_3 + 0.3x_4 + 0.4x_5 \geq 5000$$

$$10x_1 + 20x_2 + 40x_3 + 30x_4 + 50x_5 \geq 36000$$

$$200x_1 + 280x_2 + 800x_3 + 420x_4 + 360x_5 \geq 28000$$

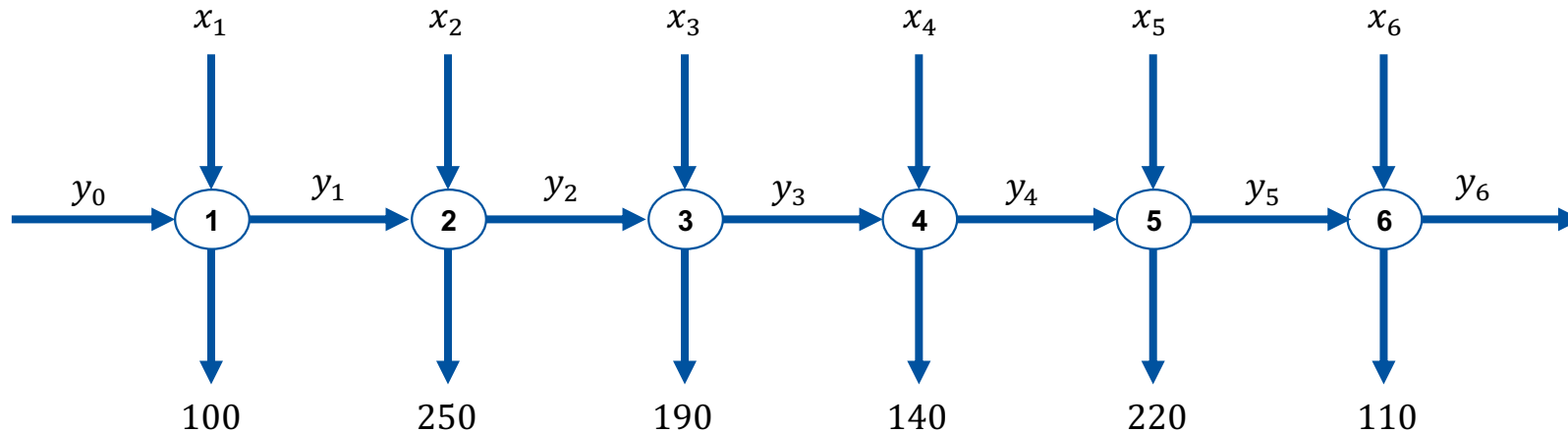
$$x_i \geq 0$$

Ejemplo 4: Modelo de producción en inventario durante periodos múltiples

Hopsa firmó un contrato para entregar 100, 250, 190, 140, 220 y 110 ventanas para casa durante los siguientes seis meses. El costo de producción (mano de obra, material y servicios) por ventana varia por periodo y se estima que será de \$50, \$45, \$55, \$48, \$52 y \$50 durante los próximos seis meses. Para aprovechar las fluctuaciones del costo de fabricación, Hopsa puede producir más ventanas de las necesarias en un mes dado y conservar las unidades adicionales para entregarles en meses posteriores. Esto supondrá un costo de almacenamiento a razón de \$8 por ventana por mes, estimado en el inventario de fin de mes. Desarrollo un programa lineal para determinar el programa de producción óptimo

Ejemplo 4: Modelo de producción en inventario durante periodos múltiples

El problema desea determinar las relaciones entre cantidades producidas, demanda mensual y el inventario óptimo para los 6 meses de manera que los costos sean mínimos



○ = mes

x_i = cantidades producidas de producto

y_0 = inventario inicial

y_i = inventario de fin de mes

Inventario final

= cantidad producida + inventario inicial – demanda

Ejemplo 4: Modelo de producción en inventario durante periodos múltiples

- Las variables de decisión son:

x_i = cantidad de unidades producidas en el mes i

y_i = unidades que quedan en el inventario de fin de mes i

Sea $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

- Se busca en el problema minimizar los costos totales de producción e inventario, por ende la función objetivo sería:

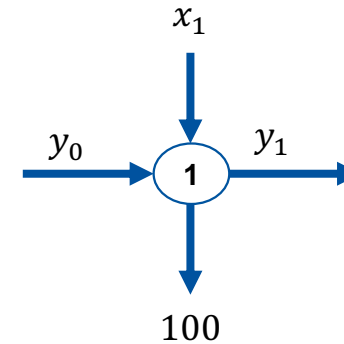
$$\text{F.O.: Min} Z = 50x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 48x_4 + 52x_5 + 50x_6 + 8(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6)$$

Costos totales de producción

Costos de inventario

Ejemplo 4: Modelo de producción en inventario durante periodos múltiples

Demanda = cantidad producida + inventario inicial – inventario final



- La formulación del problema sería:

$$\text{F.O.: Min} Z = 50x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 48x_4 + 52x_5 + 50x_6 + 8(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6)$$

s.a.:

$$x_1 - y_1 = 100$$

$$y_1 + x_2 - y_2 = 250$$

$$y_2 + x_3 - y_3 = 190$$

$$y_3 + x_4 - y_4 = 140$$

$$y_4 + x_5 - y_5 = 220$$

$$y_5 + x_6 = 110$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4,5,6 \quad ; \quad y_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4,5$$

Ejemplo 5: Selección de medios de comunicación

Una empresa desea promocionar su producto estrella y tiene un presupuesto de hasta \$8,000 semanales para anuncios locales. El dinero se asignará entre cuatro medios de comunicación: spots en televisión, anuncios en periódicos y dos tipos de comerciales en radio. El objetivo de la empresa es llegar a la audiencia de mayor potencial más grande posible, usando los diferentes medios de comunicación. La siguiente tabla presenta el número de clientes potenciales expuestos mediante un anuncio en cada uno de los cuatro medios. También proporciona el costo por anuncio colocado y el máximo número de ellos que se puede comprar por semana.

Medio	Audiencia alcanzada	Costo por anuncio (\$)	Máximo de anuncio por semana
Spot en TV (1 minuto)	5000	800	12
Periódico (una plana)	8500	925	5
Spot en radio (30 segundos, horario estelar)	2400	290	25
Spot de radio (1 minuto, en la tarde)	2800	380	20

El contrato requiere que se coloquen al menos cinco spots de radio cada semana. Para asegurar una campaña promocional de amplio espectro, la gerencia también insiste en que no se gasten más de \$1,800 por semana en los comerciales de radio.

Ejemplo 5: Selección de medios de comunicación

La formulación del problema es

X_1 = número de spots de TV de 1 minuto en cada semana

X_2 = número de anuncios de 1 plana en el periódico en cada semana

X_3 = número de spots de radio de 30 segundos en cada semana

X_4 = número de spots de radio de 1 minuto por la tarde en cada semana

Función objetivo :

$$\text{Max. } Z = 5,000X_1 + 8,500X_2 + 2,400X_3 + 2,800X_4$$

Sujeta a

$$X_1 \leq 12 \quad (\text{máx. de spots en TV/semana})$$

$$X_2 \leq 5 \quad (\text{máx. de anuncios en periódico/sem})$$

$$X_3 \leq 25 \quad (\text{máx. de spots de 30 s en radio/sem})$$

$$X_4 \leq 20 \quad (\text{máx. de spots de 1 min en radio/sem})$$

$$800X_1 + 925X_2 + 290X_3 + 380X_4 \leq \$8,000 \quad (\text{presupuesto semanal de publicidad})$$

$$X_3 + X_4 \geq 5 \quad (\text{mín. de spots en radio contratados})$$

$$290X_3 + 380X_4 \leq \$1,800 \quad (\text{máx. de dólares gastados en radio})$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Ejemplo 6: Modelo de producción de un periodo único

- En preparación para la temporada invernal, una compañía fabricante de ropa está manufacturando abrigos de piel con capucha y chamarras con relleno de plumas de ganso, pantalones con aislamiento y guantes. Todos los productos se elaboran en cuatro departamentos diferentes: corte aislamiento, costura y empaque. La compañía recibió pedidos de sus productos. El contrato estipula una penalización por los artículos no surtidos. Elabore un plan de producción óptimo para la compañía, con base en los siguientes datos:

Departamento	Tiempo por unidades (h)				Capacidad (h)
	Chamarras	Relleno	Pantalones	Guantes	
Corte	.30	.30	.25	.15	1000
Aislamiento	.25	.35	.30	.10	1000
Costura	.45	.50	.40	.22	1000
Empaque	.15	.15	.1	.05	1000
Demanda	800	750	600	500	
Utilidad unitaria	\$30	\$40	\$20	\$10	
Penalización por unidad	\$15	\$20	\$10	\$8	

Ejemplo 6: Modelo de producción de un periodo único

- Las variables de decisión son:

x_1 = cantidad de chamarras con capucha

x_2 = cantidad de chamarras con relleno de plumas

x_3 = cantidad de pantalones

x_4 = cantidad de pares de guantes

- Además, se debe tomar en cuenta la escasez de la demanda de cada producto por la cual se penalizará. Esto genera una nueva variable s

s_1 = escasez de chamarras con capucha

s_2 = escasez de chamarras con relleno de plumas

s_3 = escasez de pantalones

s_4 = escasez de pares de guantes

Ejemplo 6: Modelo de producción de un periodo único

- El objetivo es maximizar la utilidad neta, se define como:

$$Utilidad = Utilidad\ total - Penalización\ total$$

- Por ende, la función objetivo será:

$$F.O.: \text{Max}Z = \underbrace{30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4}_{\text{utilidad por producto producido}} - \underbrace{(15s_1 + 20s_2 + 10s_3 + 8s_4)}_{\text{Penalización por falta de producto}}$$

Restricciones con respecto a la capacidad de producción

$$\left\{ \begin{array}{l} .30x_1 + .30x_2 + .25x_3 + .15x_4 \leq 1000 \\ .25x_1 + .35x_2 + .30x_3 + .10x_4 \leq 1000 \\ .45x_1 + .50x_2 + .40x_3 + .22x_4 \leq 1000 \\ .15x_1 + .15x_2 + .10x_3 + .05x_4 \leq 1000 \end{array} \right.$$

Restricciones con respecto a la demanda tomando en cuenta la escasez del producto

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + s_1 = 800 \\ x_2 + s_2 = 750 \\ x_3 + s_3 = 600 \\ x_4 + s_4 = 500 \end{array} \right.$$

$$x_j \geq 0$$

$$s_j \geq 0$$

$$j = 1,2,3,4$$

Ejemplo 7: Modelo de programación de personal

Copa Airlines va a agregar vuelos desde y hacia su aeropuerto base, por lo cual necesita contratar más agentes de servicio a clientes. Sin embargo, no está claro cuántos más debe contratar. La administración reconoce la necesidad de controlar el costo y al mismo tiempo proporcionar de manera permanente un nivel satisfactorio de servicio. Por todo esto, un equipo estudia la forma de programar a los agentes para proporcionar un servicio satisfactorio con el menor costo en personal. Con base en la nueva programación de vuelos, se ha realizado un análisis del número mínimo de agentes de servicio a clientes que deben encontrarse de guardia en diferentes momentos del día para proporcionar un nivel satisfactorio de servicio. La columna de la derecha de la tabla muestra el número de agentes necesario para los periodos dados en la primera columna. Los otros datos de la tabla reflejan uno de los acuerdos del contrato colectivo vigente entre la compañía y el sindicato que representa a los agentes de servicio a clientes. El acuerdo es que cada agente trabaje un turno de 8 horas 5 días a la semana, y los turnos autorizados son:

Turno 1: 6:00 a.m. a 2:00 p.m.

Turno 2: 8:00 a.m. a 4:00 p.m.

Turno 3: 12:00 a.m. (mediodía) a 8:00 p.m.

Turno 4: 4:00 p.m. a 12 p.m. (medianoche)

Turno 5: 10:00 p.m. a 6:00 a.m.

Ejemplo 7: Modelo de programación de personal

La muestra las horas cubiertas por los turnos respectivos. Como algunos turnos son menos deseables que otros, los salarios que se especifican en el contrato difieren de uno a otro. En el último renglón se muestra la compensación diaria por cada agente para cada turno. El problema consiste en determinar cuántos agentes deben asignarse a los turnos respectivos cada día para minimizar el costo total de personal debido a los agentes, de acuerdo con este último renglón, al mismo tiempo que se cumplen (o se sobrepasan) las necesidades de servicio dados en la columna de la extrema derecha

Periodo	Periodos cubiertos					Número mínimo necesario de agentes
	Turno					
	1	2	3	4	5	
6:00 a.m. a 8:00 a.m.	✓					48
8:00 a.m. a 10:00 a.m.	✓	✓				79
10:00 a.m. a 12 a.m.	✓	✓				65
12 a.m. a 2:00 p.m.	✓	✓	✓			87
2:00 p.m. a 4:00 p.m. .		✓	✓			64
4:00 p.m. a 6:00 p.m.			✓	✓		73
6:00 p.m. a 8:00 p.m.			✓	✓		82
8:00 p.m. a 10:00 p.m..				✓		43
10:00 p.m. a 12:00 p.m.				✓	✓	52
12:00 p.m. a 6:00 a.m.					✓	15
Costo diario por agente	\$170	\$160	\$175	\$180	\$195	

Ejemplo 7: Modelo de programación de personal

x_j = número de agentes asignados al turno j , para $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

$$\text{Minimizar } Z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5,$$

sujeta a

$$\begin{aligned}x_1 &\geq 48 && (6-8 \text{ a.m.}) \\x_1 + x_2 &\geq 79 && (8-10 \text{ a.m.}) \\x_1 + x_2 &\geq 65 && (10-12 \text{ a.m.}) \\x_1 + x_2 + x_3 &\geq 87 && (12 \text{ a.m.-2 p.m.}) \\x_2 + x_3 &\geq 64 && (2-4 \text{ p.m.}) \\x_3 + x_4 &\geq 73 && (4-6 \text{ p.m.}) \\x_3 + x_4 &\geq 82 && (6-8 \text{ p.m.}) \\x_4 &\geq 43 && (8-10 \text{ p.m.}) \\x_4 + x_5 &\geq 52 && (10-12 \text{ p.m.}) \\x_5 &\geq 15 && (12 \text{ p.m.-6 a.m.}) \\x_j &\geq 0, && \text{para } j = 1, 2, 3, 4, 5.\end{aligned}$$

Ejemplo 8: Modelo de préstamo bancario

Banco Panamá está desarrollando una política de préstamos que implica un máximo de \$12 millones. La tabla siguiente muestra los datos pertinentes en relación con los préstamos disponibles

Tipo de préstamo	Tasa de interés	% de deudas impagables
Personal	.140	.10
Automóvil	.130	.07
Casa	.120	.03
Agrícola	.125	.05
Comercial	.100	.02

Las deudas impagables son irrecuperables y no producen ingresos por intereses. La competencia con otras instituciones financieras dicta la asignación de 40% mínimo de los fondos para préstamos agrícolas y comerciales. Para ayudar a la industria de la construcción de viviendas en la región, los préstamos para casa deben ser por lo menos 50% de los préstamos personales, para automóvil, y para casa. El banco limita la proporción total de las deudas impagables en todos los préstamos a un máximo de 4%. El objetivo del banco es maximizar el rendimiento neto, la diferencia entre el ingreso por intereses y la pérdida por deudas impagables. El ingreso por intereses se acumula sobre los préstamosal corriente.

Ejemplo 8: Modelo de préstamo bancario

La función objetivo combina el ingreso por intereses y la deuda impagable como sigue

$$\begin{aligned}\text{Maximizar } z &= \text{Interés total} - \text{Deuda impagable} \\ &= (.126x_1 + .1209x_2 + .1164x_3 + .11875x_4 + .098x_5) \\ &\quad - (.1x_1 + .07x_2 + .03x_3 + .05x_4 + .02x_5) \\ &= .026x_1 + .0509x_2 + .0864x_3 + .06875x_4 + .078x_5\end{aligned}$$

sujeto a:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

$$x_4 + x_5 \geq .4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$x_3 \geq .5(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$.1x_1 + .07x_2 + .03x_3 + .05x_4 + .02x_5 \leq .04(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Ejemplo 9: Modelo de renovación urbana

La ciudad de David enfrenta un grave recorte de presupuesto. Buscando una solución a largo plazo para mejorar la base tributaria, el consejo de la ciudad propone la demolición de un área de viviendas dentro de la ciudad, y su reemplazo con un moderno desarrollo. El proyecto implica dos fases: (1) demolición de casas populares para obtener el terreno para el nuevo desarrollo, y (2) construcción del nuevo desarrollo. Resumen de la situación actual:

- Se pueden demoler 300 casas populares. Cada casa ocupa un lote de .25 acres. El costo de demoler una casa es de \$2000.
- Los tamaños de los lotes para construir casas unifamiliares, dobles, triples y cuádruples, son de .18, .28, .4 y .5 acres, respectivamente. Las calles, los espacios abiertos y el área para la instalación de servicios, ocupan 15% del área disponible.
- En el nuevo desarrollo, las unidades triples y cuádruples ocupan por lo menos 25% del total. Las unidades sencillas deben ser al menos 20% de todas las unidades, y las unidades dobles deben ocupar un mínimo de 10%.
- El impuesto por unidad aplicado a las unidades sencillas, dobles, triples y cuádruples es de \$1000, \$1900, \$2700 y \$3400, respectivamente.
- El costo de construcción por unidad de las casas sencillas, dobles, triples y cuádruples es de \$50,000, \$70,000, \$130,000 y \$160,000, respectivamente. El financiamiento a través de un banco local está limitado a \$15 millones.

¿Cuántas unidades de cada tipo se deben construir para maximizar la recaudación de impuestos?

Ejemplo 9: Modelo de renovación urbana

- x_1 = Cantidad de casas unifamiliares
- x_2 = Cantidad de casas dobles
- x_3 = Cantidad de casas triples
- x_4 = Cantidad de casas cuádruples
- x_5 = Cantidad de casas viejas a demoler

$$\text{Maximizar } z = 1000x_1 + 1900x_2 + 2700x_3 + 3400x_4$$

sujeto a

$$.18x_1 + .28x_2 + .4x_3 + .5x_4 - .2125x_5 \leq 0$$

$$x_5 \leq 300$$

$$-.8x_1 + .2x_2 + .2x_3 + .2x_4 \leq 0$$

$$.1x_1 - .9x_2 + .1x_3 + .1x_4 \leq 0$$

$$.25x_1 + .25x_2 - .75x_3 - .75x_4 \leq 0$$

$$50x_1 + 70x_2 + 130x_3 + 160x_4 + 2x_5 \leq 15000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Ejemplo 10

El equipo de planificación de una agencia espacial desea establecer un cronograma para el lanzamiento de satélites durante un período de tres años. Las cargas útiles experimentales son de dos tipos (digamos, T1 y T2), y cada lanzamiento lleva solo un experimento. Las políticas de agencia negociadas externamente dictan que se pueden admitir como máximo 88 del tipo de carga útil T1 y 126 del tipo T2. Para cada lanzamiento, las cargas útiles de tipo T1 operarán con éxito con una probabilidad de 0,85 y las cargas útiles de tipo T2 con una probabilidad de 0,75. Para que el programa sea viable, debe haber un total de al menos 60 implementaciones exitosas. A la agencia se le paga \$1.5 millones por cada carga útil T1 exitosa y \$1.2 millones por cada carga útil T2 exitosa. Los costos para la agencia para preparar y lanzar los dos tipos de cargas útiles son de \$1,05 millones para cada T1 y \$0,7 millones para cada T2. Se debe dedicar una semana a la preparación de cada carga útil de lanzamiento T2 y se requieren dos semanas para las cargas útiles de lanzamiento T1. La agencia, mientras brinda un servicio público, desea maximizar su ingreso neto esperado del programa satelital. Asuma 52 semanas por año.

Ejemplo 10

Sea

x_1 = número de satélites lanzados con una carga útil de tipo T1

x_2 = número de satélites lanzados con una carga útil de tipo T2.

Los ingresos se obtienen solo cuando los lanzamientos tienen éxito, pero se incurre en costos para todos los lanzamientos. Por lo tanto, la utilidad neta esperada es:

$$(1,5)(0,85)x_1 + (1,2)(0,75)x_2 - (1,05)x_1 - (0,7)x_2 \text{ millones de dólares}$$

La función objetivo es:

$$\text{Max } Z = 0.225 x_1 + 0.2 x_2$$

Las restricciones son

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 88 \\ x_2 &\leq 126 \\ 0.85x_1 + 0.75x_2 &\geq 60 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 156 \end{aligned}$$

} Las políticas de la agencia imponen las dos restricciones simples

La cuota de implementación exitosa

Si asumimos que se pueden aplicar 52 semanas por año (durante tres años) al programa de satélites, entonces el tiempo de preparación del lanzamiento es limitado.

$$x_i \geq 0$$

Ejemplo 11: Formulación de un problema de minimización

Ganadera Esquivel está considerando comprar dos marcas diferentes de alimento para gallina, y mezclarlos para ofrecer una buena dieta de bajo costo para sus aves. Cada alimento contiene, en proporciones variables, algunos o los tres ingredientes nutricionales esenciales para gallinas de engorde. Por ejemplo, cada libra de la marca 1 contiene 5 onzas del ingrediente A, 4 onzas del ingrediente B y 0.5 onzas del ingrediente C. Cada libra de la marca 2 contiene 10 onzas del ingrediente A, 3 onzas del ingrediente B, pero nada del ingrediente C. La marca 1 de alimento cuesta al rancho 2 centavos de dólar por libra; en tanto que la marca 2 de alimento le cuesta 3 centavos de dólar por libra. La Ganadera desea utilizar programación lineal para determinar la dieta con costo mínimo que cumpla con el requisito mínimo de ingesta mensual de cada ingrediente nutricional.

Ingrediente	Composición de cada libra de alimento (oz.)		Requerimiento mensual mínimo por gallina (oz.)
	Alimento Marca 1	Alimento Marca 2	
A	5	10	90
B	4	3	48
C	0.5	0	1.5
Costo por libra	0.02\$	0.03\$	

Ejemplo 11: Formulación de un problema de minimización

Variables de decisión

x_1 = número de libras de la marca 1 de alimento comprada

x_2 = número de libras de la marca 2 de alimento comprada

La función objetivo del problema sería

$$\text{Minimizar } Z = 0.02x_1 + 0.03x_2$$

Las restricciones del problema serían las siguientes:

s.a.:

$$5x_1 + 10x_2 \geq 90 \quad \left. \vphantom{5x_1 + 10x_2 \geq 90} \right\} \text{ Restricción del ingrediente A}$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 48 \quad \left. \vphantom{4x_1 + 3x_2 \geq 48} \right\} \text{ Restricción del ingrediente B}$$

$$0.5x_1 \geq 1.5 \quad \left. \vphantom{0.5x_1 \geq 1.5} \right\} \text{ Restricción del ingrediente C}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \left. \vphantom{x_1, x_2 \geq 0} \right\} \text{ Restricción de no negatividad}$$

Libros de referencia

- Render, B. (2016). Métodos cuantitativos para los Negocios. Editorial Pearson.
- Gohout, W. (2013). Operations Research. Oldenbourg Verlag München
- Taha, H. (2011). Investigación de Operaciones. Editorial Pearson.
- Hillier, F. & Lieberman, G. (2015). Investigación de Operaciones. McGraw-Hill
- Winston, W. (2004). Operations Research Applications and Algorithms. Thomson Brooks/Cole
- Anderson, D. & Sweeny, D. (2019). Métodos Cuantitativos para los Negocios. Cengage
- Eppen, D. (2000). Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa. Pearson
- García et al. (2013). Simulación y Análisis de Sistemas con ProModel. Editorial Pearson.
- Srinivasan, G. (2010). Quantitative Models in Operations and Supply Chain Management. PHI Learning Private Limited
- Rardin, R. (2017). Optimization in Operations Research. Pearson
- Carter, M. et al. (2019). Operations Research A Practical Introduction. Taylor & Francis Group
- Aoroto Álvarez, C., [et al] (2014) Operations research in business administration and managenent. Valencia: Universitat Politècnica de València
- Ravi Ravindran, A. (2008) Operations Research & Management Science Handbook. Taylor & Francis Group
- Rees, M. (2015). Business Risk and Simulation Modeling in Practice. John Wiley & Sons Ltd
- Stermann, J. (2000). Business Dynamics – Systems Thinking and Modeling for a Complex World. McGraw-Hill
- Winston, W. (2017) Microsoft Excel 2016 – Data Analysis and Busines Modeling. Microsoft press
- Schaffernicht, M. (2006). *Dinámica de Sistemas – Tomo 1: Fundamentos*.
- Alvarez, H. (2011). Introducción a la Simulación. Universidad Tecnológica de Panamá
- Cassandras & Lafortune. (2008). *Introduction to Discrete Event Systems*. Springer
- Bandyopadhyay, S. et al (2014). Discrete and Continuous Simulation: Theory and Practice. Taylor & Francis Group
- García et al. (2013). *Simulación y Análisis de Sistemas con ProModel*. Editorial Pearson.
- Schroeder et al. (2011). *Administración de Operaciones*. McGraw-Hill
- Render, B. & Heizer, J. (2014). *Principios de Administración de Operaciones*. Pearson
- Chase, R. & Jacobs, F. (2014). *Administración de Operaciones, Producción y Cadena de Suministro*. McGraw – Hill
- Rees, M. (2015). *Business Risk and Simulation Modeling in Practice*. John Wiley & Sons Ltd
- Stermann, J. (2000). *Business Dynamics – Systems Thinking and Modeling for a Complex World*. McGraw-Hill
- Winston, W. (2017) *Microsoft Excel 2016 – Data Analysis and Busines Modeling*. Microsoft press
- Slack, N., et al. (2016) . *Operations Management*. Pearson
- Stevenson, W. (2015). *Operations Management*. McGraw-Hill

Contacto



Ricardo Caballero, M.Sc.

Docente Tiempo Completo

Facultad de Ingeniería Industrial

Universidad Tecnológica de Panamá | Centro Regional de Chiriquí

E-Mail: ricardo.caballero@utp.ac.pa

Social: [LinkedIn](#) | [ResearchGate](#)

Website: <https://www.academia.utp.ac.pa/ricardo-caballero>



Project Manager



Grupo de Investigación
en Ingeniería Industrial

Website: www.giii.utp.ac.pa

