Métodos Cuantitativos de la Administración

Lectura Nr. 2

Programación Lineal

Profesor:
Ricardo Caballero, M.Sc.
ricardo.caballero@utp.ac.pa

Conceptos básicos

La Programación Lineal (PL) es una técnica matemática que ayuda a tomar decisiones de asignación de recursos. Involucra la planeación de actividades para obtener un resultado óptimo.

Los modelos de Programación Lineal están compuestos por:

1. **Variables de decisión**
2. **Función objetivo:** enunciado matemático que representa la meta que se necesita optimizar (maximizar o minimizar).
3. **Restricciones:** limitaciones de recursos y capacidad que la solución debe satisfacer (se representan como desigualdades o ecuaciones)

Propiedades

- Deben haber **alternativas disponibles**
- Las relaciones matemáticas son **lineales**
- Se supone existen condiciones de **certeza**, se conocen con certeza el número en el objetivo y en las restricciones y no varían durante el periodo de estudio (parámetros dados)
- Se supone **divisibilidad.** Las soluciones no necesitan números enteros, pueden tomar cualquier valor fraccionario
- **No negatividad**. Se supone que todas las respuestas o variables son no negativas. Los valores negativos de cantidades físicas son imposibles.

Formulación del problema

- Proceso de traducir una descripción verbal de un problema en un enunciado matemático.
- El enunciado matemático del problema se conoce como modelo matemático.

Pasos para formulación son:

1. Entender el problema
2. Definir las variables de decisión
3. Formular la función objetivo y restricciones
4. Resolver
5. Tomar decisión

Forma canónica para un problema de Programación Lineal

Lo primero será identificar las variables de decisión x_i, donde i = 1, …, n.
Entonces se establecerá el criterio objetivo: **maximizar** o **minimizar** alguna función de la forma

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n = \sum_{i=0}^{n} c_ix_i$$

donde c_i representa constantes dependientes del problema.

Las limitaciones de recursos y los límites de las variables de decisión se escribirán como ecuaciones o desigualdades que relacionan una función lineal de las variables de decisión con los coeficientes dependiente del problema siendo menor o mayor que otra constante b_i (valor de restricción); por ejemplo,

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n \geq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n \leq b_m \end{gathered}$$

Finalmente, se formula la restricción de no negatividad para toda variable x_i en el conjunto de los números reales

$$x_i \geq 0 \qquad ; i = 1,2, \dots n \qquad \forall\ x_i \in \mathbb{R}$$

Forma canónica para un problema de Programación Lineal

Se obtiene una notación aún más compacta con la notación de matriz vectorial del álgebra lineal. Para ello, sea x el vector columna de las variables de decisión, c el vector columna de los coeficientes de la función objetivo, b el vector columna de los valores de restricción y A la matriz de los coeficientes.

$$\max \quad c^T x$$

$$\text{s.a.} \quad Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

con

$$c^T = (c_1, \ldots, c_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1: Formulación de un problema de maximización

Furniture City fabrica mesas y sillas de bajo precio. El proceso de fabricación de cada producto se parece en que ambos requieren cierto número de horas de trabajo de carpintería, así como cierto número de horas de trabajo en el departamento de pintura y barnizado. Cada mesa requiere de 4 horas de carpintería y 2 horas en el taller de pintura y barnizado. Cada silla requiere de 3 horas de carpintería, y 1 hora en la pintura y barnizado. Durante el periodo de producción actual, hay 240 horas de tiempo de carpintería disponibles, así como 100 horas de tiempo disponibles en pintura y barnizado. Cada mesa vendida genera una utilidad de $70; cada silla fabricada se vende con una utilidad de $50.

El problema de Furniture City es determinar la mejor combinación posible de mesas y sillas a fabricar, con la finalidad de alcanzar la utilidad máxima. La empresa desea que esta situación de mezcla de producción se formule como un problema de programación lineal.

Ejemplo 1: Formulación de un problema de maximización

Departamento	Horas necesarias para producir 1 unidad		Horas disponibles en la semana
	Mesas	Sillas	
Carpintería	4	3	240
Pintura y barnizado	2	1	100
Utilidad por unidad	$70	$50	

- El problema nos solicita

$$\textit{Maximizar la utilidad}$$

- Las restricciones son:
  - *Las horas de tiempo de carpintería utilizadas no pueden exceder las 240 horas disponibles por semana.*
  - *Las horas de tiempo de pintura y barnizado utilizadas no pueden exceder las 100 horas disponibles por semana.*
- Las variables de decisión que representan las decisiones reales que tomarán se definen como:

$$x_1 = \textit{número de mesas producidas por semana}$$

$$x_2 = \textit{número de sillas producidas por semana}$$

Ejemplo 1: Formulación de un problema de maximización

Función objetivo:

$$Maximizar\ Z = 70x_1 + 50x_2$$

s.a.:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 240$$ Restricción de carpintería

$$2x_1 + x_2 \leq 100$$ Restricción de pintura y barnizado

$$x_i \geq 0 \quad ; i = 1,2$$ Restricción de no negatividad

Ejemplo 2: Formulación de un problema de minimización

Ganadera Esquivel está considerando comprar dos marcas diferentes de alimento para gallina, y mezclarlos para ofrecer una buena dieta de bajo costo para sus aves. Cada alimento contiene, en proporciones variables, algunos o los tres ingredientes nutricionales esenciales para gallinas de engorde. Por ejemplo, cada libra de la marca 1 contiene 5 onzas del ingrediente A, 4 onzas del ingrediente B y 0.5 onzas del ingrediente C. Cada libra de la marca 2 contiene 10 onzas del ingrediente A, 3 onzas del ingrediente B, pero nada del ingrediente C. La marca 1 de alimento cuesta al rancho 2 centavos de dólar por libra; en tanto que la marca 2 de alimento le cuesta 3 centavos de dólar por libra. La Ganadera desea utilizar programación lineal para determinar la dieta con costo mínimo que cumpla con el requisito mínimo de ingesta mensual de cada ingrediente nutricional.

Ingrediente	Composición de cada libra de alimento (oz.)		Requerimiento mensual mínimo por gallina (oz.)
	Alimento Marca 1	Alimento Marca 2	
A	5	10	90
B	4	3	48
C	0.5	0	1.5
Costo por libra	0.02$	0.03$	

Ejemplo 2: Formulación de un problema de minimización

Variables de decisión

$$x_1 = número\ de\ libras\ de\ la\ marca\ 1\ de\ alimento\ comprada$$
$$x_2 = número\ de\ libras\ de\ la\ marca\ 2\ de\ alimento\ comprada$$

La función objetivo del problema sería

$$Minimizar\ Z = 0.02x_1 + 0.03x_2$$

Las restricciones del problema serían las siguientes:

s.a.:

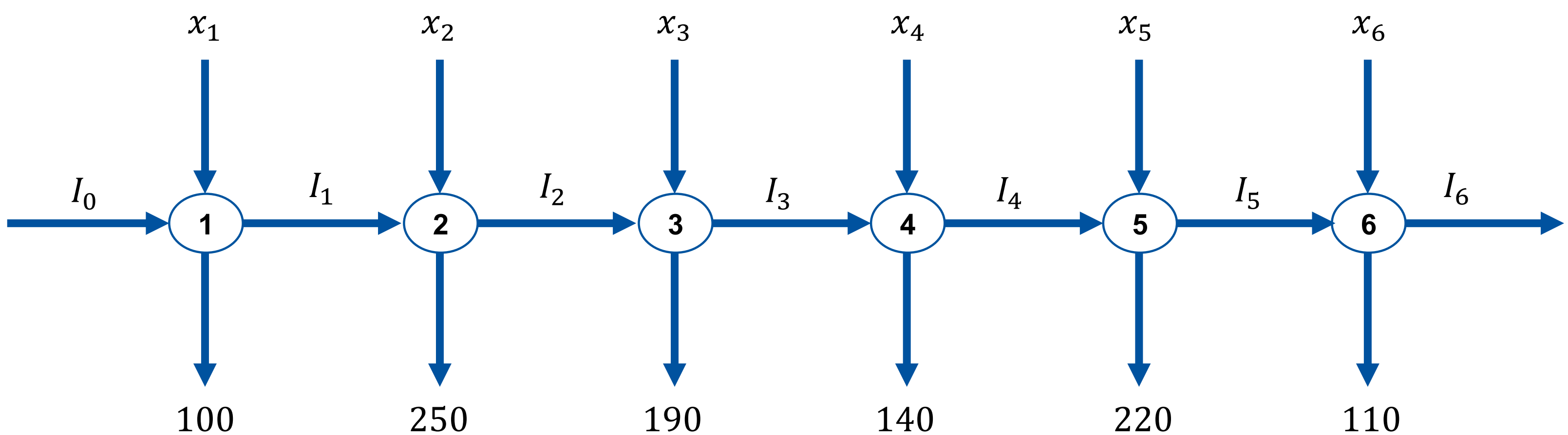
$$5x_1 + 10x_2 \geq 90 \quad \text{Restricción del ingrediente A}$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 48 \quad \text{Restricción del ingrediente B}$$
$$0.5x_1 \geq 1.5 \quad \text{Restricción del ingrediente C}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{Restricción de no negatividad}$$

Ejemplo 3: Modelo de producción en inventario durante periodos múltiples

Hopsa firmó un contrato para entregar 100, 250, 190, 140, 220 y 110 ventanas para casa durante los siguientes seis meses. El costo de producción (mano de obra, material y servicios) por ventana varia por periodo y se estima que será de \$50, \$45, \$55, \$48, \$52 y \$50 durante los próximos seis meses. Para aprovechar las fluctuaciones del costo de fabricación, Hopsa puede producir más ventanas de las necesarias en un mes dado y conservar las unidades adicionales para entregarles en meses posteriores. Esto supondrá un costo de almacenamiento a razón de \$8 por ventana por mes, estimado en el inventario de fin de mes. Desarrollo un programa lineal para determinar el programa de producción óptimo

Ejemplo 3: Modelo de producción en inventario durante periodos múltiples

El problema desea determinar las relaciones entre cantidades producidas, demanda mensual y el inventario óptimo para los 6 meses de manera que los costos sean mínimos



$= mes$

$x \quad =$ cantidades producidas de producto

$I_0 =$ inventario inicial

$I \quad = inventario\ de\ fin\ de\ mes$

$Inventario\ final$

$=$ cantidad producida $+$ inventario inicial $-$ demanda

Ejemplo 3: Modelo de producción en inventario durante periodos múltiples

- Las variables de decisión son:

$$x_i = cantidad\ de\ unidades\ producidas\ en\ el\ mes\ i$$
$$I_i = unidades\ que\ quedan\ en\ el\ inentario\ de\ fin\ de\ mes\ i$$

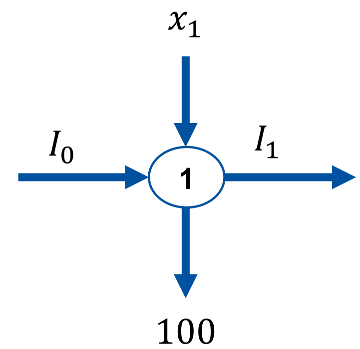
Sea $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

- Se busca en el problema minimizar los costos totales de producción e inventario, por ende la función objetivo sería:

F.O.: MinZ = $\underbrace{50x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 48x_4 + 52x_5 + 50x_6}_{\text{Costos totales de producción}} + \underbrace{8(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)}_{\text{Costos de inventario}}$

Ejemplo 3: Modelo de producción en inventario durante periodos múltiples

$$Demanda = \text{cantidad producida} + \text{inventario inicial} - \text{inventario final}$$



- La formulación del problema sería:

F.O.: MinZ = $50x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 48x_4 + 52x_5 + 50x_6 + 8(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)$

s.a.:

$$x_1 - I_1 = 100$$

$$\begin{aligned} I_1 + x_2 - I_2 &= 250 \\ I_2 + x_3 - I_3 &= 190 \\ I_3 + x_4 - I_4 &= 140 \\ I_4 + x_5 - I_5 &= 220 \\ I_5 + x_6 &= 110 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4,5,6 \quad ; \quad I_i \geq 0 \quad i=1,2,3,4,5$$

Ejemplo 4: Selección de medios de comunicación

Una empresa desea promocionar su producto estrella y tiene un presupuesto de hasta $8,000 semanales para anuncios locales. El dinero se asignará entre cuatro medios de comunicación: spots en televisión, anuncios en periódicos y dos tipos de comerciales en radio. El objetivo de la empresa es llegar a la audiencia de mayor potencial más grande posible, usando los diferentes medios de comunicación. La siguiente tabla presenta el número de clientes potenciales expuestos mediante un anuncio en cada uno de los cuatro medios. También proporciona el costo por anuncio colocado y el máximo número de ellos que se puede comprar por semana.

Medio	Audiencia alcanzada	Costo por anuncio ($)	Máximo de anuncio por semana
Spot en TV (1 minuto)	5000	800	12
Periódico (una plana)	8500	925	5
Spot en radio (30 segundos, horario estelar)	2400	290	25
Spot de radio (1 minuto, en la tarde)	2800	380	20

El contrato requiere que se coloquen al menos cinco spots de radio cada semana. Para asegurar una campaña promocional de amplio espectro, la gerencia también insiste en que no se gasten más de $1,800 por semana en los comerciales de radio.

Ejemplo 4: Selección de medios de comunicación

La formulación del problema es

X_1 = número de spots de TV de 1 minuto en cada semana
X_2 = número de anuncios de 1 plana en el periódico en cada semana
X_3 = número de spots de radio de 30 segundos en cada semana
X_4 = número de spots de radio de 1 minuto por la tarde en cada semana

Función objetivo :

$$\text{Max. } Z = 5{,}000X_1 + 8{,}500X_2 + 2{,}400X_3 + 2{,}800X_4$$

Sujeta a

$$
\begin{array}{rll}
X_1 & \leq 12 & \text{(máx. de spots en TV/semana)} \\
X_2 & \leq 5 & \text{(máx. de anuncios en periódico/sem)} \\
X_3 & \leq 25 & \text{(máx. de spots de 30 s en radio/sem)} \\
X_4 & \leq 20 & \text{(máx. de spots de 1 min en radio/sem)} \\
800X_1 + 925X_2 + 290X_3 + 380X_4 & \leq \$8{,}000 & \text{(presupuesto semanal de publicidad)} \\
X_3 + X_4 & \geq 5 & \text{(mín. de spots en radio contratados)} \\
290X_3 + 380X_4 & \leq \$1{,}800 & \text{(máx. de dólares gastados en radio)} \\
X_1, X_2, X_3, X_4 & \geq 0 &
\end{array}
$$

Ejemplo 5: Modelo de producción de un periodo único

- En preparación para la temporada invernal, una compañía fabricante de ropa está manufacturando abrigos de piel con capucha y chamarras con relleno de plumas de ganso, pantalones con aislamiento y guantes. Todos los productos se elaboran en cuatro departamentos diferentes: corte aislamiento, costura y empaque. La compañía recibió pedidos de sus productos. El contrato estipula una penalización por los artículos no surtidos. Elabore un plan de producción óptimo para la compañía, con base en los siguientes datos:

	Tiempo por unidades (h)				
Departamento	**Chamarras**	**Relleno**	**Pantalones**	**Guantes**	**Capacidad (h)**
Corte	.30	.30	.25	.15	1000
Aislamiento	.25	.35	.30	.10	1000
Costura	.45	.50	.40	.22	1000
Empaque	.15	.15	.1	.05	1000
Demanda	800	750	600	500	
Utilidad unitaria	$30	$40	$20	$10	
Penalización por unidad	$15	$20	$10	$8	

Ejemplo 5: Modelo de producción de un periodo único

- Las variables de decisión son:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= cantidad\ de\ chamarras\ con\ capucha \\
x_2 &= cantidad\ de\ chamarras\ con\ relleno\ de\ plumas \\
x_3 &= cantidad\ de\ pantalones \\
x_4 &= cantidad\ de\ pares\ de\ guantes
\end{aligned}
$$

- Además, se debe tomar en cuenta la escasez de la demanda de cada producto por la cual se penalizará. Esto genera una nueva variable s

$$
\begin{aligned}
s_1 &= escasez\ de\ chamarras\ con\ capucha \\
s_2 &= escasez\ de\ chamarras\ con\ relleno\ de\ plumas \\
s_3 &= escasez\ de\ pantalones \\
s_4 &= escasez\ de\ pares\ de\ guantes
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5: Modelo de producción de un periodo único

- El objetivo es maximizar la utilidad neta, se define como:

$$Utilidad = Utilidad\ total\ - Penalización\ total$$

- Por ende, la función objetivo será:

F.O.: MaxZ = $\underbrace{30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4}_{\text{utilidad por producto producido}} - \underbrace{(15s_1 + 20s_2 + 10s_3 + 8s_4)}_{\text{Penalización por falta de producto}}$

Restricciones con respecto a la capacidad de producción

$$\begin{aligned} .30x_1 + .30x_2 + .25x_3 + .15x_4 &\le 1000 \\ .25x_1 + .35x_2 + .30x_3 + .10x_4 &\le 1000 \\ .45x_1 + .50x_2 + .40x_3 + .22x_4 &\le 1000 \\ .15x_1 + .15x_2 + .10x_3 + .05x_4 &\le 1000 \end{aligned}$$

Restricciones con respecto a la demanda tomando en cuenta la escasez del producto

$$\begin{aligned} x_1 + s_1 &= 800 \\ x_2 + s_2 &= 750 \\ x_3 + s_3 &= 600 \\ x_4 + s_4 &= 500 \end{aligned}$$

$$x_j \ge 0$$
$$s_j \ge 0$$
$$j = 1,2,3,4$$

Ejemplo 6: Modelo de programación de personal

Copa Airlines va a agregar vuelos desde y hacia su aeropuerto base, por lo cual necesita contratar más agentes de servicio a clientes. Sin embargo, no está claro cuántos más debe contratar. La administración reconoce la necesidad de controlar el costo y al mismo tiempo proporcionar de manera permanente un nivel satisfactorio de servicio. Por todo esto, un equipo estudia la forma de programar a los agentes para proporcionar un servicio satisfactorio con el menor costo en personal. Con base en la nueva programación de vuelos, se ha realizado un análisis del número mínimo de agentes de servicio a clientes que deben encontrarse de guardia en diferentes momentos del día para proporcionar un nivel satisfactorio de servicio. La columna de la derecha de la tabla muestra el número de agentes necesario para los periodos dados en la primera columna. Los otros datos de la tabla reflejan uno de los acuerdos del contrato colectivo vigente entre la compañía y el sindicato que representa a los agentes de servicio a clientes. El acuerdo es que cada agente trabaje un turno de 8 horas 5 días a la semana, y los turnos autorizados son:

Turno 1: 6:00 a.m. a 2:00 p.m.
Turno 2: 8:00 a.m. a 4:00 p.m.
Turno 3: 12:00 a.m. (mediodía) a 8:00 p.m.
Turno 4: 4:00 p.m. a 12 p.m. (medianoche)
Turno 5: 10:00 p.m. a 6:00 a.m.

Ejemplo 6: Modelo de programación de personal

La muestra las horas cubiertas por los turnos respectivos. Como algunos turnos son menos deseables que otros, los salarios que se especifican en el contrato difieren de uno a otro.
En el último renglón se muestra la compensación diaria por cada agente para cada turno.
El problema consiste en determinar cuántos agentes deben asignarse a los turnos respectivos cada día para minimizar el costo total de personal debido a los agentes, de acuerdo con este último renglón, al mismo tiempo que se cumplen (o se sobrepasan) las necesidades de servicio dados en la columna de la extrema derecha

	Periodos cubiertos					
	Turno					
Periodo	1	2	3	4	5	Número mínimo necesario de agentes
6:00 a.m. a 8:00 a.m.	✔					48
8:00 a.m. a 10:00 a.m.	✔	✔				79
10:00 a.m. a 12 a.m.	✔	✔				65
12 a.m. a 2:00 p.m.	✔	✔	✔			87
2:00 p.m. a 4:00 p.m. .		✔	✔			64
4:00 p.m. a 6:00 p.m.			✔	✔		73
6:00 p.m. a 8:00 p.m.			✔	✔		82
8:00 p.m. a 10:00 p.m..				✔		43
10:00 p.m. a 12:00 p.m.				✔	✔	52
12:00 p.m. a 6:00 a.m.					✔	15
Costo diario por agente	$170	$160	$175	$180	$195	

Ejemplo 6: Modelo de programación de personal

x_j= número de agentes asignados al turno j, para $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

$$\text{Minimizar} \quad Z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5,$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
&x_1 &\geq 48 \quad &\text{(6-8 a.m.)}\\
&x_1 + x_2 &\geq 79 \quad &\text{(8-10 a.m.)}\\
&x_1 + x_2 &\geq 65 \quad &\text{(10-12 a.m.)}\\
&x_1 + x_2 + x_3 &\geq 87 \quad &\text{(12 a.m.-2 p.m.)}\\
&x_2 + x_3 &\geq 64 \quad &\text{(2-4 p.m.)}\\
&x_3 + x_4 &\geq 73 \quad &\text{(4-6 p.m.)}\\
&x_3 + x_4 &\geq 82 \quad &\text{(6-8 p.m.)}\\
&x_4 &\geq 43 \quad &\text{(8-10 p.m.)}\\
&x_4 + x_5 &\geq 52 \quad &\text{(10-12 p.m.)}\\
&x_5 &\geq 15 \quad &\text{(12 p.m.-6 a.m.)}
\end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \quad \text{para } j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Ejemplo 7: Modelo de préstamo bancario

Banco Panamá está desarrollando una política de préstamos que implica un máximo de $12 millones. La tabla siguiente muestra los datos pertinentes en relación con los préstamos disponibles

Tipo de préstamo	Tasa de interés	% de deudas impagables
Personal	.140	.10
Automóvil	.130	.07
Casa	.120	.03
Agrícola	.125	.05
Comercial	.100	.02

Las deudas impagables son irrecuperables y no producen ingresos por intereses. La competencia con otras instituciones financieras dicta la asignación de 40% mínimo de los fondos para préstamos agrícolas y comerciales. Para ayudar a la industria de la construcción de viviendas en la región, los préstamos para casa deben ser por lo menos 50% de los préstamos personales, para automóvil, y para casa. El banco limita la proporción total de las deudas impagables en todos los préstamos a un máximo de 4%. El objetivo del banco es maximizar el rendimiento neto, la diferencia entre el ingreso por intereses y la pérdida por deudas impagables. El ingreso por intereses se acumula sobre los préstamosal corriente.

Ejemplo 7: Modelo de préstamo bancario

La función objetivo combina el ingreso por intereses y la deuda impagable como sigue

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar } z &= \text{Interés total} - \text{Deuda impagable} \\
&= (.126x_1 + .1209x_2 + .1164x_3 + .11875x_4 + .098x_5) \\
&\quad - (.1x_1 + .07x_2 + .03x_3 + .05x_4 + .02x_5) \\
&= .026x_1 + .0509x_2 + .0864x_3 + .06875x_4 + .078x_5
\end{aligned}$$

sujeto a:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

$$x_4 + x_5 \geq .4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$x_3 \geq .5(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$.1x_1 + .07x_2 + .03x_3 + .05x_4 + .02x_5 \leq .04(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Ejemplo 8: Modelo de renovación urbana

La ciudad de David enfrenta un grave recorte de presupuesto. Buscando una solución a largo plazo para mejorar la base tributaria, el consejo de la ciudad propone la demolición de un área de viviendas dentro de la ciudad, y su reemplazo con un moderno desarrollo. El proyecto implica dos fases: (1) demolición de casas populares para obtener el terreno para el nuevo desarrollo, y (2) construcción del nuevo desarrollo. Resumen de la situación actual:

- Se pueden demoler 300 casas populares. Cada casa ocupa un lote de .25 acres. El costo de demoler una casa es de $2000.
- Los tamaños de los lotes para construir casas unifamiliares, dobles, triples y cuádruples, son de .18, .28, .4 y .5 acres, respectivamente. Las calles, los espacios abiertos y el área para la instalación de servicios, ocupan 15% del área disponible.
- En el nuevo desarrollo, las unidades triples y cuádruples ocupan por lo menos 25% del total. Las unidades sencillas deben ser al menos 20% de todas las unidades, y las unidades dobles deben ocupar un mínimo de 10%.
- El impuesto por unidad aplicado a las unidades sencillas, dobles, triples y cuádruples es de $1000, $1900, $2700 y $3400, respectivamente.
- El costo de construcción por unidad de las casas sencillas, dobles, triples y cuádruples es de $50,000, $70,000, $130,000 y $160,000, respectivamente. El financiamiento a través de un banco local está limitado a $15 millones.

¿Cuántas unidades de cada tipo se deben construir para maximizar la recaudación de impuestos?

Ejemplo 8: Modelo de renovación urbana

x_1 = Cantidad de casas unifamiliares

x_2 = Cantidad de casas dobles

x_3 = Cantidad de casas triples

x_4 = Cantidad de casas cuádruples

x_5 = Cantidad de casas viejas a demoler

$$\text{Maximizar } z = 1000x_1 + 1900x_2 + 2700x_3 + 3400x_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
.18x_1 + .28x_2 + .4x_3 + .5x_4 - .2125x_5 &\leq 0 \\
x_5 &\leq 300 \\
-.8x_1 + .2x_2 + .2x_3 + .2x_4 &\leq 0 \\
.1x_1 - .9x_2 + .1x_3 + .1x_4 &\leq 0 \\
.25x_1 + .25x_2 - .75x_3 - .75x_4 &\leq 0 \\
50x_1 + 70x_2 + 130x_3 + 160x_4 + 2x_5 &\leq 15000 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

Bibliografía

- Render, B. (2016). Métodos cuantitativos para los Negocios. Editorial Pearson.
- Taha, H. (2011). Investigación de Operaciones. Editorial Pearson.
- Hillier, F. & Lieberman, G. (2015). Investigación de Operaciones. McGraw-Hill
- Winston, W. (2004). Operations Research Applications and Algorithms. Thomson Brooks/Cole
- Anderson, D. & Sweeny, D. (2019). Métodos Cuantitativos para los Negocios. Cengage
- Eppen, D. (2000). Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa. Pearson
- García et al. (2013). Simulación y Análisis de Sistemas con ProModel. Editorial Pearson.
- Srinivasan, G. (2010). Quantitative Models in Operations and Supply Chain Management. PHI Learning Private Limited
- Rardin, R. (2017). Optimization in Operations Research. Pearson
- Carter, M. et al. (2019). Operations Research A Practical Introduction. Taylor & Francis Group
- Aoroto Álvares, C., [et al] (2014) Operations research in business administration and managenent. Valencia: Universitat Politècnica de València
- Ravi Ravindran, A. (2008) Operations Research & Management Science Handbook. Taylor & Francis Group
- Rees, M. (2015). Business Risk and Simulation Modeling in Practice. John Wiley & Sons Ltd
- Sterman, J. (2000). Business Dynamics – Systems Thinking and Modeling for a Complex World. McGraw-Hill
- Winston, W. (2017) Microsoft Excel 2016 – Data Analysis and Busines Modeling. Microsoft press
- Schaffernicht, M. (2006). *Dinámica de Sistemas – Tomo 1: Fundamentos*.
- Alvarez, H. (2011). Introducción a la Simulación. Universidad Tecnológica de Panamá
- https://wps.prenhall.com/bp_taylor_introms_11/220/56508/14466195.cw/content/
- https://rstudio.com/products/rstudio/download/
- https://www.r-project.org/

Contacto

Ricardo Caballero, M.Sc.

Docente Tiempo Completo
Facultad de Ingeniería Industrial
Centro Regional de Chiriquí
Universidad Tecnológica de Panamá

E-mail: ricardo.caballero@utp.ac.pa

https://www.academia.utp.ac.pa/ricardo-caballero