INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

PRÁCTICAS DE IO CON POM-QM

Material didáctico para los estudiantes que cursan las asignaturas de Investigación de Operaciones. POM-QM es un software de apoyo que contiene los métodos cuantitativos para resolver problemas de INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.

Julio Rito Vargas Avilés

Enero 2015

Contenido

Presentación

Cuando me decidí a comenzar a trabajar en esta primera versión de Prácticas de investigación de Operaciones para los estudiantes de Ingeniería y Ciencias Administrativas lo hice basado con la convicción que mis estudiantes apreciaban las guías metodológicas que regularmente les hacía llegar a través del blog. Si todos esos trabajos habían generado resultados muy positivos en el aprendizaje, que mejor si los organizaba y los presentaba en un solo documento que reúna toda la temática que regularmente tratan los estudiantes que desean aprender investigación de operaciones.

De forma que la meta es presentarte un libro de texto práctico sin descuidar los principios, teorías, métodos y algoritmos que son los cimientos donde se fundamenta la investigación de operaciones, pero con una dinámica diferente reformadora y práctica que ayude al estudiante a aprender basado en la solución de problemas del mundo, es decir contextualizar la problemática de la investigación de operaciones al perfil de formación del estudiante.

Creo que este libro le parecerá interesante en la medida en que usted enfoque su atención a las situaciones del mundo real y a los modelos construidos y resueltos con el software POM-QM, el cual es una poderosa herramienta de apoyo para la solución de estas situaciones, y participe activamente en la construcción y el análisis de dichos modelos. Las temáticas están organizados de la siguiente manera: Tema 1,Modelos y aplicaciones de programación lineal; Tema 2, *Modelos de Transporte y transbordo; Tema 3, Modelos de Asignación; Tema 4, Modelos de gestión de proyectos (PERT-CPM); Tema 5, Modelos de Redes* (*Modelos de Árbol de expansión mínima, Modelos de Flujo máximo, Modelos de Ruta más corta, Modelos del Flujo del costo mínimo); Tema 6, Teoría de Juegos; Tema 7, Análisis de Markov; Tema 8, Modelos de Teoría de Colas y Líneas de Esperas.*

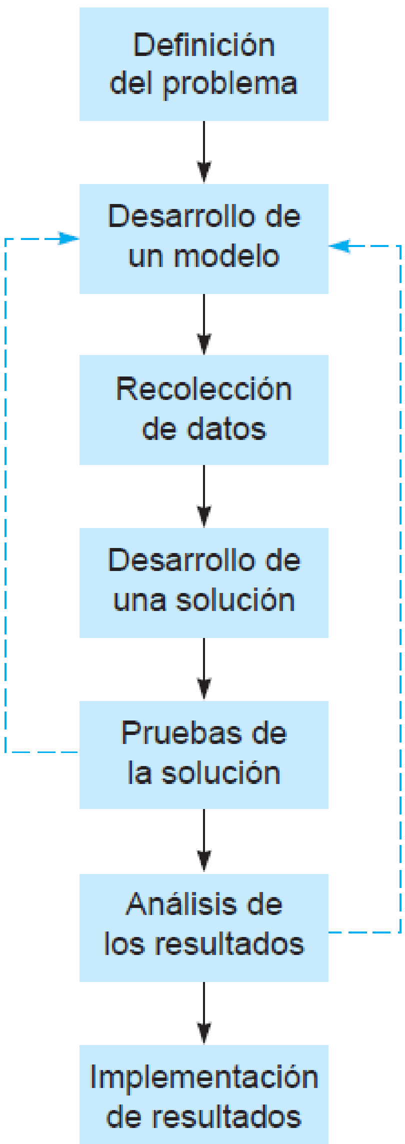
A medida que vaya avanzando en su trabajo, observará que este texto aborda abundantes modelos específicos. Es fácil llegar a sumergirse a tal grado en los detalles técnicos de los modelos y en la representación de los mismos con POM-QM, que al final se pierden de vista las habilidades de tipo general que es preciso desarrollar para llegar a ser un buen gestor o un buen constructor de modelos.

Serán útiles sus comentarios al correo jrvargas_trabajo@hotmail.com.

RESOLVIENDO PROBLEMAS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES
CON EL APOYO DEL SOFTWARE: POM-QM (ver. 3.1)
(Métodos Cuantitativos para Producción y Gestión de Operaciones)

Introducción: El software POM-QM (Production and Operations Management, Quantitative Methods) es una herramienta que contiene los principales métodos cuantitativos para las asignaturas de Investigación de operaciones I y II, así como otras propias de la carreras de Ingenierías.

El orden en que exploraremos el software, será en base al orden en que están orientados los temas en las asignaturas de Investigación de operaciones I y II, y para ejemplificar el uso del software, resolveremos problemas propuestos de los libros de textos aprobados en la planificación para el año 2014 y que están disponibles en la biblioteca de la universidad.



Enfoque del Análisis Cuantitativo

Definición del problema
El primer paso en el enfoque cuantitativo es desarrollar un enunciado claro y conciso acerca del **problema**. Este enunciado dará dirección y significado a los siguientes pasos. En muchos casos, definir el problema es el paso más importante y más difícil. Es esencial ir más allá de los síntomas del problema e identificar las causas reales.

Desarrollo de un modelo
Un modelo es una representación (casi siempre matemática) de una situación. Lo que diferencia el análisis cuantitativo de otras técnicas es que los modelos que se usan son matemáticos. Un **modelo matemático** es un conjunto de relaciones matemáticas. Casi siempre, estas relaciones se expresan como ecuaciones y desigualdades, ya que se encuentran en un modelo de hoja de cálculo que suma, saca promedios o desviaciones estándar.

Recolección de datos
Una vez desarrollado un modelo, debemos obtener los datos que se usarán en él (datos de entrada). La obtención de datos precisos para el modelo es fundamental; aun cuando el modelo sea una representación perfecta de la realidad, los datos inadecuados llevarán a resultados equivocados.

Desarrollo de una solución
El desarrollo de una solución implica la manipulación del modelo para llegar a la mejor solución (óptima) del problema. En algunos casos, esto requiere resolver una ecuación para lograr la mejor decisión. En otros casos, se podría usar el método de ensayo y error, intentando varios enfoques y eligiendo aquel que resulte en la mejor decisión. La precisión de una solución depende de la precisión de los datos de entrada y del modelo.

Pruebas de solución
Antes de analizar e implementar una solución, es necesario probarla cabalmente. Como la solución depende de los datos de entrada y el modelo, ambos requieren pruebas. El modelo se puede verificar para asegurarse de que sea lógico y represente la situación real.

Análisis de los resultados y análisis de sensibilidad
El análisis de resultados comienza con la determinación de las implicaciones de la solución. En la mayoría de los casos, una solución a un problema causará un tipo de acción o cambio en la forma en que opera una organización. Las implicaciones de tales acciones o cambios deben determinarse y analizarse antes de implementar los resultados.

Implementación de los resultados
Es el proceso de incorporar la solución a la compañía y suele ser más difícil de lo que se imagina. Incluso si la solución es óptima y dará ganancias adicionales de millones de dólares, si los gerentes se oponen a la nueva solución, todos los efectos del análisis dejan de tener valor.

Tema 1: Modelos y aplicaciones de programación lineal.

Programación lineal: Solución de problemas lineales por método gráfico.

Problema 1 (Libro Investigación de Operaciones/Taha/capítulo 2, Modelado con Programación Lineal – Método gráfico/ página 20/ problema 4).

Una compañía que funciona 10 horas al día fabrica dos productos en tres procesos secuenciales. La siguiente tabla resume los datos del problema:

Producto	Minutos por unidad			Utilidad Unitaria
	Proceso 1	Proceso 2	Proceso 3	
1	10	6	8	$2
2	5	20	10	$3

Determine la combinación óptima de los dos productos.

Solución:

Objetivo del problema: maximizar las utilidades diarias.

Restricciones (Sabemos que):

- Se producen dos productos P1 y P2
- P1 requiere 10 min en el proceso 1, 6 min en el proceso 2 y 8 min en el proceso 3
- P2 requiere 5 min en el proceso 1, 20 min en el proceso 2 y 10 min en el proceso 3
- El tiempo disponible para cada proceso es de 600 min al día.
- La utilidad unitaria por el P1 es $2 y por P2 es $3.

No sabemos:

- Cuantas unidades debemos producir de P1, por lo que le llamaremos X_1
- Cuantas unidades debemos producir de P2, por lo que le llamaremos X_2

Con la información obtenida contruimos el modelo matemático del problema lineal.

Max $Z= 2*X_1 + 3*X_2$

Sujeto a:

$10*X_1 + 5*X_2 \leq 600$ (restricción de tiempo en el proceso 1)

$6*X_1 + 20*X_2 \leq 600$ (restricción de tiempo en el proceso 2)

$8*X_1 + 10*X_2 \leq 600$ (restricción de tiempo en el proceso 3)

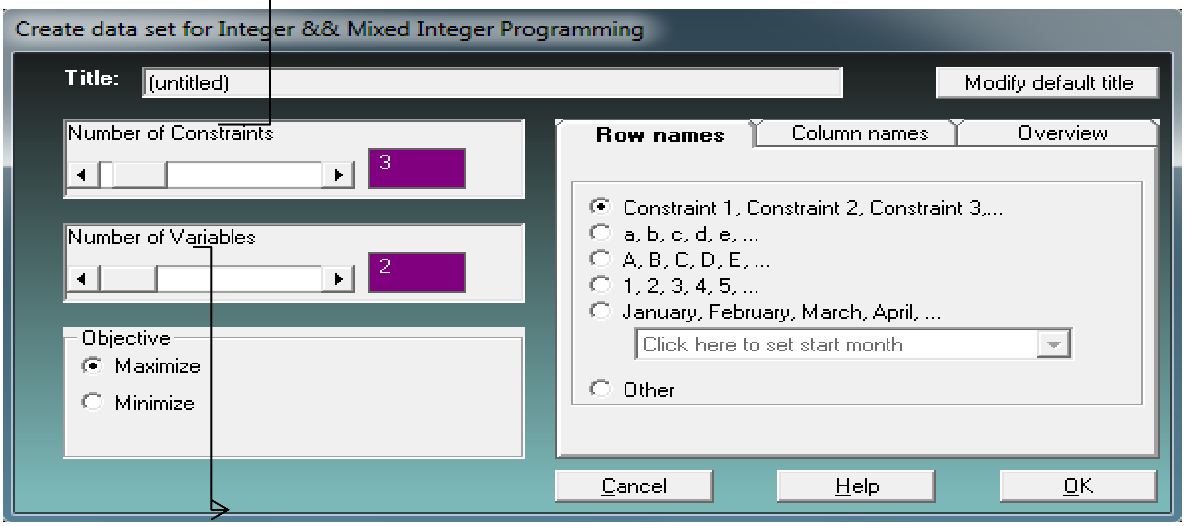
$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

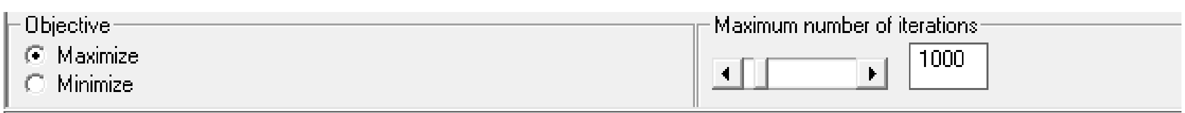
Solución por método gráfico usando POM-QM

Paso 1: Ejecutamos el programa POM-QM
Paso2: hacemos clic en el menú "**Module"**
Paso 3**:** Seleccionamos la opción **"Integer & Mixed Integer programming" (**activa el módulo)
Paso 4: Hacemos clic en el menú "**File**" y después clic en "**New**".
Le aparece una ventana como la indicada:

Número de restricciones (3)



Número de variables (2)



	X1	X2		RHS	Equation form
Maximize	2	3			Max 2X1 + 3X2
T Proceso1	10	5	<=	600	10X1 + 5X2 <= 600
T Proceso2	6	20	<=	600	6X1 + 20X2 <= 600
T Proceso3	8	10	<=	600	8X1 + 10X2 <= 600
Variable type	Integer	Integer			

Aquí se introducen los coeficientes de las variables. Puedo observar lo siguiente:

- En la fila de **Maximize** escribimos las utilidades respectivas para cada P1 y P2 representados en las variables X_1 y X_2.
- En la fila de tiempo en proceso 1. Los tiempos requeridos por cada producto en dicho proceso.
- En la fila de tiempo en proceso 2. Los tiempos requeridos por cada producto en dicho proceso.

- En la fila de tiempo en proceso 3. Los tiempos requeridos por cada producto en dicho proceso.
- Puedo observar que en la última columna están las ecuaciones del modelo lineal.
- Note que no es necesario la condición que X_1 y X_2 sean mayores que cero, ya que software por defecto asume esa condición.
- Los tipos de variables para X_1 y X_2 son enteras.

Una vez que hemos completado de ingresar los datos, hacemos clic en el botón **Solve(Resolver)**
Automáticamente se muestran 6 ventas de resultados:

Window Help
Cascade
Tile
Edit Data F9
1 Integer_Mixed Integer Programming Results
2 Iteration Results
3 Original Problem w/answers
4 Graph

1. Resultados de programación entera y entera mixta
2. Resultados de Iteraciones
3. Problema Original con respuestas
4. Solución Gráfica.

1. Resultados de programación entera y entera mixta

Integer & Mixed Integer Programming Results

Variable	Type	Value
X1	Integer	53
X2	Integer	14
Solution value		148

2. Resultados de Iteraciones

Iteration Results

Iteration	Level	Added constraint	Solution type	Solution Value	X1	X2
			Optimal	148	53	14
1	0		NONinteger	148.24	52.94	14.12
2	1	X1<= 52	NONinteger	147.2	52	14.4
3	2	X2<= 14	INTEGER	146	52	14
4	2	X2>= 15	Suboptimal	145	50	15
5	1	X1>= 53	INTEGER	148	53	14

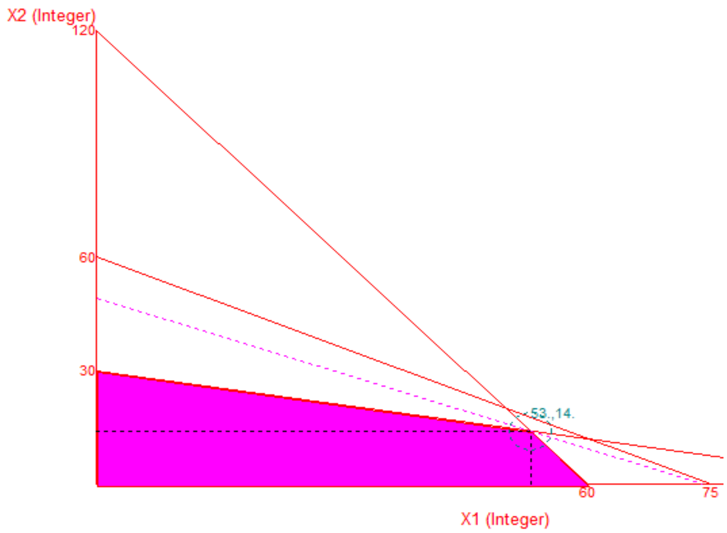
3. Problema Original con respuestas

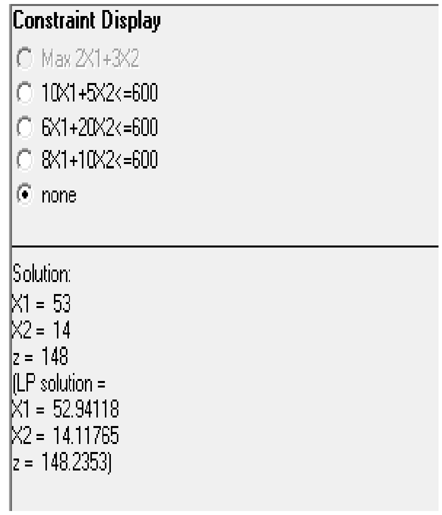
Original Problem w/answers

(untitled) Solution

	X1	X2		RHS	Equation form
Maximize	2	3			Max 2X1 + 3X2
T Proceso1	10	5	<=	600	10X1 + 5X2 <= 600
T Proceso2	6	20	<=	600	6X1 + 20X2 <= 600
T Proceso3	8	10	<=	600	8X1 + 10X2 <= 600
Variable type	Integer	Integer			
Solution->	53	14	Optimal Z->	148	

4. Solución Gráfica





Tema 1: Programación lineal: (Solución por Simplex y análisis de sensibilidad)

Problema 2 (Libro Métodos cuantitativos para negocios/Render-Stair-Hanna/capítulo 8, Aplicaciones de Programación Lineal / página 308/ Aplicaciones de marketing).

El club Win Big Gambling promueve el juego en giras de una ciudad grande el medio oeste de Estados Unidos a los casinos en las Bahamas. El club tiene un presupuesto de hasta $8,000 semanales para anuncios locales. El dinero se asignará entre cuatro medios de comunicación: spots en televisión, anuncios en periódicos y dos tipos de comerciales en radio. La meta de Win Big es llegar a la audiencia de mayor potencial más grande posible, usando los diferentes medios de comunicación.

La siguiente tabla presenta el número de jugadores potenciales expuestos mediante un anuncio en cada uno de los cuatro medios. También proporciona el costo por anuncio colocado y el máximo número de ellos que se puede comprar por semana.

MEDIO	AUDIENCIA ALCANZADA POR ANUNCIO	COSTO POR ANUNCIO ($)	MÁXIMO DE ANUNCIOS POR SEMANA
Spot en TV (1 minuto)	5,000	800	12
Periódico (una plana)	8,500	925	5
Spot en radio (30 segundos, horario estelar)	2,400	290	25
Spot de radio (1 minuto, en la tarde)	2,800	380	20

Las condiciones contractuales de Win Big requieren que se coloquen al menos cinco spots de radio cada semana. Para asegurar una campaña promocional de amplio espectro, la gerencia también insiste en que no se gasten más de $1,800 por semana en los comerciales de radio.

Solución:

Al formular esto como un programa lineal, el primer paso es entender cabalmente el problema. Algunas veces hacer preguntas del tipo “qué sucedería si” ayuda a comprender la situación.

En este ejemplo, ¿qué ocurriría si exactamente se usaran cinco anuncios de cada tipo?

¿Cuánto costaría esto?
¿A cuántas personas llegaría?
Sin duda ayuda la disponibilidad de las hojas de cálculo para obtener soluciones, ya que se escriben las fórmulas para calcular el costo y el número de personas expuestas. Una vez que se entiende la situación, se enuncian el objetivo y las restricciones:

Objetivo: Maximizar el número de gente (audiencia) expuesta
Restricciones:

1. No se pueden colocar más de 12 comerciales en TV.
2. No se pueden utilizar más de 5 anuncios en periódicos.
3. No se pueden usar más de 25 comerciales de 30 segundos en radio.
4. No se pueden usar más de 20 comerciales de 1 minuto en radio.
5. El total gastado no debe exceder $8,000.
6. El número total de comerciales en radio tiene que ser, por lo menos, de 5.
7. La cantidad total gastada en comerciales de radio no debe exceder $1,800

Después se definen las variables de decisión. Las decisiones que se toman son el número de comerciales de cada tipo que se contratarán. Una vez que se conocen, pueden utilizarse para calcular la cantidad gastada y el número de personas expuestas.
Sea:
$X1$ = número de spots de TV de 1 minuto en cada semana
$X2$ = número de anuncios de 1 plana en el periódico en cada semana
$X3$ = número de spots de radio de 30 segundos en cada semana
$X4$ = número de spots de radio de 1 minuto por la tarde en cada semana
Luego, con estas variables, se escriben las expresiones matemáticas para el objetivo y las restricciones que se identificaron. Las restricciones de no negatividad también se establecen en forma explícita.

Modelo matemático de programación lineal

Objetivo: Max $Z=5000X_1 + 8500X_2 + 2400X_3 + 2800X_4$

Sujeto a:

$X_1 \leq 12$ (máximo de spots en TV/semana)
$X_2 \leq 5$ (máximo de anuncios en periódicos/semana)
$X_3 \leq 25$ (máximo de spots de 30s en radio/semana)
$X_4 \leq 20$ (máximo de spots de 1 m en radio/semana)
$800X_1 + 925X_2 + 290X_3 + 380X_4 \leq \$8000$ (presupuesto semanal de publicidad)
$X_3 + X_4 \geq 5$ (mínimos de spots en radio contratados)
$290X_3 + 380X_4 \leq \$1800$ (máximo de dólares gastados en radio)
$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

Hacemos clic en el menú **Module** y luego en "**Linear Programming**" , después **File** y **New**

Objective
Maximize
Minimize

Aplicación de marketing

	X1	X2	X3	X4		RHS	Equation form
Maximize	5000	8500	2400	2800			Max 5000X1 + 8500X2 + 2400X3 +
max spots en Tv	1	0	0	0	<=	12	X1 <= 12
max spots en periódicos	0	1	0	0	<=	5	X2 <= 5
max spots de 30s en radio	0	0	1	0	<=	25	X3 <= 25
max spots 1m en radio	0	0	0	1	<=	20	X4 <= 20
presupuesto semanal publicidad	800	925	290	380	<=	8000	800X1 + 925X2 + 290X3 + 380X4
mínimo spot en radio contratados	0	0	1	1	>=	5	X3 + X4 >= 5
máximo de dólares en radio	0	0	290	380	<=	1800	290X3 + 380X4 <= 1800

Una vez que hemos ingresados los datos y hemos verificado que no hay errores en las ecuaciones e inecuaciones, hacemos clic en el botón Solve.

Edit Data F9

1 Linear Programming Results
2 Ranging
3 Solution list
4 Iterations
5 Dual

1. Resultados del PL
2. Rangos
3. Lista de Solución
4. Iteraciones (Solución por Simplex)
5. Problema Dual

1. Resultados de PL

Linear Programming Results

Aplicación de marketing

	X1	X2	X3	X4		RHS	Dual
Maximize	5000	8500	2400	2800			
max spots en Tv	1	0	0	0	<=	12	0
max spots en periódicos	0	1	0	0	<=	5	2718.75
max spots de 30s en radio	0	0	1	0	<=	25	0
max spots 1m en radio	0	0	0	1	<=	20	0
presupuesto semanal publicidad	800	925	290	380	<=	8000	6.25
mínimo spot en radio	0	0	1	1	>=	5	0
máximo de dólares en radio	0	0	290	380	<=	1800	2.03
Solution->	1.97	5	6.21	0		67240.3	

2. Ranging

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X1	1.97	0	5000	0	6620.69
X2	5	0	8500	5781.25	Infinity
X3	6.21	0	2400	2136.84	Infinity
X4	0	344.83	2800	-Infinity	3144.83
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
max spots en Tv	0	10.03	12	1.97	Infinity
max spots en periódicos	2718.75	0	5	0	6.7
max spots de 30s en radio	0	18.79	25	6.21	Infinity
max spots 1m en radio	0	20	20	0	Infinity
presupuesto semanal publicidad	6.25	0	8000	6425	16025
mínimo spot en radio	0	1.21	5	-Infinity	6.21
máximo de dólares en radio	2.03	0	1800	1450	3375

3. Lista de Soluciones.

Variable	Status	Value
X1	Basic	1.97
X2	Basic	5
X3	Basic	6.21
X4	NONBasic	0
slack 1	Basic	10.03
slack 2	NONBasic	0
slack 3	Basic	18.79
slack 4	Basic	20
slack 5	NONBasic	0
surplus 6	Basic	1.21
slack 7	NONBasic	0
Optimal Value (Z)		67240.3

4. Iteraciones (Solución por método Simplex)

Cj	Basic Variables	5000 X1	8500 X2	2400 X3	2800 X4	0 slack 1	0 slack 2	0 slack 3	0 slack 4	0 slack 5	0 artfcl 6	0 surplus 6	0 slack 7	Quantity
Iteration 1														
0	slack 1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	12
0	slack 2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	5
0	slack 3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	25
0	slack 4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	20
0	slack 5	800	925	290	380	0	0	0	0	1	0	0	0	8,000
0	artfcl 6	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	5
0	slack 7	0	0	290	380	0	0	0	0	0	0	0	1	1,800
	zj	5000	8500	2399	2799	0	0	0	0	0	0	1	0	5
	cj-zj	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	
Iteration 2														
0	slack 1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	12
0	slack 2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	5
0	slack 3	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	-1	1	0	20
0	slack 4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	20
0	slack 5	800	925	0	90	0	0	0	0	1	-290	290	0	6,550
2400	X3	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	5
0	slack 7	0	0	0	90	0	0	0	0	0	-290	290	1	350
	zj	5000	8500	2400	2800	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	cj-zj	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	
Iteration 3														
0	slack 1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	12
0	slack 2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	5
0	slack 3	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	-1	1	0	20
0	slack 4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	20
0	slack 5	800	925	0	90	0	0	0	0	1	-290	290	0	6,550
2400	X3	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	5
0	slack 7	0	0	0	90	0	0	0	0	0	-290	290	1	350
	zj	0	0	2400	2400	0	0	0	0	0	2400	-2400	0	12,000
	cj-zj	5,000	8,500	0	400	0	0	0	0	0	-2,400	2,400	0	
Iteration 4														
0	slack 1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	12
8500	X2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	5
0	slack 3	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	-1	1	0	20
0	slack 4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	20
0	slack 5	800	0	0	90	0	-925	0	0	1	-290	290	0	1,925
2400	X3	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	5
0	slack 7	0	0	0	90	0	0	0	0	0	-290	290	1	350
	zj	0	8500	2400	2400	0	8500	0	0	0	2400	-2400	0	54,500
	cj-zj	5,000	0	0	400	0	-8,500	0	0	0	-2,400	2,400	0	
Iteration 5														
0	slack 1	0	0	0	-0.1125	1	1.1563	0	0	-0.0013	0.3625	-0.3625	0	9.5938
8500	X2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	5
0	slack 3	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	-1	1	0	20
0	slack 4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	20
5000	X1	1	0	0	0.1125	0	-1.1563	0	0	0.0013	-0.3625	0.3625	0	2.4063
2400	X3	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	5
0	slack 7	0	0	0	90	0	0	0	0	0	-290	290	1	350
	zj	5000	8500	2400	2962.5	0	2718.75	0	0	6.25	587.5	-587.5	0	66,531.25
	cj-zj	0	0	0	-162.5	0	-2,718.75	0	0	-6.25	-587.5	587.5	0	
Iteration 6														
0	slack 1	0	0	0	0	1	1.1563	0	0	-0.0013	0	0	0.0013	10.0313
8500	X2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	5
0	slack 3	0	0	0	-1.3103	0	0	1	0	0	0	0	-0.0034	18.7931
0	slack 4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	20
5000	X1	1	0	0	0	0	-1.1563	0	0	0.0013	0	0	-0.0013	1.9687
2400	X3	0	0	1	1.3103	0	0	0	0	0	0	0	0.0034	6.2069
0	surplus 6	0	0	0	0.3103	0	0	0	0	0	-1	1	0.0034	1.2069
	zj	5000	8500	2400	3144.83	0	2718.75	0	0	6.25	0	0	2.03	67,240.3017
	cj-zj	0	0	0	-344.8276	0	-2,718.75	0	0	-6.25	0	0	-2.0259	

5. El problema Dual

Original Problem									
Maximize	X1	X2	X3	X4					
max spots en Tv	1	0	0	0	<=	12			
max spots en periódicos	0	1	0	0	<=	5			
max spots de 30s en radio	0	0	1	0	<=	25			
max spots 1m en radio	0	0	0	1	<=	20			
presupuesto semanal publicidad	800	925	290	380	<=	8000			
mínimo spot en radio	0	0	1	1	>=	5			
máximo de dólares en radio	0	0	290	380	<=	1800			
Dual Problem									
	max spots en	max spots en	max spots de	max spots 1m	presupuesto	mínimo spot en	máximo de		
Minimize	12	5	25	20	8000	-5	1800		
X1	1	0	0	0	800	0	0	>=	5000
X2	0	1	0	0	925	0	0	>=	8500
X3	0	0	1	0	290	-1	290	>=	2400
X4	0	0	0	1	380	-1	380	>=	2800

PROBLEMAS RESUELTOS EN MODO GRÁFICO

I. Disponemos de 210,000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A, que rinden el 10% y las del tipo B, que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130,000 euros en las del tipo A y como mínimo 60,000 en las del tipo B. Además queremos que la inversión en las del tipo A sea menor que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?

Solución:

Es un problema de programación lineal.

Llamamos **x** a la cantidad que invertimos en acciones de tipo A

Llamamos **y** a la cantidad que invertimos en acciones de tipo B

	Inversión	Rendimiento
Tipo A	x	0.1x
Tipo B	y	0.08y
	210000	0.1x+0.08y

Condiciones que deben cumplirse (restricciones):

$x \geq 0$

$y \geq 0$

R_1 $x + y \leq 210000$

R_2 $x \leq 130000$

R_3 $y \geq 60000$

R_4 $x \leq 2y$

Dibujamos las rectas auxiliares asociadas a las restricciones para conseguir la región factible (conjunto de puntos que cumplen esas condiciones)

r_1

x	y
0	210000
210000	0

r_2 (paralela a OY)

x	y
130000	0

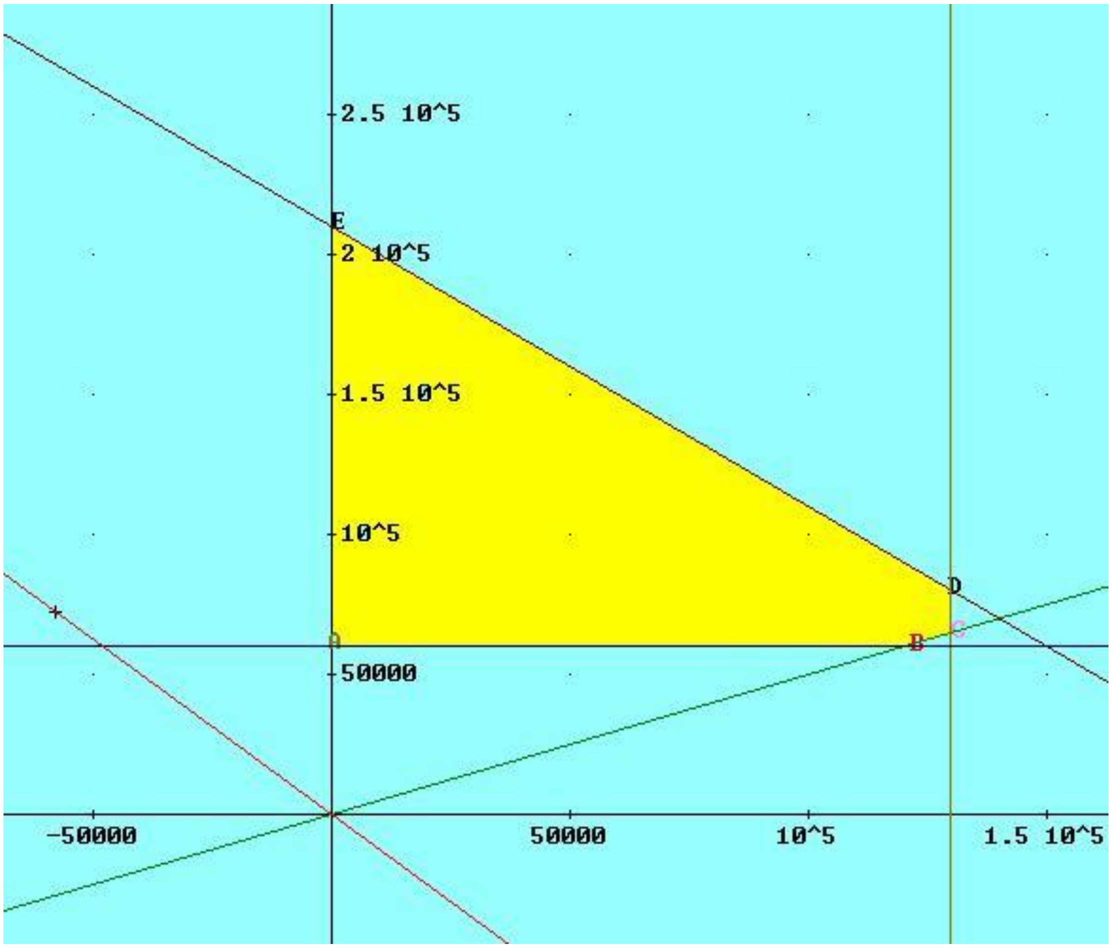
r_3 (paralela a OX)

x	y
0	60000

r_4

x	y
0	0
130000	65000

La región factible es la pintada de amarillo, de vértices A, B, C, D y E



A(0, 60000), B(120000, 60000), C(130000, 65000), D(130000, 80000) y E(0, 210000)
La función objetivo es; **f(x, y)=z= 0.1x+0.08y**
Si dibujamos la curva f(x, y) =0 (en rojo) y la desplazamos se puede comprobar gráficamente que el vértice más alejado es el **D, y por tanto es la solución óptima.**
Comprobarlo analíticamente (es decir comprobar que el **valor máximo de la función objetivo, f,** se alcanza en el vértice **D**)

II. En una pastelería se hacen dos tipos de tartas: Vienesa y Real. Cada tarta Vienesa necesita un cuarto de relleno por cada Kg. de bizcocho y produce un beneficio de 250 Pts, mientras que una tarta Real necesita medio Kg. de relleno por cada Kg. de bizcocho y produce 400 Ptas. de beneficio. En la pastelería se pueden hacer diariamente hasta 150 Kg. de bizcocho y 50 Kg. de relleno, aunque por problemas de maquinaria no pueden hacer más de 125 tartas de cada tipo. ¿Cuántas tartas Vienesas y cuantas Reales deben vender al día para que sea máximo el beneficio?

Solución:
En primer lugar hacemos una tabla para organizar los datos:

Tipo	Nº	Bizcocho	Relleno	Beneficio
T. Vienesa	x	1.x	0.250x	250x
T. Real	y	1.y	0.500y	400y
		150	50	

Función objetivo (hay que obtener su máximo): f(x, y)=z=250x+ 400y

Sujeta a las siguientes condiciones (restricciones del problema):

$$\begin{cases} x+y \leq 150 \\ 0{,}250x+0{,}500y \leq 50 \\ x \leq 125 \\ y \leq 125 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Consideramos las rectas auxiliares a las restricciones y dibujamos la región factible:

Para 0.25x+0.50y=50, ó x + 2y=200

x	Y
0	100
200	0

Para x + y =150

x	Y
0	150
150	0

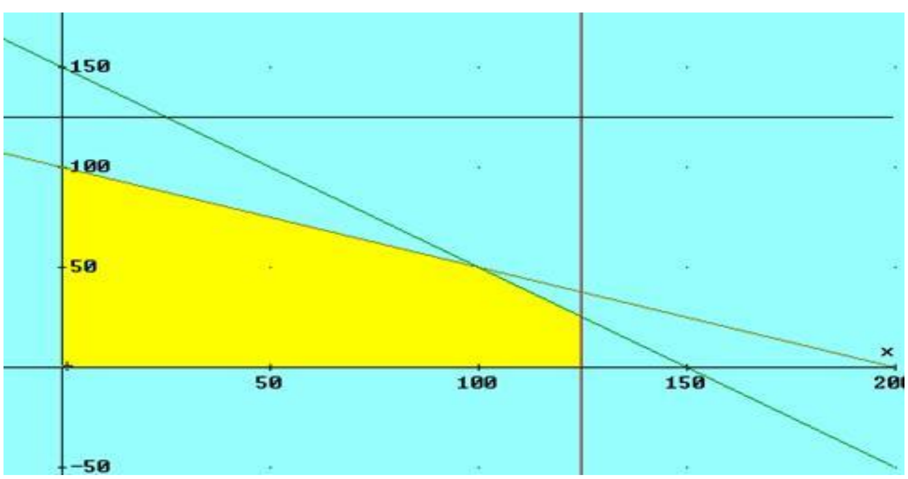
La otras dos son paralelas a los ejes

Al eje OY x=125

Al eje OX y =125

Y las otras restricciones (x e y mayor o igual a cero) nos indican que las soluciones deben estar en el primer cuadrante

La región factible la hemos coloreado de amarillo:



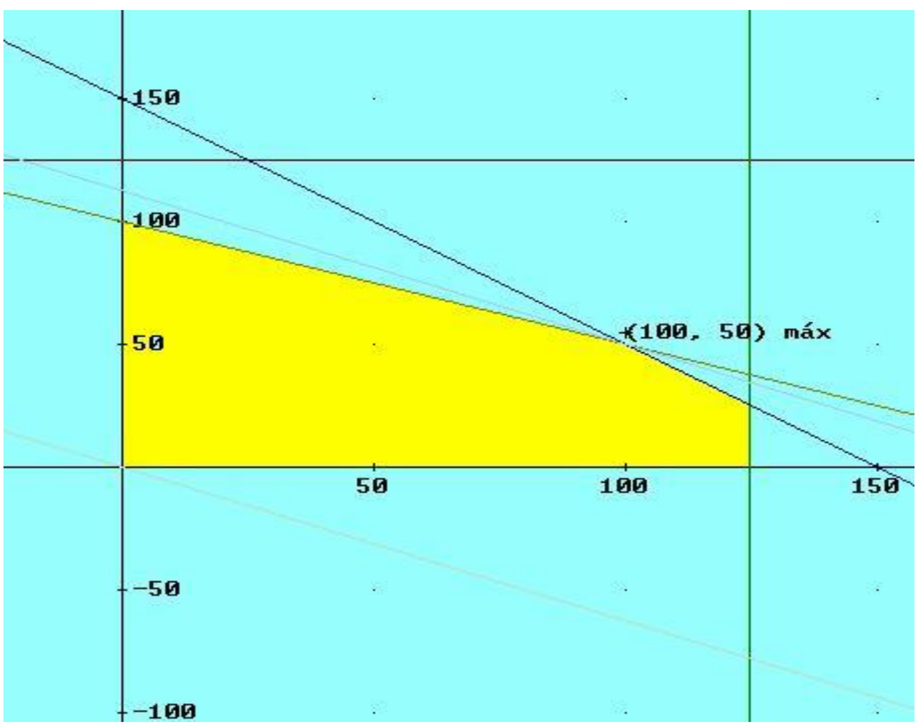
Encontremos los vértices:
El **O**(0,0), el **A**(125, 0) y el **D**(0, 100) se encuentran directamente (son las intersecciones con los ejes coordenados)
Se observa que la restricción y ≤ 125 es redundante (es decir "sobra")
Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x+2y=200 \\ x+y=150 \end{cases}$$, por reducción obtenemos y=50, x=100

Otro vértice es el punto C(100, 50)
Y el último vértice que nos falta se obtiene resolviendo el sistema:
x+y=150
x=125
Cuya solución es: X=125, Y=25 --> B(125, 25)

Los vértices de la región son O(0,0), A(125,0), B(125,25) y C(100,50) y D(0,100),
Si dibujamos el vector de dirección de la función objetivo f(x, y)=250x+ 400y
Haciendo 250x+ 400y =0, y=-(250/400)x=-125x/200

x	Y
0	0
200	-125



Se ve gráficamente que la solución es el punto (100, 50), ya que es el vértice más alejado (el último que nos encontramos al desplazar la rectas 250x+400y=0)

Lo comprobamos con el método analítico, es decir usando el teorema que dice que si existe solución única debe hallarse en uno de los vértices

La función objetivo era: f(x, y)=250x+400y, sustituyendo en los vértices obtenemos

f(125,0)=31,250

f(125,25)=31,250+10.,000=41,250

f(100,50)=25,000+20,000=45,000

f(0,100)=40,000

El máximo beneficio es 45,000 y se obtiene en el punto (100, 50)

Conclusión: se tienen que vender 100 tartas vienesas y 50 tartas reales.

III. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas, pero solo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autocar grande cuesta 80 euros y el de uno pequeño, 60 euros. Calcular cuántos de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela.

Solución:

Es un problema de programación lineal, en este caso lo que queremos es hacer mínima la función objetivo.

Llamamos **x** al nº de autocares de 40 plazas e **y** al nº de autocares de 50 plazas que alquila la escuela.

Entonces se tiene **x** ≤ 8 , **y** ≤ 10

Como sólo hay 9 conductores se verifica que: **x +y** ≤ 9

Como tienen que caber 400 alumnos se debe de verificar:

40x +50y ≥ 400, que simplificada quedaría 4 x +5y ≥ 40

Por lo tanto las **restricciones** que nos van a permitir calcular la región factible (conjunto de puntos solución donde se cumplen todas las condiciones) son

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x \leq 8 \quad R_1 \\ y \leq 10 \quad R_2 \\ x + y \leq 9 \quad R_3 \\ 4x + 5y \geq 40 \quad R_4 \end{cases}$$

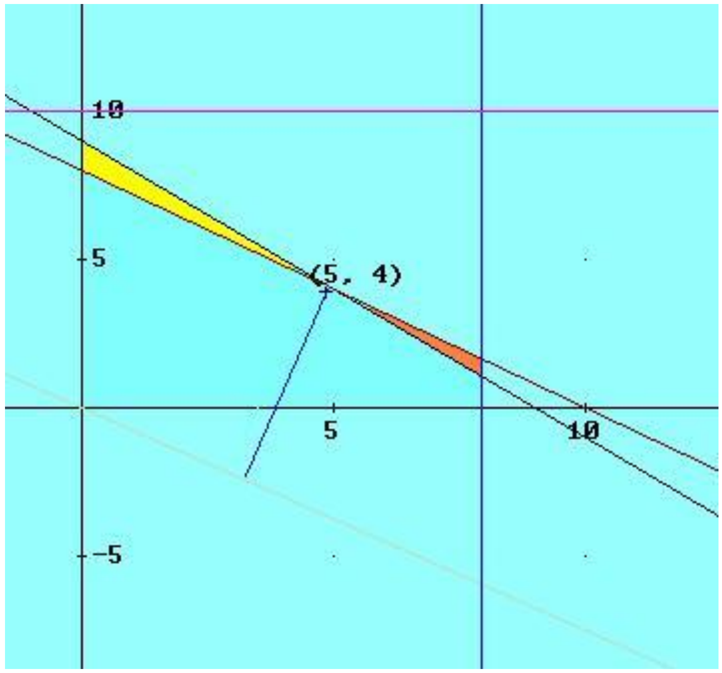
La función objetivo es f(x, y)=z= 60x+ 80y

Dibujamos las rectas auxiliares,

r_1		r_2		r_3		r_4	
x	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**
8	0	0	10	0	9	0	8
				9	0	10	0

Así como la de que corresponde a f(x, y)=0 que se dibuja en rojo.

Teniendo en cuenta las restricciones (la de R_4 es la parte de arriba y que la R_3 es la parte de abajo), se encuentra la región factible. En el dibujo es la parte amarilla.



Los vértices son (0, 8), (0, 9) y el **(5, 4),** este último es el punto de intersección de las rectas r_3 y r_4

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 4x + 5y = 40 \end{cases} \quad \text{por reducción} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 5x + 5y = 45 \\ 4x + 5y = 40 \end{cases}$$

restando ambas ecuaciones se tiene **x =5** y sustituyendo en la 1ª ecuación, **y =4**
Resolviendo gráficamente se llega a que el punto (5, 4) es la solución del problema. La solución óptima.
Comprobarlo sustituyendo en f(x, y) todos los vértices y que este es el que da menor valor (método analítico).

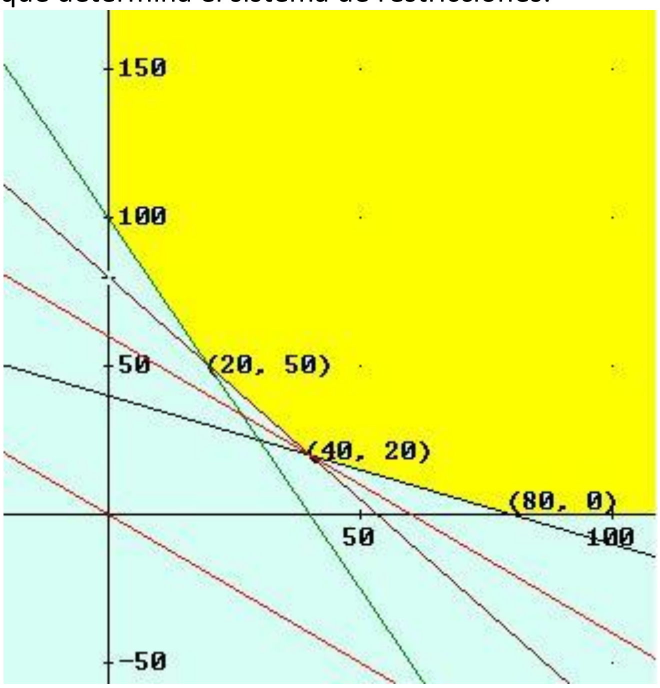
IV. Una compañía posee dos minas: la mina A produce cada día 1 tonelada de hierro de alta calidad, 3 toneladas de calidad media y 5 de baja calidad. La mina B produce cada día 2 toneladas de cada una de las tres calidades. La compañía necesita al menos 80 toneladas de mineral de alta calidad, 160 toneladas de calidad media y 200 de baja calidad. Sabiendo que el coste diario de la operación es de 2000 euros en cada mina ¿cuántos días debe trabajar cada mina para que el coste sea mínimo?.
Solución
Organizamos los datos en una tabla:

	días	**Alta calidad**	**Calidad media**	**Baja calidad**	**Coste diario**
Mina A	x	1x	3x	5x	2000x
Mina B	y	2y	2y	2y	2000y
		80	160	200	

La función objetivo C(x, y)=2000x + 2000y

Las restricciones son: $\begin{cases} x+2y \geq 80 \\ 3x+2y \geq 160 \\ 5x+2y \geq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

La región factible la obtenemos dibujando las rectas auxiliares: $r_1 \equiv x + 2y=80$, $r_2 \equiv 3x + 2y= 160$ y $r_3 \equiv 5x + 2y=200$ en el primer cuadrante y considerando la región no acotada que determina el sistema de restricciones:



Los vértices son los puntos A(0, 100), B(20, 50), C(40, 20), D(80, 0), que se encuentran al resolver el sistema que determinan dos a dos las rectas auxiliares y (que estén dentro de la región factible).

$r_1 \cap r_2 \equiv \begin{cases} x+2y=80 \\ 3x+2y=160 \end{cases}$ que nos da el punto (40, 20) (comprobarlo)

$r_2 \cap r_3 \equiv \begin{cases} 3x+2y=160 \\ 5x+2y=200 \end{cases}$ que nos da el punto (20, 50)

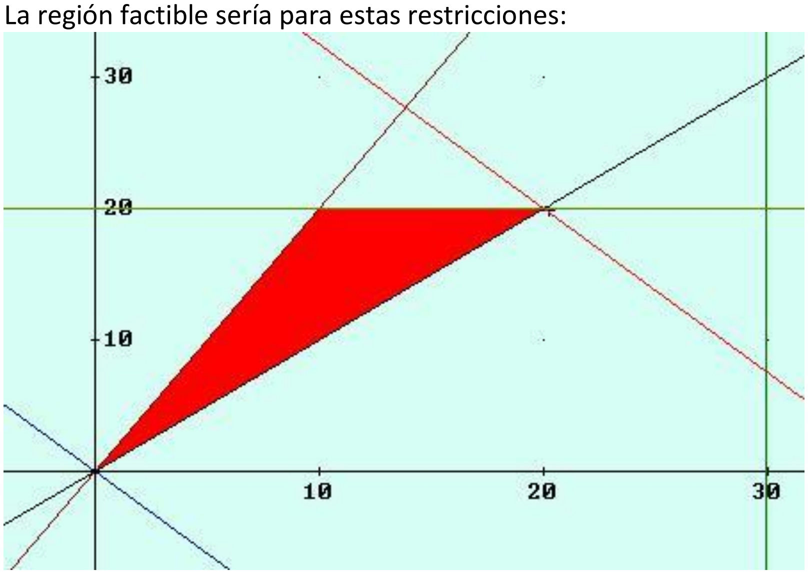
$r_1 \cap r_3$ no hace falta calcularlo pues queda fuera de la región factible.

En la gráfica se aprecia que el primer punto que se alcanza al desplazar la recta C(x, y)=0 es el (40, 20). Luego la solución es trabajar 40 días en la mina A y 20 en la B. (método gráfico)
Lo comprobamos aplicando el método analítico:
C(0, 100)=2000.100=200000
C(20, 50)=2000.20+2000.50=40000 + 100000= 140000
C(40, 20)= 2000. 40+2000.20=80000 + 40000= 120000 costo mínimo
C(80, 0)= 2000.80 =160000

V. Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble que el de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es de 250 euros por electricista y 200 euros por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio y cual es este?
Sea x = nº electricistas
y = nº mecánicos
La función objetivo
f (x, y)=250x+ 200y , las restricciones

$$\begin{cases} y \geq x \\ y \leq 2x \\ x \leq 30 \\ y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible sería para estas restricciones:



Se aprecia gráficamente (línea en rojo) que la solución óptima está en el punto (20, 20).
Por tanto:
20 electricistas y 20 mecánicos dan el máximo beneficio, y este es 9000 euros, ya que f(x, y) =250.20+200.20=9000

VI. Para recorrer un determinado trayecto, una compañía aérea desea ofertar, a lo sumo, 5000 plazas de dos tipos: T(turista) y P(primera). La ganancia correspondiente a cada plaza de tipo T es de 30 euros, mientras que la ganancia del tipo P es de 40 euros.

El número de plazas tipo T no puede exceder de 4500 y el del tipo P, debe ser, como máximo, la tercera parte de las del tipo T que se oferten.

Calcular cuántas tienen que ofertarse de cada clase para que las ganancias sean máximas.

Solución

Sea x el nº que se ofertan de tipo T, y el nº que se ofertan de tipo P.

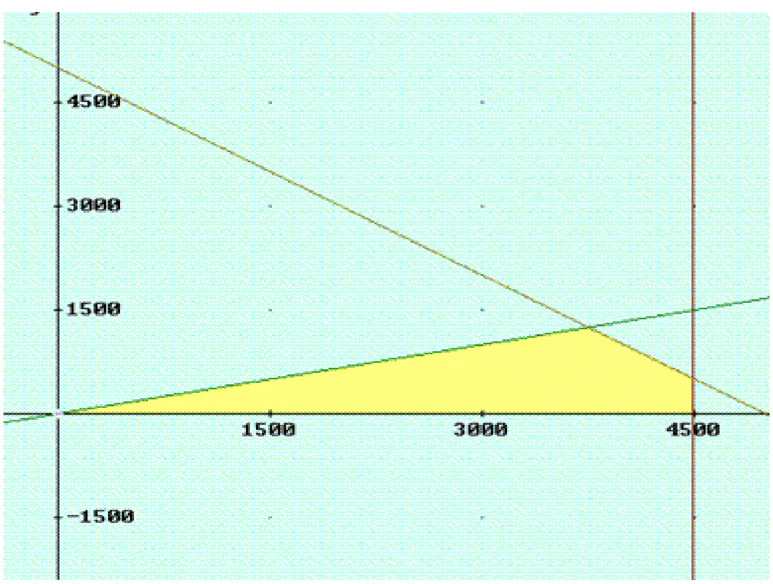
	nº	Ganancia
Turista	x	30x
Primera	y	40y
Total	5000	30x +40y

La función objetivo es:

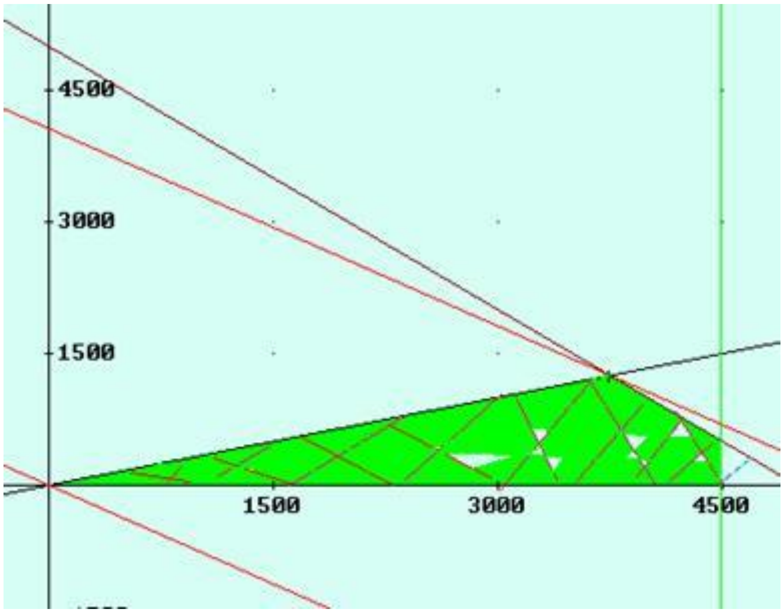
f(x, y)=z=30x +40y

Las restricciones: $\begin{cases} x+y\le 5000 \\ x\le 4500 \\ y\le \dfrac{x}{3} \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

La región factible:



Los vértices, A(0, 5000), B(3750, 1250), C(4500, 500) y D(4500, 0) (comprueba el punto B resolviendo el sistema correspondiente). El método gráfico nos da que el punto solución es el B (3750, 1250)



Comprueba los resultados usando el método analítico (sustituyendo los puntos vértices en f y viendo q el máximo valor se obtiene en B)

EJEMPLO DE SIMPLEX PARA PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL CASO DE MAXIMIZAR CONSTRUCCION DE LA TABLA INICIAL DEL MÉTODO SIMPLEX

Una vez que el alumno ha adquirido la destreza para transformar cualquier problema de Programación Lineal a forma estándar se enfrenta con el problema de su resolución y el primer paso que debe llevar a cabo es la construcción de la primera tabla del Simplex. Para facilitarle esta tarea, este material muestra de una forma visualmente atractiva, cómo disponer los elementos necesarios para la construcción de dicha tabla inicial, identificando las variables básicas y la solución básica inicial. Se han distinguido los siguientes pasos: determinación del número de filas y columnas de la tabla, rellenado del interior de la tabla con los coeficientes de las variables de holguras, inclusión de los costos o utilidades, identificación de las variables básicas, identificación de los costes básicos y, finalmente, identificación de la solución básica inicial.

Expresamos el modelo matemático en la forma estándar.

Todas las restricciones del modelo matemático deben convertirse en igualdades.

- No debe haber ningún lado derecho negativo.
- Si es "**<=**" entonces se agrega una $\mathbf{H_i}$ (variable de holgura)
- Si es "**>=**" entonces se agregan $\mathbf{A_i}$ **-** $\mathbf{H_i}$ (variable artificial y menos variable de holgura)
- Si es " **=**" entonces se agrega una $\mathbf{A_i}$ (variable artificial)

Sea el siguiente modelo de un PPL en su forma estándar:

Max $z=40X_1 + 60X_2$

Sujeto a:

$2X_1 + X_2 \leq 70$

$X_1 + X_2 \leq 40$

$X_1 + 3X_2 \leq 90$

$X_1, X_2 \geq 0$

Se trata de un problema de maximización con dos variables y tres restricciones.
Todas las restricciones son menores o iguales.
Para resolver este problema por el método simplex, lo primero que hacemos es convertir las inecuaciones en ecuaciones. Por lo que se hará necesario introducir una variable en cada inecuación del modelo. Esas variables reciben los nombres de "**Variables de holguras**".
Las variables de holguras que me han permitido convertir las restricciones en ecuaciones, formarán parte de la función objetivo pero con coeficiente "cero" para que no se altere el óptimo el

El modelo quedará de la siguiente forma:

Max $z=40X_1 + 60X_2 + 0H_1 + 0H_2 + 0H_3$

Sujeto a:

$2X_1 + X_2 + H_1 = 70$

$X_1 + X_2 + H_2 = 40$

$X_1 + 3X_2 + H_3 = 90$

$X_1, X_2, H_1, H_2, H_3 \geq 0$

El Segundo paso es formar la tabla inicial del Simplex. Para lo que debemos explicar la estructura de la tabla del simplex.

2.1 En la primera fila se deben colocar todos los coeficientes de la función objetivo, en nuestro caso los coeficientes son **utilidades**.

C_j= (40 60 0 0 0)

2.2 La primera columna de la tabla está encabezada por X_B, es decir las **variables básicas**. En la tabla inicial las variables básicas estarán formada por las variables de holgura.

X_B
H_1
H_2
H_3

2.3 La segunda columna de la tabla del simplex es encabezada por los coeficientes de utilidades de las variables básicas, como se indica:

C_B
0
0
0

2.4 La tercera columna de la tabla del simplex es encabezado por "**b**" los valores de los lados derechos de las ecuaciones que forman las restricciones.

b
70
40
90

2.5 Las columnas 4ta. a la 8va. Son encabezadas por los nombres de las variables del modelo con sus respectivos coeficientes.

X_1	X_2	H_1	H_2	H_3
2	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	3	0	0	1

2.6 La columna novena es el Ratio o cocientes.

Ratios
70
40
30

2.7. La fila seis corresponde a los Z_j es la suma de los C_B*Coeficientes de cada variable del modelo.

$$Z_j = (\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

2.8 La fila siete corresponde a los $C_j - Z_j$ es la diferencia de los valores de la primera fila y los de la fila seis.

$$C_j - Z_j = (\quad 40 \quad 60 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

La tabla 1 del Simplex tendrá la estructura que se observa:

TABLA 1 DEL SIMPLEX

F1			C_j	40	60	0	0	0	
F2	**X_B**	**C_B**	**b**	**X_1**	**X_2**	**H_1**	**H_2**	**H_3**	**Ratios**
F3	H_1	0	70	2	1	1	0	0	70
F4	H_2	0	40	1	1	0	1	0	40
F5	H_3	0	90	1	3	0	0	1	30
F6	Z_j			0	0	0	0	0	
F7	C_j - Z_j			40	60	0	0	0	

Una vez que la tabla inicial está construid; hemos obtenido la primera solución básica factible del modelo, que es H_1=40; H_2=60; H_3=0; para un Z= 40*0 + 60*0 + 0*70 + 0*40 + 0*90= 0

PROCESO DE ITERACIONES PARA OBTENER EL VALOR ÓPTIMO

¿Cuál es el paso siguiente? Debemos observar los valores del vector $C_j - Z_j$ o fila F7, si existe algún o algunos $C_j - Z_j>0$ debemos iniciar lo que llamaremos un proceso de **iteración** en busca de la solución óptima.

Como se puede observar en los $C_j - Z_j$ existen dos valores mayores que cero, pero solo debemos elegir uno, el criterio es seleccionar el valor máximo de {40,60}= 60. El valor 60 elegido indica que la variable X_2 entrará como variable básica. Eso indica que una de las tres básicas actuales conformada por H_1, H_2, y H_3 deberá salir para dar lugar a la nueva variable. Para saber que variable debe salir se calculan los cocientes de los lados derechos (**b**) entre los coeficientes de la variable X_2 y los resultados los ponemos en la columna última de la tabla que hemos encabezado con la palabra **Ratio o razón.**

Los valores que se obtuvieron son 70, 40, 30 de ellos se elige el mínimo en ese caso será 30.

La elección del valor mínimo nos indica que la variable básica que saldrá es H_3 porque en esa fila se obtuvo el valor mínimo.

Ahora procedemos a hacer un conjunto de transformaciones, las que detallaremos con el propósito de que los actuales coeficientes de la variable X_2 formen una columna de la matriz identidad tres x tres. Ha podido observar que los actuales coeficientes son 1, 1, y 3. Como 3 es el número pivote (intersección de la columna y fila de las variables seleccionadas) ese valor lo convertiremos en 1 y los otros dos coeficientes en ceros.

Es importante indicar que los cambios o transformaciones se deben de ir reflejando en la nueva tabla del Simplex que será la tabla. La F1 no sufrirá ningún cambio en todas las transformaciones que se hagan. En la tabla 2 se debe proceder a remplazar a H_3 por X_2 en la primera columna y en la segunda columna el respectivo costo o utilidad de la variable X_2 que es 60. Las otras dos variables básicas se mantienen iguales con sus costos o utilidades.

La fila cinco (F5) de la tabla 1 se divide por 3, y se afectará a las celdas de las columna 3 a la 8. Los resultados se reflejaran en la tabla 2 como se muestra.

Los coeficientes de X_2 en la fila F3 y F4 que en la tabla 1 son 1 y 1 respectivamente deberán ser cero. Para la cual se deberá hacer los siguientes cálculos:

- La fila F3 de la tabla 1 se restará de fila F5 y el resultado deberá registrarse en la F3 de la tabla 2. Esto es: F3 – F5 → F3. Ver resultados en la tabla 2.
- La fila F4 de la tabla 1 se restará de la fila F5 y el resultado deberá registrarse en la F4 de la tabla 2. Esto es: F4 – F5 →F4. Ver resultados en la tabla 2.

Ahora calculamos los Z_j de la tabla 2, que como indicamos anteriormente se obtienen de la suma de productos de los C_B por los coeficientes de cada variable. Como se puede ver en la fila F6 de la tabla 2.

Para obtener los Cj - Z_j solo restamos los coeficientes de la primera fila (F1) de la tabla 2 de los valores Z de la fila F6, los resultados se muestran en la fila F7 de la tabla 2.

TABLA 2 DEL SIMPLEX

F1			C_j	40	60	0	0	0	
F2	X_B	C_B	b	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Ratios
F3	H_1	0	40	1.667	0	1	0	-0.333	24
F4	H_2	0	10	0.667	0	0	1	-0.333	15
F5	X_2	60	30	0.333	1	0	0	0.333	90
F6	Z_j			20		0	0	20	
F7	C_j - Z_j			20	0	0	0	-20	

Ahora hemos obtenido la segunda solución b{asica factible del modelo, que es: H_1=0; H_2=0; X_2=60; para un Z== 40*0 + 60*30 + 0*40 + 0*10 + 0*0= 1800.

¿Es ese valor el óptimo o no? La respuesta a la pregunta es NO, porque podemos observar que en la fila F7 de la tabla 2 hay C_j - Z_j >0, por lo que todavía no hemos llegado al óptimo es decir debemos volver a **iterar**.

Ahora el valor máximo de los C_j - Z_j >0 solo es 20, eso indica que la variable que entrará a las básicas será X_1.

Para conocer la variable que debe salir de las básicas, se deben obtener los cocientes de los lados derechos o **(b)** sobre los coeficientes de X_1. Los resultados son 24, 15, y 90. Como lo puede ver en la columna **Ratio** de la tabla 2. De los tres valores seleccionamos el mínimo, que corresponde a 15. Por lo que la variable que sale es H_2.

El número pivote es 2/3 o 0.667. Ese valor lo transformaremos en 1. Multiplicándolo por su reciproco 3/2. Los resultados se mostrarán en la tabla 3 fila F4.

Se actualiza la columna de las variables básicas X_B incorporando a X_1 en sustitución de H_2 y actualizamos el C_B de la nueva variable básica que hemos incorporado, como se muestra en la tabla 3.

Los coeficientes de la columna de X_1 (tabla 2) en la F3 y F5 son diferentes de cero, por lo que debemos transformar esas filas de manera que esos coeficientes sean cero, dado que esa columna será parte de la matriz identidad. Para lograr eso procederemos de la siguiente manera:

- La fila F3 de la tabla 2 menos los 5/3 por la fila F4 de la tabla 3, el resultado debe quedar en la fila F3 de la tabla 3. Esto es: F3 – 5/3*F4 → F3. Ver los resultados en la fila F3 de la tabla 3.
- La fila F5 de la tabla 2 menos 1/3 por la fila F5 de la tabla 3, el resultado debe quedar en la fila F5 de la tabla 3. Esto es: F5 – 1/3*F4 →F5. Ver los resultados en la fila F5 de la tabla 3.

Ahora calculamos los Z_j de la tabla 3, que como indicamos anteriormente se obtienen de la suma de productos de los C_B por los coeficientes de cada variable. Como se puede ver en la fila F6 de la tabla 3.

Para obtener los $C_j - Z_j$ solo restamos los coeficientes de la primera fila (F1) de la tabla 3 de los valores Z de la fila F6, los resultados se muestran en la fila F7 de la tabla 3.

TABLA 3 DEL SIMPLEX

F1			C_j	40	60	0	0	0	
F2	X_B	C_B	b	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Ratios
F3	H_1	0	15	0	0	1	-2.5	0.5	
F4	X_1	40	15	1	0	0	1.5	-0.5	
F5	X_2	60	25	0	1	0	-0.5	0.5	
F6	Z_j			40	60	15	30	10	
F7	$C_j - Z_j$			0	0	-15	-30	-10	

Ahora hemos obtenido la tercera solución básica factible: H_1=15; X_1=15; X_2=25; para un Z= 40*15 + 60*25 + 0*15+ 0*0 + 0*0= 2100.

¿Es ese valor el óptimo o no? La respuesta a la pregunta es SI, hemos alcanzado el óptimo, podemos observar que en la fila F7 de la tabla 3 no hay ningún $C_j - Z_j > 0$, por lo que todos los valores o son ceros o negativos. Es decir la última solución básica factible es la SOLUCIÓN ÓPTIMA.

En forma resumida sería:

La solución óptima es: X_1=15; X_2=25; para un Z= 40*15 + 60*250 2100.

EJEMPLO DE SIMPLEX PARA PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL CASO DE MINIMIZAR CONSTRUCCION DE LA TABLA INICIAL DEL MÉTODO SIMPLEX

Los Problemas de Programación Lineal (PPL) pueden resolverse por el método Simplex en formato matricial que llamaremos Tabloide. El Método de las Dos fases es el mismo método Simplex que aplicamos en los PPL de Maximización, solo que con algunas variantes que iremos explicando en el desarrollo de un ejemplo cuya optimización se obtendrá por Minimización.

Dado el siguiente PPL.

Min $z=80X_1 + 124X_2$ → Función objetivo a optimizar

Sujeto a:

$X_1 + 0.8X_2 \geq 100$

$X_1 + 2X_2 \geq 200$

$X_1, X_2 \geq 0$

Restricciones del PPL

Fig. #1

El PPL debe transformarse eliminando las inecuaciones (o restricciones del modelo) y convirtiéndolas en ecuaciones, para lo cual debemos agregar en cada inecuación una **variable de holgura** con signo negativo que las denotaremos por "H", además adicionaremos una **variable artificial** en cada inecuación que las denotaremos por "A", tal como se muestra en el cuadro siguiente.

Ahora que hemos convertido las inecuaciones en ecuaciones, debemos agregar las nuevas la función objetivo o función de optimización, de la siguiente manera: Las variables de holguras de adicionan con coeficiente cero y las variables artificiales con coeficiente uno.
Finalmente sustituimos los coeficientes de las variables de decisión por ceros; esto es 80 se sustituye por cero y 124 por cero.
Así queda transformado el modelo matemático del PPL que teníamos en la fig.#1, listo para iniciar la primera fase del Simplex.

$$\text{Min } z = 0X_1 + 0X_2 + 0H_1 + 0H_2 + 1A_1 + 1A_2$$

Sujeto a:

$$X_1 + 0.8X_2 - H_1 + A_1 = 100$$

$$X_1 + 2X_2 - H_2 + A_2 = 200$$

$$X_1, X_2, H_1, H_2, A_1, A_2 \geq 0$$

fíg.#2.

1ra Fase:

Iniciamos la primera fase para la solución del problema anterior con el modelo transformado tal como quedó se muestra en la fig.#2.

El tabloide o tabla del Simplex del ejercicio constará de 6 filas y 10 columnas en las que ubicaremos los datos (coeficientes de las variables y valores independientes o lados derechos de las ecuaciones) que se encuentran en la fig.#2.

- En la primera fila se ubican los coeficientes de la función objetivo, por eso la fila inicia en la tercera columna con la notación C_j (costos de la función objetivos), que como se podrá ver son 0, 0, 0, 0, 1,1. En la segunda fila aparecen los nombres de las seis variables (X1, X2, H1, H2, A1, A2) coincidiendo cada variable con los valores o costos de la primer fila.

- En la primera columna ubicamos la notación X_B que representa a las variables básicas y puede ver que bajo de ella aparecen, A1, A2. Cuando se inicia la primera fase del Simplex se debe empezar con las variables artificiales como variables básicas.

- En la segunda columna, segunda fila ubicamos la notación C_B, esta notación representa a los coeficientes o costos de las variables básicas que aparecen en la primera columna, los cuales son: A1=1 y A2=1. Como se muestra en la tabla.

- En la tercera columna, segunda fila ubicamos la notación "**b**" que representa los valores de los lados derechos de las ecuaciones o restricciones del problema.

- En la cuarta columna, segunda fila ubicamos la variable X1 y debajo de ella los coeficientes respectivos en cada una de las dos ecuaciones.

- En la quinta columna, segunda fila ubicamos la variable X2 y debajo de ella los coeficientes respectivos en cada una de las dos ecuaciones.

- En la sexta columna, segunda fila ubicamos la variable H1 y debajo de ella los coeficientes respectivos en cada una de las dos ecuaciones.

- En la séptima columna, segunda fila ubicamos la variable H2 y debajo de ella los coeficientes respectivos en cada una de las dos ecuaciones.

- En la octava columna, segunda fila ubicamos la variable A1 y debajo de ella los coeficientes respectivos en cada una de las dos ecuaciones.

- En la novena columna, segunda fila ubicamos la variable A2 y debajo de ella los coeficientes respectivos en cada una de las dos ecuaciones.
- En la décima columna ubicamos la palabra "**Ratio**" y debajo de ella los cocientes que resultan de dividir el valor de cada "**b**" por el coeficiente de la variable que se elija como entrante a las básicas.

- En la quinta fila ubicamos la notación Z_j que representa el resultado de multiplicar cada costo de las variables básicas por cada columna donde se ubican las variables del modelo.

- En la sexta fila ubicamos la notación Cj - Zj que es la diferencia entre los costos y los valores de Zj que calculamos en la fila anterior.

		Cj	0	0	0	0	1	1		
X_B	C_B	b	X_1	X_2	H_1	H_2	A_1	A_2	Ratio	
A_1	1	100	1	**0.8**	-1	0	1	0	100/0.8	-0.4*F4+F3
A_2	1	200	1	2	0	-1	0	1	**200/2**	0.5*f4
Z_j			2	2.8	-1	-1	1	1		
C_j-Z_j			-2	-2.8	1	1	0	0		

Tabloide #1.

Iteración 1:

Una vez que hemos llenado el tabloide procedemos a realizar el proceso de optimización (1ra. Fase) para lo cual se debe:

1. Observamos la sexta fila y buscamos los Cj - Zj < 0 y podemos ver que hay dos valores -2 y -2.8, seleccionando al más negativo o sea -2.8 correspondiente a la variable X2, que será la variable que entrara como nueva básica.
2. Una vez seleccionada X2 procederemos obtener los cocientes de cada b entre los coeficientes de X2. { 100/0.8=120; 200/2=100}, el cociente más pequeño es 100, esto indica que la actual variable básica que saldrá es A2.
3. El numero pivote es 2, por lo que procedemos a multiplicar por la fila por 0.5, con el propósito de que el número pivote sea uno. (ver tabloide 2)
4. Ahora debemos hacer cero el valor 0.8 encima del valor pivote para ello multiplicamos la fila 4 por -0.4 y el resultado se lo sumamos a la fila 3. (ver tabloide 2)

5. Ahora calculamos los Zj en cada columna de las variables del tabloide (ver tabloide 2)
6. Calculamos los Cj . Zj y los resultados los vemos en el tabloide 2.

		Cj	0	0	0	0	1	1	
X_B	C_B	b	X_1	X_2	H_1	H_2	A_1	A_2	Ratio
A_1	1	20	0.6	0	-1	0.4	1	-0.4	33.33
X_2	0	100	0.5	1	0	-0.5	0	0.5	200
Z_j			0.6	0	-1	0.4	1	-0.4	
C_j-Z_j			-0.6	0	1	-0.4	0	1.4	

Tabloide #2.

Iteración 2:

1. Observamos la sexta fila y buscamos los Cj - Zj < 0 y podemos ver que hay dos valores -0.6 y -0.4, seleccionando al más negativo o sea -0.6 correspondiente a la variable X1, que será la variable que entrara a ser básica.
2. Una vez seleccionada X1 procederemos obtener los cocientes de cada b entre los coeficientes de X1. {20/0.6=33.33; 100/0.5.=200}, el cociente más pequeño es 33.33, esto indica que la variable básica que saldrá es A1.
3. El numero pivote es 0.6, por lo que procedemos a multiplicar por la fila por 1/0.6, con el propósito de que el numero pivote sea uno. (ver tabloide 3)
4. Ahora debemos hacer cero el valor 0.5 debajo del valor pivote para ello multiplicamos la fila 3 por -0.5 y a la fila 4 por 0.6. y sumamos dichas filas (ver tabloide 3).
5. Ahora calculamos los Zj en cada columna de las variables del tabloide (ver tabloide 3)
6. Calculamos los Cj - Zj y los resultados los vemos en el tabloide 3.

		Cj	0	0	0	0	1	1	
X_B	C_B	b	X_1	X_2	H_1	H_2	A_1	A_2	Ratio
X_1	0	33.33	1	0	-1,66	0,66	1,66	-0,66	
X_2	0	83,33	0	1	0,83	-0,83	-0,83	0,16	
Z_j			0	0	0	0	0	0	
C_j-Z_j			0	0	0	0	1	1	

Tabloide #3.

Observemos los Cj-Zj del tabloide 3; y vemos que no hay ningún valor menor que cero, es decir que todos los Cj-Zj ≥ 0. Por lo que hemos llegado al fin de la **1ra. Fase**. Esto nos permite pasar a la 2da. Fase.

2da. Fase:

- Se sustituyen los Cj por los originales y se recalcula la solución:

- Se eliminan las variables artificiales del último tabloide.
- Recalcula los Zj y los Cj-Zj

Lo que nos permite que obtenemos el tabloide siguiente.

		Cj	80	124	0	0	
X_B	C_B	b	X_1	X_2	H_1	H_2	Ratio
X_1	80	33.33	1	0	-1.66	0.66	
X_2	124	83.33	0	1	0.83	-0.83	83.33/0.83
Z_j			80	124	-29.88	-50.12	
C_j-Z_j			0	0	29.88	50.12	

Tabloide #4.

Observamos la sexta fila y buscamos los Cj - Zj ≥0 , por lo que hemos llegado al óptimo.

Lo que nos permite decir que la solución óptima se obtiene para:

X1=33.33

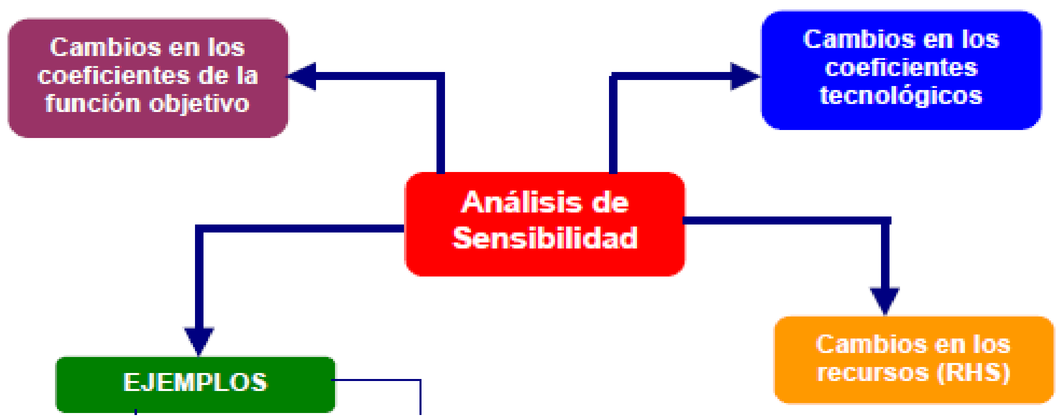
X2=83.33

Z=80*33.33 + 124*83.33= 12,999.32=13,000

ANALISIS DE SENSIBILIDAD
A PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

EL objetivo fundamental del **Análisis de Sensibilidad** es identificar los **parámetros sensibles,** (por ejemplo, los parámetros cuyos valores no pueden cambiar sin que cambie la solución óptima). Para ciertos parámetros que no están clasificados como sensibles, también puede resultar de gran utilidad determinar el **intervalo de valores** del parámetro para el que la solución óptima no cambia. (Este intervalo de valores se conoce como intervalo permisible para permanecer óptimo). En algunos casos, cambiar el valor de un parámetro puede afectar la **factibilidad** de la solución **BF básica factible)** óptima. Para tales parámetros, es útil determinar el intervalo de valores para el que la solución BF óptima (con los valores ajustados de las variables básicas) seguirá siendo factible. (Este intervalo recibe el nombre de intervalo permisible para permanecer factible).

La información de este tipo es invaluable en dos sentidos. Primero, identifica los parámetros más importantes, con lo que se puede poner un cuidado especial al hacer sus estimaciones y al seleccionar una solución que tenga un buen desempeño para la mayoría de los valores posibles. Segundo, identifica los parámetros que será necesario controlar de cerca cuando el estudio se lleve a la práctica. Si se descubre que el valor real de un parámetro se encuentra fuera de su intervalo de valores permisibles, ésta es una señal de que es necesario cambiar la solución.



Aplicación del Análisis de Sensibilidad

Mediante el análisis de sensibilidad pueden existir diferentes tipos de cambios en el modelo original como:

- Cambios en los coeficientes de la función objetivo, $\mathbf{C_{ij}}$
- Cambios en los recursos, $\mathbf{b_i}$
- Cambios en los coeficientes tecnológicos, $\mathbf{a_{ij}}$
- Adición de una nueva variable $\mathbf{X_i}$
- Adición de una nueva restricción. $\mathbf{a_{ij} >= b_i}$

EJEMEPLO 1 DE APLICACIÓN DE ANAALISIS DE SENSIBILIDAD

Un fabricante produce tres componentes para venderlos a compañías de refrigeración. Los componentes se procesan en dos máquinas: conformadora y ensambladora. Los tiempos (en minutos) requeridos por cada componente en cada máquina se indican en la Tabla 1:

Tabla [1]

	Máquina	
Componente	Conformadora	Ensambladora
1	6	4
2	3	5
3	4	2

La conformadora está disponible por 120 horas y la ensambladora está disponible por 110 horas. No se pueden vender más de 200 unidades del componente 3, pero se pueden vender hasta 1,000 unidades de los otros dos componentes. De hecho la fábrica tiene órdenes de venta por cumplir del componente 1 de 600 unidades. Las utilidades por la venta de cada componente 1, 2 y 3 son, respectivamente \$8, \$6 y \$9. Con el modelo lineal formulado para este problema y resuelto con WINQSB, conteste las siguientes preguntas:

a. ¿Cuánto debe ser la utilidad del componente 2 para que se fabrique?

b. ¿Qué sucede si la ensambladora sólo está disponible por 90 horas?

c. Si se pudieran conseguir más horas de la máquina ensambladora, ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar el fabricante?

d. ¿Qué sucede si se incrementa el compromiso de vender unidades del componente 1 a 800 unidades? ¿Y si se incrementa a 1200 unidades?

e. Si se pudieran vender más unidades del componente 3 reduciendo su utilidad a \$4, ¿Valdría la pena hacerlo?

Solución:

1. **Formularemos el problema matemático lineal en la forma estándar:**
   a. **Comenzando denominando las variables de la función objetivo.**
      X_1: número de unidades del componente 1 producidas.
      X_2: número de unidades del componente 2 producidas.
      X_3: número de unidades del componente 3 producidas.

   b. **Ahora, como sabemos las utilidades por cada unidad de los tres componentes que producen, construimos la función objetivo.**
      Max $Z = 8X_1 + 6X_2 + 9X_3$

   c. **Construimos las restricciones del problema lineal**; para lo cual conocemos los tiempos en minutos que cada componente requiere en cada una de las dos máquinas para su construcción, así como los tiempos disponibles por cada máquina.

$6X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 120x60$ (minutos disponibles en la máquina conformadora)

$4X_1 + 5X_2 + 2X_3 \leq 110x60$ (minutos disponibles en la máquina ensambladora)
$X_1 \geq 600$ (tiene órdenes de venta de 600 unidades)
$X_1 + X_2 \leq 1000$ (se pueden vender hasta 1000 unidades del componente 1 y 2)
$X_3 \leq 200$ (no se pueden vender más 200 unidades del componente 3)
$X_2, X_3 \geq 0$

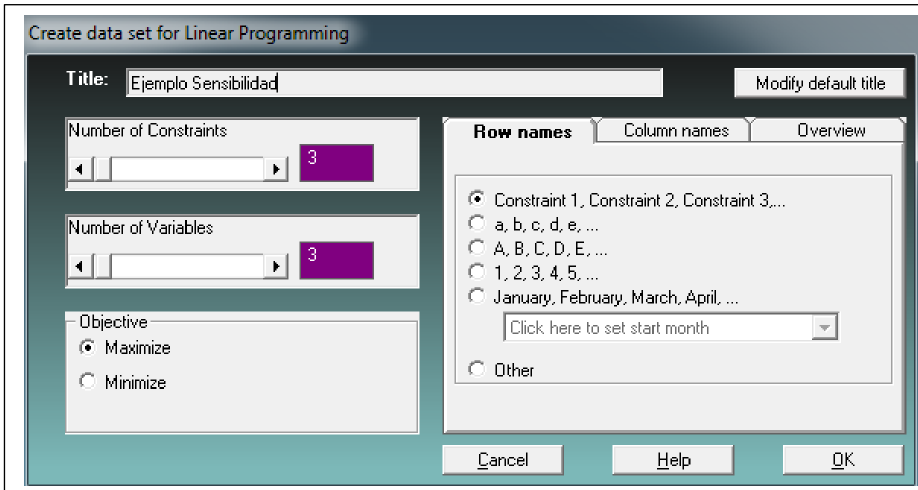
d. Modelo completo en la forma estándar

Max Z = $8X_1 + 6X_2 + 9X_3$
Sujeto a:

$6X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 7200$
$4X_1 + 5X_2 + 2X_3 \leq 6600$
$X_1 + X_2 \leq 1000$
$X_1 \geq 600$
$X_3 \leq 200$
$X_2, X_3 \geq 0$

2. Ingresamos el modelo que hemos construido en el Software POM-QM.
Seleccionamos el Módulo:Linear Programming
Luego seleccionamos la opción **New** y se mostrará la ventana siguiente:

Imagen 1



En la ventana que mostramos la página 2; ingresamos los siguientes datos.

Number of Variables (Número de variables): 3
Numbre of Constraints(Número de restricciones) : 3

Objective (Objetivo): Maximize

Ingresamos los datos del Modelo lineal, tal como lo vemos en la tabla 2.

Tabla 2.

Objective
- (•) Maximize
- ( ) Minimize

Ejemplo Sensibilidad

	X1	X2	X3		RHS	Equation form
Maximize	8	6	9			Max 8X1 + 6X2 + 9X3
min. disp maq. conformadora	6	3	4	<=	7200	6X1 + 3X2 + 4X3 <= 7200
min disp. maq. ensambladora	4	5	2	<=	6600	4X1 + 5X2 + 2X3 <= 6600
venta de componenstes 1 y 2	1	1	0	<=	1000	X1 + X2 <= 1000
ventas de componente 3	0	0	1	<=	200	X3 <= 200
ordens de ventas	1	0	0	>=	600	X1 >= 600

Ahora procedemos a resolver el modelo. Para lo cual hacemos clic en el botón **Solve(resolver).**

Tabla 3

Ejemplo Sensibilidad Solution

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X1	1000	0	8	6	Infinity
X2	0	2	6	-Infinity	8
X3	200	0	9	0	Infinity
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
min. disp maq. perforadora	0	400	7200	6800	Infinity
min disp. maq. ensambladora	0	2200	6600	4400	Infinity
venta de componenstes 1 y 2	8	0	1000	600	1066.667
ventas de componente 3	9	0	200	0	300
ordens de ventas	0	400	600	-Infinity	1000

- **Variable (**Variable de Decisión): Son las variables originales del modelo lineal, en nuestro caso; X1, X2 y X3. Aparecen en la primera columna parte superior de la tabla 3.

- **Value** (Valores de solución): en la columna 2 parte superior aparecen los valores de solución de las variables de decisión y son: X1=1000; X2=0; X3=200.

- **Reduced Cost(**Costo reducido): En esta columna cuando aparece cero indica que no hay pérdida por cada unidad que se produce, pero si aparece un valor, indica la cantidad que se pierde por cada unidad que se produce, Puede notarse que para el componente X2 no se produce ninguna unidad (ver columna 2), por la sencilla razón que por cada unidad que se llegue a producir se perdería $2. Es por eso que el modelo no manda a producir unidades, para evitar pérdidas.

- **Orginal Val (Valor Original de la utilidad u costo)**: En nuestro caso son utilidades unitarias $8, $6 y $9 para cada uno de los componentes 1,2 y 3 respectivamente.

- **Lower Bound (**Mínimo permitido): para cada variable hay una utilidad mínima permitida si se quiere seguir produciendo, sin que haya pérdida. Para el caso de la variable X1 el mínimo sería $6 (de utilidad), para la variable X3 se puede tener un mínimo de cero.
- **Upper Bound** (Máximo permitido): para cada variable hay una utilidad máxima permitida recomendada por el modelo, para lo cual el modelo propone para X1 una utilidad tanto como se desee o lo permita el mercado, para X3 también tanto como el mercado lo permita.

  En la tabla 3, aparecen otras columnas en la parte inferior; analizaremos los resultados de dichas columnas.

- **Constraint (**Restricciones): Aparece en la primer columna parte inferior de la tabla 3, aquí se nombran todas las restricciones: Conformadora, Ensambladora y ventas de componentes entre otras..

- **Dual Value**(Valor dual):Aquí aparecen los valores de del problema dual que son equivalentes a lo que en el programa de WINQSB se conocen como precios sombras.

- **Original Val**(Valores originales): Aquí aparecen los recursos disponible o capacidades que se dispusieron para la producción. Conformadora 7200 minutos; Ensamblaje 6600 minutos; Componentes 1 y 2: 1000.

- **Slack/Surplus(** Déficit o superávit): muestra los valores de holgura que se obtienen entre la cantidad de recursos disponibles y los consumidos. Por lo que sobraron 400 minutos en Conformado y 2200 minutos en ensamblaje.

- **Lower Bound (**Mínimo permitido): para cada recurso o restricción hay mínimo permitido, si se quiere adquirir producir con utilidad. Para el caso de la primera restricción (Conformadora) el mínimo sería 6800 minutos, para la segunda restricción 4400 minutos y para la tercera restricción es 600.

- **Upper Bound** (Máximo permitido): para cada restricción hay una cantidad máxima permitida recomendado por el modelo, para lo cual el modelo propone para la primera restricción M (lo que se requiera en minutos), de igual forma para la segunda restricción y para la tercera restricción su máximo es 1066.66 unidades.

Responderemos las preguntas:

a. **¿Cuánto debe ser la utilidad del componente 2 para que se fabrique?**
   En la tabla 3: El componente 2 (representado por la variable X2) como vimos los resultados comentado anteriormente, ese componente no se debe producir por que generaría pérdida, por cada unidad $2. Si vemos la última columna de la parte superior en la variable X2. Señala que aunque la utilidad aumente en $8 aun no es atractivo producirlo, eso significa que su utilidad debe ser superior a $8 para ser atractivo producirlo.

b. **¿Qué sucede si la ensambladora sólo está disponible por 90 horas?**
   Si la ensambladora solo contara con 90x60=5400 minutos disponible.

Resulta que los minutos requeridos para ensamblar los componentes son 4400 minutos Por lo que aún sobrarían 1000 minutos. Es decir no habría ninguna afectación al modelo óptimo actual.

c. Si se pudieran conseguir más horas de la máquina ensambladora, ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar el fabricante?

Para el problema de los componentes no se requieren horas de ensamblaje, al contrario hay un sobrante de ensamblaje de 2200 minutos. Por tanto los fabricantes no estarían interesados en pagar tiempo adicional para ensamblaje.

d. ¿Qué sucede si se incrementa el compromiso de vender unidades del componente 1 a 800 unidades? ¿Y si se incrementa a 1,200 unidades?

Si se vendieran 800 componentes de tipo 1, no pasaría nada, el óptimo seguiría siendo el mismo, ya que del componente 1 se venden 1000.

Si se incrementaran a 1200 las ventas del componente 1; cambia la solución óptima por completo ya que X1=1200 y X3=200 y la contribución total sería de $9600+1800=$10400.

e. Si se pudieran vender más unidades del componente 3 reduciendo su utilidad a $4, ¿Valdría la pena hacerlo?

Si es posible seguirlo produciendo, ya que el mínimo puede llegar a cero y la solución seguirá siendo la misma. Por lo tanto si valdría la pena, solo disminuiría la utilidad o contribución total a $8000 + $800= $8800.

EJEMEPLO 2 DE APLICACIÓN DE ANAALISIS DE SENSIBILIDAD

La empresa Emerson S:A: se dedica a la fabricación de tres productos; A, B y C. El procedimiento de producción involucra tres operaciones: formación, acabado e inspección. El departamento de ingeniería industrial, ha establecido los siguientes estándares de producción en cada operación.

El departamento de contabilidad por su parte, pronostica los siguientes costos e ingresos para la compañía.

Datos de producción para la compañía (minutos por producto)

Producto	*Formación*	*Inspección*	*Acabado*
A	*2*	*3*	*2*
B	*6*	*2*	*2*
C	*2*	*2*	*4*

Datos de costo e ingreso (en dólares) por producto, para la compañía

Producto	*Costo de producción*	*Costo Materiales*	*Costo total*	*Precio Venta*	*Utilidad*
A	*18*	*12*	*30*	*50*	*20*
B	*50*	*15*	*65*	*100*	*35*
C	*25*	*20*	*45*	*90*	*45*

Se desea saber el número de cada tipo de producto que deberán producirse de tal manera que se optimice el beneficio por las 8 horas de trabajo del día. Adicionalmente responda las siguientes preguntas:

1. Determine los rangos de variación de las variables básicas en donde la base actual permanece
2. ¿Cuál es el rango de los recursos en donde la base actual permanece?
3. ¿En cuáles de las operaciones recomendaría usted contratar tiempo extra y por qué?
4. ¿Qué pasaría si se programaran 20 minutos extras en el departamento de inspección, cambiaría la función objetivo?
5. ¿En cuánto se incrementaría la utilidad óptima actual si se programan 50 minutos en el departamento de formado?
6. ¿Qué pasaría con la solución óptima actual si se programaran 30 minutos de mantenimiento en el departamento de acabado?
7. Si se logran reducir los costos de producción en el producto B en un 25%, ¿cómo se afecta la base actual y el objetivo?
8. Si los trabajadores ofrecen trabajar minutos extras a razón de $5/minuto, ¿recomendaría usted tiempo extra?, si lo recomienda, en qué departamento y cuánto tiempo extra puede programarse sin cambiar la mezcla actual?
9. ¿Qué pasearía si se programara la producción de 10 unidades del producto A?
10. ¿Qué pasaría si por cambios en maquinaría y procesos, el producto A cambiara sus tiempos de fabricación en: $a_1 = (2,3,2)$ a $a_1 = (1,2,2)$
11. Por políticas de la empresa es necesario producir un nuevo producto con las siguientes características $C_4=60$, $a_4 = (2,1,3)^T$, ¿Qué recomendaría?

Solución:

Considerando la información, se planteó el modelo de programación lineal, como los tiempos de procesos están dados en minutos, convertiremos las 8 horas de trabajo también en minutos.

Definimos las variables de decisión como sigue:

X1: número de productos tipo A.

X2: número de productos tipo B.

X3: número de productos tipo C.

Modelo de Porgramación Lineal:

Max $Z = 20x_1 + 35x_2 + 45x_3$

$$sujeto \quad a:$$

$$2x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 480(\,formación)$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 480(inspección)$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 480(acabado)$$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Al igual que en el ejemplo 1 ingresamos los datos en el módulo activo (linear programming)

Tal como se muestra en la imagen siguiente. Debe recordar que el software POM-QM asume que las variables son no negativas.

Objective
- (•) Maximize
- ( ) Minimize

(untitled)

	X1	X2	X3		RHS	Equation form
Maximize	20	35	45			Max 20X1 + 35X2 + 45X3
formación	2	6	2	<=	480	2X1 + 6X2 + 2X3 <= 480
inspección	3	2	2	<=	480	3X1 + 2X2 + 2X3 <= 480
acabado	2	2	4	<=	480	2X1 + 2X2 + 4X3 <= 480

Ahora procedemos a a resolver el problema haciendo clic en botón Solve.

Se nos mostrará la tabla siguiente:

(un

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X1	0	5	20	-Infinity	25
X2	48	0	35	22.5	135
X3	96	0	45	32.5	70
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
formación	2.5	0	480	240	1440
inspección	0	192	480	288	Infinity
acabado	10	0	480	160	960

Puedo observarse que la solución óptima se obtiene para: X_1= 0; X_2=48 ; X_3=96. Para un valor óptimo de Z=20*0 + 48*35 + 96*45 = 0 + 1,680 + 4320= $6,000.00 de utilidades.

Respuestas a las preguntas:

1. Determine los rangos de variación de las variables básicas en donde la base actual permanece: X2 está entre 22.5 y 135.00, X3 está entre 32.5 y 70, la variable X1 no es básica, es decir no se recomienda producir del producto A.

2. ¿Cuál es el rango de los recursos en donde la base actual permanece?

   Para formación se puede tener entre 240 y 1440 minutos.

   Para inspección se puede tener entre 288 y M (ilimitado) minutos.

   Para acabado se puede tener entre 160 y 960 minutos.

3. ¿En cuáles de las operaciones recomendaría usted contratar tiempo extra y por qué?

   En acabado, por ejemplo con 2 horas más en acabado se producirían 132 unidades del producto C, actualmente son 96. Con una nueva utilidad de 7,200.00 contra 6,000 que actualmente se obtienen. El intervalo lo permite con una costo de por minuto de U$10. No obstante también se requerirían horas de formación, dado que no hay y son requeridas. La horas extras estarían orientadas para el producto C por ser el más rentable.

4. ¿Qué pasaría si se programaran 20 minutos extras en el departamento de inspección, cambiaría la función objetivo? No cambiaría la función objetivo, la cual permanecerá igual porque no se afectaría la producción. Los 20 minutos que darían como sobrantes, es decir no se aprovecharían.

5. ¿En cuánto se incrementaría la utilidad óptima actual si se programan 50 minutos en el departamento de formado? La utilidad óptima seguiría siendo la misma que la actual, no habría incremento en la producción, y los 50 minutos no serían utilizados.

6. ¿Qué pasaría con la solución óptima actual si se programaran 30 minutos de mantenimiento en el departamento de acabado? Si se programan 30 minutos de acabado solo contaríamos con 450 minutos para este proceso, lo que afectaría la producción de la siguiente manera: se producirían 51 unidades tipo B y 87 unidades tipo C, para una utilidad óptima de 5,700.00, teniéndose una pérdida de utilidad de U$ 300 por el tiempo perdido en mantenimiento.

7. Si se logran reducir los costos de producción en el producto B en un 25%, ¿cómo se afecta la base actual y el objetivo? Actualmente los costos de producción del producto B es U$50.00 con 25% menos los costos de producción serán de U$ 37.50. Por lo tanto la utilidad por unidad producida será de (U$37.50+U$15.00=U$52.50) y es vendida en U$100.00 por lo que la utilidad será de U$ 47.50. Esto afectará la función objetivo, la que lógicamente aumentará su óptimo a U$6,600.00 produciendo los mismos productos.

8. Si los trabajadores ofrecen trabajar minutos extras a razón de $5/minuto, ¿recomendaría usted tiempo extra?, si lo recomienda, en qué departamento y cuánto tiempo extra puede programarse sin cambiar la mezcla actual?

   El modelo recomienda de acuerdo a los intervalos que se pueden contratar minutos extras en inspección y acabado, siendo el acabado el de mayor costo. Si hay una disminución de costo. Se podría aumentar al máximo recomendado de 8 horas extras o sea 480 minutos en acabado para un total de 960 minutos en acabado. Esto permitirá óptimo de U$ 10,800.00 con una producción concentrada en el producto C. que es de mayor rentabilidad.

9. ¿Que pasearía si se programara la producción de 10 unidades del producto A?

   Si se producen 10 unidades del producto A, las utilidades se reducirían a U$ 5,925.00 o sea se tendría una pérdida de U$75.00 con respecto a la utilidad actual.

10. ¿Qué pasaría si por cambios en maquinaría y procesos el producto A cambiara sus tiempos de fabricación en

    a_1= (2,3,2) a a_1 = (1,2,2)

    Seguiría siendo poco atractivo producir el producto A dado su poca utilidad en comparación con los productos B y C. de manera que se seguiría produciendo la misma cantidad de B y C y por lo tanto obtendríamos el mismo óptimo actual.

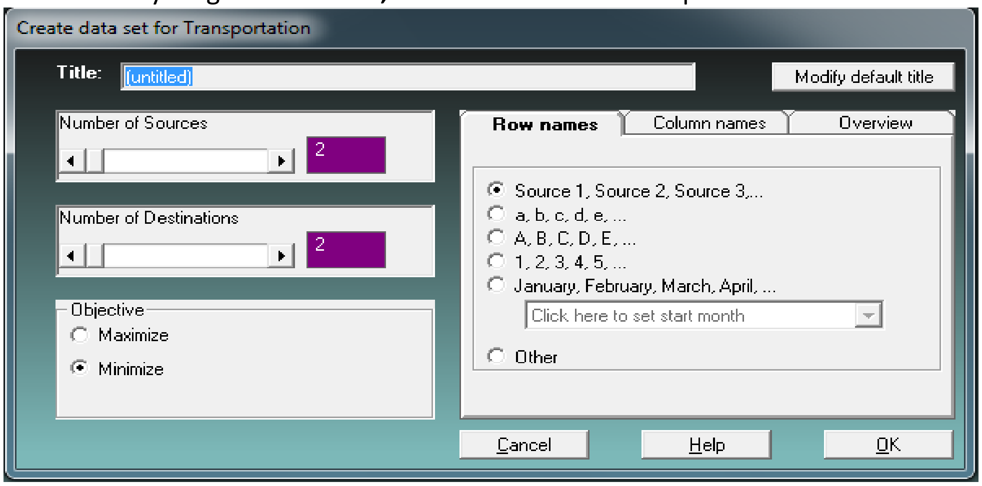
11. Por políticas de la empresa es necesario producir un nuevo producto con las siguientes características C_4=60, a_4 = (2,1,3), ¿Qué recomendaría?

    Remplazar el producto A que no es rentable y producir el nuevo producto según el análisis de optimilidad con los parámetros del nuevo producto se vuelve atractivo producirlo, ya que la nueva utilidad neta sería de U$ 9,600.00 con tiempo de procesamiento menor. Esto implica ahorro en maquinaria y horas-hombres.

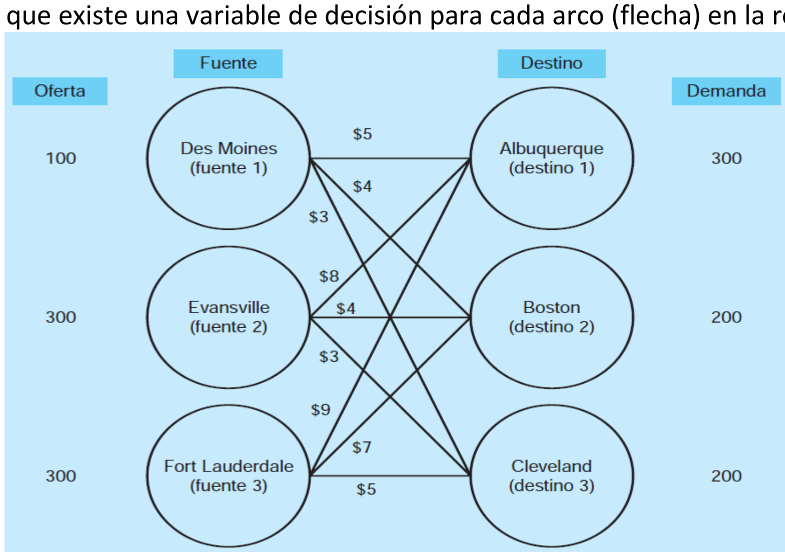
$$
\begin{aligned}
&Z = 60x_1 + 35x_2 + 45x_3 \\
&sujeto \quad a: \\
&2x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 480(formación) \\
&x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 480(inspección) \\
&3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 480(acabado)
\end{aligned}
$$

Tema 2: Modelos de Trasporte y Transbordo

POM-QM trae el módulo de trasporte, permite n orígenes o fuentes y m destinos o demandas. Los costos C_{ij} de un origen i a un destino j se ingresan por en la matriz nxm, así como las capacidades de cada origen y las demandas de cada destino.
Hacemos clic en el menú **Module** y luego clic en **Transportation.**
Hacemos clic en **File** y luego clic en **New;** se mostrará la ventana que se indica**.**



Title: Título del problema de transporte.
Number of Sources: Número de Orígenes u oferta o fuentes.
Number of Destinationes: Número de demandas o destinos.
Objetive: Objetivo -> maximizar o minimizar
Problema 3 (Libro Métodos cuantitativos para negocios/Render-Stair-Hanna/capítulo 9, Modelos de Trasporte y Asignación / página 342/ Problema de Trasporte)
La corporación Executive Furniture tiene el problema de transporte que se ilustra en la gráfica. La compañía desea minimizar los costos de transporte al tiempo que cubre la demanda en cada destino, sin exceder la oferta en cada fuente. Para la formulación de este con programación lineal, hay tres restricciones de oferta (una para cada fuente) y tres restricciones de demanda (una para cada destino). Las decisiones que deben tomarse son el número de unidades a enviar por cada ruta, de manera que existe una variable de decisión para cada arco (flecha) en la red.



Sea:

$$X_{ij} = \text{número de unidades enviadas de la fuente } i \text{ al destino } j$$

donde,

$i = 1, 2, 3,$ con $1 =$ Des Moines, $2 =$ Evansville y $3 =$ Fort Lauderdale

$j = 1, 2, 3,$ con $1 =$ Albuquerque, $2 =$ Boston y $3 =$ Cleveland

La formulación de PL es:

$$\text{Minimizar el costo total} = 5X_{11} + 4X_{12} + 3X_{13} + 8X_{21} + 4X_{22} + 3X_{23} + 9X_{31} + 7X_{32} + 5X_{33}$$

sujeto a:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 100 \quad \text{(oferta en Des Moines)}$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 300 \quad \text{(oferta en Evansville)}$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 300 \quad \text{(oferta en Fort Lauderdale)}$$
$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 300 \quad \text{(demanda en Albuquerque)}$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 200 \quad \text{(demanda en Boston)}$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 200 \quad \text{(demanda en Cleveland)}$$
$$X_{ij} \geq 0 \text{ para toda } i \text{ y } j$$

Este problema se puede resolver como problema de programación lineal como lo hemos hecho con los dos casos anteriores o usamos el módulo de transporte. Le recomiendo que usted lo resuelva por PL y aquí lo resolveremos con el módulo de transporte.

Solución: Conocemos

- Tres fuentes u ofertas
- Tres demandas
- Los nueve (C_{ij}) costos respectivos
- Las capacidades en cada fuente
- Las demandas de cada destino
- El objetivo es minimizar.

Ingresamos los datos en la matriz, como se muestra:

Objective
- Maximize
- Minimize (seleccionado)

Starting method: Any starting method

	Albuquerque	Boston	Cleveland	Oferta
Des Moines	5	4	3	100
Evansville	8	4	3	300
Fort Dauderdale	9	7	5	300
DEMANDA	300	200	200	

Una vez que hemos verificado que los datos están correctos, procedemos a resolverlo haciendo clic en el botón **Solve**. Se mostrarán 6 ventanas con los resultados.

Cascade	
Tile	
Edit Data F9	
1 Transportation Shipments	Los envíos de transporte.
2 Marginal Costs	Costos marginales
3 Final Solution Table	Tabla de solución final
4 Iterations	Iteraciones (Simplex de transporte)
5 Shipments with costs	Envíos con costos
6 Shipping list	Lista de Envíos

1. Los envíos de transporte

Transportation Shipments

Optimal cost = $3,900	Albuquerque	Boston	Cleveland
Des Moines	100		
Evansville		200	100
Fort Dauderdale	200		100

2. Costos marginales

	Albuquerque	Boston	Cleveland
Des Moines		2	2
Evansville	1		
Fort Dauderdale		1	

3. Tabla de solución final

Final Solution Table

	Albuquerque	Boston	Cleveland
Des Moines	100	[2]	[2]
Evansville	[1]	200	100
Fort Dauderdale	200	[1]	100

4. Iteraciones (Método Simplex)

	lbuquerque	Boston	Cleveland
Iteration 1			
Des Moines	100	(2)	(2)
Evansville	(1)	200	100
Fort Dauderdale	200	(1)	100

5. Envíos con costos

	Albuquerque	Boston	Cleveland
Des Moines	100/$500		
Evansville		200/$800	100/$300
Fort Dauderdale	200/$1,800		100/$500

6. Lista de envíos

From	To	Shipment	Cost per unit	Shipment cost
Des Moines	Albuquerque	100	5	500
Evansville	Boston	200	4	800
Evansville	Cleveland	100	3	300
Fort Dauderdale	Albuquerque	200	9	1,800
Fort Dauderdale	Cleveland	100	5	500

$3.900

<u>Problema de Transbordo:</u>

En un problema de transporte, si los artículos deben pasar por un punto intermedio (llamado *punto de trasbordo*) antes de llegar al destino final, se trata de un *problema de trasbordo*. Por ejemplo, una compañía fabrica un producto en varias fábricas que tiene que enviarse a un conjunto de centros de distribución regionales. Desde estos centros, los artículos se envían a las tiendas que son los destinos finales. La gráfica siguiente se ilustra una representación en red de un problema de trasbordo. En este ejemplo 5, hay dos fuentes, dos puntos de trasbordo y tres destinos finales.

Problema 4: (Libro Métodos cuantitativos para negocios/Render-Stair-Hanna/capítulo 9, Modelos de Trasporte y Asignación / página 347/ Problema de Transbordo)

Frosty Machines fabrica barredoras de nieve en fábricas localizadas en Toronto y Detroit. Los productos se envían a centros de distribución regionales en Chicago y Búfalo, desde donde se reparten a las casas de oferta en Nueva York, Filadelfia y St. Louis, como se ilustra en la gráfica. La oferta disponible en las fábricas, la demanda en los destinos finales y los costos de envío se muestran en la tabla. Observe que es posible que las barredoras de nieve no se envíen directamente desde Toronto o Detroit a cualquiera de los destinos finales, sino que deben ir primero a Chicago o a Búfalo. Este es el motivo por el que Chicago y Búfalo están listados no solo como destinos sino también como fuentes.

Frosty quiere minimizar los costos de transporte asociados con el envío de suficientes barredoras de nieve, para cumplir con la demanda en los tres destinos sin exceder la oferta en cada fábrica.

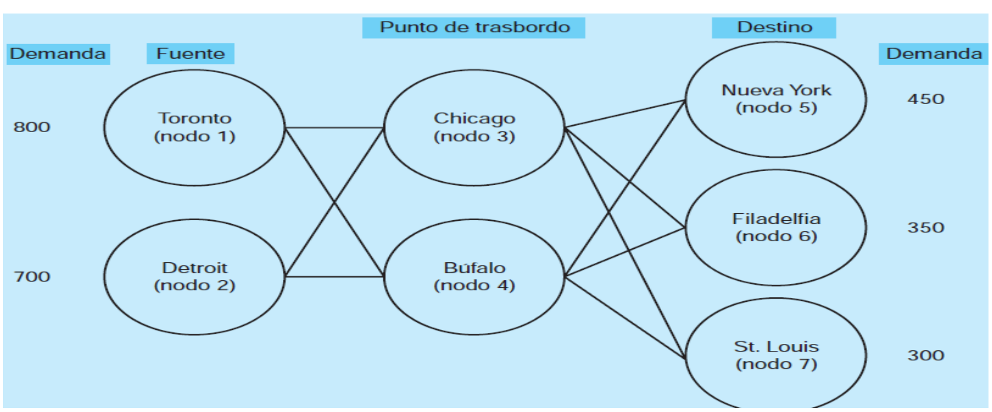


TABLA Datos para el trasbordo de Frosty Machine

DE	A CHICAGO	BÚFALO	NUEVA YORK	FILADELFIA	ST. LOUIS	OFERTA
Toronto	\$4	\$7	—	—	—	800
Detroit	\$5	\$7	—	—	—	700
Chicago	—	—	\$6	\$4	\$5	—
Búfalo	—	—	\$2	\$3	\$4	—
Demanda	—	—	450	350	300	

Solución:

Entonces, se tienen restricciones de oferta y demanda similares a las del problema de transporte, pero también se tiene una restricción para cada punto de trasbordo, que indica que todo lo que se envía desde estos a un destino final debe haberse enviado a ese punto de trasbordo desde una de las fuentes. El enunciado verbal de este problema sería como sigue:

Minimizar el costo

sujeto a

1. El número de unidades enviadas desde Toronto no es mayor que 800
2. El número de unidades enviadas desde Detroit no es mayor que 700
3. El número de unidades enviadas a Nueva York es de 450
4. El número de unidades enviadas a Filadelfia es de 350
5. El número de unidades enviadas a St. Louis es de 300
6. El número de unidades que salen de Chicago es igual al número de unidades que llegan a Búfalo
7. El número de unidades que salen de Búfalo es igual al número de unidades que llegan a Búfalo.

Las variables de decisión deberían representar el número de unidades enviadas desde cada fuente hasta cada punto de trasbordo, y el número de unidades enviadas de cada punto de trasbordo a cada destino final, ya que son las decisiones que deben tomar los gerentes.

Las variables de decisión son:

$$x_{ij} = \text{número de unidades enviadas del sitio (nodo) } i \text{ al sitio (nodo) } j$$

donde,

$i = 1, 2, 3, 4$

$j = 3, 4, 5, 6, 7$

Los números indican los nodos mostrados en la figura 9.3 y hay una variable para cada arco (ruta) en la figura.

El modelo de PL es:

$$\text{Minimizar el costo total} = 4X_{13} + 7X_{14} + 5X_{23} + 7X_{24} + 6X_{35} + 4X_{36} + 5X_{37} + 2X_{45} + 3X_{46} + 4X_{47}$$

sujeto a

$X_{13} + X_{14} \leq 800$ (oferta en Toronto [nodo 1])

$X_{23} + X_{24} \leq 700$ (oferta en Detroit [nodo 2])

$X_{35} + X_{45} = 450$ (demanda en Nueva York [nodo 5])

$X_{36} + X_{46} = 350$ (demanda en Filadelfia [nodo 6])

$X_{37} + X_{47} = 300$ (demanda en St. Louis [nodo 7])

$X_{13} + X_{23} = X_{35} + X_{36} + X_{37}$ (envío por Chicago [nodo 3])

$X_{14} + X_{24} = X_{45} + X_{46} + X_{47}$ (envío por Búfalo [nodo 4])

$x_{ij} \geq 0$ para toda i y j

Objective: Maximize / (•) Minimize — Maximum number of iterations: 1000 — Maximum level (depth) in procedure: 50

(untitled)

	X13	X14	X23	X24	X35	X36	X37	X45	X46	X47		RHS	Equation form
Minimize	4	7	5	7	6	4	5	2	3	4			Min 4X13 + 7X14 + 5X23 + 7X24 + 6X35 + 4X36 + 5X37 +
Toronto	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	800	X13 + X14 <= 800
Detroit	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	<=	700	X23 + X24 <= 700
NY	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	=	450	X35 + X45 = 450
Filadelfia	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	=	350	X36 + X46 = 350
St Louis	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	=	300	X37 + X47 = 300
Por Chicago	1	0	1	0	-1	-1	-1	0	0	0	>=	0	X13 + X23 - X35 - X36 - X37 >= 0
Por Búfalo	0	1	0	1	0	0	0	-1	-1	-1	>=	0	X14 + X24 - X45 - X46 - X47 >= 0
Variable type	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer			

Aunque este problema con programación lineal se puede resolver usando un software de programación lineal, tal como lo puede ver en la gráfica, hay algoritmos especiales, sencillos de usar y rápidos para los problemas de transporte y TRANSBORDO. Por lo que usaremos el módulo de transporte para su solución.

Ingresamos los datos en la matriz, como se muestra:

Objective: Maximize / (•) Minimize — Starting method: Minimum Cost Method

(untitled)

	Chicago	Búfalo	NY	Filadelfia	St. Louis	Ficticio	OFERTA
Toronto	4	7	9999	9999	9999		800
Detroit	5	7	9999	9999	9999		700
Chicago		9999	6	4	5		1500
Búfalo	9999		2	3	4		1500
DEMANDA	1500	1500	450	350	300	400	

1. Los envíos de transporte

Transportation Shipments

Optimal cost = $9550	Chicago	Búfalo	NY	Filadelfia	St. Louis	Ficticio
Toronto	650					150
Detroit		450				250
Chicago	850			350	300	
Búfalo		1050	450			

2. Costos marginales

	Chicago	Búfalo	NY	Filadelfia	St. Louis	Ficticio
Toronto		0	9990	9991	9990	
Detroit	1		9990	9991	9990	
Chicago		9996	1			4
Búfalo	10002			2	2	7

3. Tabla de solución final

Final Solution Table

(untitled) Solution

	Chicago	Búfalo	NY	Filadelfia	St. Louis	Ficticio
Toronto	650	[0]	[9990]	[9991]	[9990]	150
Detroit	[1]	450	[9990]	[9991]	[9990]	250
Chicago	850	[9996]	[1]	350	300	[4]
Búfalo	[10002]	1050	450	[2]	[2]	[7]

4. Iteraciones (método simplex)

	Chicago	Búfalo	NY	Filadelfia	St. Louis	Ficticio
Iteration 1						
Toronto	(-9991)	(-9990)	400	(0)	(0)	400
Detroit	(-9990)	(-9990)	50	350	300	(0)
Chicago	1500	(9997)	(2)	(0)	(1)	(9995)
Búfalo	(10001)	1500	(0)	(1)	(2)	(9997)
Iteration 2						
Toronto	350	(-9990)	50	(9991)	(0)	400
Detroit	(1)	(-9990)	400	(9991)	300	(0)
Chicago	1150	(6)	(-9989)	350	(-9990)	(4)
Búfalo	(19992)	1500	(0)	(9992)	(2)	(9997)
Iteration 3						
Toronto	350	50	(9990)	(9991)	(9990)	400
Detroit	(-9989)	(-9990)	400	(1)	300	(-9990)
Chicago	1150	(9996)	(1)	350	(0)	(4)
Búfalo	(10002)	1450	50	(2)	(2)	(7)
Iteration 4						
Toronto	350	50	(9990)	(9991)	(0)	400
Detroit	(1)	400	(9990)	(9991)	300	(0)
Chicago	1150	(9996)	(1)	350	(-9990)	(4)
Búfalo	(10002)	1050	450	(2)	(-9988)	(7)
Iteration 5						
Toronto	400	(9990)	(19980)	(9991)	(9990)	400
Detroit	(-9989)	450	(9990)	(1)	250	(-9990)
Chicago	1100	(19986)	(9991)	350	50	(4)
Búfalo	(12)	1050	450	(-9988)	(-9988)	(-9983)
Iteration 6						
Toronto	650	(0)	(9990)	(9991)	(9990)	150
Detroit	(1)	450	(9990)	(9991)	(9990)	250
Chicago	850	(9996)	(1)	350	300	(4)
Búfalo	(10002)	1050	450	(2)	(2)	(7)

5. Lista con costos

Shipments with costs

(untitled) Solution

	Chicago	Búfalo	NY	Filadelfia	St. Louis	Ficticio
Toronto	650/$2600					150/$0
Detroit		450/$3150				250/$0
Chicago	850/$0			350/$1400	300/$1500	
Búfalo		1050/$0	450/$900			

6. Lista de envíos

Shipping list

From	To	Shipment	Cost per unit	Shipment cost
Toronto	Chicago	650	4	2600
Toronto	Ficticio	150	0	0
Detroit	Búfalo	450	7	3150
Detroit	Ficticio	250	0	0
Chicago	Chicago	850	0	0
Chicago	Filadelfia	350	4	1400
Chicago	St. Louis	300	5	1500
Búfalo	Búfalo	1050	0	0
Búfalo	NY	450	2	900

ALGORITMO DE RESOLUCIÓN DE VOGEL

El método consiste en la realización de un algoritmo que consta de tres pasos fundamentales y uno más que asegura el ciclo hasta la culminación del método.

- PASO 1: Determinar para cada fila y columna una medida de penalización restando los dos costos menores en filas y columnas.
- PASO 2: Escoger la fila o columna con la mayor penalización, es decir que de la resta realizada en el "Paso 1" se debe escoger el número mayor. En caso de haber empate, se debe escoger arbitrariamente (a juicio personal).
- PASO 3: De la fila o columna de mayor penalización determinada en el paso anterior debemos de escoger la celda con el menor costo, y en esta asignar la mayor cantidad posible de unidades. Una vez se realiza este paso una oferta o demanda quedará satisfecha por ende se tachará la fila o columna, en caso de empate solo se tachará 1, la restante quedará con oferta o demanda igual a cero (0).
- PASO 4: DE CICLO Y EXCEPCIONES
  a) Si queda sin tachar exactamente una fila o columna con cero oferta o demanda, detenerse.
  b) Si queda sin tachar una fila o columna con oferta o demanda positiva, determine las variables básicas en la fila o columna con el método de costos mínimos, detenerse.
  c) Si todas las filas y columnas que no se tacharon tienen cero oferta y demanda, determine las variables básicas cero por el método del costo mínimo, detenerse.
  d) Si no se presenta ninguno de los casos anteriores vuelva al paso 1 hasta que las ofertas y las demandas se hayan agotado.

EJEMPLO DEL MÉTODO DE APROXIMACIÓN DE VOGEL

Por medio de este método resolveremos el ejercicio de transporte resuelto en módulos anteriores mediante programación lineal.

EJEMPLO

Una empresa energética colombiana dispone de cuatro plantas de generación para satisfacer la demanda diaria eléctrica en cuatro ciudades, Cali, Bogotá, Medellín y Barranquilla. Las plantas 1,2,3 y 4 pueden satisfacer 80, 30, 60 y 45 millones de KW al día respectivamente. Las necesidades

de las ciudades de Cali, Bogotá, Medellín y Barranquilla son de 70, 40, 70 y 35 millones de Kw al día respectivamente.
Los costos asociados al envío de suministro energético por cada millón de KW entre cada planta y cada ciudad son los registrados en la siguiente tabla.

	Cali	Bogotá	Medellín	Barranquilla
Planta 1	5	2	7	3
Planta 2	3	6	6	1
Planta 3	6	1	2	4
Planta 4	4	3	6	6

Formule un modelo de programación lineal que permita satisfacer las necesidades de todas las ciudades al tiempo que minimice los costos asociados al transporte.

SOLUCIÓN PASO A PASO

PASO 1: Determinar las medidas de penalización y consignarlas en el tabulado de costos, tal como se muestra a continuación.

	Cali	Bogotá	Medellín	Barranquilla	Oferta	Penalización
Planta 1	5	2	7	3	80	1
Planta 2	3	6	6	1	30	2
Planta 3	6	1	2	4	60	1
Planta 4	4	3	6	6	45	1
Demanda	70	40	70	35		
Penalización	1	1	4	2		

Los dos menores valores de la fila, 2 y 3
Estos se restan [2 - 3] Valor absoluto =1

Los dos menores valores de la columna, 3 y 4
estos valores se restan [3 - 4] Valor absoluto =1

El paso siguiente es escoger la mayor penalización, de esta manera:

	Cali	Bogotá	Medellín	Barranquilla	Oferta	Penalización
Planta 1	5	2	7	3	80	1
Planta 2	3	6	6	1	30	2
Planta 3	6	1	2	4	60	1
Planta 4	4	3	6	6	45	1
Demanda	70	40	70	35		
Penalización	1	1	$\boxed{4}$	2		

En este paso escogemos la mayor penalización "4", y procedemos a seleccionar la columna o fila a la cual corresponde

El paso siguiente es escoger de esta columna el menor valor, y en una tabla paralela se le asigna la mayor cantidad posible de unidades, podemos observar como el menor costo es "2" y que a esa celda se le pueden asignar como máximo 60 unidades "que es la capacidad de la planta 3".

	Cali	Bogotá	Medellín	Barranquilla	Oferta	Penalización
Planta 1	5	2	7	3	80	1
Planta 2	3	6	6	1	30	2
Planta 3	6	1	$\boxed{2}$	4	60	1
Planta 4	4	3	6	6	45	1
Demanda	70	40	70	35		
Penalización	1	1	4	2		

Este es el menor valor de la columna penalizada, por ende se le asigna la mayor cantidad de unidades posibles, que en este caso es 60 unidades.

CUADRO SOLUCIÓN

	Cali	Bogotá	Medellín	Barranquilla	Oferta
Planta 1					80
Planta 2					30
Planta 3			60		60
Planta 4					45
Demanda	70	40	70	35	

Dado que la fila de la "Planta 3" ya ha asignado toda su capacidad (60 unidades) esta debe desaparecer.

	Cali	Bogotá	Medellín	Barranquilla	Oferta	Penalización
Planta 1	5	2	7	3	80	1
Planta 2	3	6	6	1	30	2
Planta 4	4	3	6	6	45	1
Demanda	70	40	10	35		
Penalización	1	1	4	2		

Se procede a eliminarse la fila correspondiente a la Planta que ha quedado sin unidades, además observemos como la demanda de Medellín se modifica, ahora solo necesita 10 unidades, dado que se le resta la cantidad ya asignada

Se ha llegado al final del ciclo, por ende se repite el proceso

	Cali	Bogotá	Medellín	Barranquilla	Oferta	Penalización
Planta 1	5	2	7	3	80	1
Planta 2	3	6	6	1	30	$\boxed{2}$
Planta 4	4	3	6	6	45	1
Demanda	70	40	10	35		
Penalización	1	1	0	$\boxed{2}$		

Dado que en este caso existe empate, elegimos de manera arbitraria

	Cali	Bogotá	Medellín	Barranquilla	Oferta	Penalización
Planta 1	5	2	7	3	80	1
Planta 2	3	6	6	$\boxed{1}$	30	2
Planta 4	4	3	6	6	45	1
Demanda	70	40	10	35		
Penalización	1	1	0	2		

El menor valor de esta columna es 1

CUADRO SOLUCIÓN

	Cali	Bogotá	Medellín	Barranquilla	Oferta
Planta 1					80
Planta 2				30	30
Planta 3			60		60
Planta 4					45
Demanda	70	40	70	35	

Por ende asignamos en esta celda la mayor cantidad de unidades posible, es decir 30, dada la capacidad de la "Planta 2".

	Cali	Bogotá	Medellín	Barranquilla	Oferta	Penalización
Planta 1	5	2	7	3	80	1
[redacted]						
Planta 4	4	3	6	6	45	1
Demanda	70	40	10	5		
Penalización	1	1	0	2		

Dado que la "Planta 2" se ha quedado sin unidades se elimina y la demanda de Barranquilla ahora es 35 - 30 = 5

Iniciamos una nueva iteración

	Cali	Bogotá	Medellín	Barranquilla	Oferta	Penalización
Planta 1	5	2	7	3	80	1
Planta 4	4	3	6	6	45	1
Demanda	70	40	10	5		
Penalización	1	1	1	3		

El menor valor de esta columna es 3, por ende le asignamos la mayor cantidad de unidades posibles, la cual se ve restringida por la demanda de Barranquilla, la cual es de tan solo 5 unidades

CUADRO SOLUCIÓN

	Cali	Bogotá	Medellín	Barranquilla	Oferta
Planta 1				5	80
Planta 2				30	30
Planta 3			60		60
Planta 4					45
Demanda	70	40	70	35	

Podemos observar como queda satisfecha la demanda de Barranquilla, por ende desaparecerá, así mismo la oferta de la planta 1 queda limitada a 80 - 5 = 70 unidades

	Cali	Bogotá	Medellín	[redacted]	Oferta	Penalización
Planta 1	5	2	7		75	1
Planta 4	4	3	6		45	1
Demanda	70	40	10			
Penalización	1	1	1			

Continuamos con las iteraciones,

	Cali	Bogotá	Medellín	Oferta	Penalización
Planta 1	5	2	7	75	3
Planta 4	4	3	6	45	1
Demanda	70	40	10		
Penalización	1	1	1		

CUADRO SOLUCIÓN

	Cali	Bogotá	Medellín	Barranquilla	Oferta
Planta 1		40		5	80
Planta 2				30	30
Planta 3			60		60
Planta 4					45
Demanda	70	40	70	35	

	Cali	[redacted]	Medellín	Oferta	Penalización
Planta 1	5	[redacted]	7	35	3
Planta 4	4	[redacted]	6	45	1
Demanda	70	[redacted]	10		
Penalización	1	[redacted]	1		

Iniciamos otra iteración

	Cali	Medellín	Oferta	Penalización
Planta 1	5	7	35	2
Planta 4	4	6	45	2
Demanda	70	10		
Penalización	1	1		

Rompemos el empate arbitrariamente

	Cali	Medellín	Oferta	Penalización
Planta 1	5	7	35	2
Planta 4	4	6	45	2
Demanda	70	10		
Penalización	1	1		

CUADRO SOLUCIÓN

	Cali	Bogotá	Medellín	Barranquilla	Oferta
Planta 1		40		5	80
Planta 2				30	30
Planta 3			60		60
Planta 4	45				45
Demanda	70	40	70	35	

	Cali	Medellín	Oferta	Penalización
Planta 1	5	7	35	2
[redacted]				
Demanda	25	10		
Penalización	1	1		

Al finalizar esta iteración podemos observar como el tabulado queda una fila sin tachar y con valores positivos, por ende asignamos las variables básicas y hemos concluido el método.

	Cali	Medellín	Oferta
Planta 1	5	7	35
Demanda	25	10	

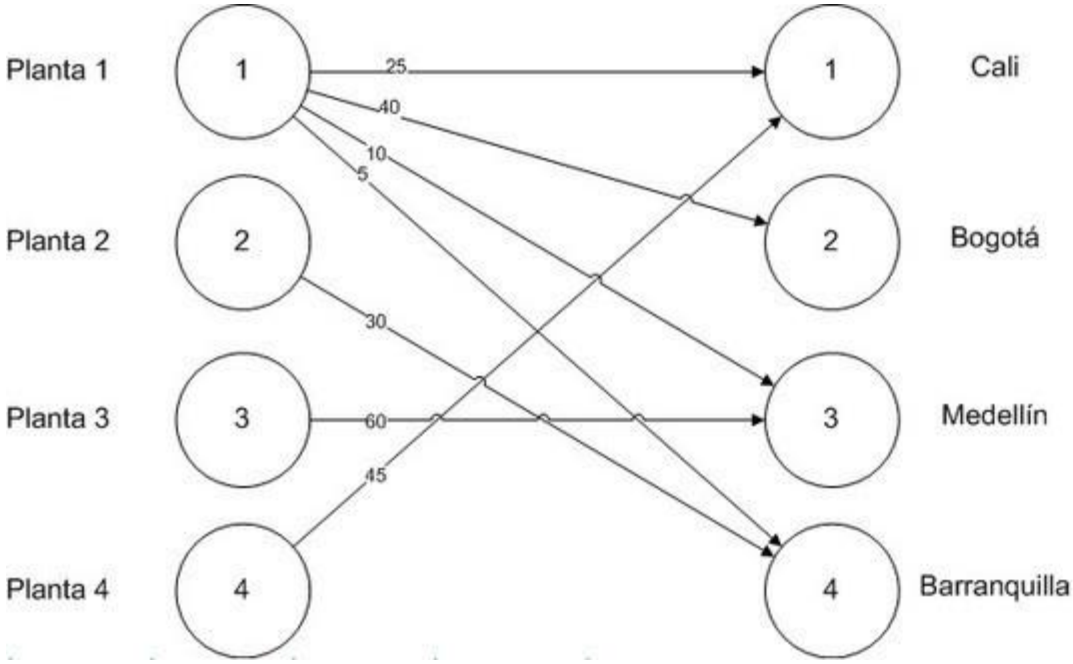
CUADRO SOLUCIÓN

	Cali	Bogotá	Medellín	Barranquilla	Oferta
Planta 1	25	40	10	5	80
Planta 2				30	30
Planta 3			60		60
Planta 4	45				45
Demanda	70	40	70	35	

Ahora podemos observar como cada demanda es satisfecha sin superar los niveles establecidos por la oferta de cada Planta

Los costos asociados a la distribución son:

Variable de decisión	Actividad de la variable	Costo x Unidad	Contribución Total
$X_{1,1}$	25	5	125
$X_{1,2}$	40	2	80
$X_{1,3}$	10	7	70
$X_{1,4}$	5	3	15
$X_{2,1}$	0	3	0
$X_{2,2}$	0	6	0
$X_{2,3}$	0	6	0
$X_{2,4}$	30	1	30
$X_{3,1}$	0	6	0
$X_{3,2}$	0	1	0
$X_{3,3}$	60	2	120
$X_{3,4}$	0	4	0
$X_{4,1}$	45	4	180
$X_{4,2}$	0	3	0
$X_{4,3}$	0	6	0
$X_{4,4}$	0	6	0
TOTAL			620



Objective
Maximize
Minimize

Starting method
Northwest Corner Method

Optimal cost = $620	Calí	Bogotá	Medellin	Barranquilla
Planta 1	5	40		35
Planta 2	30			
Planta 3			60	
Planta 4	35		10	

ALGORITMO DE RESOLUCIÓN DEL COSTO MÍNIMO

PASO 1:
De la matriz se elige la ruta (celda) menos costosa (en caso de un empate, este se rompe arbitrariamente) y se le asigna la mayor cantidad de unidades posible, cantidad que se ve restringida ya sea por las restricciones de oferta o de demanda. En este mismo paso se procede a ajustar la oferta y demanda de la fila y columna afectada, restándole la cantidad asignada a la celda.

PASO 2:
En este paso se procede a eliminar la fila o destino cuya oferta o demanda sea 0 después del "Paso 1", si dado el caso ambas son cero arbitrariamente se elige cual eliminar y la restante se deja con demanda u oferta cero (0) según sea el caso.

PASO 3:
Una vez en este paso existen dos posibilidades, la primera que quede un solo renglón o columna, si este es el caso se ha llegado al final el método, "detenerse". La segunda es que quede más de un renglón o columna, si este es el caso iniciar nuevamente el "Paso 1".

EJEMPLO DEL MÉTODO DEL COSTO MÍNIMO
Una cadena de cinco Almacenes, ubicados en diferentes partes del país, requieren cierta mercancía para cada uno de sus almacenes. Las Empresas abastecedoras han informado que disponen de la mercancía solicitada, pero en tres (3) diferentes fábricas. La escasez del producto hace que la cadena de almacenes deba transportar la mercancía. En base a los costos del transporte por unidad, a los requerimientos de los almacenes y a la disponibilidad de las fábricas, que se muestra en el siguiente cuadro; Resuelva el problema por el método del costo mínimo.

	ALMACENES					Disponibilidad
FÁBRICAS	1	2	3	4	5	
A	10	20	40	30	50	1.000
B	20	30	50	40	10	1.000
C	30	40	10	50	20	1.500
Requerimientos	1.000	800	600	800	300	3.500

Solución:
Iteración1: seleccionamos el costo mínimo (10) de la celda **A1,** y aquí asignamos la máxima cantidad posible, en esto caso 1000 unidades. Por lo que eliminamos la fábrica A y el almacén 1 (uno) queda con demanda cero.

	ALMACENES					Disponibilidad
FÁBRICAS	1	2	3	4	5	
A	10	20	40	30	50	1.000
B	20	30	50	40	10	1.000
C	30	40	10	50	20	1.500
Requerimientos	1.000	800	600	800	300	3.500

Aquí asignamos 1000 unidades.

Puede ver que hay tres costos mínimos con valor de 10, rompemos el empate arbitrariamente, eligiendo el 10 de la celda formada con la fila A columna 1.

Iteración 2: Ahora nos encontramos que hay dos costos mínimos iguales con valor de 10, rompemos arbitrariamente el empate como lo hicimos anteriormente.

	ALMACENES					Disponibilidad
FÁBRICAS	1	2	3	4	5	
A						
B	20	30	50	40	10	1.000
C	30	40	10	50	20	1.500
Requerimientos	0	800	600	800	300	2500

Aquí asignamos 600 unidades.

Asignamos 600 unidades al Almacén 3, se satisface la demanda y se cierra ese almacén, pero la fábrica C quedará con una disponibilidad de 900 unidades y la fábrica B con 1000 unidades.

Iteración 3: Ahora encontramos un solo costo mínimo de 10 (B5) y aquí asignamos 300 unidades para satisfacer toda la demanda del Almacén 5.

	ALMACENES					Disponibilidad
FÁBRICAS	1	2	3	4	5	
A						
B	20	30		40	10	1.000
C	30	40		50	20	900
Requerimientos	0	800		800	300	1900

Aquí asignamos 300 unidades.

Al asignar 300 al Almacén 5, se satisface la demanda y se cierra el Almacén 5. Ahora La fábrica B quedará con una disponibilidad de 700 unidades y la fábrica con 900 unidades.

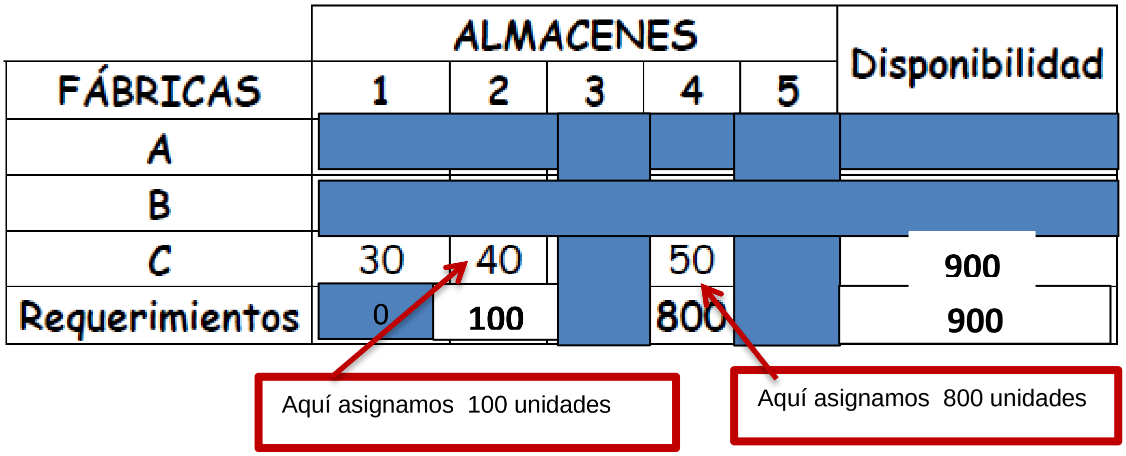
Iteración 4: Ahora nos encontramos con un costo mínimo de 30 y aquí asignamos 700 unidades que son las disponibles de la fábrica B.

	ALMACENES					Disponibilidad
FÁBRICAS	1	2	3	4	5	
A						
B	20	30		40		700
C	30	40		50		900
Requerimientos	0	800		800		1600

Asignamos aquí 700

Al asignar las 700 unidades al Almacén 2, no se satisface la demanda le faltan 100 unidades, pero se cierra la fábrica B que ha quedado en cero.

Iteración 5: Ahora solo nos queda disponibilidad en la fábrica C, por lo que asignamos basado en el criterio de costo mínimo.



De las 900 unidades de la fábrica C sean asignan 100 al Almacén 2, con eso se satisface la demanda y 800 unidades al almacén 4, con lo que quedan satisfechos todos los almacenes y se terminan todas las disponibilidades de las fábricas.

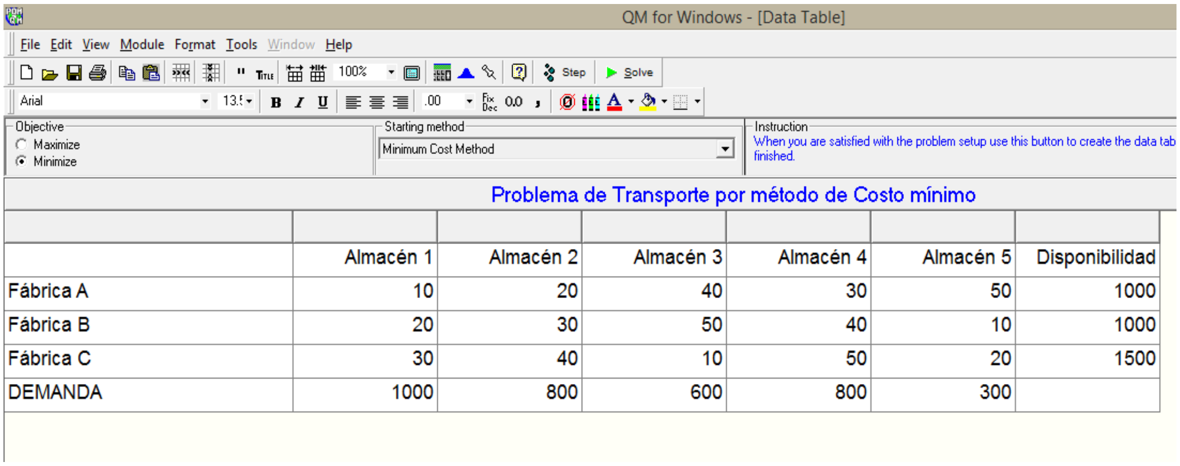
Por lo que ahora calcularemos los costos de las asignaciones.

	Almacenes					
Fábricas	1	2	3	4	5	Costo x unidades
A	10x1000					10,000
B		30x700			10x300	24,000
C		40x100	10x600	50x800		50,000
Costo mínimo del envío es →						$84,000

<u>Ahora lo resolveremos aplicado el módulo de transporte de POM-QM</u>

Para resolver el problema anterior usando el método de costo mínimo del módulo de transporte de POM-QM, activamos el **module transpotation** con tres fuentes “sources” y cinco destinos “destination”.

En la columna de fuentes cambiamos los nombres por fabrícas A, B y C y en los destinos introduciremos los nombres Almacén 1, 2,3, 4 y 5. En c cada casilla los costos de envío asimismo en Demanda las cantidades requeridas por cada almacén y en disponibilidades **las capacidades de cada fábrica.**

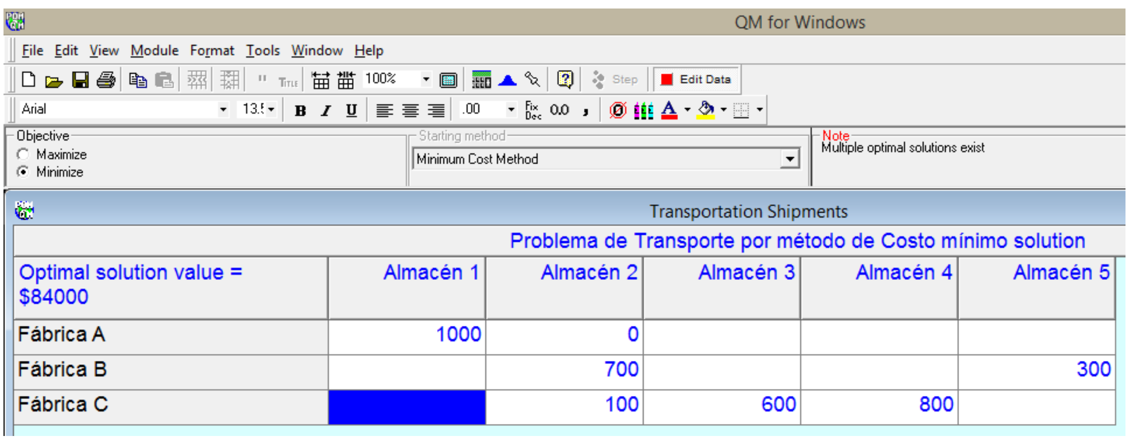


	Almacén 1	Almacén 2	Almacén 3	Almacén 4	Almacén 5	Disponibilidad
Fábrica A	10	20	40	30	50	1000
Fábrica B	20	30	50	40	10	1000
Fábrica C	30	40	10	50	20	1500
DEMANDA	1000	800	600	800	300	

En la opción **Objective** activamos **Minimize**.

En “**Starting method”** seleccionamos “**Minimum Cost method**”.

Verificamos si todos los datos de matriz de transporte estan correctos y procedemos a resolver hacienda clic en **solve**.

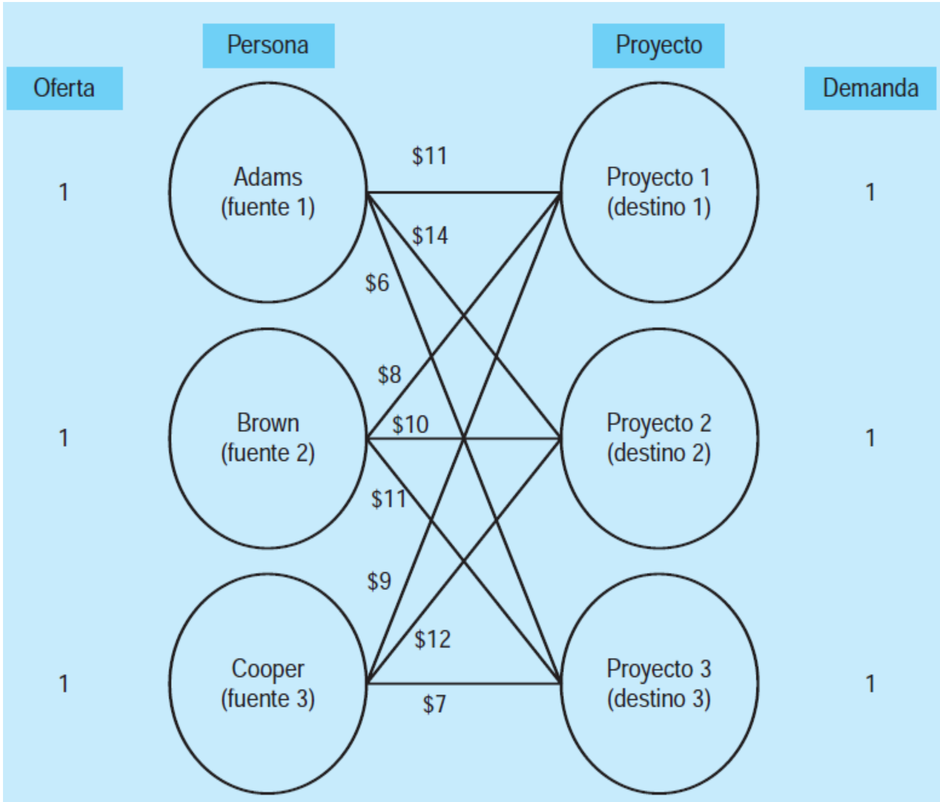


Optimal solution value = $84000	Almacén 1	Almacén 2	Almacén 3	Almacén 4	Almacén 5
Fábrica A	1000	0			
Fábrica B		700			300
Fábrica C		100	600	800	

Puede observar que el resultados es exactamente el mismo que obtuvimos anteriormente el mismo costo total y las mismas asignaciones.

Tema 3: Modelos de Asignación.

La gráfica siguiente es una representación en red de un problema de asignación. Observe que esta red es muy similar a la red para el problema de transporte. De hecho, un problema de asignación se puede ver como un tipo especial de problema de transporte, donde la oferta en cada fuente y la demanda en cada destino son iguales a uno. Cada individuo se asigna nada más a un puesto de trabajo o proyecto y cada puesto de trabajo únicamente necesita una persona.



Problema 5 (Libro Métodos cuantitativos para negocios/Render-Stair-Hanna/capítulo 9, Modelos de Trasporte y Asignación / página 345/ Problema de Asignación)
La red de la gráfica anterior ilustra el problema que enfrenta Fix-It Shop, que acaba de recibir tres nuevos proyectos de reparación que deben terminarse pronto: 1. un radio, 2. un horno tostador y 3. una mesa de café. Se dispone de tres personas que reparan, cada una con talentos diferentes, para realizar los trabajos. El dueño del taller estima el costo en salarios, si los empleados se asignan a cada uno de los tres proyectos. Los costos difieren debido al talento de cada trabajador en cada uno de los puestos de trabajo. El dueño quiere asignar los trabajos, de manera que se minimice el costo total y cada trabajo debe tener una persona asignada; cada persona puede asignarse a tan solo un trabajo.

Al formular este con programación lineal, se utiliza la forma general de PL para el problema de transporte. La definición de las variables es:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si la persona } i \text{ se asigna al proyecto } j \\ 0 \text{ de otra manera} \end{cases}$$

donde,

$i = 1, 2, 3$, con $1 =$ Adams, $2 =$ Brown y $3 =$ Cooper

$j = 1, 2, 3$, con $1 =$ proyecto 1, $2 =$ proyecto 2 y $3 =$ proyecto 3

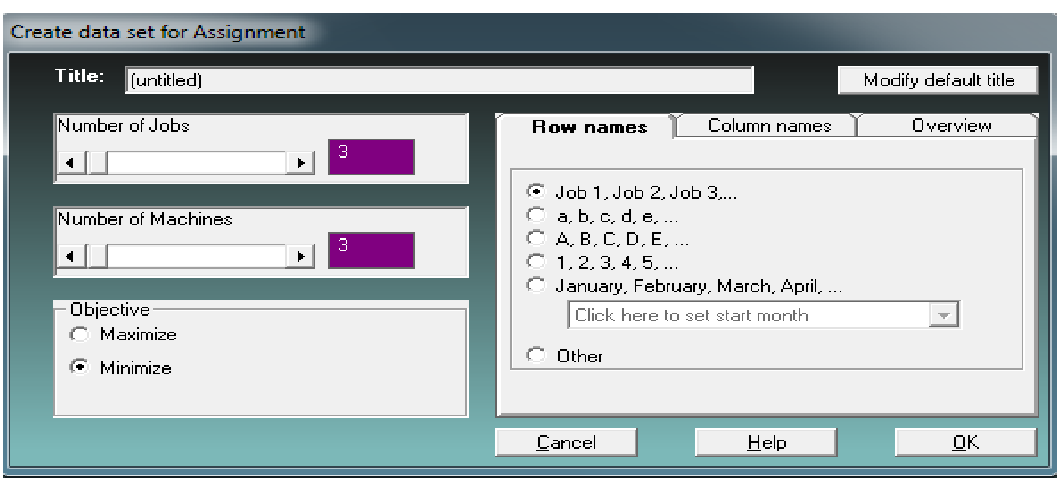
La formulación de PL es:

$$\text{Minimizar el costo total} = 11X_{11} + 14X_{12} + 6X_{13} + 8X_{21} + 10X_{22} + 11X_{23} + 9X_{31} + 12X_{32} + 7X_{33}$$

sujeto a

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 1$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 1$$
$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 1$$
$$x_{ij} = 0 \text{ para toda } i \text{ y } j$$

Para resolver el problema anterior podemos hacerlo por PL o por el módulo de asignación, dejamos al lector que lo resuelva por PL y aquí lo resolveremos con el módulo de asignación de POM-QM.
Hacemos clic en el menú **Module** y luego clic en **Assignment** (activa el módulo de asignación)
Luego hacemos clic en el menú **File** y luego **New**.



Ingresamos los costos en dólares en cada celda de la matriz indicada. Como se muestra en la tabla siguiente:

Objective
- ( ) Maximize
- (•) Minimize

	Proyecto1	Proyecto2	Proyecto3
Adams	11	14	6
Brown	8	10	11
Cooper	9	12	7

Procedemos a resolver el problema anterior, haciendo clic en Solve.

Edit Data F9
1 Assignments
2 Marginal Costs
3 Assignment List

1. Asignaciones
2. Costos marginales
3. Lista de asignaciones

1. Asignaciones

Assignments

Optimal cost = $25	Proyecto1	Proyecto2	Proyecto3
Adams	11	14	Assign 6
Brown	8	Assign 10	11
Cooper	Assign 9	12	7

2. Costos marginales

	Proyecto1	Proyecto2	Proyecto3
Adams		0	
Brown	1		9
Cooper			3

3. Lista de asignaciones

Assignment List

JOB	Assigned to	Cost
Adams	Proyecto3	6
Brown	Proyecto2	10
Cooper	Proyecto1	9
Total		25

PROBLEMAS RESUELTOS DE ASIGNACIÓN POR EL MÉTODO HUNGARO

Método Húngaro:

Los *problemas de asignación* incluyen aplicaciones tales como asignar personas a tareas. Aunque sus aplicaciones parecen diferir de las del problema del transporte, constituye un caso particular.

Los problemas de transporte y asignación son casos particulares de un grupo más grande de problemas, llamados *problemas de flujo en redes*.

Suposiciones de un problema de asignación:

1. El número de asignados es igual al número de tareas (se denota por n). (esto puede variar).
2. Cada asignado se asigna exactamente a **una** tarea.
3. Cada tarea debe realizarla exactamente **un** asignado.
4. Existe un costo c_{ij} asociado con el asignado i (i=1,2,…,n).
5. El objetivo es determinar cómo deben hacerse las asignaciones para minimizar los costos totales.

Pasos para resolver un problema de Asignación por el método Húngaro.

1. A todos los elementos de cada columna restar el menor elemento de la columna. En la matriz resultante, restar a todos los elementos de cada fila el menor elemento de la fila. Así se garantiza la obtención de por lo menos un cero en cada fila y columna.

2. Con la matriz resultante, verificar la existencia de una solución óptima. Para encontrarla se debe asignar un cero a cada fila (comenzando por las que tengan menor Nº de ceros), y cancelar los demás ceros de esa fila y los ceros de la columna en la que se encuentra ese cero. Repetir esta operación hasta que no queden ceros sin asignar o cancelar.
Si no existe solución óptima ir al paso 3.

3. Realizar lo siguiente:

a) Marcar con un * todas la filas que no contengan ceros asignados.

b) Marcar todas las columnas que contengan uno o más ceros cancelados en alguna fila marcada.

c) Marcar toda fila que tenga un cero asignado en una columna marcada.

d) Repetir b) y c) hasta que no sea posible marcar más filas o columnas.

e) Poner un trazo (línea) sobre toda fila no marcada y sobre toda columna marcada.

4. Tomar el menor número no atravesado por un trazo (línea) y:

   - Restarlo a todos los elementos de las filas no atravesadas.
   - Sumarlo a todos los elementos de columnas atravesadas.

   Volver al paso 2.

PROBLEMAS RESUELTOS

I. La compañía de manufactura "Jiménez y Asociados" desea realizar una jornada de mantenimiento preventivo a sus tres máquinas principales A, B y C. El tiempo que demanda realizar el mantenimiento de cada máquina es de 1 día, sin embargo la jornada de mantenimiento no puede durar más de un día, teniendo en cuenta que la compañía cuenta con tres proveedores de servicios de mantenimiento debe de asignarse un equipo de mantenimiento a cada máquina para poder cumplir con la realización del mantenimiento preventivo. Teniendo en cuenta que según el grado de especialización de cada equipo prestador de servicios de mantenimiento el costo de la tarea varía para cada máquina en particular, debe de asignarse el equipo correcto a la máquina indicada con el objetivo de minimizar el costo total de la jornada. Los costos asociados se pueden observar en la siguiente tabla:

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
Equipo de mantenimiento 1	€ 10	€ 9	€ 5
Equipo de mantenimiento 2	€ 9	€ 8	€ 3
Equipo de mantenimiento 3	€ 6	€ 4	€ 7

Solución:

Paso 1: Encontramos el menor elemento de cada columna y restarlo de la columna respectiva.

- En la columna de la Máquina 1, el menor elemento es 6.
- En la columna de la Máquina 2, el menor elemento es 4
- En la columna de la Máquina 3, el menor elemento es 3.

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
Equipo de Mantenimiento 1	4	5	2
Equipo de Mantenimiento 2	3	4	0
Equipo de Mantenimiento 3	0	0	4

Encontramos el menor elemento de cada fila en la matriz resultante y restarlo de la fila respectiva.

- En la fila 1, el menor elemento es 2.
- En la fila 2, el menor elemento es 0.
- En la fila 3, el menor elemento es 0.

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
Equipo de Mantenimiento 1	2	3	0
Equipo de Mantenimiento 2	3	4	0
Equipo de Mantenimiento 3	0	0	4

Paso 2: Hacemos las asignaciones iniciando por la fila que tenga menos ceros y tachando los ceros de las fila y columna donde hicimos la asignación.

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
Equipo de Mantenimiento 1	2	3	$\boxed{0}$
Equipo de Mantenimiento 2	3	4	~~0~~
Equipo de Mantenimiento 3	$\boxed{0}$	~~0~~	4

Pude ver que solo hicimos dos asignaciones, pero debimos haber hecho tres, por lo que no logramos la solución óptima y pasamos al paso 3.

				*
		Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
*	Equipo de Mantenimiento 1	2	3	$\boxed{0}$
*	Equipo de Mantenimiento 2	3	4	~~0~~
	Equipo de Mantenimiento 3	$\boxed{0}$	~~0~~	4

Marcamos con * las filas 1 y 2 y la columna 3. De acuerdo al algoritmo de Húngaro.

Paso 4: El menor elemento de los no atravesados en la matriz es: 2

- **Se lo restamos a todos los elementos de las filas no atravesadas.**
- **Se lo sumamos a todos los elementos de las columnas atravesadas.**

		Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3 *
*	Equipo de Mantenimiento 1	0	1	$\boxed{0}$
*	Equipo de Mantenimiento 2	1	2	~~0~~
	Equipo de Mantenimiento 3	$\boxed{0}$	~~0~~	5

Hacemos nuevamente las asignaciones empezando por las filas que tengan menos ceros.

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
Equipo de Mantenimiento 1	$\boxed{0}$	1	~~0~~
Equipo de Mantenimiento 2	1	2	$\boxed{0}$
Equipo de Mantenimiento 3	~~0~~	$\boxed{0}$	5

El orden en que asignamos es el siguiente:

- Primero asignamos el equipo 2 a la Máquina 3 y tachamos el cero que hay en la columna de la Máquina 3.
- Segundo asignamos el Equipo 1 a la Máquina 1 y tachamos el cero que hay en la columna de la Máquina 1.
- Tercero asignamos el Equipo 3 a la Máquina 1.

Por ende la asignación que representa el menor costo para la jornada de mantenimiento preventivo determina que el Equipo 1 realice el mantenimiento de la Máquina 1, el Equipo 2 realice el mantenimiento de la Máquina 3 y el Equipo 3 realice el mantenimiento de la Máquina 2, jornada que tendrá un costo total de 17 unidades monetarias.

II. Se desea asignar 4 máquinas a 4 lugares posibles. A continuación se presentan los costos asociados.

Maquina\Lugar	1	2	3	4
1	3	5	3	3
2	5	14	10	10
3	12	6	19	17
4	2	17	10	12

Paso 1: Al igual que en el ejemplo anterior restamos cada columna del menor elemento y luego con la matriz resultante hacemos lo mismo pero por fila. La matriz resulta como se muestra.

Maquina\Lugar	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	6	4	4
3	9	0	15	13
4	0	12	7	9

Paso 2: Ahora a la matriz resultante hacemos las asignaciones.

Máquina\Lugar	1	2	3	4
1	1	~~0~~	$\boxed{0}$	~~0~~
2	$\boxed{0}$	6	4	4
3	9	$\boxed{0}$	15	13
4	~~0~~	12	7	9

Puede ver que solo logramos hacer tres asignaciones no logramos asignar la Máquina 4 por lo que no alcanzamos el óptimo.

Paso 3:

a) Marcar con un * todas la filas que no contengan ceros asignados.

	Máquina\Lugar	1	2	3	4
	1	1	~~0~~	$\boxed{0}$	~~0~~
	2	$\boxed{0}$	6	4	4
	3	9	$\boxed{0}$	15	13
*	**4**	~~0~~	12	7	9

b) Marcar con * todas las columnas que contengan uno o más ceros cancelados en alguna fila marcada.

*

	Máquina\Lugar	1	2	3	4
	1	1	~~0~~	$\boxed{0}$	~~0~~
	2	$\boxed{0}$	6	4	4
	3	9	$\boxed{0}$	15	13
*	**4**	~~0~~	12	7	9

c) Marcar toda fila que tenga un cero asignado en una columna marcada.

*

	Máquina\Lugar	1	2	3	4
	1	1	~~0~~	$\boxed{0}$	~~0~~
*	**2**	$\boxed{0}$	6	4	4
	3	9	$\boxed{0}$	15	13
*	**4**	~~0~~	12	7	9

d) No hay más

e) Poner un trazo (línea) sobre toda fila no marcada y sobre toda columna marcada.

*

Máquina\Lugar	1	2	3	4
1	1	~~0~~	$\boxed{0}$	~~0~~
* 2	$\boxed{0}$	6	4	4
3	9	$\boxed{0}$	15	13
* 4	~~0~~	12	7	9

4. El menor número es 4.

*

Máquina\Lugar	1	2	3	4
1	5	~~0~~	$\boxed{0}$	~~0~~
* 2	$\boxed{0}$	2	0	0
3	13	$\boxed{0}$	15	13
* 4	~~0~~	8	3	5

Hacemos nuevamente las asignaciones:

Máquina\Lugar	1	2	3	4
1	5	~~0~~	$\boxed{0}$	~~0~~
2	~~0~~	2	~~0~~	$\boxed{0}$
3	13	$\boxed{0}$	15	13
4	$\boxed{0}$	8	3	5

Hemos alcanzado el Óptimo pues hay 4 asignaciones:

- Máquina 1 a lugar 3 → 3
- Máquina 2 a lugar 4 → 10
- Máquina 3 a lugar 2 → 6
- Máquina 4 a lugar 1 → 2

Para un total de 20.

Tema 4: Modelos de Gestión de Proyecto (PERT-CPM)

El primer paso en la planeación y programación de un proyecto consiste en desarrollar la **estructura desglosada del trabajo**, lo cual requiere identificar las actividades que tienen que realizarse en el proyecto. Una **actividad** es un trabajo o una tarea que forma parte de un proyecto. El inicio o final de una actividad se llama **evento**. Puede haber varios niveles de detalle y cada actividad debe desglosarse en sus componentes más básicas. Para cada actividad se identifican tiempo, costo, recursos requeridos, predecesoras e individuos responsables. Después, se desarrolla una programación para el proyecto.

La **técnica de revisión y evaluación del programa (PERT, *program evaluation and review technique*)** y el **método de la ruta crítica (CPM, *critical path method*)** son dos técnicas de análisis cuantitativo que ayudan a los gerentes a planear, programar, supervisar y controlar proyectos grandes y complejos. Fueron desarrolladas porque existía una necesidad importante de una mejor forma de administrar.

Existen seis pasos comunes para ambos, PERT y CPM. El procedimiento es el siguiente:

Seis pasos de PERT/CPM

1. Definir el proyecto y todas sus actividades o tareas significativas.
2. Desarrollar la relación entre las actividades. Decidir qué actividades deben preceder a otras.
3. Dibujar la **red** que conecta todas las actividades.
4. Asignar estimaciones de tiempos y/o costos a cada actividad.
5. Calcular la trayectoria con el tiempo más largo a través de la red; se llama **ruta crítica**.
6. Usar la red para ayudar a planear, programar, supervisar y controlar el proyecto.

Encontrar la ruta crítica es una parte importante para el control de un proyecto. Las actividades en la ruta crítica representan tareas que demorarán todo el proyecto si ellas se retrasan. Los gerentes obtienen flexibilidad al identificar las actividades no críticas y replanear, reprogramar y reasignar recursos de personal y financieros.

Problema 6 (Libro Métodos cuantitativos para negocios/Render-Stair-Hanna/capítulo 12, Administración de Proyectos/ página 461/ Problema de Administración de Proyectos)

General Foundry, Inc., una planta fundidora de metales en Milwaukee, desde hace mucho ha intentado evitar el gasto de instalar el equipo para control de la contaminación atmosférica. El grupo de protección del ambiente de su área acaba de dar a la fundidora 16 semanas para instalar un sistema complejo de filtración de aire en su chimenea principal. Se advirtió a General Foundry que sería obligada a cerrar, a menos que instalara el dispositivo en el periodo estipulado. Lester Harky, el socio administrador, desea asegurar que la instalación del sistema de filtros progrese sin problemas y a tiempo.

Cuando inicia el proyecto, pueden comenzar la construcción de las componentes internas del dispositivo (actividad A) y las modificaciones necesarias en el piso y el techo (actividad B). La construcción del fuste de recolección (actividad C) puede comenzar una vez que las componentes internas estén terminadas; en tanto que el colado del nuevo piso de concreto y la instalación del bastidor (actividad D) pueden terminarse en cuanto se hayan modificado el techo y el piso. Después de construir el fuste de recolección, puede hacerse el quemador de alta temperatura (actividad E) e iniciar la instalación del sistema de control de contaminación (actividad F). El dispositivo contra la contaminación del aire puede instalarse (actividad G) después de que se construye el quemador de alta temperatura, se cuela el piso y se instala el bastidor. Por último, después de la instalación del sistema de control y del dispositivo contra la contaminación, el sistema se inspecciona y se prueba (actividad *H*).

Todas estas actividades parecen más bien confusas y complejas, hasta que se colocan en una red.

Primero, deben listarse todas las actividades. La información se muestra en la tabla 12.1. Vemos en la tabla que antes de poder construir el fuste de recolección (actividad *C*), las componentes internas deben construirse (actividad *A*). Así, la actividad *A* es la predecesora inmediata de la actividad *C*. De manera similar, ambas actividades *D* y *E* tienen que realizarse justo antes de la instalación del dispositivo contra la contaminación (actividad *G*).

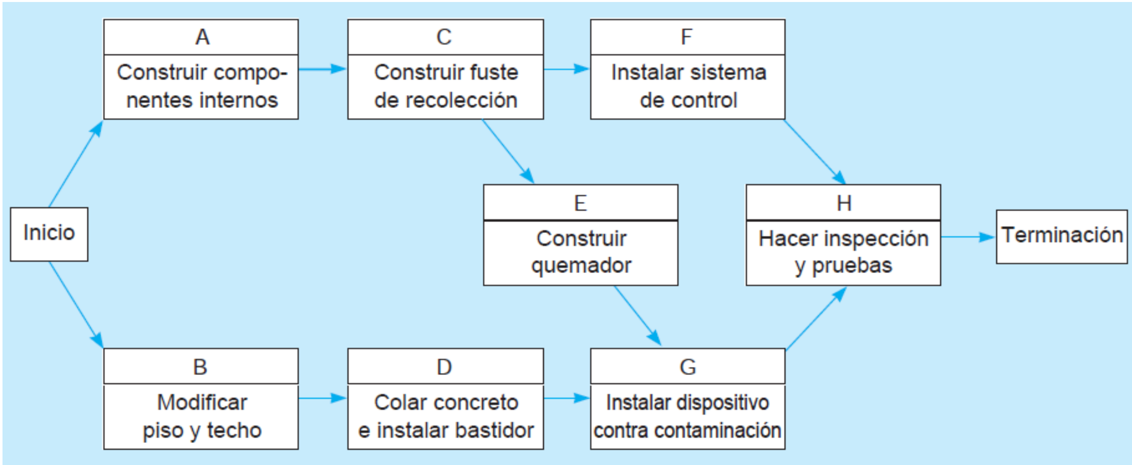
ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	PREDECESORAS INMEDIATAS
A	Construir componentes internas	—
B	Modificar techo y piso	—
C	Construir fuste de recolección	*A*
D	Colar concreto e instalar bastidor	*B*
E	Construir quemador de alta temperatura	*C*
F	Instalar sistema de control	*C*
G	Instalar dispositivo contra contaminación	*D, E*
H	Inspeccionar y probar	*F, G*

Cómo dibujar la red PERT/CPM

La red se puede dibujar (paso 3) una vez que se hayan especificado todas las actividades (paso 1 del procedimiento de PERT) y la gerencia haya decidido qué actividades deberían preceder a otras (paso 2).

Existen dos técnicas comunes para dibujar redes de PERT. La primera se llama **actividad en el nodo (AON),** donde los nodos representan las actividades. La segunda se conoce como **actividad en el arco (AOA)** donde se usan los arcos para representar las actividades. En este práctica presentamos la técnica AON, ya que es más sencilla y con frecuencia se emplea en el software comercial.

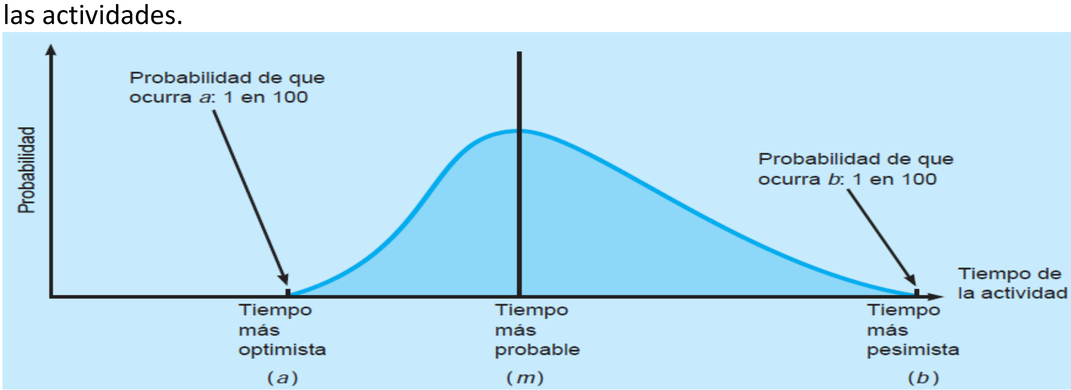
Al construir una red AON, debe haber un nodo que represente el inicio del proyecto, y otro que represente la terminación del mismo. Habrá un nodo (dibujado como rectángulo) para cada actividad. La gráfica siguiente muestra la red completa para General Foundry. Los arcos (las flechas) se usan para mostrar las predecesoras de cada actividad. Por ejemplo, las flechas que llevan a la actividad *G* indican que tanto *D* como *E* son predecesoras inmediatas de *G*.



No obstante, para proyectos especiales o para trabajos nuevos, proporcionar las estimaciones de los tiempos para las actividades no siempre resulta sencillo. Sin datos históricos sólidos, los gerentes muchas veces tienen incertidumbre acerca de los tiempos de las actividades. Por ello, los desarrolladores de PERT utilizaron una distribución de probabilidad basada en tres estimaciones para cada actividad. Después se obtiene un promedio ponderado de estos tiempos para usarlo con PERT, en vez de una sola estimación del tiempo que se necesita en CPM; estos promedios se emplean para encontrar la ruta crítica. Las estimaciones de tiempo con PERT son:

Tiempo optimista (a): tiempo que tomaría una actividad si todo sale tan bien como sea posible. Debería haber únicamente una pequeña probabilidad (digamos, 1/100) de que esto ocurra.

Tiempo más probable (m): estimación de tiempo más realista para completar la actividad. PERT con frecuencia supone que las estimaciones de tiempo siguen la **distribución de probabilidad beta** véase la gráfica siguiente. Se ha encontrado que esta distribución continua es adecuada, en muchos casos, para determinar un valor esperado y la varianza de los tiempos de terminación de las actividades.



Tiempo pesimista (b): tiempo que tomaría una actividad suponiendo condiciones muy desfavorables. Tiene que haber únicamente una pequeña probabilidad de que la actividad tome tanto tiempo.

Para encontrar el **tiempo esperado de la actividad** (*t*), la distribución beta lo estima como sigue:

$$t = \frac{a + 4m + b}{6} \qquad \text{Ec. 1}$$

Para calcular la dispersión o varianza del tiempo de terminación de la actividad, se usa la siguiente fórmula:

$$\text{Varianza} = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2 \qquad \textbf{Ec. 2}$$

La tabla siguiente muestra las estimaciones de tiempo optimista, más probable y pesimista para cada actividad. También revela el tiempo esperado (*t*) y la varianza de cada una de las actividades, según se calcularon con las ecuaciones 1 y 2.

Para encontrar la ruta crítica, necesitamos determinar las siguientes cantidades para cada actividad en la red:

1. **Tiempo de inicio más cercano (IC):** lo más pronto que se puede comenzar una actividad sin contravenir los requerimientos de precedencia inmediata.
2. **Tiempo de terminación más cercana (TC):** lo más pronto que se puede terminar una actividad.
3. **Tiempo de inicio más lejano (IL):** lo más tarde que se puede comenzar una actividad sin retrasar todo el proyecto.
4. **Tiempo de terminación más lejana (TL):** lo más tarde que se puede terminar una actividad sin retrasar todo el proyecto.

Estos tiempos se representan en los nodos de la red, al igual que los tiempos de las actividades (*t*), como se indica en seguida:

ACTIVIDAD	*t*
IC	TC
IL	TL

Primero se muestra cómo determinar los tiempos más cercanos. Cuando se encuentran, es posible calcular los tiempos lejanos.

TIEMPOS MÁS CERCANOS: Existen dos reglas básicas al calcular los tiempos IC y TC. La primera es para el tiempo de terminación más cercana, que se calcula como sigue:

Terminación más cercana = inicio más cercano + tiempo esperado de la actividad

TC = IC + *t*

Además, antes de que una actividad pueda comenzar, todas sus actividades predecesoras deben estar terminadas. En otras palabras, buscamos la mayor TC de todas las predecesoras inmediatas para determinar el IC. La segunda regla es para el tiempo de inicio más cercano, que se calcula como sigue:

Inicio cercano _=el mayor tiempo de terminación cercana de predecesoras inmediatas

IC = TC mayor entre las predecesoras inmediatas

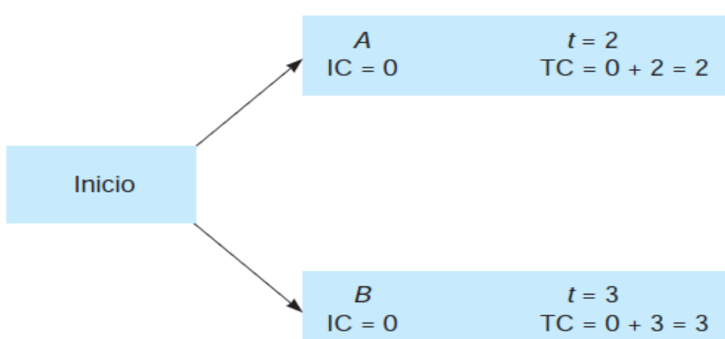
El inicio de todo el proyecto se establece en el tiempo cero. Por lo tanto, cualquier actividad que no tenga predecesoras tendrá un inicio cercano en el tiempo cero. Entonces, IC = 0 para *A* y *B* en el problema de General Foundry:

ACTIVIDAD	OPTIMISTA, a	MÁS PROBABLE, m	PESIMISTA, b	TIEMPO ESPERADO, $t = [(a + 4m + b)/6]$	VARIANZA $[(b - a)/6]^2$
A	1	2	3	2	$\left(\frac{3-1}{6}\right)^2 = \frac{4}{36}$
B	2	3	4	3	$\left(\frac{4-2}{6}\right)^2 = \frac{4}{36}$
C	1	2	3	2	$\left(\frac{3-1}{6}\right)^2 = \frac{4}{36}$
D	2	4	6	4	$\left(\frac{6-2}{6}\right)^2 = \frac{16}{36}$
E	1	4	7	4	$\left(\frac{7-1}{6}\right)^2 = \frac{36}{36}$
F	1	2	9	3	$\left(\frac{9-1}{6}\right)^2 = \frac{64}{36}$
G	3	4	11	5	$\left(\frac{11-3}{6}\right)^2 = \frac{64}{36}$
H	1	2	3	2	$\left(\frac{3-1}{6}\right)^2 = \frac{4}{36}$
				25	

Cómo encontrar la ruta crítica:

Una vez determinados los tiempos de terminación esperados para cada actividad, se aceptan como el tiempo real para esa tarea. La variabilidad en los tiempos se estudiará más adelante. Aunque la tabla indica que el tiempo total esperado para las 8 actividades de General Foundry es de 25 semanas, en la gráfica de la red es evidente que varias tareas pueden realizarse en forma simultánea. Para encontrar cuánto tiempo tomará terminar el proyecto, realizamos un análisis de la ruta crítica para la red.

La *ruta crítica* es la trayectoria con el tiempo más largo en la red. Si Lester Harky quiere reducir el tiempo total del proyecto, para General Foundry, tendrá que reducir el tiempo de alguna actividad en la ruta crítica. En cambio, cualquier demora de una actividad en la ruta crítica retrasará la terminación de todo el proyecto.



TIEMPOS MÁS LEJANOS El siguiente paso para encontrar la ruta crítica es calcular el tiempo de inicio más lejano (IL) y el tiempo de terminación más lejana (TL) para cada actividad. Hacemos esto mediante una **revisión hacia atrás** por la red, es decir, comenzamos en la terminación del proyecto y trabajamos hacia a atrás.
Hay que tener en cuenta dos reglas básicas al calcular los tiempos más lejanos. La primera regla implica el tiempo de inicio más lejano, que se calcula como:
Tiempo de inicio más lejano = Tiempo de terminación más lejana - tiempo de la actividad

IL = TL – *t*

Asimismo, como todas las predecesoras inmediatas deben estar terminadas antes de que pueda comenzar la actividad, el tiempo de inicio más lejano de una actividad determina el tiempo de terminación más lejana de sus predecesoras inmediatas. Si una actividad es predecesora inmediata de dos o más actividades, debe terminar para que todas las actividades siguientes comiencen en su tiempo de inicio más lejano. Entonces, la segunda regla incluye el tiempo de terminación más lejana, que se calcula como:
Terminación más lejana _=inicio más lejano menor entre todas las actividades que siguen, o bien,

TL = IL menor entre las siguientes actividades

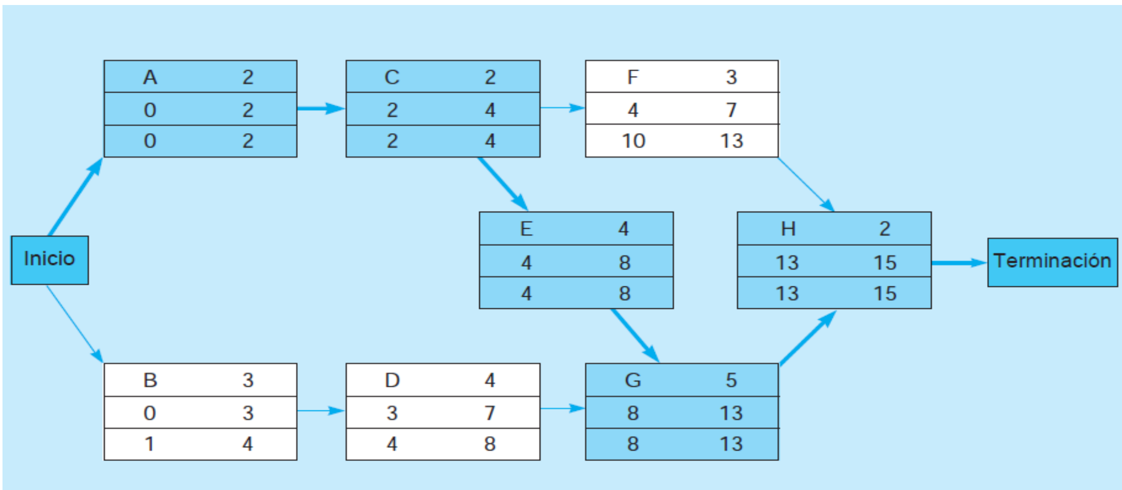
CONCEPTO DE HOLGURA EN LOS CÁLCULOS DE LA RUTA CRÍTICA Una vez que se determinan IC, IL, TC y TL, es sencillo encontrar la cantidad de **tiempo de holgura**, o tiempo libre, que tiene cada actividad. La holgura es el tiempo que se puede demorar una actividad sin que se retrase todo el proyecto. Matemáticamente:

Holgura = IL – IC, de otra manera, holgura = TL – TC

La tabla siguiente resume los tiempos de IC, TC, IL, TL y de holgura para todas las actividades de General Foundry.

ACTIVIDAD	INICIO MÁS CERCANO, IC	TERMINACIÓN MÁS CERCANA, TC	INICIO MÁS LEJANO, IL	TERMINACIÓN MÁS LEJANA, TL	HOLGURA, IL – IC	¿EN LA RUTA CRÍTICA?
A	0	2	0	2	0	Sí
B	0	3	1	4	1	No
C	2	4	2	4	0	Sí
D	3	7	4	8	1	No
E	4	8	4	8	0	Sí
F	4	7	10	13	6	No
G	8	13	8	13	0	Sí
H	13	15	13	15	0	Sí

La gráfica siguiente muestra la red de Lester Harky con su ruta crítica. Puede observar que la ruta crítica está formada por las actividades A, C, E, G y H.
Las actividades *A, C, E, G* y *H no* tienen tiempo de holgura, lo cual significa que ninguna se puede demorar sin retrasar todo el proyecto. Por ello, se llaman *actividades críticas* y se dice que están en la ruta crítica. El tiempo total de terminación del proyecto (T), 15 semanas, se ve como el número más grande en las columnas de TC y TL de la tabla de la página anterior. Los gerentes industriales señalan que esta es una tabla de horarios frontera.



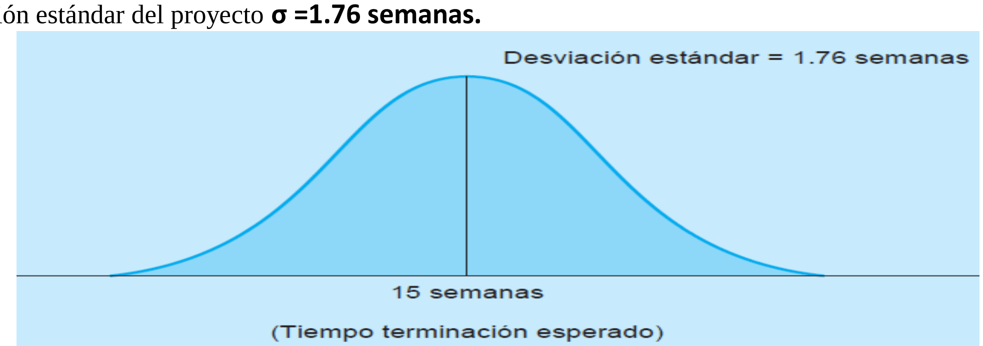
Probabilidad de terminación de un proyecto
El **análisis de la ruta crítica** ayudó a determinar que el tiempo esperado de terminación del proyecto de la fundidora es de 15 semanas. Sin embargo, Harky sabe que si el proyecto no termina en 16 semanas, los inspectores ambientales lo forzarán a cerrar General Foundry. También está consciente de que existe una variación significativa en las estimaciones de los tiempos para diversas actividades. La variación en las actividades que están en la ruta crítica llega a afectar la terminación del proyecto completo y quizás a retrasarlo. Este es un suceso que preocupa a Harky considerablemente.
PERT utiliza la varianza de las actividades de la ruta crítica para ayudar a determinar la varianza de todo el proyecto. Si los tiempos de las actividades son estadísticamente independientes, la varianza del proyecto se calcula sumando las varianzas de las actividades críticas:

Varianza del proyecto =∑varianzas de las actividades en la ruta crítica

Entonces, la varianza del proyecto es:

Varianza del proyecto = 4/36 + 4/36 + 36/36 + 64/36 + 4/36 = 112/36 = 3.111

Sabemos que la desviación estándar es tan solo la raíz cuadrada de la varianza, así que:
Desviación estándar del proyecto **σ =1.76 semanas.**



¿Cómo puede ser útil esta información para contestar las preguntas con respecto a la probabilidad de terminar el proyecto a tiempo? Además de suponer que los tiempos de las actividades son independientes, también suponemos que el tiempo total de terminación del proyecto completo sigue una distribución de probabilidad normal. Con tales supuestos, la curva en forma de campana mostrada en la gráfica siguiente representaría las fechas de terminación del proyecto completo. También significa que hay una posibilidad de 50% de que todo el proyecto se termine en menos de 15 semanas y de 50% de que exceda las 15 semanas.

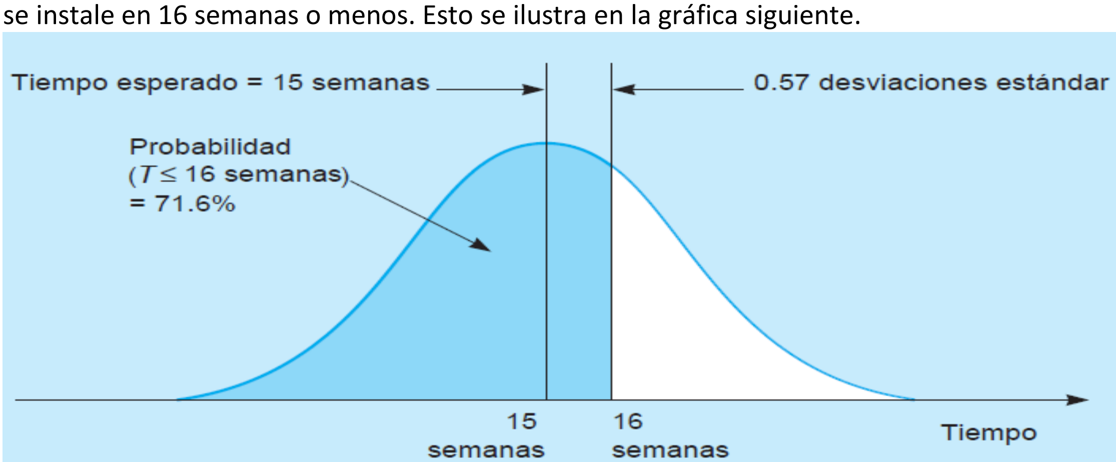
Para que Harky encuentre la probabilidad de que su proyecto termine en 16 semanas o menos, necesita determinar el área adecuada bajo la curva normal. Se puede aplicar la ecuación normal estándar como sigue:

$$Z = \frac{\text{Fecha de entrega} - \text{fecha esperada de terminación}}{\sigma_T}$$

$$= \frac{16 \text{ semanas} - 15 \text{ semanas}}{1.76 \text{ semanas}} = 0.57$$

Donde:

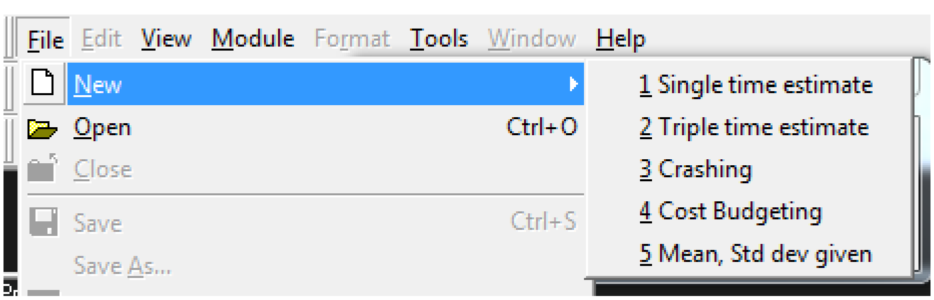
Z es el número de desviaciones estándar a las que la fecha de entrega o la fecha meta se separa de la media o fecha esperada. Si consultamos la tabla normal , encontramos una probabilidad de 0.71566. Entonces, hay una posibilidad de 71.6% de que el equipo de control de la contaminación se instale en 16 semanas o menos. Esto se ilustra en la gráfica siguiente.



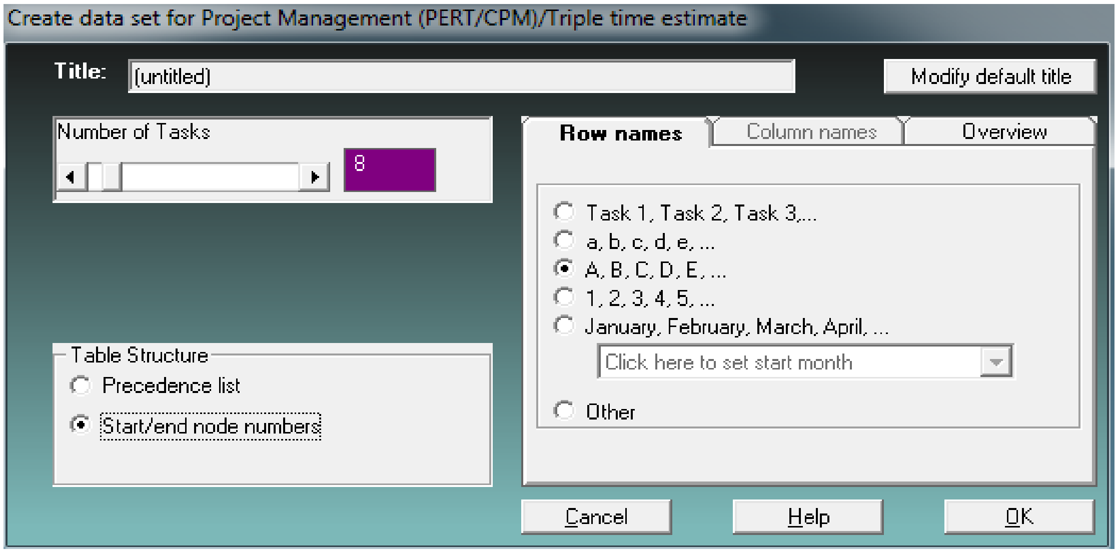
Usaremos POM-QM para ingresar los datos del proyecto de Lester Harky:

Hacemos clic en Module y seguidamente clic en “Project Management PERT/CPM)

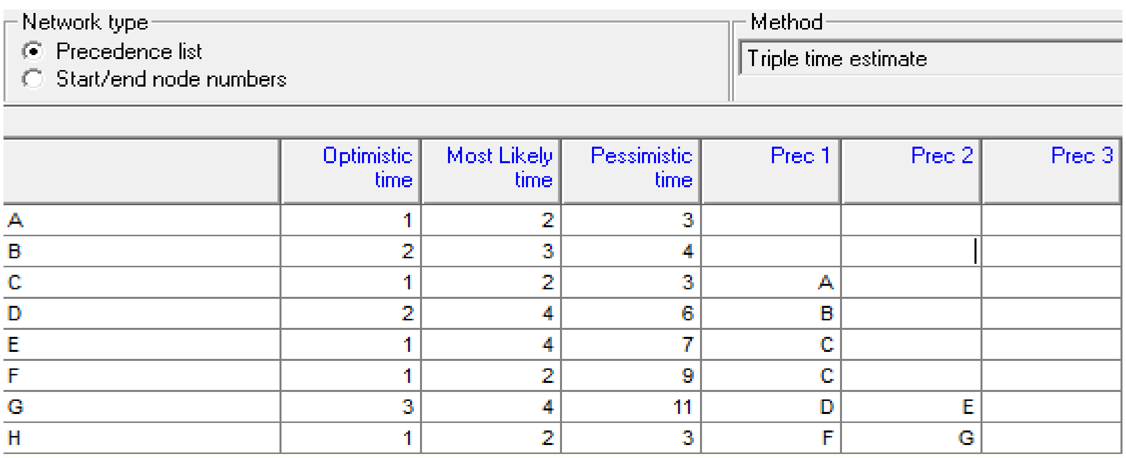
Ahora hacemos clic en File y se nos mostrará una pequeña ventana en New.



Como trabajaremos con tres tiempos para el proyecto, haremos clic en la opción 2 **"Triple time estimate".** Se nos mostrará la siguiente pantalla**. En Number of Tasks (número de tareas): 8**

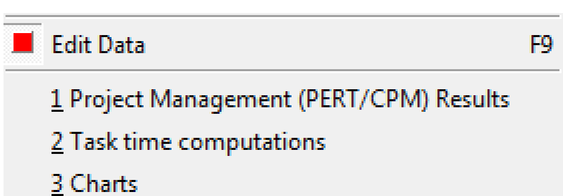


En la pantalla siguiente ingresamos los tiempos y las actividades predecesoras. Como se muestra.



	Optimistic time	Most Likely time	Pessimistic time	Prec 1	Prec 2	Prec 3
A	1	2	3			
B	2	3	4			
C	1	2	3	A		
D	2	4	6	B		
E	1	4	7	C		
F	1	2	9	C		
G	3	4	11	D	E	
H	1	2	3	F	G	

Procedemos a resolver el problema anterior una vez que hemos verificado que los datos han sido ingresados correctamente. Al hacer clic en solve. Se muestra la siguiente ventana.



1. Resultados de PERT-CPM
2. Cálculos de tiempo de las actividades
3. gráficos

1. Resultados de PERT-CPM

Project Management (PERT/CPM) Results

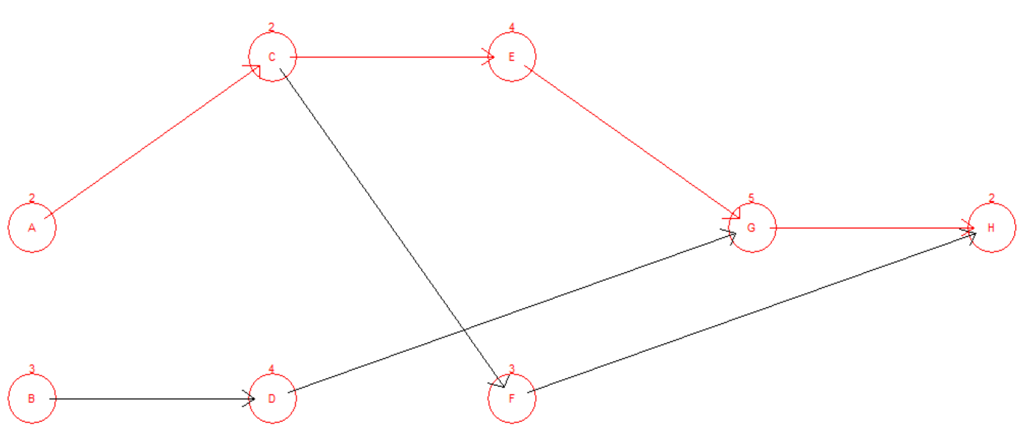
	Activity time	Early Start	Early Finish	Late Start	Late Finish	Slack	Standard Deviation
Project	15						1.76
A	2	0	2	0	2	0	.33
B	3	0	3	1	4	1	.33
C	2	2	4	2	4	0	.33
D	4	3	7	4	8	1	.67
E	4	4	8	4	8	0	1
F	3	4	7	10	13	6	1.33
G	5	8	13	8	13	0	1.33
H	2	13	15	13	15	0	.33

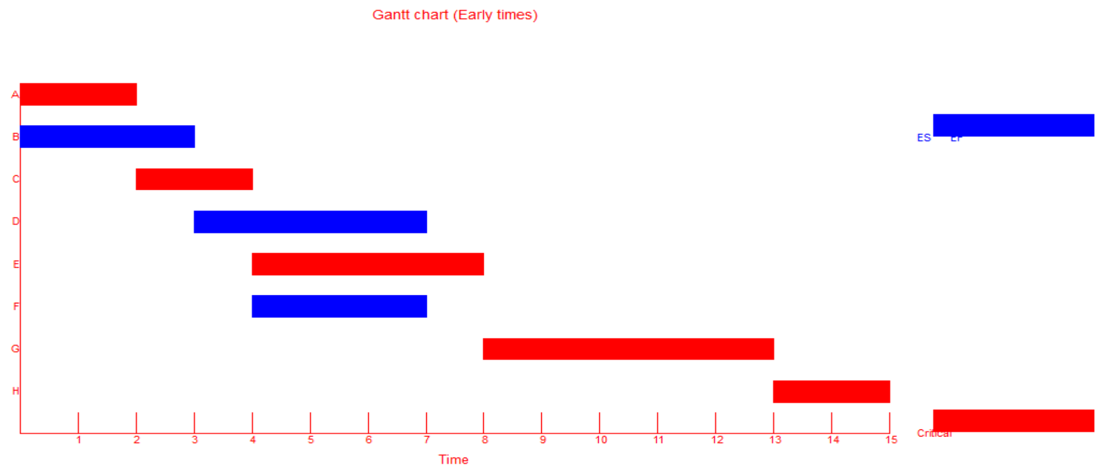
2. Cálculos de tiempo de las actividades

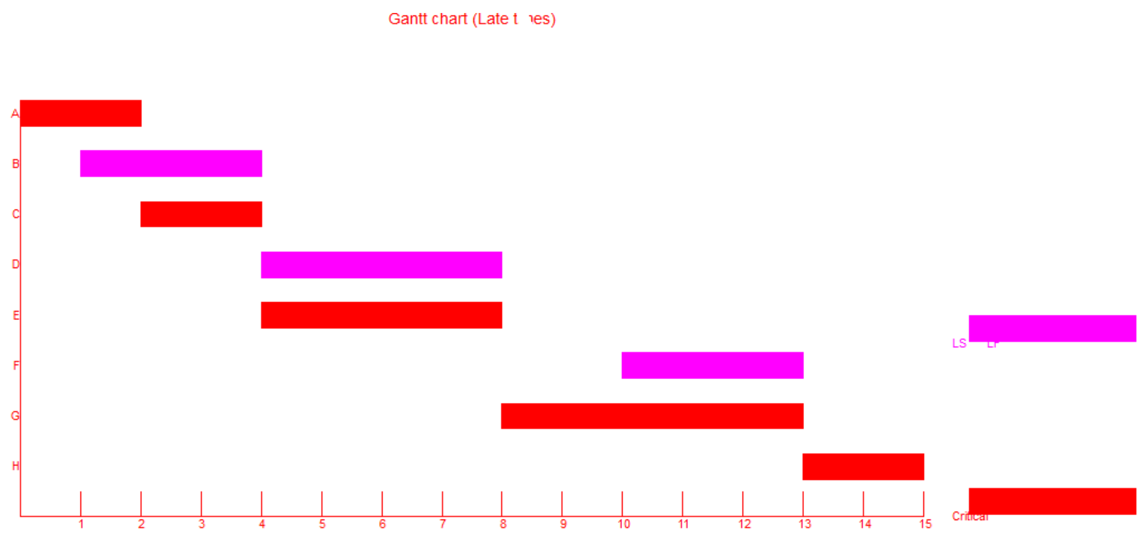
	Optimistic time	Most Likely time	Pessimistic time	Activity time	Standard Deviation	Variance
A	1	2	3	2	.33	.11
B	2	3	4	3	.33	.11
C	1	2	3	2	.33	.11
D	2	4	6	4	.67	.44
E	1	4	7	4	1	1
F	1	2	9	3	1.33	1.78
G	3	4	11	5	1.33	1.78
H	1	2	3	2	.33	.11
Project results						
Total of critical Activities						3.11
Square root of total					1.76	

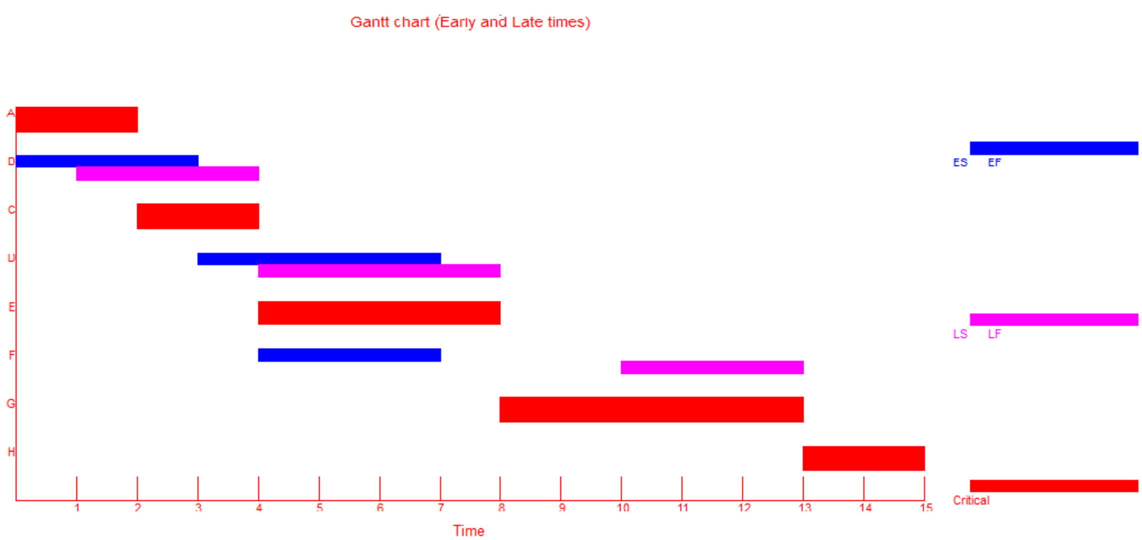
3. Graficas

Precedence Graph




Gantt chart (Early times)
A
B
C
D
E
F
G
H
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
Time
ES
Critical


A
B
C
D
E
F
G
H
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
LS
Critical


Gantt chart (Early and Late times)
A
B
C
D
E
F
G
H
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
Time
ES EF
LS LF
Critical

Tema 5: Modelos de Redes

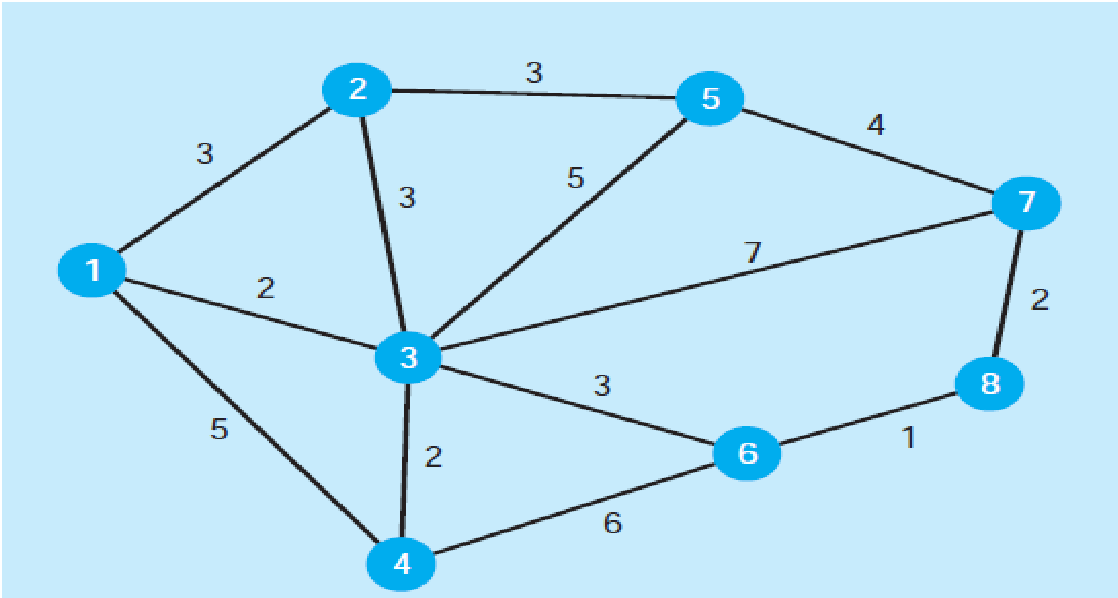
Las redes sirven para modelar una amplia gama de problemas. hemos vimos los problemas de transporte, trasbordo y asignación modelados como redes. Se utilizó programación lineal para resolverlos y se presentaron también otras técnicas. Ahora se estudiarán los siguientes problemas de redes: el **problema del árbol de expansión mínima**, **el problema del flujo máximo** y **el problema de la ruta más corta**. Se mostrarán técnicas de solución especiales y, cuando sea adecuado, se dará una formulación de programación lineal. La *técnica del árbol de expansión mínima* determina el camino a través de la red que conecta todos los puntos, al tiempo que minimiza la distancia total. Cuando los puntos representan casas en una sección, esta técnica es útil para determinar la mejor forma de conectarlas a la energía eléctrica, al sistema de agua, etcétera, de modo que se minimice la distancia total o la longitud de los cables o las tuberías. La *técnica del flujo máximo* encuentra el máximo flujo de cualquier cantidad o sustancia que pasa por la red. Esta técnica puede determinar, por ejemplo, el número máximo de vehículos (autos, camiones y otros) que pueden transitar por la red de carreteras de un lugar a otro. Por último, la *técnica de la ruta más corta* calcula la trayectoria más corta a través de una red. Por ejemplo, la ruta más corta de una ciudad a otra por la red de carreteras.
Todos los ejemplos que describen las diferentes técnicas de redes son pequeños y sencillos comparados con problemas reales. Lo hacemos así para facilitar la comprensión de las técnicas. En muchos casos, los problemas de redes más pequeños se resuelven por inspección o de manera intuitiva. Sin embargo, en problemas más grandes, encontrar la solución puede ser difícil y requerir técnicas de redes poderosas. Los problemas más grandes quizá requieran cientos e incluso miles de iteraciones. La computarización de tales técnicas necesita el enfoque sistemático que presentamos.

Problema 7 (Libro Métodos cuantitativos para negocios/Render-Stair-Hanna/capítulo 11, Modelos de Redes / página 430/ Problema de Árbol de expansión mínima)

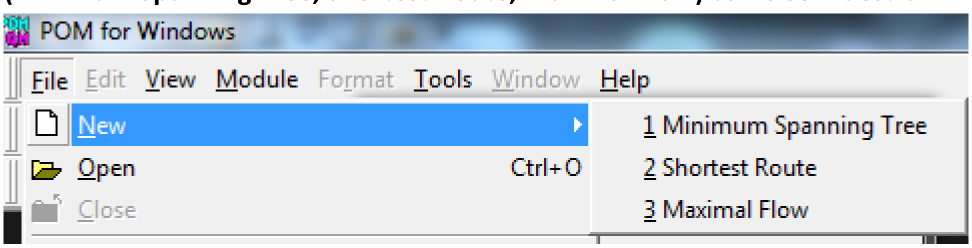
La técnica del árbol de expansión mínima implica conectar todos los puntos de una red, al tiempo que minimiza la distancia entre ellos. Se aplica, por ejemplo, en las compañías telefónicas para conectar entre sí varios teléfonos minimizando la longitud total del cable.
Considere la compañía Lauderdale Construction, que desarrolla un proyecto habitacional de lujo en Panamá City Beach, Florida. Melvin Lauderdale, dueño y presidente de Lauderdale Construction, tiene que determinar la forma menos costosa de suministrar agua y electricidad a cada casa. La red de viviendas se muestra en la gráfica siguiente, hay ocho casas en el golfo y la distancia entre cada una se muestra en la red, en cientos de pies. La distancia entre las casas 1 y 2, por ejemplo, es de 300 pies. (Hay un número 3 entre los nodos 1 y 2). Entonces, la técnica del árbol de expansión mínima sirve para determinar la distancia mínima para conectar todos los nodos. El enfoque se describe como sigue:

Pasos para la técnica del árbol de expansión mínima

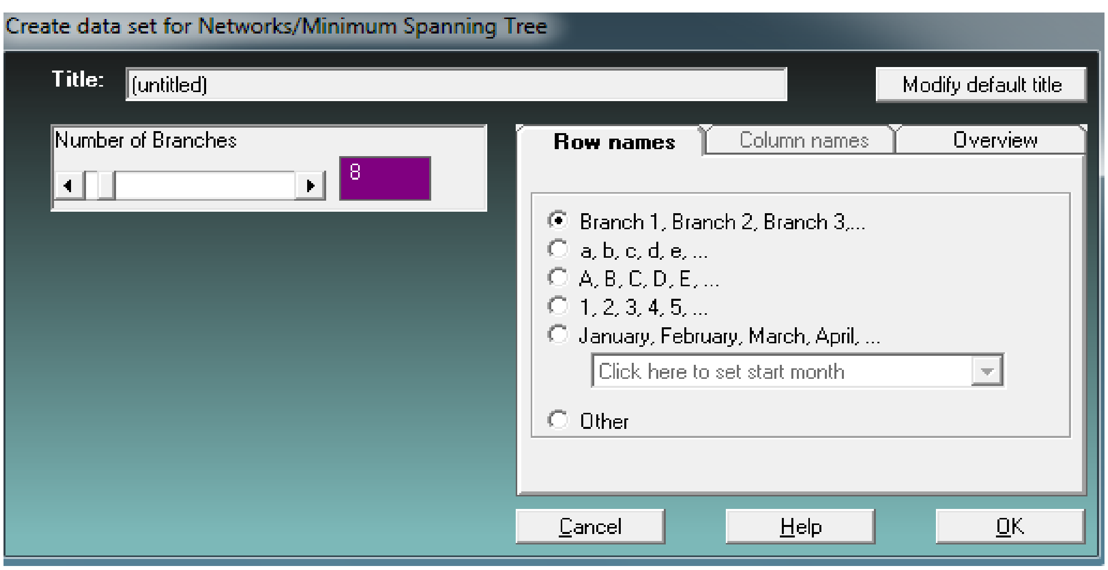
1. Seleccionar cualquier nodo en la red.
2. Conectar este nodo con el nodo más cercano que minimice la distancia total.
3. Considerar todos los nodos que están conectados, encontrar y conectar el nodo más cercano que no esté conectado. Si hay un empate en el nodo más cercano, seleccionar uno de manera arbitraria. Un empate sugiere que existe más de una solución óptima.
4. Repetir el paso 3 hasta que todos los nodos estén conectados.



Resolveremos el problema de árbol de expansión mínima utilizando el Software POM-QM.
Para lo cual hacemos clic en **Module** y luego clic en **Networks** para activar el módulo**.**
Ahora hacemos clic en **File** y luego y se nos muestra una pequeña ventana con tres opciones **(Minimum Spanning Tree, Shortest Route, Maximal Flow) como se muestra.**



Hacemos clic en "1. Minimum Spanning Tree" árbol de expansion minima.



El árbol tiene 8 nodos. Por lo que procedemos a ingresar los costos en la tabla matriz que se muestra.

Branch name	Start node	End node	Cost
Casa 1-2	1	2	3
Casa 1-3	1	3	2
Casa 1-4	1	4	5
Casa 2-3	2	3	3
Casa 2-5	2	5	3
Casa 3-5	3	5	5
Casa 3-7	3	7	7
Casa 3-6	3	6	3
Casa 3-4	3	4	2
Casa 4-6	4	6	6
Casa 5-7	5	7	4
Casa 6-8	6	8	1
Casa 7-8	7	8	2

Para resolver el problema una vez grabado los datos de la red damos clic en Solve y se nos muestra una ventana con las opciones indicada: Networks Results (resultados de la red) y Solutions steps (pasos de la solución)

Edit Data F9

1 Networks Results

2 Solution steps

Networks Results

(untitled) Sol

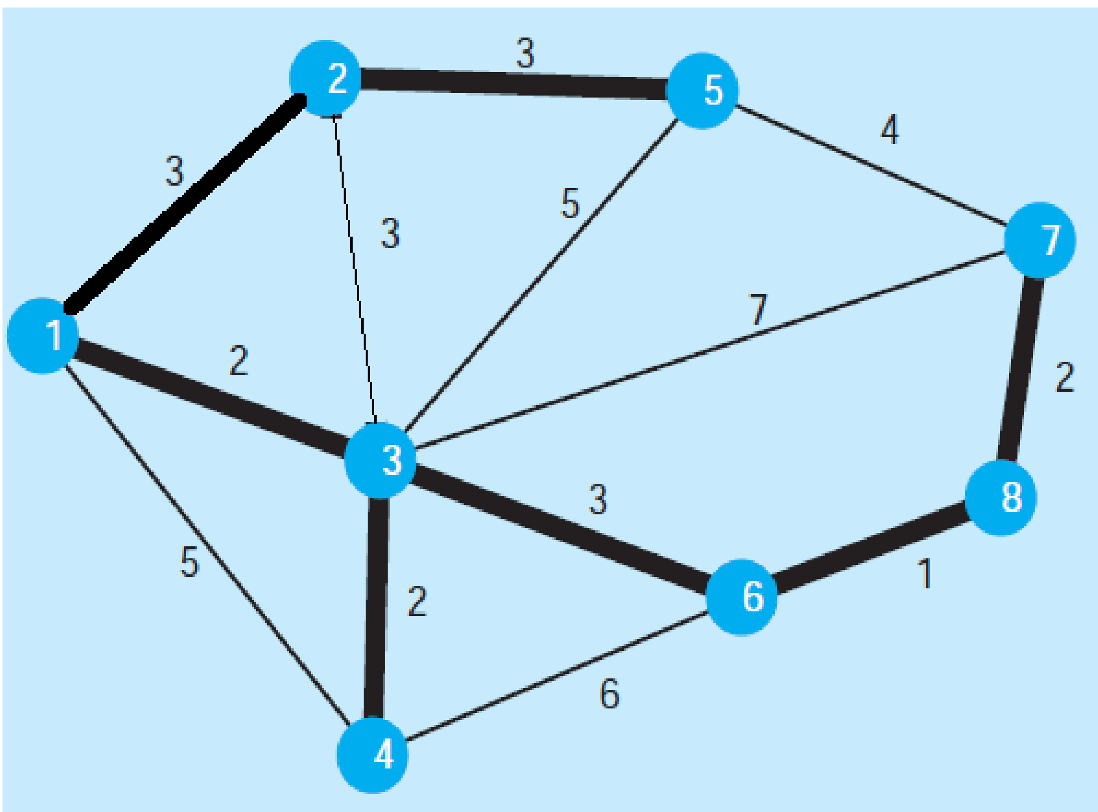
Branch name	Start node	End node	Cost	Include	Cost
Casa 1-2	1	2	3	Y	3
Casa 1-3	1	3	2	Y	2
Casa 1-4	1	4	5		
Casa 2-3	2	3	3		
Casa 2-5	2	5	3	Y	3
Casa 3-5	3	5	5		
Casa 3-7	3	7	7		
Casa 3-6	3	6	3	Y	3
Casa 3-4	3	4	2	Y	2
Casa 4-6	4	6	6		
Casa 5-7	5	7	4		
Casa 6-8	6	8	1	Y	1
Casa 7-8	7	8	2	Y	2

2. Pasos de la solución:

Starting node for iterations: 1

Note: Multiple optimal solutions exist

Branch	Starting node	Ending node	Cost	Cumulative cost
Casa 1-3	1	3	2	2
Casa 3-4	3	4	2	4
Casa 1-2	1	2	3	7
Casa 2-5	2	5	3	10
Casa 3-6	3	6	3	13
Casa 6-8	6	8	1	14
Casa 7-8	7	8	2	16



Solución óptima de la red

Problema 8 (Libro Introducción a la Investigación de Operaciones/Hillier y Lieberman/novena edición/capítulo 9, Modelos de Optimización de Redes /página 345/ Problema del flujo máximo de Seervada Park)

Problema del flujo máximo:

El **problema del flujo máximo** implica determinar la cantidad máxima de material que en una red puede fluir de un punto (**el origen**) a otro (el **destino final**). Los ejemplos de este tipo de problema incluyen determinar el número máximo de autos que circulan por un sistema de carreteras, la cantidad máxima de líquido que fluye por una red de tuberías y la cantidad máxima de datos que pueden fluir por una red de cómputo.
Para encontrar el flujo máximo desde el origen o el inicio de una red hasta el sumidero o final de la red, se utilizan dos métodos comunes: la técnica del flujo máximo y la programación lineal. presentaremos un ejemplo y demostrar el primero de los dos métodos.

Técnica del flujo máximo
En términos generales, el problema de flujo máximo se puede describir de la siguiente manera.

1. Todo flujo a través de una red conexa dirigida se origina en un nodo, llamado origen, y termina en otro nodo llamado destino.
2. Los nodos restantes son nodos de trasbordo.
3. Se permite el flujo a través de un arco sólo en la dirección indicada por la flecha, donde la cantidad máxima de flujo está dada por la capacidad del arco. En el origen, todos los arcos señalan hacia afuera. En el destino, todos señalan hacia el nodo.
4. El objetivo es maximizar la cantidad total de flujo del origen al destino. Esta cantidad se mide en cualquiera de las dos maneras equivalentes, esto es, la cantidad que sale del origen o la cantidad que entra al destino.

Algunas aplicaciones

A continuación se mencionan algunos tipos de aplicaciones comunes del problema del flujo máximo.

1. Maximizar el flujo a través de la red de distribución de una compañía desde sus fábricas hasta sus clientes.
2. Maximizar el flujo a través de la red de suministros de una compañía de proveedores a las fábricas.
3. Maximizar el flujo de petróleo por un sistema de tuberías.
4. Maximizar el flujo de agua a través de un sistema de acueductos.
5. Maximizar el flujo de vehículos por una red de transporte.

En algunas de estas aplicaciones, el flujo a través de la red se puede originar en más de un nodo y también puede terminar en más de uno, aunque el problema de flujo máximo puede tener sólo un origen y un destino. Por ejemplo, una red de distribución de una compañía tiene varias fábricas y múltiples clientes. En este caso se recurre a una reformulación ingeniosa para ajustar esta situación al problema de flujo máximo. Se trata de aumentar la red original para que incluya un origen ficticio, un destino ficticio y algunos arcos nuevos. El origen ficticio se maneja como el nodo que da origen a todo el flujo que en realidad se origina en algunos otros nodos. En cada uno de estos otros nodos se inserta un nuevo arco que va desde el origen ficticio hasta este nodo, donde la capacidad del arco es igual al flujo máximo que se puede originar en este nodo. De manera similar, el destino ficticio se trata como el nodo que absorbe todo el flujo que, en realidad, termina en algún otro nodo. Por lo tanto, se coloca un nuevo arco desde cada uno de los otros nodos hasta el destino ficticio con capacidad igual al flujo máximo que en realidad termina en este nodo. Debido a estos cambios, todos los nodos de la red original se convierten en nodos de trasbordo para que la red aumentada tenga un solo origen (la fuente ficticia) y un solo destino (el destino ficticio) y se ajuste al problema del flujo máximo.

Algoritmo de la trayectoria de aumento del problema de flujo máximo

1. Se identifica una trayectoria de aumento cuando se encuentra alguna trayectoria dirigida del origen al destino en la red residual, tal que cada arco sobre ella tenga capacidad residual estrictamente positiva. (Si no existe una, los flujos netos asignados constituyen un patrón de flujo óptimo.)

2. Cuando se encuentra el mínimo de las capacidades residuales de los arcos sobre esta trayectoria se identifica la capacidad residual c* de esta trayectoria de aumento. Se aumenta en c* el flujo de esta trayectoria.

3. Se disminuye en c* la capacidad residual de cada arco en esta trayectoria de aumento. Se aumenta en c* la capacidad residual de cada arco en la dirección opuesta en esta trayectoria. Se regresa al paso 1.

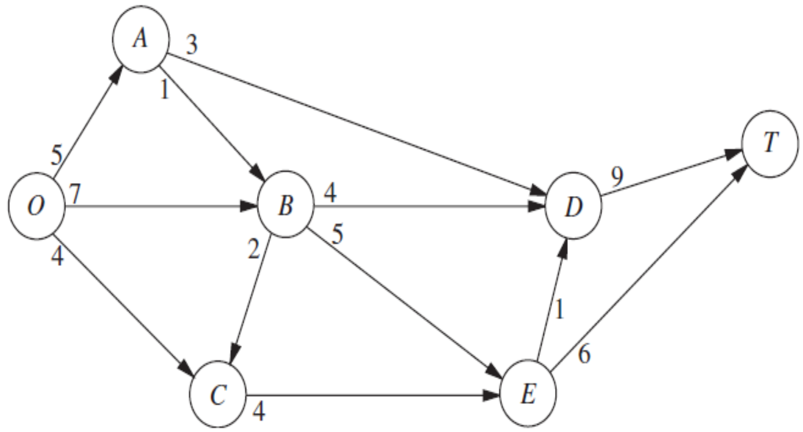
Cuando se lleva a cabo el paso 1, con frecuencia habrá varias alternativas de trayectorias de aumento entre las cuales se podrá escoger. Aunque la estrategia algorítmica para elegir es importante para elevar la eficiencia de las aplicaciones a gran escala.

Planteamiento del problema

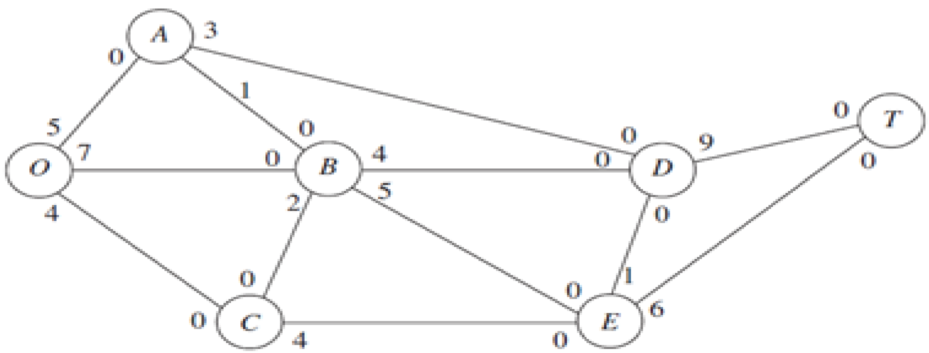
En fecha reciente se reservó el área de SEERVADA PARK para paseos y campamentos. No se permite la entrada de automóviles, pero existe un sistema de caminos angostos y sinuosos para tranvías y para “jeeps” conducidos por los guardabosques. En la gráfica siguiente se muestra este sistema de caminos —sin las curvas—, en donde *O* es la entrada al parque; las otras letras representan la localización de las casetas de los guardabosques y otras instalaciones de servicio. Los números son las distancias en millas de estos caminos accidentados.
El parque contiene un mirador a un hermoso paisaje en la estación *T*. Unas cuantas camionetas transportan a los visitantes desde la entrada a la estación *T* y viceversa.

En este momento la administración del parque se enfrenta a un problema: durante la temporada pico, hay más personas que quieren tomar un tranvía a la estación *T* que aquellas a las que se les puede dar servicio. Para evitar la perturbación indebida de la ecología y de la vida silvestre de la región, se ha impuesto un racionamiento estricto al número de viajes al día que pueden hacer los tranvías en cada camino. De esta forma, durante la temporada pico, se pueden seguir varias rutas, sin tomar en cuenta la distancia, para aumentar el número de viajes de tranvía diarios. La pregunta es cómo planear las rutas de los distintos viajes, de manera que se *maximice* el número total de viajes que se pueden hacer al día, sin violar los límites impuestos sobre cada camino.

Problema del flujo máximo de Seervada Park.

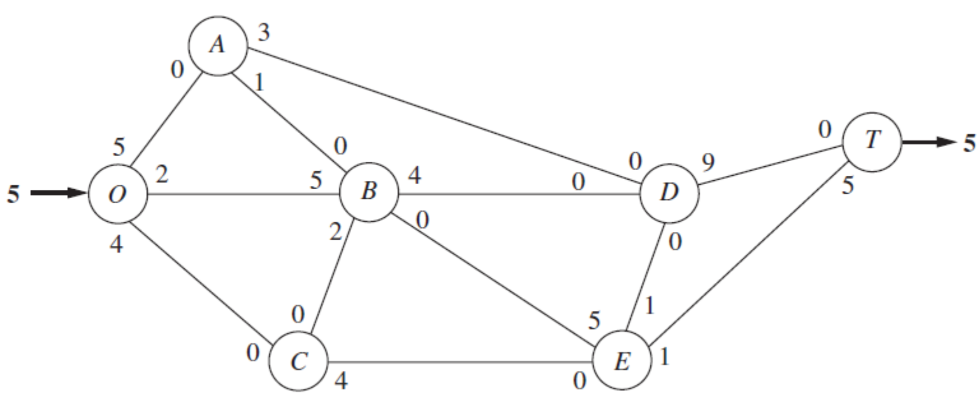


Red residual inicial de Seervada Park

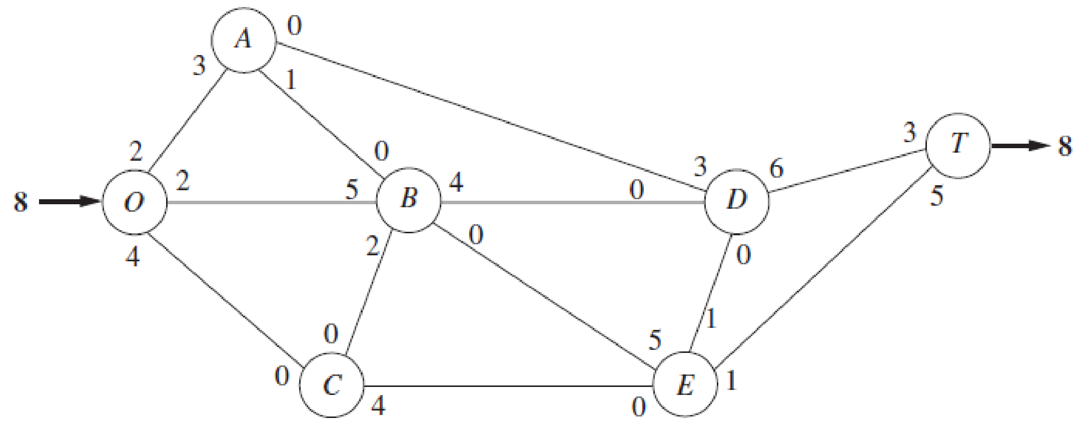


Aplicaremos el algoritmo **de la trayectoria de aumento** al problema de Seervada Park. A partir de la red residual inicial , que se muestra procederemos con las iteraciones.

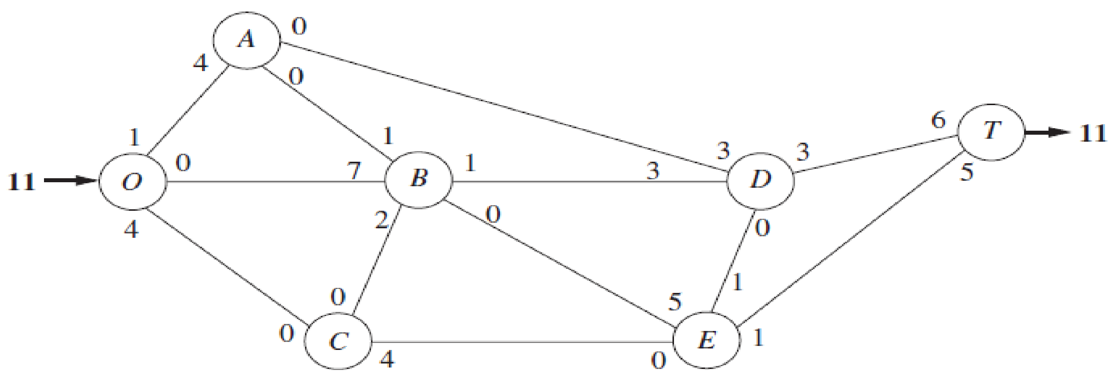
Iteración 1: en la gráfica siguiente, una de las trayectorias de aumento es **O → B → E → T** que tiene capacidad residual igual al **min {7, 5, 6} = 5.** Si se asigna un flujo de 5 a esta trayectoria, la red residual que resulta es



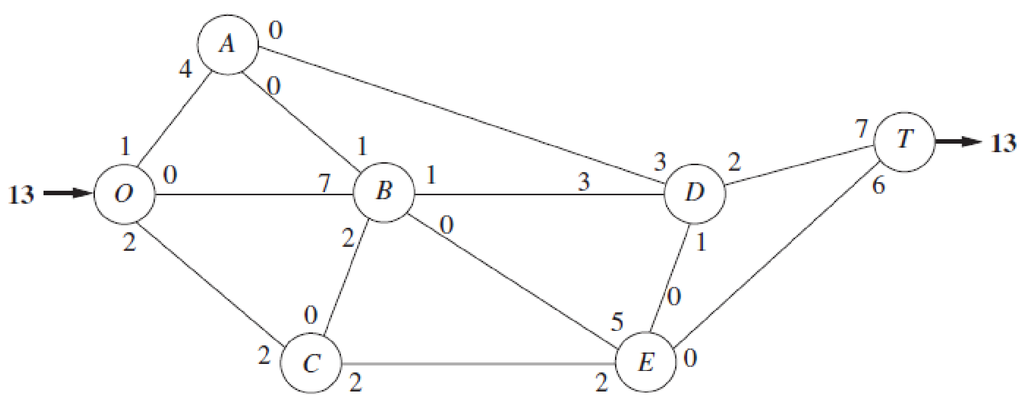
Iteracion 2: se asigna un flujo de 3 a la trayectoria de aumento: **O→ A→ D → T**. que tiene capacidad residual igual al **min {5,3,9} = 3.** Si se asigna un flujo de 5 a esta trayectoria, a red residual que resulta es



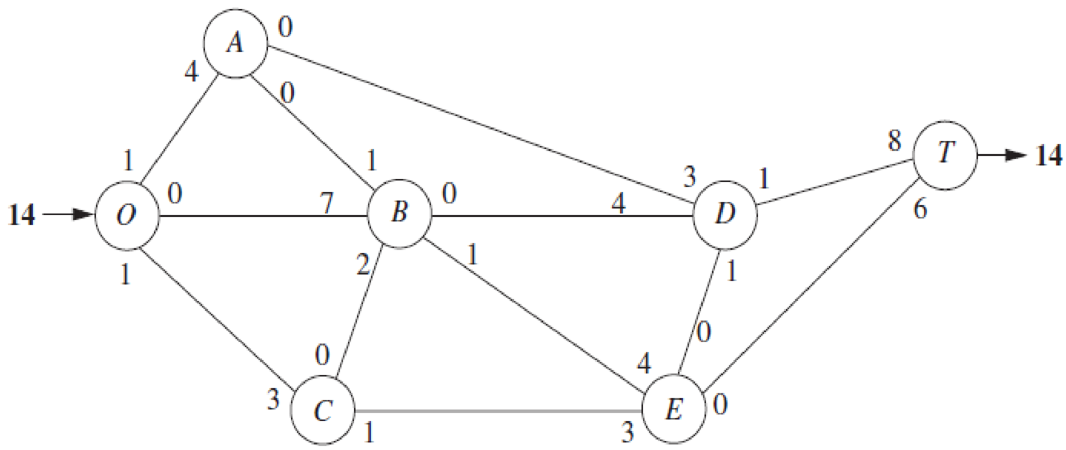
Iteración 3: se asigna un flujo de 1 a la trayectoria de aumento O → A → B → D → T.
Iteración 4: se asigna un flujo de 2 a la trayectoria de aumento O → B → D → T. La red residual que resulta es



Iteración 5: se asigna un flujo de 1 a la trayectoria de aumento O → C → E → D → T.
Iteración 6: se asigna un flujo de 1 a la trayectoria de aumento O → C → E → T. La red residual resultante es



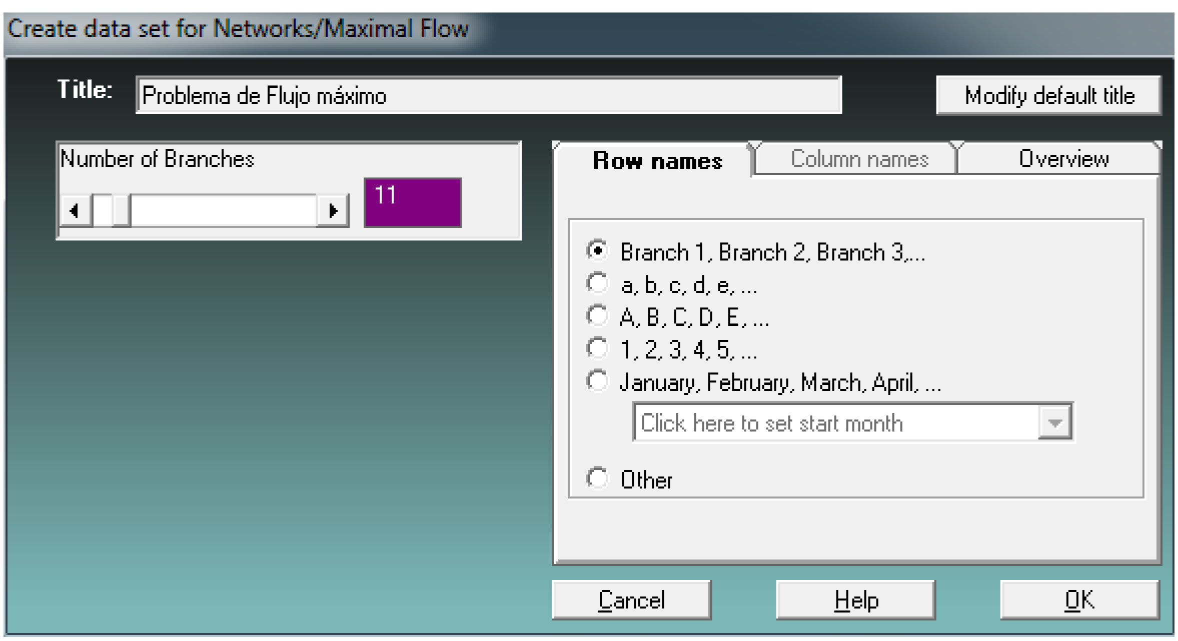
Iteración 7: se asigna un flujo de 1 a la trayectoria de aumento *O* → *C* → *E* → *B* → *D* → *T*.
La red residual que resulta es



Ya no existen trayectorias de aumento, por lo que el patrón de flujo actual es óptimo.
Por lo que el número total de viajes que se pueden hacer al día es 14.

Ahora lo resolveremos usando POM-QM. Para lo cual hacemos clic en **Module** y clic en **Networks**. Después hacemos clic en **File** y **New** donde seleccionamos "3. Maximal flow" (flujo máximo).

Se nos mostrará la pantalla siguiente. Aquí indicamos cuantos arcos o aristas tiene la red.



Hacemos OK y se mostrará la tabla de trabajo, que se muestra en la página siguiente.

Observación: Como los nodos los hemos nombrado con letras y no con números, para efectos del programa haremos la siguiente equivalencia: O→1; A→2; B→3; C→4; D→6;E→5; T→7.

Source 1 | Sink 7

Enter the maximum flow along arco-et(57) from starting node to ending node. Any non-negative value is permissible.

Branch name	Start node	End node	Capacity	Reverse capacity
Arco-OA(12)	1	2	5	0
Arco-OB(13)	1	3	7	0
Arco-OC(14)	1	4	4	0
Arco-AB(23)	2	3	1	0
Arco-AD(26)	2	6	3	0
Arco-BC(34)	3	4	2	0
Arco-BD(36)	3	6	4	0
Arco-BE(35)	3	5	5	0
Arco-CE(45)	4	5	4	0
Arco-DT(67)	6	7	9	0
Arco-ED(56)	5	6	1	0
Arco-ET(57)	5	7	6	0

Hemos ingresados los arcos con sus capacidades, ahora para resolverlo hacemos clic en Solve.

1. Resultados de la Red.

Networks Results

Branch name	Start node	End node	Capacity	Reverse capacity	Flow
Maximal Network Flow	14				
Arco-OA(12)	1	2	5	0	4
Arco-OB(13)	1	3	7	0	6
Arco-OC(14)	1	4	4	0	4
Arco-AB(23)	2	3	1	0	1
Arco-AD(26)	2	6	3	0	3
Arco-BC(34)	3	4	2	0	0
Arco-BD(36)	3	6	4	0	4
Arco-BE(35)	3	5	5	0	-4
Arco-CE(45)	4	5	4	0	4
Arco-DT(67)	6	7	9	0	8
Arco-ED(56)	5	6	1	0	1
Arco-ET(57)	5	7	6	0	6

2. Iteraciones

Iterations

(untitled) Solution

Iteration	Path	Flow	Cumulative Flow
1	1-> 3-> 5-> 7	5	5
2	1-> 4-> 5-> 3-> 6-> 7	4	9
3	1-> 2-> 6-> 7	3	12
4	1-> 2-> 3-> 5-> 6-> 7	1	13
5	1-> 3-> 5-> 7	1	14

Problema de la ruta más corta

Considere una red *conexa* y *no dirigida* con dos nodos especiales llamados *origen* y *destino*. A cada *ligadura* (arco no dirigido) se asocia una *distancia* no negativa. El objetivo es encontrar la ruta más corta —la trayectoria con la mínima distancia total— del origen al destino. Se dispone de un algoritmo relativamente sencillo para manejar este problema. La esencia del procedimiento es que analiza toda la red a partir del origen; identifica de manera sucesiva la ruta más corta a cada uno de los nodos en orden ascendente de sus distancias (más cortas), desde el origen; el problema queda resuelto en el momento de llegar al nodo destino. Primero se describirá el método y después se ejemplificará con la solución del problema de la ruta más corta que enfrenta la administración de Seervada Park.

Algoritmo de la ruta más corta

Objetivo de la n-ésima iteración: encontrar el n-ésimo nodo más cercano al origen. (Este paso se repetirá para n = 1, 2, . . . hasta que el n-ésimo nodo más cercano sea el nodo destino.)

Datos de la n-ésima iteración: n – 1 nodos más cercanos al origen —que se encontró en las iteraciones previas—, incluida su ruta más corta y la distancia desde el origen. (Estos nodos y el origen se llaman nodos resueltos; el resto son nodos no resueltos.)

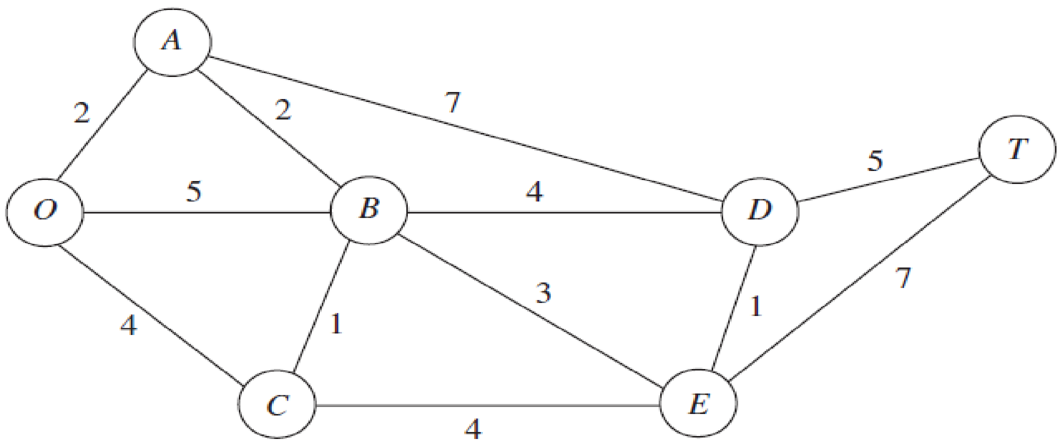
Candidatos para n-ésimo nodo más cercano: cada nodo resuelto que tiene conexión directa por una ligadura con uno o más nodos no resueltos proporciona un candidato, esto es, el nodo no resuelto que tiene la ligadura más corta. (Los empates proporcionan candidatos adicionales.)

Cálculo del n-ésimo nodo más cercano: para cada nodo resuelto y sus candidatos, se suma la distancia entre ellos y la distancia de la ruta más corta desde el origen a este nodo resuelto. El candidato con la distancia total más pequeña es el n-ésimo nodo más cercano —los empates proporcionan nodos resueltos adicionales—, y su ruta más corta es la que genera esta distancia.

Problema 9 (Libro Introducción a la Investigación de Operaciones/Hillier y Lieberman/novena edición/capítulo 9, Modelos de Optimización de Redes /página 337/ Problema de la ruta más corta de Seervada Park)

Aplicación de este algoritmo al problema de la ruta más corta de Seervada Park

La administración de Seervada Park necesita encontrar la ruta más corta desde la entrada del parque (nodo O) hasta el mirador (nodo T) a través del sistema de caminos que se presenta en la gráfica siguiente.



En la tabla siguiente se encuentran los resultados que se obtuvieron al aplicar el algoritmo anterior, donde el empate del segundo nodo más cercano permite pasar directo a buscar el cuarto nodo más cercano.

- La primera columna (n) indica el número de la iteración.
- La segunda proporciona una lista de los nodos resueltos para comenzar la iteración actual, después de quitar los que no sirven (los que no tienen conexión directa con nodos no resueltos).
- La tercera columna da los candidatos para el n-ésimo nodo más cercano (nodos no resueltos con la ligadura más corta al nodo resuelto).
- La cuarta columna calcula la distancia de la ruta más corta desde el origen a cada candidato, esto es, la distancia al nodo resuelto más la distancia de la ligadura que va al candidato.
- El candidato con la suma de distancias más pequeña es el n-ésimo nodo más cercano al origen, según se indica en la quinta columna.
- Las dos últimas columnas resumen la información de este último nodo resuelto necesaria para pasar a las iteraciones siguientes, es decir, la distancia de la ruta más corta del origen a este nodo y la última rama en esta ruta.

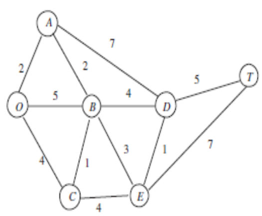


TABLA Aplicación del algoritmo de la ruta más corta al problema de Seervada Park

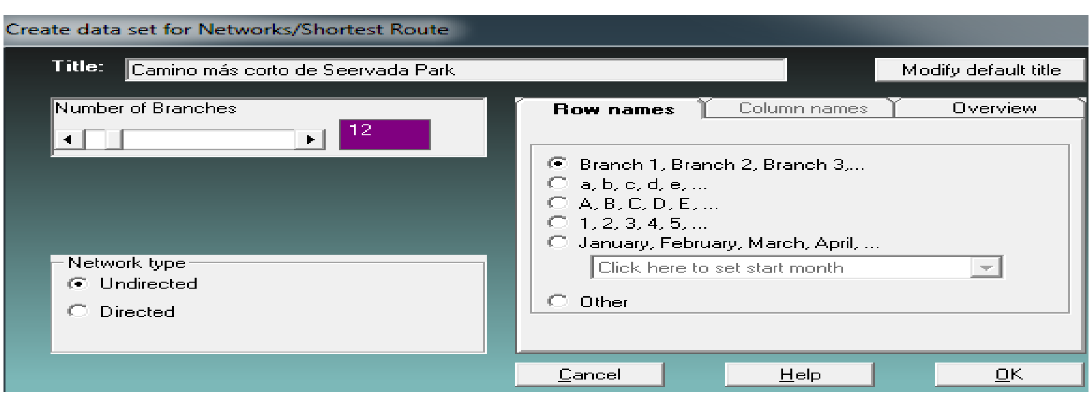
n	Nodos resueltos conectados directamente a nodos no resueltos	Nodo no resuelto más cercano conectado	Distancia total involucrada	*n*-ésimo nodo más cercano	Distancia mínima	Última conexión
1	*O*	*A*	2	*A*	2	*OA*
2, 3	*O* *A*	*C* *B*	4 2 + 2 = 4	*C* *B*	4 4	*OC* *AB*
4	*A* *B* *C*	*D* *E* *E*	2 + 7 = 9 4 + 3 = 7 4 + 4 = 8	*E*	7	*BE*
5	*A* *B* *E*	*D* *D* *D*	2 + 7 = 9 4 + 4 = 8 7 + 1 = 8	*D* *D*	8 8	*BD* *ED*
6	*D* *E*	*T* *T*	8 + 5 = 13 7 + 7 = 14	*T*	13	*DT*

Ahora se deben relacionar las columnas con la descripción del algoritmo. Los *datos para la* n-*ésima iteración* se encuentran en las columnas 5 y 6 de las iteraciones anteriores, donde los nodos resueltos de la quinta columna se enumeran después en la segunda para la iteración actual después de eliminar los que no tienen conexión directa con nodos no resueltos. Los *candidatos para el* n-*ésimo nodo más cercano* se enumeran en la tercera columna de la iteración actual. El *cálculo del n-ésimo nodo* más cercano se realiza en la columna 4 y los resultados se registran en las últimas tres columnas de la iteración actual.

La ruta más corta *desde el nodo destino hasta el origen* se puede rastrear hacia atrás en la última columna de la tabla, con lo que se obtiene *T* → *D* → *E* → *B* → *A* → O o bien *T* → *D* → *B* → *A* → *O*. Por tanto, se identificaron las dos opciones de ruta más corta desde el origen hasta el destino como *O* → *A* → *B* → *E* → *D* → *T* y *O* → *A* → *B* → *D* → *T*, con una distancia total de 13 millas en cualquiera de las dos.

Usaremos ahora el Software POM-QM para resolver el problema de la ruta más corta de Seervada Park **.**

Hacemos clic en **Module y luego Networks para activar el módulo de redes**. Luego hacemos clic en **File y después en New** y seleccionamos **"2. Shortest Route"** (Ruta corta).



Ingresamos los arcos con sus respectivas distancias en una red no dirigida, siendo (1) el nodo de origen y 7 el nodo de destino.

Network type
Undirected
Directed

Origin 1

Destination 7

Enter the name for this branch. Almost any character is permissible.

Camino más corto de Seervada Park

	Start node	End node	Distance
Arco OA(12)	1	2	2
Arco OB(13)	1	3	5
Arco OC(14)	1	4	4
Arco AB(23)	2	3	2
Arco AD(26)	2	6	7
Arco BC(34)	3	4	1
Arco BD(36)	3	6	4
Arco BE(35)	3	5	3
Arco CE(45)	4	5	4
Arco ED(56)	5	6	1
Arco ET(57)	5	7	7
Arco DT(67)	6	7	5

Para obtener la ruta más corta hacemos clic en solve.

1. Resultados de la red

Networks Results

Camino más corto de Seervada Park Solution

Total distance = 13	Start node	End node	Distance	Cumulative Distance
Arco OA(12)	1	2	2	2
Arco AB(23)	2	3	2	4
Arco BD(36)	3	6	4	8
Arco DT(67)	6	7	5	13

2. Matriz de distancia mínima.

Minimum distance matrix

Camino más corto de Seervada Park Solution

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	2	4	4	7	8	13
2	2	0	2	3	5	6	11
3	4	2	0	1	3	4	9
4	4	3	1	0	4	5	10
5	7	5	3	4	0	1	6
6	8	6	4	5	1	0	5
7	13	11	9	10	6	5	0

Problema del flujo de costo mínimo

El problema del flujo de costo mínimo tiene una posición central entre los modelos de optimización de redes; primero, abarca una clase amplia de aplicaciones y, segundo, su solución es muy eficiente. Igual que el problema del flujo máximo, toma en cuenta un flujo en una red con capacidades de arco limitadas. Igual que el problema de la ruta más corta, considera un costo (o distancia) del flujo a través de un arco. Igual que el problema de transporte o el de asignación, puede manejar varios orígenes (nodos fuente) y varios destinos (nodos demanda) del flujo, de

nuevo con costos asociados. En realidad, estos cuatro problemas son casos especiales del problema del flujo de costo mínimo.
La razón por la que el problema del flujo de costo mínimo se puede resolver de modo tan eficiente es que se puede formular como un problema de **programación lineal** y es posible resolverlo con una versión simplificada del método simplex llamada ***método símplex de redes***.

A continuación se describe el problema del flujo de costo mínimo.

1. La red es una red dirigida y conexa.
2. Al menos uno de los nodos es un nodo fuente.
3. Al menos uno de los nodos es un nodo demanda.
4. El resto de los nodos son nodos de trasbordo.
5. Se permite el flujo a través de un arco sólo en la dirección que indica la flecha, donde la cantidad máxima de flujo está dada por la capacidad del arco. (Si el flujo puede ocurrir en ambas direcciones, debe representarse por un par de arcos con direcciones opuestas.)
6. La red tiene suficientes arcos con suficiente capacidad para permitir que todos los flujos generados por los nodos fuente lleguen a los nodos demanda.
7. El costo del flujo a través del arco es proporcional a la cantidad de ese flujo, donde se conoce el costo por unidad.
8. El objetivo es minimizar el costo total de enviar el suministro disponible a través de la red para satisfacer la demanda dada. (Un objetivo alternativo es maximizar la ganancia total del envío.)

Algunas aplicaciones

Tal vez el tipo más importante de aplicación del problema del flujo de costo mínimo es en la operación de la red de distribución de una compañía. Como se resume en el primer renglón de la tabla siguiente, este tipo de aplicación siempre incluye determinar un plan para enviar bienes desde las *fuentes* (fábricas, etc.) a las *instalaciones de almacenamiento intermedias* (según se necesite) y después a los *clientes*.

TABLA Aplicaciones comunes del problema del flujo de costo mínimo

Tipo de aplicación	Nodos fuente	Nodos de trasbordo	Nodos demanda
Operación de una red de distribución	Fuentes de bienes	Almacenes intermedios	Clientes
Administración de desechos sólidos	Fuentes de desechos sólidos	Instalaciones de procesamiento	Rellenos
Operación de una red de suministros	Agentes de ventas	Almacenes intermedios	Instalaciones de procesamiento
Coordinación de mezclas de productos en plantas	Plantas	Producción de un artículo específico	Mercado del producto específico
Administración de flujo de efectivo	Fuentes de efectivo en tiempos específicos	Opciones de inversión a corto plazo	Necesidad de efectivo en tiempos específicos

Formulación del modelo

Considere una red conexa dirigida en la que los n nodos incluyen al menos un nodo origen y un nodo destino. Las variables de decisión son

X_{ij} = flujo a través del arco i → j,

y la información incluye:

c_{ij} = costo por unidad de flujo a través del arco $i \rightarrow j$,
u_{ij} = capacidad del arco $i \rightarrow j$,
b_i = flujo neto generado por el nodo i.

El valor de b_i depende de la naturaleza del nodo i, donde

$b_i > 0$ si i es un nodo fuente,
$b_i < 0$ si i es un nodo demanda,
$b_i = 0$ si i es un nodo de trasbordo.

El objetivo es minimizar el costo total de enviar los recursos disponibles a través de la red para satisfacer la demanda.

Si se usa la convención de que las sumas se toman sólo sobre arcos existentes, la formulación de programación lineal de este problema es

$$\text{Minimizar} \qquad Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

sujeta a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = b_i, \qquad \text{para cada nodo } i,$$

y

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \qquad \text{para cada arco } i \rightarrow j.$$

La primera suma de las restricciones de los nodos representa el flujo total que sale del nodo i mientras que la segunda representa el flujo total que entra al nodo i; por tanto, la diferencia es el flujo neto generado en este nodo.

El patrón de los coeficientes de estas restricciones de nodo es una característica importante de los problemas de flujo de costo mínimo. No siempre es fácil reconocer un problema de flujo de costo mínimo, pero al formular (o reformular) un problema de manera que sus coeficientes de restricción tengan este patrón es una buena forma de hacerlo. Lo anterior permite resolver el problema de manera muy eficiente mediante el método simplex de redes.

En algunas aplicaciones es necesario tener una cota inferior $L_{ij} > 0$ para el flujo que pasa por cada arco i → j. Cuando esto ocurre se hace una conversión de variables, $x'_{ij} = X_{ij} - L_{ij}$, donde X_{ij} se sustituye por $x'_{ij} + L_{ij}$ en todo el modelo, a fi n de ajustarlo al formato anterior con restricciones de no negatividad.

No se garantiza que el problema tenga soluciones factibles, pues esto depende en parte de que arcos están presentes en la red y de sus capacidades. De cualquier manera, para una red disenada en forma razonable, la condición necesaria más importante es la siguiente.

Propiedad de soluciones factibles: una condición necesaria para que un problema de flujo de costo mínimo tenga soluciones factibles es que

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0.$$

Es decir, que el flujo total generado por los nodos origen es igual al flujo total absorbido por los nodos destino.

Si los valores de *bi*, que se dan en alguna aplicación violan esta condición, la interpretación más común es que los recursos o las demandas —lo que se tenga en exceso— representan en realidad cotas superiores y no cantidades exactas. Cuando esta situación surge se agrega un destino ficticio para recibir los recursos que sobraban o bien se añade un origen ficticio para enviar el exceso de demanda. con $\boldsymbol{c_{ij}}$ = 0 desde todos los nodos origen hasta este nodo, o bien agregar un nodo origen ficticio para generar un flujo equivalente al exceso de demanda —se agregan arcos con cij = 0 de este nodo a todos los nodos de demanda.

En muchas aplicaciones, las cantidades bi y u_{ij} tendrán valores enteros y la solución requerirá que las cantidades de flujo x_{ij} también sean enteras. Por fortuna, igual que para el problema de transporte, este tipo de solución está garantizada sin tener que establecer restricciones enteras de manera explícita sobre las variables. Esto se debe a la siguiente propiedad.

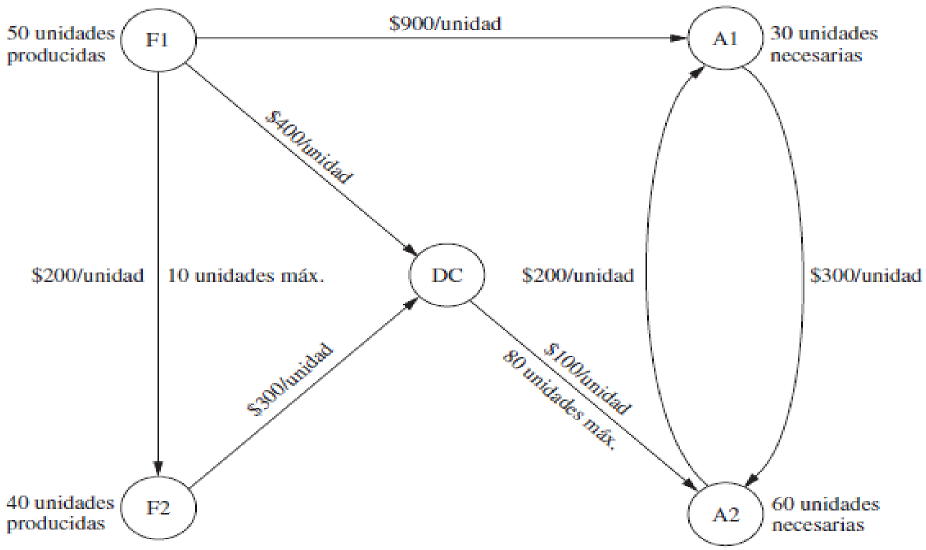
Propiedad de soluciones enteras: en el caso de los problemas de flujo de costo mínimo en donde toda bi y u_{ij} tienen un valor entero, todas las variables de cada solución básica factible (BF), incluida la óptima, tendrán también valores enteros.

Problema 10 (**Libro Introducción a la Investigación de Operaciones/Hillier y Lieberman/novena edición/capítulo 9, Modelos de Optimización de Redes /página 355/ Problema de flujo de costo mínimo)**

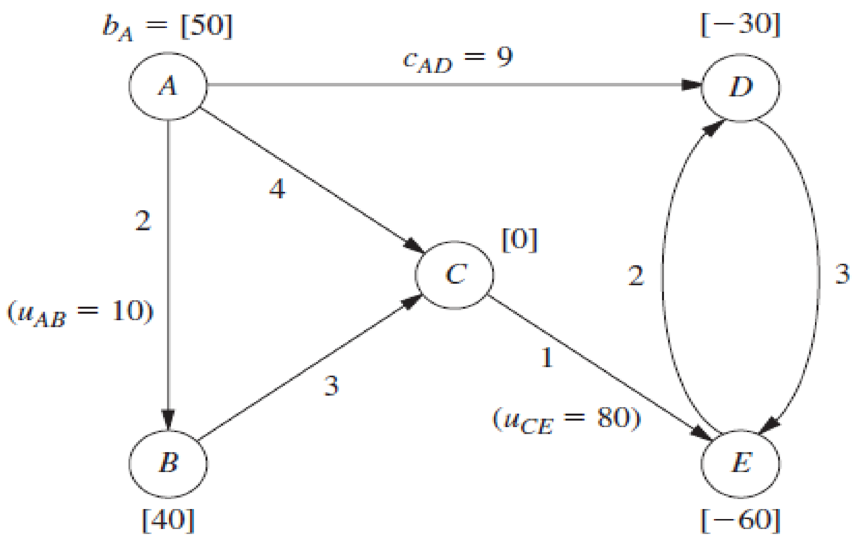
La DISTRIBUTION UNLIMITED CO. Fabricará el mismo nuevo producto en dos plantas distintas y después tendrá que enviarlo a dos almacenes de distribución, donde cualquiera de las dos fábricas puede abastecer a cualquiera de los dos almacenes. La red de distribución disponible para el envío de este producto se muestra en la gráfica siguiente, donde F1 y F2 son las dos fábricas, A1 y A2 son los dos almacenes y CD es el centro de distribución. Las cantidades que deben enviarse desde F1 y F2 se muestran a la izquierda, y las cantidades que deben recibirse en A1 y A2 se presentan a la derecha. Cada flecha representa un canal factible de envío. F1 puede enviar directamente a A1 y tiene tres rutas posibles (F1 → CD → A2, F1 → F2 → CD → A2 y F1 → A1→ A2) para mandar bienes a A2. La fábrica F2 tiene sólo una ruta a A2 (F2 → CD → A2) y una a A1 (F2 → CD → A2 → A1). El costo por unidad enviada a través de cada canal se muestra al lado de la flecha. También, junto a F1 → F2 y CD → A2 se muestran las cantidades máximas que se pueden enviar por estos canales. Los otros canales tienen suficiente capacidad para manejar todo lo que las fábricas pueden enviar.

La decisión que debe tomarse se refiere a qué cantidades enviar a través de cada canal de distribución.

El objetivo es minimizar el costo total de envío.



El problema de la DISTRIBUTION UNLIMITED CO. Formulado como un flujo de costo mínimo. Los costos los hemos simplificado, por lo que al final se multiplicarán por 100.



En la gráfica se muestra el problema del flujo de costo mínimo. Esta red, en realidad, es la *red de distribución* del problema de Distribution Unlimited Co., que se presenta en la gráfica anterior a la actual. Las cantidades que se presentaron en la fi gura 3.13 proporcionan los valores de *bi*, *cij* y *uij* que se muestran aquí. Los valores de *bi* están entre corchetes cerca de los nodos; entonces, los nodos origen (*bi* = 0) son *A* y *B* (las dos fábricas de la compañía), los nodos destino (*bi* = 0) son *D* y *E* (los dos almacenes), y el único nodo de trasbordo (*bi* = 0) es *C* (un centro de distribución). Los valores *cij* se muestran junto a los arcos. En este ejemplo, todos menos dos de los arcos tienen capacidades que exceden el flujo total generado (90), de manera que *uij* = ∞ para cualquier propósito práctico. Las dos excepciones son el arco *A* → *B*, donde *uAB* = 10 y el arco *C* → *E* que tiene *uCE* = 80.

El modelo de programación lineal de este ejemplo es:

$$\text{Minimizar} \quad Z = 2x_{AB} + 4x_{AC} + 9x_{AD} + 3x_{BC} + x_{CE} + 3x_{DE} + 2x_{ED}$$

sujeta a

$$\begin{array}{rcl} x_{AB} + x_{AC} + x_{AD} & = & 50 \\ -x_{AB} + x_{BC} & = & 40 \\ - x_{AC} - x_{BC} + x_{CE} & = & 0 \\ - x_{AD} + x_{DE} - x_{ED} & = & -30 \\ - x_{CE} - x_{DE} + x_{ED} & = & -60 \end{array}$$

y

$$x_{AB} \leq 10, \quad x_{CE} \leq 80, \quad \text{toda } x_{ij} \geq 0.$$

Ahora observe el patrón de coeficientes de cada variable en el conjunto de cinco restricciones de nodo (restricciones de igualdad). Cada variable tiene exactamente dos coeficientes distintos de cero, uno es +1 y el otro -1. Este patrón aparece en *todos* los problemas de flujo de costo mínimo y es esta estructura especial la que lleva a la propiedad de soluciones enteras.

Otra consecuencia de esta estructura especial es que una (cualquiera) de las restricciones de nodo es *redundante*. La razón es que si se suman todas estas ecuaciones sólo se obtienen ceros en ambos lados —si se supone que existen soluciones factibles para que las *bi* sumen cero—, por lo que el negativo de cualquier ecuación es igual a la suma de las demás. Con *n*-1 restricciones de arco no redundantes, estas ecuaciones proporcionan exactamente *n* 1 variables básicas para una solución básica factible. Por tanto, el número *total* de variables básicas es *n*-1.

Usaremos POM-QM para la solución del problema y lo haremos con el módulo de programación entera y mixta.

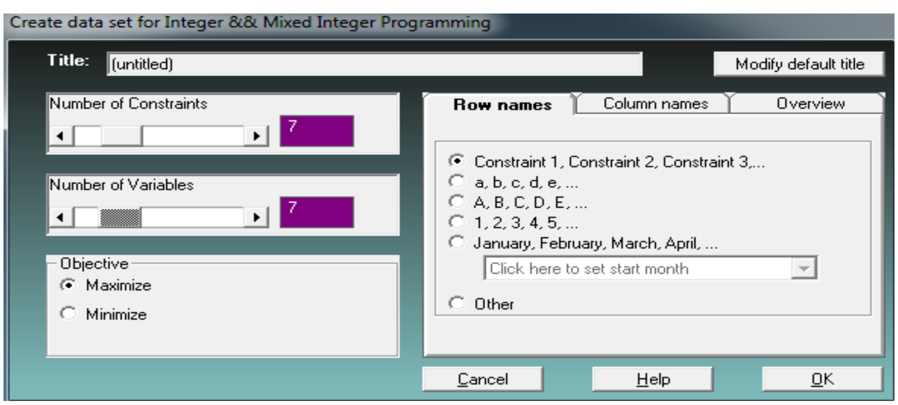
Paso 1: Ejecutamos el programa POM-QM

Paso2: hacemos clic en el menú "**Module**"

Paso 3**:** Seleccionamos la opción **"Integer & Mixed Integer programming" (**activa módulo)

Paso 4: Hacemos clic en el menú "**File**" y después clic en "**New**".

Paso 5: En la ventana siguiente consideramos 7 restricciones y 7 variables.



Objective
Maximize
Minimize

Maximum number of iterations 1000

Maximum level (depth) in procedure 50

Use these option buttons to set the objective.

(untitled)

	XAB	XAC	XAD	XBC	XDE	XCE	XED		RHS	Equation form
Minimize	2	4	9	3	3	1	2			Min 2XAB + 4XAC + 9XAD + 3XBC + XCE + 3XDE + 2XED
Rest. A	1	1	1	0	0	0	0	=	50	XAB + XAC + XAD = 50
Rest. B	-1	0	0	1	0	0	0	=	40	- XAB + XBC = 40
Rest. C	0	-1	0	-1	0	1	0	=	0	- XAC - XBC + XCE = 0
Rest. D	0	0	1	0	-1	0	1	=	30	XAD - XDE + XED = 30
Rest. E	0	0	0	0	1	1	-1	=	60	XCE + XDE - XED = 60
R 6	1	0	0	0	0	0	0	<=	10	XAB <= 10
R 7	0	0	0	0	0	1	0	<=	80	XCE <= 80
Variable type	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer			

Para resolver el problema anterior hacemos clic en Solve y obtemos los resultados que mostramos.

1. **Resultados del problema de programación entero y mixto.**

Integer & Mixed Integer Programming Results

Variable	Type	Value
XAB	Integer	0
XAC	Integer	40
XAD	Integer	10
XBC	Integer	40
XCE	Integer	80
XDE	Integer	0
XED	Integer	20
Solution value		490

2. **El problema original con Solución.**

Original Problem w/answers

(untitled) Solution

	XAB	XAC	XAD	XBC	XCE	XDE	XED		RHS	Equation form
Minimize	2	4	9	3	1	3	2			Min 2XAB + 4XAC + 9XAD + 3XBC + XCE + 3XDE + 2XED
Rest. A	1	1	1	0	0	0	0	=	50	XAB + XAC + XAD = 50
Rest. B	-1	0	0	1	0	0	0	=	40	- XAB + XBC = 40
Rest. C	0	-1	0	-1	1	0	0	=	0	- XAC - XBC + XCE = 0
Rest. D	0	0	1	0	0	-1	1	=	30	XAD - XDE + XED = 30
Rest. E	0	0	0	0	1	1	-1	=	60	XCE + XDE - XED = 60
R 6	1	0	0	0	0	0	0	<=	10	XAB <= 10
R 7	0	0	0	0	1	0	0	<=	80	XCE <= 80
Variable type	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer			
Solution->	0	40	10	40	80	0	20	Optimal Z->	490	

Tema 6: Análisis de Decisiones:

La **teoría de las decisiones** es un enfoque analítico y sistemático para el estudio de la toma de decisiones. En este capítulo, presentamos los modelos matemáticos útiles para ayudar a los gerentes a tomar las mejores decisiones posibles.
¿Qué marca la diferencia entre las buenas y las malas decisiones? Una buena decisión es aquella que se basa en la lógica, considera todos los datos disponibles y las alternativas posibles, y aplica el enfoque cuantitativo que se vaya a describir. En ocasiones, una buena decisión tiene un resultado inesperado o desfavorable. No obstante, si se realiza de manera adecuada, *todavía* sería una buena decisión. Una mala decisión no está basada en la lógica, no utiliza toda la información disponible, no considera todas las alternativas ni emplea las técnicas cuantitativas adecuadas. Si alguien toma una mala decisión, pero es afortunado y ocurre un resultado favorable, *de igual forma*, tomó una mala decisión. Aunque algunas veces buenas decisiones lleven a malos resultados, a largo plazo, el uso de la teoría de las decisiones tendrá resultados exitosos.

Seis pasos en la toma de decisiones

1. Definir con claridad el problema que enfrenta.
2. Hacer una lista de las alternativas posibles.
3. Identificar los resultados posibles o los estados de naturaleza.
4. Numerar los pagos (típicamente las ganancias) de cada combinación de alternativas y resultados.
5. Elegir uno de los modelos matemáticos de la teoría de las decisiones.
6. Aplicar el modelo y tomar la decisión.

Problema 11 (Libro Métodos cuantitativos para negocios/Render-Stair-Hanna/capítulo 3, Análisis de Decisiones/página 70/ Problema de Análisis de Decisiones)

Usaremos el caso de la compañía Thompson Lumber para ilustrar estos pasos de la teoría de las decisiones. John Thompson es el fundador y presidente de la compañía Thompson Lumber, una empresa rentable localizada en Portland, Oregon.

- **Paso 1.** El problema que identifica John Thompson es si expandir su línea de productos fabricando y comercializando un nuevo producto: casetas de almacenamiento para patios. El segundo paso de Thompson consiste en generar las alternativas que estén disponibles. En la teoría de las decisiones, una **alternativa** se define como un curso de acción o una estrategia que puede elegir el tomador de decisiones.

- **Paso 2.** John decide que sus alternativas son construir **1.** una nueva planta grande para fabricar las casetas, **2.** una planta pequeña, o bien, **3.** ninguna planta (es decir, tiene la opción de no desarrollar la nueva línea del producto). Uno de los errores más grande que cometen quienes toman decisiones es omitir alternativas importantes. Aunque una alternativa en particular parezca inadecuada o de escaso valor, quizá resulte ser la mejor opción. El siguiente paso incluye identificar los resultados posibles de las diferentes alternativas. Un error común es olvidarse de algunos de los resultados posibles. Los tomadores de decisiones optimistas suelen ignorar los malos resultados, en tanto que los pesimistas podrían soslayar los resultados favorables. Si usted no considera todas las posibilidades, no tomará una decisión lógica y los resultados podrían ser indeseables. Si no piensa que puede ocurrir lo peor, tal vez diseñe otro automóvil Edsel y pierda millones. En la teoría de las decisiones, esos resultados sobre los que el tomador de decisiones tiene escaso o ningún control se llaman **estados de naturaleza**.

- **Paso 3.** Thompson determina que hay solamente dos resultados posibles: el mercado para las casetas de almacenamiento podría ser favorable, lo cual significa que existe una demanda alta para el producto, o bien, ser desfavorable, es decir, que haya poca demanda para las casetas. Una vez identificadas las alternativas y los estados de naturaleza, el siguiente paso es expresar los pagos resultantes de cada combinación posible de alternativas y resultados. En la teoría de las decisiones, estos pagos reciben el nombre de **valores condicionales**. Desde luego, no todas las decisiones deben basarse tan solo en dinero, ya que es aceptable cualquier medio apropiado de medir los beneficios.

- **Paso 4.** Como Thompson desea maximizar sus utilidades, puede usar la *ganancia* para evaluar cada consecuencia. John Thompson ya evaluó la ganancia potencial asociada con los diferentes resultados. Con un mercado favorable, piensa que la instalación grande daría una ganancia neta de $200,000 a su empresa. Aquí, $200,000 es un *valor condicional* porque el hecho de que Thompson reciba el dinero está condicionado, tanto a que construya una fábrica grande como a tener un buen mercado. Si el mercado es desfavorable, el valor condicional sería una pérdida neta de $180,000. Una planta pequeña daría una ganancia neta de $100,000 en un mercado favorable, aunque habría una pérdida neta de $20,000 si el mercado fuera desfavorable. Por último, no hacer nada daría como resultado $0 de ganancia en cualquier mercado. La forma más sencilla de presentar estos valores es construyendo una **tabla de decisiones**, algunas veces llamada **tabla de pagos**. La tabla de decisiones para los valores condicionales de Thompson se presenta en la tabla siguiente. Todas las alternativas se colocan en la columna izquierda de la tabla, y todos los resultados posibles o estados de naturaleza se colocan en la primera fila. El cuerpo de la tabla contiene los pagos reales.

	ESTADO DE NATURALEZA	
ALTERNATIVA	MERCADO FAVORABLE ($)	MERCADO DESFAVORABLE ($)
Construir una planta grande	200,000	–180,000
Construir una planta pequeña	100,000	–20,000
No hacer nada	0	0

Nota: Es importante incluir todas las alternativas, como “no hacer nada”.

- **Pasos 5 y 6.** Los dos últimos pasos son seleccionar un modelo de la teoría de las decisiones y aplicarlo a los datos para ayudar a tomar la decisión. Seleccionar el modelo depende del entorno donde está operando y de la cantidad de riesgo e incertidumbre que implica.

Los tipos de decisiones que toma la gente dependen de cuánto conocimiento o información tengan acerca de la situación. Hay tres entornos para la toma de decisiones:

- Toma de decisiones con certidumbre
- Toma de decisiones con incertidumbre
- Toma de decisiones con riesgo

TIPO 1: TOMA DE DECISIONES CON CERTIDUMBRE En el entorno de toma de decisiones con certidumbre, quienes toman las decisiones conocen con certeza la consecuencia de cada alternativa u opción de decisión. Naturalmente, elegirán la alternativa que maximice su bienestar o que dé el mejor resultado. Por ejemplo, digamos que usted tiene $1,000 para invertir durante 1 año. Una alternativa es abrir una cuenta de ahorros que paga 6% de interés y otra es invertir en un bono del Tesoro que paga 10% de interés. Si ambas inversiones son seguras y están garantizadas, existe la certidumbre de que el bono del Tesoro pagará un rendimiento mayor. El rendimiento después de un año será de $100 en intereses.

TIPO 2: TOMA DE DECISIONES CON INCERTIDUMBRE En la toma de decisiones con incertidumbre, existen varios resultados posibles para cada alternativa y el tomador de decisiones no conoce las probabilidades de los diferentes resultados. Como ejemplo, no se conoce la probabilidad de que un demócrata sea presidente de Estados Unidos dentro de 25 años. Algunas veces es imposible evaluar la probabilidad de éxito de un nuevo proyecto o producto.

TIPO 3: TOMA DE DECISIONES CON RIESGO En la toma de decisiones con riesgo, hay varios resultados posibles para cada alternativa y el tomador de decisiones conoce la probabilidad de ocurrencia de cada resultado. Sabemos, por ejemplo, que cuando se juega cartas con un mazo estándar, la probabilidad de que nos llegue un trébol es de 0.25. La probabilidad de obtener 5 al lanzar un dado es de 1/6. En la toma de decisiones con riesgo, quien toma las decisiones suele intentar maximizar su bienestar esperado. Los modelos de la teoría de las decisiones para problemas de negocios en este entorno casi siempre usan dos criterios equivalentes: maximizar el valor monetario esperado y minimizar la pérdida esperada.

Veamos ahora cómo la toma de decisiones con certidumbre (entorno tipo 1) afectaría a John Thompson. Suponemos que John sabe exactamente qué pasará en el futuro. Si resulta que sabe con seguridad que el mercado para las casetas de almacenamiento será favorable, ¿qué debería hacer? Observe de nuevo los valores condicionales de Thompson Lumber en la tabla 3.1. Como el mercado es favorable, debería construir una planta grande, la cual tiene la ganancia más alta: $200,000.

Pocos gerentes son tan afortunados como para tener información completa y conocimiento acerca de los estados de naturaleza que se consideran. La toma de decisiones con incertidumbre, que se estudia a continuación, es una situación más complicada. Podemos encontrar que dos personas diferentes con perspectivas distintas pueden elegir de manera adecuada dos alternativas diferentes.

Cuando existen varios estados de naturaleza y un gerente no puede evaluar la probabilidad del resultado con confianza, o cuando prácticamente no se dispone de datos de probabilidad, el entorno se llama toma de decisiones con incertidumbre. Hay varios criterios para tomar decisiones en estas condiciones. Las que se cubren en esta sección son las siguientes:

1. Optimista (maximax)
2. Pesimista (maximin)
3. Criterio de realismo (Hurwicz)
4. Probabilidades iguales (Laplace)
5. Arrepentimiento minimax (Savage)

Los primeros cuatro criterios se calculan directamente de la tabla de decisiones (de pagos), en tanto que el criterio arrepentimiento minimax requiere el uso de la tabla de la pérdida esperada.

La presentación de los criterios para la toma de decisiones con incertidumbre (y también para la toma de decisiones con riesgo) se basa en la suposición de que el pago es algo donde son mejores los mayores valores y son deseables los valores altos. Para pagos como ganancias, ventas totales, rendimiento total sobre la inversión e interés ganado, la mejor decisión sería una cuyo resultado fuera algún tipo de pago máximo. Sin embargo, existen situaciones donde menores pagos (como costos) son mejores y estos pagos se minimizarían en vez de maximizarse. El enunciado del criterio de decisión se modificaría un poco para tales problemas de minimización. Se verá cada uno de los cinco modelos y se aplicará al ejemplo de Thompson Lumber.

Optimista

A utilizar el criterio **optimista**, se considera el mejor pago (máximo) para cada alternativa, y se elige la alternativa con el mejor (máximo) de ellos. El criterio optimista recibe el nombre de **maximax**. En la tabla siguiente vemos que la opción optimista de Thompson es la primera alternativa, "construir una planta grande". Al usar este criterio, puede lograrse el pago más alto de todos ($200,000 en este ejemplo), mientras que si se elige cualquier otra alternativa sería imposible lograr este pago tan alto.

	ESTADO DE NATURALEZA		
ALTERNATIVA	MERCADO FAVORABLE ($)	MERCADO DESFAVORABLE ($)	MÁXIMO DE LA FILA ($)
Construir una planta grande	200,000	–180,000	200,000 Maximax
Construir una planta pequeña	100,000	–20,000	100,000
No hacer nada	0	0	0

Pesimista

Al utilizar el criterio pesimista, se considera el peor pago (mínimo) de cada alternativa y se elige la que tiene el mejor (máximo) de ellas. Por consiguiente, el criterio pesimista en ocasiones se llama criterio maximin. Este criterio garantiza que el pago será al menos el valor maximin (el mejor de los peores valores). Elegir otra alternativa quizá permitiría que hubiera un peor pago (más bajo).
La elección maximin de Thompson, "no hacer nada", se muestra en la tabla siguiente. Esta decisión se asocia con el máximo de los números mínimos en cada fila o alternativa. Al usar el criterio pesimista para problemas de minimización donde los menores pagos (como costos) son mejores, se busca el peor pago (máximo) para cada alternativa y se elige la que tiene el mejor (mínimo) de ellos.
Ambos criterios, maximax y maximin consideran tan solo un pago extremo para cada alternativa, mientras que se ignoran los otros pagos.

ALTERNATIVA	ESTADO DE NATURALEZA MERCADO FAVORABLE ($)	 MERCADO DESFAVORABLE ($)	MÍNIMO DE LA FILA ($)
Construir una planta grande	200,000	–180,000	–180,000
Construir una planta pequeña	100,000	–20,000	–20,000
No hacer nada	0	0	0 Maximin

Criterio de realismo (criterio de Hurwicz)

Con frecuencia llamado **promedio ponderado**, el **criterio de realismo** (**criterio de Hurwicz**) es un compromiso entre una decisión optimista y una pesimista. Para comenzar, se selecciona un **coeficiente de realismo**, α; esto mide el nivel de optimismo del tomador de decisiones. El valor de este coeficiente
está entre 0 y 1. Cuando α es 1, quien toma las decisiones está 100% optimista acerca del futuro. Cuando α es 0, quien toma las decisiones es 100% pesimista acerca del futuro. La ventaja de este enfoque es que permite al tomador de decisiones manejar sentimientos personales acerca del optimismo y pesimismo relativos. El promedio ponderado se calcula como:

Promedio ponderado= α (mejor fila) + (1 – α)(peor fila)

Para problemas de maximización, el mejor pago para una alternativa es el valor más alto, y el peor pago es el valor más bajo. Observe que cuando α = 1, este criterio es el mismo que el optimista y cuando α= 0 este criterio es el mismo que el pesimista. Su valor se calcula para cada alternativa, y la alternativa con el mayor promedio ponderado es la elección.

Si suponemos que John Thompson establece su coeficiente de realismo, α, en 0.80, la mejor decisión sería construir una planta grande. Como se observa en la tabla anterior, esta alternativa tiene el mayor promedio ponderado**: $124,000 = (0.80) ($200,00) + (0.20)(-$180,000).**

Al usar el criterio de realismo para problemas de minimización, el mejor pago para una alternativa será la más baja en la fila y la peor sería la más alta en la fila. Se elige la alternativa con el menor promedio ponderado.

Debido a que tan solo hay dos estados de naturaleza en el ejemplo de Thompson Lumber, únicamente están presentes dos pagos para cada alternativa y ambos se consideran. Sin embargo, si hay más de dos estados de naturaleza, este criterio ignora todos los pagos, excepto el mejor y el peor.

Probabilidades iguales (Laplace)

Un criterio que usa todos los pagos para cada alternativa es el criterio de decisión de **probabilidades iguales**, también llamado **de Laplace**. Ahora debe encontrarse el pago promedio para cada alternativa y se elegirá la alternativa con el mejor promedio o el más alto. El enfoque de probabilidades iguales supone que todas las probabilidades de ocurrencia para los estados de naturaleza son las mismas y con ello cada **estado de naturaleza** tiene probabilidades iguales.

La opción de probabilidades iguales para Thompon Lumber es la segunda alternativa, "construir una planta pequeña", cuya estrategia, mostrada en la tabla siguiente, es la que tiene el máximo pago promedio.
Al utilizar el criterio de probabilidades iguales para problemas de minimización, los cálculos son exactamente los mismos, pero la mejor alternativa es la que tiene el menor pago promedio.

ALTERNATIVA	ESTADO DE NATURALEZA MERCADO FAVORABLE ($)	 MERCADO DESFAVORABLE ($)	PROMEDIO DE LA FILA ($)
Construir una planta grande	200,000	–180,000	10,000
Construir una planta pequeña	100,000	–20,000	40,000 Probabilidades iguales
No hacer nada	0	0	0

Arrepentimiento minimax(Savage)

El siguiente criterio de decisión que se estudiará se basa en la **pérdida de oportunidad** o el **arrepentimiento**. La pérdida de la oportunidad se refiere a la diferencia entre la ganancia o el pago óptimo por un estado de naturaleza dado y el pago real recibido por una decisión específica. En otras palabras, es la pérdida por no elegir la mejor alternativa en un estado de naturaleza dado.
El primer paso es crear la tabla de la pérdida de oportunidad determinando las pérdidas por no elegir la mejor alternativa para cada estado de naturaleza. La pérdida de oportunidad para cualquier estado de naturaleza, o cualquier columna, se calcula restando cada pago en la columna del *mejor* pago en la misma columna. Para un mercado favorable, el mejor pago es de $200,000, como resultado de la primera alternativa, "construir una planta grande". Si se elige la segunda alternativa, se obtiene una ganancia de $100,000 en un mercado favorable y esto se compara con el mejor pago de $200,000. Así, la pérdida de oportunidad es 200,000 - 100,000 = 100,000. De manera similar, si se elige "**no hacer nada**" la pérdida de oportunidad es 200,000 – 0=200,000.
Para un mercado desfavorable, el mejor pago es $0 como resultado de la tercera alternativa, "no hacer nada", de manera que 0 es la pérdida de oportunidad. Las pérdidas de oportunidades para las otras alternativas se encuentran restando los pagos de este mejor pago ($0) en este estado de naturaleza, como se indica en la tabla "A". La tabla de la pérdida de oportunidad para Thompson se muestra en la tabla "B".
Si usamos la tabla de la pérdida de oportunidad (arrepentimiento), el criterio de **arrepentimiento minimax** encuentra la alternativa que *min*imiza la pérdida de oportunidad *máx*ima dentro de cada alternativa. Primero se encuentra la máxima (peor) pérdida de oportunidad para cada alternativa.
Luego, entre estos valores máximos, se elige la alternativa con el número mínimo (mejor). Al hacerlo, se garantiza que la pérdida de oportunidad que ocurre en realidad no sea mayor que este valor minimax. En la tabla "C" se observa que la elección de arrepentimiento minimax es la segunda alternativa, "**construir una planta pequeña**" y así se minimiza la pérdida de oportunidad máxima.
Al calcular la pérdida de oportunidad para problemas de minimización como los que incluyen costos, el mejor pago o el mejor costo (más bajo) en una columna se resta de cada pago en esa columna. Una vez elaborada la tabla de la pérdida de oportunidad, se aplica el criterio de

arrepentimiento minimax de la misma manera descrita. Se encuentra la pérdida de oportunidad máxima para cada alternativa y se selecciona aquella que tiene el mínimo de estos máximos. Al igual que en los problemas de maximización, el costo de oportunidad nunca puede ser negativo.

TABLA "A"

ESTADO DE NATURALEZA	
MERCADO FAVORABLE ($)	MERCADO DESFAVORABLE ($)
200,000 – 200,000	0 – (–180,000)
200,000 – 100,000	0 – (–20,000)
200,000 – 0	0 – 0

TABLA "B"

	ESTADO DE NATURALEZA	
ALTERNATIVA	MERCADO FAVORABLE ($)	MERCADO DESFAVORABLE ($)
Construir una planta grande	0	180,000
Construir una planta pequeña	100,000	20,000
No hacer nada	200,000	0

TABLA "C"

	ESTADO DE NATURALEZA		
ALTERNATIVA	MERCADO FAVORABLE ($)	MERCADO DESFAVORABLE ($)	MÁXIMO DE LA FILA($)
Construir una planta grande	0	180,000	180,000
Construir una planta pequeña	100,000	20,000	100,000 Minimax
No hacer nada	200,000	0	200,000

Toma de decisiones con riesgo

La toma de decisiones con riesgo es una situación de decisión donde pueden ocurrir varios estados de naturaleza posibles y se conocen las probabilidades de que sucedan. Ahora consideramos uno de los métodos más populares para la toma de decisiones con riesgo: seleccionar la alternativa con el mayor **valor monetario esperado** (o simplemente valor esperado). También se utilizan las probabilidades con la tabla de la pérdida de oportunidad para minimizar la pérdida de oportunidad esperada.

Valor monetario esperado

Dada una tabla de decisiones con valores condicionales (pagos) que son valores monetarios y las probabilidades evaluadas para todos los estados de naturaleza, es posible determinar el **valor monetario esperado** (VME) para cada alternativa. El *valor esperado* o *valor medio* es el valor promedio a largo plazo de esa decisión. El VME para una alternativa es tan solo la suma de los pagos posibles de la alternativa, cada uno ponderado por la probabilidad de que ese pago ocurra.
Esto también se expresa simplemente como el valor esperado de *X* o *E*(*X*).

$$\text{VME(alternativo)} = \Sigma X_i P(X_i)$$

donde:

X_i = pago para el estado de naturaleza i
$P(X_i)$ = probabilidad de lograr el pago X_i (es decir, probabilidad del estado de naturaleza i)
Σ = símbolo de sumatoria

Si esta suma se expande, se convierte en

VME (alternativo)
= (pago en el primer estado de naturaleza) × (probabilidad del primer estado de naturaleza)
+ (pago en el segundo estado de naturaleza) × (probabilidad del segundo estado de naturaleza)
+ ... + (pago en el último estado de naturaleza) × (probabilidad del último estado de naturaleza)

Se elige entonces la alternativa con el máximo VME.
Suponga que John Thompson piensa ahora que la probabilidad de un mercado favorable es exactamente la misma que la probabilidad de un mercado desfavorable: es decir, cada estado de naturaleza tiene una probabilidad de 0.50. ¿Qué alternativa daría el mayor valor monetario esperado? Para determinarla, John expande la tabla de decisiones, como se indica en la tabla D.

TABLA "D"

	ESTADO DE NATURALEZA		
ALTERNATIVA	MERCADO FAVORABLE ($)	MERCADO DESFAVORABLE ($)	VME ($)
Construir una planta grande	200,000	–180,000	10,000
Construir una planta pequeña	100,000	–20,000	40,000
No hacer nada	0	0	0
Probabilidades	0.50	0.50	

Sus cálculos son los siguientes:

$$\text{VME (planta grande)} = (\$200{,}000)(0.50) + (-\$180{,}000)(0.50) = \$10{,}000$$
$$\text{VME (planta pequeña)} = (\$100{,}000)(0.50) + (-\$20{,}000)(0.50) = \$40{,}000$$
$$\text{VME (no hacer nada)} = (\$0)(0.50) + (\$0)(0.50) = \$0$$

El valor esperado más grande ($40,000) es el resultado de la segunda alternativa, "construir una planta pequeña". Así, Thompson debería proceder con el proyecto y hacer una planta pequeña para fabricar las casetas de almacenamiento. Los VME para la planta grande y no hacer nada son de $10,000 y $0, respectivamente.

Cuando se emplea el criterio del valor monetario esperado en problemas de minimización, los cálculos son los mismos, pero se selecciona la alternativa con el menor VME.

Valor esperado de la información perfecta

Scientific Marketing, Inc., una empresa que propone ayudar a John a tomar decisiones sobre si construir una planta para fabricar las casetas de almacenamiento, se acercó a John Thompson. Scientific Marketing asegura que su análisis técnico indicará a John con certidumbre si el mercado es favorable para su producto propuesto. En otras palabras, cambiará su entorno de una toma de decisiones con riesgo en uno de toma de decisiones con certidumbre. Esta información ayudaría a evitar que John cometa un error muy costoso. Scientific Marketing cobrará a Thompson $65,000 por la información. ¿Qué recomendaría usted a John? ¿Debería contratar a la empresa para hacer el estudio de mercado? Incluso si la información del estudio fuera perfectamente exacta, ¿valdría $65,000? ¿Cuánto valdría? Aunque es difícil contestar algunas de estas preguntas, determinar el valor de tal información perfecta sería muy útil. Obtener una cota superior sobre lo que debería estar dispuesto a gastar en información como la que vende Scientific Marketing. Aquí se investigan dos términos relacionados: el valor esperado de la información perfecta (VEIP) y el valor esperado con información perfecta (VECIP). Las técnicas ayudarían a John a tomar su decisión acerca de contratar a la empresa de investigación de mercados.

El valor esperado con información perfecta es el rendimiento promedio o esperado, a largo plazo, si tenemos información perfecta antes de tomar una decisión. Para calcular este valor, elegimos la mejor alternativa para cada estado de naturaleza y multiplicamos su pago por la probabilidad de ocurrencia de ese estado de naturaleza.

VECIP = Σ(mejor pago en el estado de naturaleza *i*) (probabilidad del estado de naturaleza *i*)

Si expandimos esto, se convierte en

VECIP= (mejor pago en el primer estado de naturaleza) × (probabilidad del primer estado de naturaleza)
+ (mejor pago en el segundo estado de naturaleza) × (probabilidad del segundo estado de naturaleza)
+ ... + (mejor pago en el último estado de naturaleza) × (probabilidad del último estado de naturaleza)

El valor esperado *de* la información perfecta, VEIP, es el valor esperado *con* información perfecta, menos el valor esperado *sin* información perfecta (es decir, el VME mejor o máximo). Entonces, el VEIP es la mejora en el VME que resulta al tener información perfecta.

VEIP = VECIP – el mejor VME

Remitiéndonos a la tabla D, Thompson puede calcular el máximo que pagaría por información, es decir, el valor esperado de la información perfecta o VEIP. El proceso consta de tres etapas. Primero, se encuentra la mejor retribución en cada estado de naturaleza. Si la información perfecta indica que el mercado será favorable, construirá la planta grande y la ganancia será de $200,000. Si la información perfecta indica que el mercado será desfavorable, se elige la alternativa “no hacer nada”, y la ganancia será de $0. Estos valores se muestran en la fila “con información perfecta” de la tabla E. Segundo, se calcula el valor esperado *con* información perfecta. Luego, usando este resultado, se calcula el VEIP.

TABLA "E"

ALTERNATIVA	ESTADO DE NATURALEZA: MERCADO FAVORABLE ($)	MERCADO DESFAVORABLE ($)	VME ($)
Construir una planta grande	200,000	–180,000	10,000
Construir una planta pequeña	100,000	–20,000	40,000
No hacer nada	0	0	0
Con información perfecta	200,000	0	100,000 VECIP
Probabilidades	0.50	0.50	

El valor esperado con información perfecta es:

VECIP=($200,000)(0.5) + ($100,000)(0) = $100,000

Por ello, si tuviéramos información perfecta, el pago promediaría $100,000. El VME máximo sin información adicional es de $40,000 (de la tabla D). Por lo tanto, el incremento en el VME es:

VEIP =VECIP – VME máximo
=$100,000-$40,000
=$60,000

Así, lo más que Thompson estaría dispuesto a pagar por información perfecta son $60,000. Desde luego, esto se basa de nuevo en la suposición de que la probabilidad de cada estado de naturaleza es de 0.50.

Este VEIP también nos indica que lo más que pagaríamos por cualquier información (perfecta o imperfecta) son $60,000.

Pérdida de oportunidad esperada

Un enfoque alternativo para maximizar el VME es minimizar la *pérdida de oportunidad esperada* (POE). Primero se construye una tabla de pérdida de oportunidad. Luego, se calcula la POE para cada alternativa, multiplicando la pérdida de oportunidad por la probabilidad y sumando los resultados. En la tabla B, se presenta la pérdida de oportunidad para el ejemplo de Thompson Lumber. Si usamos estas pérdidas de oportunidad, calculamos el POE de cada alternativa multiplicando por la probabilidad de cada estado de naturaleza por el valor adecuado de la pérdida de oportunidad, y sumamos los resultados:

$$\begin{aligned}
\text{POE(construir una planta grande)} &= (0.5)(\$0) + (0.5)(\$180{,}000) \\
&= \$90{,}000 \\
\text{POE(construir una planta pequeña)} &= (0.5)(\$100{,}000) + (0.5)(\$20{,}000) \\
&= \$60{,}000 \\
\text{POE(no hacer nada)} &= (0.5)(\$200{,}000) + (0.5)(\$0) \\
&= \$100{,}000
\end{aligned}$$

La tabla F, da estos resultados. Usando la POE mínima como criterio de decisión, la segunda alternativa "construir una planta pequeña" sería la mejor decisión.

Es importante observar que la mínima POE siempre dará como resultado la misma decisión que el VME máximo y que el VEIP siempre será igual que la mínima POE. Si nos referimos al caso Thompson, usamos la tabla de pagos para calcular el VEIP en $60,000. Observe que este es la POE mínima que acabamos de calcular.

TABLA F

	ESTADO DE NATURALEZA		
ALTERNATIVA	MERCADO FAVORABLE ($)	MERCADO DESFAVORABLE ($)	POE
Construir una planta grande	0	180,000	90,000
Construir una planta pequeña	100,000	20,000	60,000
No hacer nada	200,000	0	100,000
Probabilidades	0.50	0.50	

Análisis de sensibilidad

Anteriormente determinamos que la mejor decisión (con probabilidades conocidas) para Thompson Lumber era construir la planta pequeña, con un valor esperado de $40,000. Esta conclusión depende de los valores de las consecuencias económicas y de dos valores de probabilidad para un mercado favorable y desfavorable. El *análisis de sensibilidad* investiga de qué modo cambiaría nuestra decisión dado un cambio en los datos del problema. Ahora, investigamos la influencia que tendría un cambio en los valores de probabilidad sobre la decisión que enfrenta Thompson Lumber. Primero, definimos la siguiente variable:

P = probabilidad de un mercado favorable

Como únicamente hay dos estados de naturaleza, la probabilidad de un mercado desfavorable debe ser 1 - P.

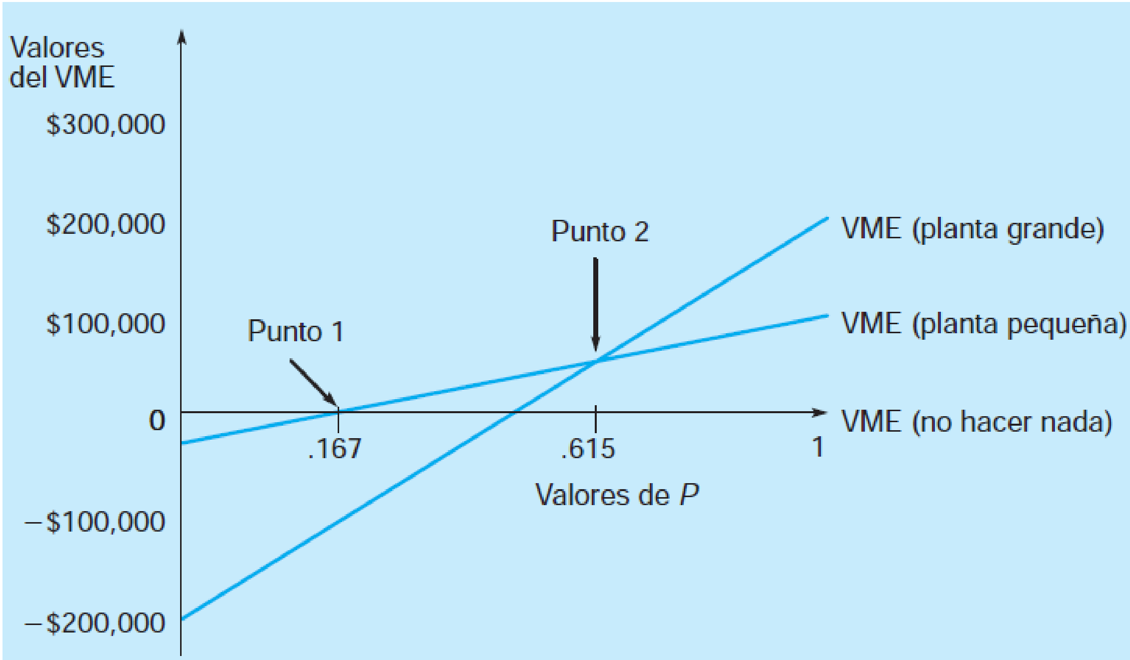
Podemos ahora expresar los VME en términos de P, como se indica en las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}\text{VME (planta grande)} &= \$200{,}000P - \$180{,}000(1 - P)\\ &= \$200{,}000P - \$180{,}000 + 180{,}000P\\ &= \$380{,}000P - \$180{,}000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{VME (planta pequeña)} &= \$100{,}000P - \$20{,}000(1 - P)\\ &= \$100{,}000P - \$20{,}000 + 20{,}000P\\ &= \$120{,}000P - \$20{,}000\end{aligned}$$

$$\text{VME (no hacer nada)} = \$0P + \$0(1 - P) = \$0$$

Como se observa en la gráfica siguiente, la mejor decisión es no hacer nada mientras P esté entre 0 y la probabilidad asociada con el punto 1, donde el VME por no hacer nada es igual al VME de la planta pequeña. Cuando P está entre las probabilidades de los puntos 1 y 2, la mejor decisión es construir la planta pequeña. El punto 2 es donde el VME para la planta pequeña es igual al VME para la planta grande.



Cuando P es mayor que la probabilidad para el punto 2, la mejor decisión es construir la planta grande. Desde luego, esto es lo que se esperaría cuando P aumente. El valor de P en los puntos 1 y 2 se calcula como sigue:

Punto 1: VME (no hacer nada) = VME (planta pequeña)

$$0 = \$120{,}000P - \$20{,}000 \quad P = \frac{20{,}000}{120{,}000} = 0.167$$

Punto 2: VME (planta pequeña) = VME (planta grande)

$$\$120{,}000P - \$20{,}000 = \$380{,}000P - \$180{,}000$$

$$260{,}000P = 160{,}000 \quad P = \frac{160{,}000}{260{,}000} = 0.615$$

Los resultados de este análisis de sensibilidad se presentan en la siguiente tabla:

MEJOR ALTERNATIVA	RANGO DE VALORES DE *P*
No hacer nada	Menor que 0.167
Construir una planta pequeña	0.167 a 0.615
Construir una planta grande	Mayor que 0.615

Usando POM-QM para el problema de Thompson Lumber.
Hacemos clic en **Module** y luego clic en “**Decision Analysis**” para activar el módulo de análisis de decisión. Ahora que el módulo de análisis de decisión está activo, hacemos clic en **File** y **New** donde elegimos la opción **“Decision Tables”.**

Ingresamos los datos en la tabla de pagos que se muestra:

Objective
- (•) Profits (maximize)
- ( ) Costs (minimize)

This cell can not be changed.

	Mercado favorable	Mercado desfavorable
Probabilities	.5	.5
Construir una planta grande	200000	-180000
Construir una planta pequeña	100000	-20000
No hacer nada	0	0

Para resolverlo damos clic en Solve. Se mostrará la siguiente ventana.

Edit Data F9

1 Decision Table Results
2 Expected Value Multiplications
3 Perfect Information
4 Regret or Opportunity Loss

1. Resutados de Tabla de decisión
2. Valor esperado.
3. Información Perfecta
4. Arrepentimiento pérdida de Oportunidad

1. Resultados de la tabla de decisión

Decision Table Results

Problema de Thompson Lumber Solution

	Mercado favorable	Mercado desfavorable	EMV	Row Min	Row Max
Probabilities	.5	.5			
Construir una planta grande	200000	-180000	10000	-180000	200000
Construir una planta	100000	-20000	40000	-20000	100000
No hacer nada	0	0	0	0	0
		maximum	40000	0	200000
			Best EV	maximin	maximax

The maximum expected monetary value is 40000 given by Construir una planta pequeña
The maximin is 0 given by No hacer nada
The maximax is 200000 given by Construir una planta grande

2. Valor esperado.

Expected Value Multiplications

Problema de Thompson Lumber Solution

	Mercado favorable	Mercado desfavorable	Row sum (Exp Val)
Probabilities	.5	.5	
Construir una planta grande	100000	-90000	10000
Construir una planta pequeña	50000	-10000	40000
No hacer nada	0	0	0

3. Información Perfecta

Perfect Information

Problema de Thompson Lumber Solution

	Mercado favorable	Mercado desfavorable	Maximum
Probabilities	.5	.5	
Construir una planta grande	200000	-180000	
Construir una planta pequeña	100000	-20000	
No hacer nada	0	0	
Perfect Information	200000	0	
Perfect*probability	100000	0	100000
Best Expected Value			40000
Exp Value of Perfect Info			60000

4. Arrepentimiento pérdida de Oportunidad

Regret or Opportunity Loss

Problema de Thompson Lumber Solution

	Mercado favorable	Mercado desfavorable	Maximum Regret	Expected Regret
Probabilities	.5	.5		
Construir una planta	0	180000	180000	90000
Construir una planta	100000	20000	100000	60000
No hacer nada	200000	0	200000	100000
Minimax regret			100000	

PRIMER PROBLEMA DE APLICACIÓN.

Juan es un pequeño proveedor de químicos y equipos que son usados por algunas tiendas fotográficas para procesar rollos de 35 mm. Un producto que Juan provee es BC-6, Juan normalmente surte 11, 12 o 13 cajas de BC-6 cada semana. Por cada caja que Juan vende, El recibe una ganancia de U$35.00. Como muchos químicos fotográficos, BC-6 tiene una muy corta vida de anaquel, así que si una caja no es vendida al finalizar la semana, Juan debe desecharlo. Puesto que cada caja le cuesta a Juan U$56.00, El pierde U$56.00 por cada caja que no es vendida al finalizar la semana, Hay una probabilidad de 0.45 de vender 11 cajas, una probabilidad de 0.35 de vender 12 cajas y una probabilidad de 0.2 de vender 13 cajas.

a.- Construya una tabla de decisión para este problema. Incluya todos los valores condicionales y las probabilidades en la tabla.

b.- Resolver el problema aplicando los métodos cuantitativos para toma de decisiones en condiciones de riesgo.

Solución: Construimos la tabla o matriz de pago.

Demanda / Oferta	11 cajas	12 cajas	13 cajas	VME	Maxi Max	Maxi Min	Intermedio	Laplace
11 Cajas	U$385	U$385	U$385	385.00	385.00	385.00	385.00	385.00
12 Cajas	U$329	U$420	U$420	379.05	420.00	329.00	388.15	389.67
13 Cajas	U$273	U$364	U$455	341.25	455.00	273.00	391.30	364.00
Probabilidad	0.45	0.35	0.20				α=0.65	

Tabla 6.1

Oferta: son las cajas que Juan compra cada semana para venderlas, como plantea el problema tiene tres opciones; comprar 11, 12 o 13. Cada caja la compra en $56. Si no la vende pierde la inversión.

Demanda: son las cajas que realmente vende cada semana. La utilidad de cada caja es de U$35.

Por lo que los posibles pagos se reflejan en la matriz anterior con las probabilidades respectivas.

Para conocer cuál es la mejor decisión que debe tomar Juan, usaremos los métodos cuantitativos siguientes para encontrar el valor óptimo.

a) Criterio del Valor monetario esperado (VME)
b) Criterio Maximax
c) Criterio Maximin
d) Criterio Intermedio (con α=0.65)
e) Criterio Laplace.
f) Criterio Minimax.

<u>Calculo del VME:</u>

VME(11) = 0.45x11x35 + 0.35x11x35 + 0.20x11x35=173.25+134.75+77= **$385**

VME(12)=0.45x(11x35–56)+ 0.35x12x35+0.20x12x35=48.05+147.0+84= **$379.05**

VME(12) =0.45x(11x35 –112)+0.35x(12x35-56)+0.20x13x35=122.85+127.40+ 91 **=$341.25**

La Solución óptima es vender 11 cajas, no hay pérdidas y sus utilidades son las mejores de las otras dos alternativas.

Criterio Maximax:

El máximo de cada alternativa es: 385 para la primera, 420 para la segunda y 455 para la tercera, siendo el máximo de los máximos 455. Por lo tanto para el criterio Maximax la mejor decisión será comprar 13 cajas (ver tabla 6.1).

Criterio Maximin:

El mínimo de cada alternativa es: 385 para la primera, 329 para la segunda y 273 para la tercera, siendo el máximo de los mínimos 385. Por lo tanto para el criterio Maximin la mejor decisión será comprar 11 cajas (ver tabla 6.1)

Criterio Intermedio:

Promedio ponderado= α (mejor fila) + (1 – α)(peor fila)
PE(11 cajas) = 0.65* 385 + (1-0.65)*385 = 250.25 + 134.75=385
PE(12 cajas) = 0.65*420 + (1-0.65)*329 = 273 + 115.15 =388.15
PE(13 cajas) = 0.65*455 + (1-0.65)*273 = 295.75 + 95.55= 391.30
PE: pago esperado o promedio ponderado
Con el criterio de promedio ponderado o pago esperado se obtiene un óptimo de 391.30 por lo tanto para éste criterio la mejor decisión será comprar 13 cajas.

Criterio Laplace:
El criterio Laplace parte del supuesto de equiprobabilidad para cada estado de la naturaleza.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)x_{ij} = \max \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)x_{ij}$$

RE(11 cajas)= 1/3*385 + 1/3*385 + 1/3*385 = 385
RE(12 cajas)= 1/3*329 + 1/3*420 + 1/3*420 = 109.67+140+140=389.67
RE(13 cajas)= 1/3*273 + 1/3*364 + 1/3*455 = 91 + 121.33 + 151.67=364.00

RE: resultado esperado

Con el criterio de Laplace el óptimo se obtiene con 389.67, por lo tanto para la Laplace la mejor decisión es comprar 12 cajas.

Criterio Minimax:

El criterio de Minimax también conocida como pérdida de oportunidad esperada (POE)

$$\mathbf{POE_{ij} = máx\ (R_{ij}) - R_{ij}}$$

Demanda / Oferta	11 cajas	12 cajas	13 cajas	11 cajas	12 cajas	13 cajas	Minimax POE
11 Cajas	U$385	U$385	U$385	0	35	70	70
12 Cajas	U$329	U$420	U$420	56	0	35	56
13 Cajas	U$273	U$364	U$455	112	56	0	112
Probabilidad	0.45	0.35	0.20				

Para obtener el Minimax requerimos transformar las columnas originales de la tabla de pago. Para lo cual en cada columna restamos cada valor de la comuna del mayor valor de esa columna, de esa manera se obtienen los nuevos valores de las columnas con encabezado amarillo. Ahora seleccionamos en cada fila el máximo (solo de las columnas con encabezado amarillo) y los ubicamos en la última columna con encabezado Minimax, de los máximos de la columna se elige el mínimo que es 56. Por lo que el criterio Minimax recomienda comprar 12 cajas.

Puede notarse que al aplicar los seis criterios: dos criterios recomiendan comprar 11 cajas (Criterios VME y Minimax), dos criterios recomiendan comprar 12 cajas (Criterios Minimax e Intermedio) y dos criterios recomiendan comprar 13 cajas (Criterios Maximax y Laplace).

Ahora dependerá del decisor tomar una decisión conservadora, intermedia o de mayor riesgo.

SEGUNDO PROBLEMA DE APLICACIÓN:

Farm Grown Inc., produce cajas de productos de alimentos perecederos. Cada caja contiene una variedad de vegetales y otros productos del campo. Cada caja cuesta U$5.00 y se vende por U$15.00. Si hay alguna caja no vendida al finalizar el día, Ellos venderán a una gran compañía procesadora de alimentos a U$3.00 la caja. La probabilidad de que la deman3da diariamente sea de 100 cajas es 0.3, la probabilidad de que sea 200 cajas es de 0.4 y de que sea 300 es 0.3. Farm Grown tiene una política de “siempre satisfacer la demanda del cliente”. Si su propio suministro de cajas es menor que la demanda, El compra los vegetales necesarios de un competidor. El costo estimado de hacer esto, es de U$16.00 por caja.

a.- Dibuje una tabla de decisión para este problema.

b.- ¿Qué recomiendas?

Solución: Para lo cual presentamos los cálculos para obtener los pagos de la matriz de decisión.

Surtido Cajas \ Demanda Cajas	100	200	300
100	100(15) -100(5) = 1000	200(15) -100(5) – 100(16) = 900	300(15) -100(5) – 200(16) = 800
200	100(15) +100(3) – 200(5) = 800	200(15) -200(5) = 2000	300(15) -200(5) – 100(16) = 1900
300	100(15) +200(3) – 300(5) = 600	200(15) +100(3) – 300(5) = 1800	300(15) -300(5) = 3000
Probabilidades	0.30	0.40	0.30

Lo que nos permite obtener la siguiente tabla de decisión:

	P1=0.30 Cajas 100	P2=0.40 Cajas 200	P3=0.30 Cajas 300	VME	Maximax	Laplace	Maximin
Cajas 100	**U$1000**	**U$900**	**U$800**	**900**	**1000**	900	**930**
Cajas 200	**U$800**	**U$2000**	**U$1900**	**1610**	**2000**	1566.67	**1580**
Cajas 300	**U$600**	**U$1800**	**U$3000**	**1800**	**3000**	1800	**2160**

Tabla 6.2

Para la toma de decisión usaremos cuatro de los seis criterios cuantitativos estudiados: el VME, Laplace, Maximax y el Maximin.

Calculo del VME:

VME(100) = 0.30*1000 + 0.40*900 + 0.30*800=300 + 360 + 240= **$900**

VME(200)=0.30*800+ 0.40*2000 +0.30*1900=240+800 + 570= **$1610**

VME(300) =0.30*600 +0.40*1800+0.30*3000=180 + 720 + 900 **=$1800**

Solución óptima: producir 300 cajas, sus utilidades son las mejores de las tres alternativas.

Criterio Maximax:

El máximo de cada alternativa es: 1,000 para la primera, 2,000 para la segunda y 3,000 para la tercera, siendo el máximo de los máximos 3,000. Por lo tanto para el criterio Maximax la mejor decisión será producir 300 cajas (ver tabla 6.2).

Criterio Maximin:

El mínimo de cada alternativa es: 930 para la primera, 1580 para la segunda y 2,160 para la tercera, siendo el máximo de los mínimos 2,160. Por lo tanto para el criterio Maximin la mejor decisión será producir 300 cajas (ver tabla 6.2)

Criterio Laplace:
El criterio Laplace parte del supuesto de equiprobabilidad para cada estado de la naturaleza.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)x_{ij} = \max \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)x_{ij}$$

RE(100 cajas)= 1/3*1000 + 1/3*900 + 1/3*800 = 900
RE(200 cajas)= 1/3*800 + 1/3*2000 + 1/3*1900 = 1566.67
RE(300 cajas)= 1/3*600 + 1/3*1800 + 1/3*3000 = 1800

RE: resultado esperado

Con el criterio de Laplace el óptimo se obtiene con 1800, por lo tanto para la Laplace la mejor decisión es producir 300 cajas.

Definitivamente todos los métodos indican que la mejor decisión será que se produzcan 300 cajas.

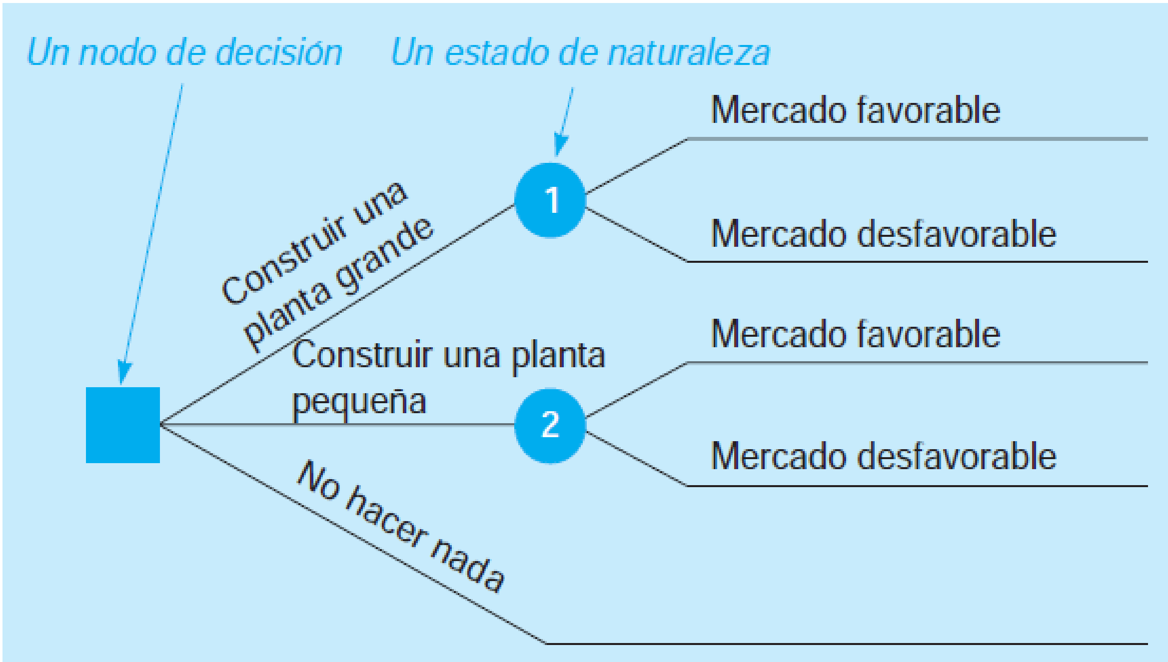
Árboles de decisiones

Cualquier problema que se pueda presentar en una tabla de decisiones también se puede ilustrar con una gráfica denominada **árbol de decisiones**. Todos los árboles de decisiones son similares en cuanto a que contienen *puntos de decisión* o **nodos de decisión** y *puntos de estados de naturaleza* o **nodos de estado de naturaleza**:

- Un nodo de decisión es aquel donde se puede elegir una entre varias alternativas
- Un nodo de estado de naturaleza indica de los estados de naturaleza que pueden ocurrir

Al dibujar un árbol, comenzamos por la izquierda y nos movemos hacia la derecha. Así, el árbol presenta decisiones y resultados en orden secuencial. Las líneas o ramas que salen de los cuadros (nodos de decisión) representan alternativas; en tanto que las ramas que salen de los círculos representan estados de naturaleza. La gráfica ”A”, da el árbol de decisiones básico para el ejemplo de Thompson Lumber. Primero, John decide entre construir una planta grande, una pequeña o ninguna. Después, una vez que toma esta decisión, ocurren los posibles estados de naturaleza o resultados (mercado favorable o desfavorable). El siguiente paso es colocar los pagos y las probabilidades en el árbol y comenzar el análisis.

Gráfica A



El análisis de problemas con árboles de decisiones incluye cinco pasos:

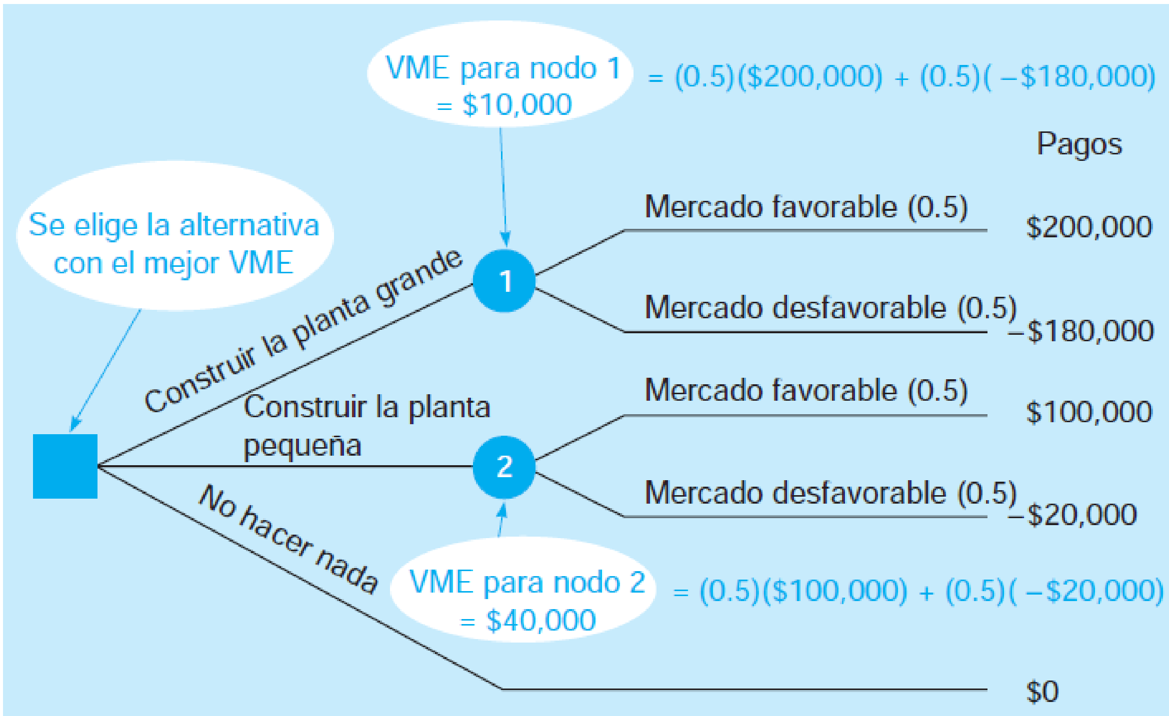
Cinco pasos para el análisis del árbol de decisiones

1. Definir el problema.
2. Estructurar o dibujar un árbol de decisiones.
3. Asignar probabilidades a cada estado de naturaleza.
4. Estimar los pagos para cada combinación posible de alternativas y estados de naturaleza.
5. Resolver el problema comparando los valores monetarios esperados (VME) para cada nodo de estado de naturaleza. Esto se hace trabajando hacia atrás, es decir, comenzando en la derecha del árbol y trabajando hacia atrás a los nodos de decisión a la izquierda. Además, en cada nodo de decisión, se selecciona la alternativa con el mejor VME.

El árbol de decisiones final con los pagos y las probabilidades para la situación de decisión de John Thompson se muestra en la gráfica "B". Observe que los pagos se colocan a la derecha de cada rama del árbol. Las probabilidades se muestran entre paréntesis al lado de cada estado de naturaleza.

Comenzando con los pagos a la derecha de la gráfica, se calculan los VME para cada estado de naturaleza y, luego, se colocan al lado de sus respectivos nodos. El VME del primer nodo es de $10,000. Esto representa la rama desde el nodo de decisión de construir una planta grande. El VME para el nodo 2, construir una planta pequeña, es de $40,000. No construir o no hacer nada, desde luego, tiene un pago de $0. Debería elegirse la rama que sale el nodo de decisión que lleva al nodo del estado de naturaleza con el mayor VME. En el caso Thompson, tendría que construirse una planta pequeña.

Gráfica B



Usando POM-QM para el problema de Thompson Lumber.

Hacemos clic en **Module** y luego clic en "**Decision Analysis**" para activar el módulo de análisis de decisión. Ahora que el módulo de análisis de decisión está activo, hacemos clic en **File** y **New** donde elegimos la opción **"Decision Trees".**

Ingresamos los datos en la tabla que se muestra:

Objective
- (•) Profits (maximize)
- ( ) Costs (minimize)

Enter the ending node number for construir planta grande. Node numbers are integers between 1 and 90

Branch	Start Node	End Node	Branch Probability	Profit
Start	xxxxxxx	1	xxxxxxx	xxxxxxx
Construir planta grande	1	2	0	0
Construir planta cpequeña	1	3	0	0
No hacer nada	1	4	0	0
Mercado favorable	2	5	.5	200,000
Mercado desfavorable	2	6	.5	-180,000
Mercado favorable	3	7	.5	100,000
Mercado desfavorable	3	8	.5	-20,000

Para ver la solución hacemos clic en Solve:

1. **Resultados del Árbol de decisión:**

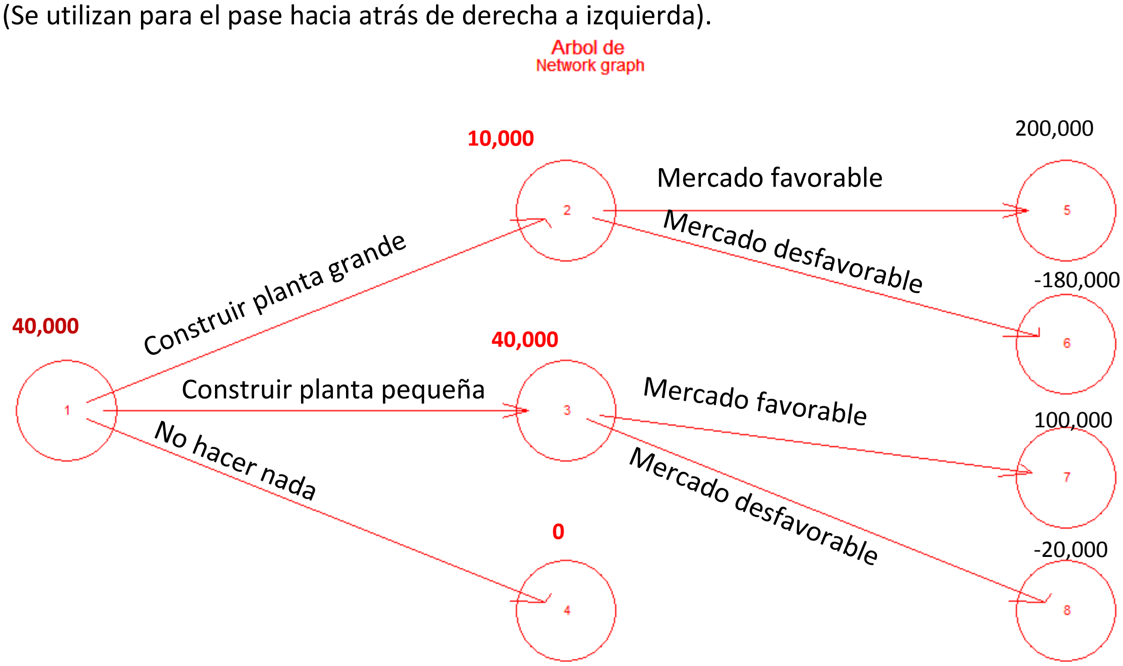
Decision Tree Results

Arbol de Solution

	Start Node	End Node	Branch Probability	Profit	Branch Use	End node	Node Type	Node Value
Start	0	1	0	0		1	Decision	40,000
Construir planta grande	1	2	0	0		2	Chance	10,000
Construir planta cpequeña	1	3	0	0	Always	3	Chance	40,000
No hacer nada	1	4	0	0		4	Final	0
Mercado favorable	2	5	.5	200,000		5	Final	200,000
Mercado desfavorable	2	6	.5	-180,000		6	Final	-180,000
Mercado favorable	3	7	.5	100,000		7	Final	100,000
Mercado desfavorable	3	8	.5	-20,000		8	Final	-20,000

For the branch used columns the meanings are as follows:
Always - these are branches that should always be included
Possibly - these are branches that should be included if you get there and you MIGHT get there.
Backwards - these are branches that should be used if you get there BUT you should NOT get there.
(They are used for the backwards pass from right to left).

Para las columnas de ramificación utilizadas, los significados son los siguientes:
Siempre - estas son las ramas que siempre deben ser incluidas
Posiblemente - estos son las ramas que se deben incluir si va allí y se podría llegar allí.
Al revés - se trata de ramas que se deben utilizar si llegas pero no debe llegar.
(Se utilizan para el pase hacia atrás de derecha a izquierda).



Tema 7: Teoría de Juegos.

Esta teoría tiene que ver con situaciones de decisión en la que dos oponentes inteligentes con objetivos conflictivos (en caso de suma cero) compiten intensamente para superar al otro. Ejemplos típicos incluyen el lanzamiento de campañas publicitarias de productos que compiten y estrategias de planeación de batallas en la guerra.

En un conflicto, cada uno de los dos jugadores (oponentes) tiene una cantidad (finita o infinita) de alternativas o estrategias. Asociada con cada par de estrategias está la retribución que un jugador recibe del otro. Tal situación se conoce como juego de suma cero entre dos personas porque la ganancia de un jugador es igual a la pérdida del otro. Esto significa que podemos representar el juego en función de la retribución que recibe un jugador. Designando los dos jugadores A y B con m y n estrategias, respectivamente, el juego se presenta usualmente en función de la matriz de retribuciones que recibe el jugador *A* como La representación indica que si A utiliza la estrategia i y B utiliza la estrategia j, la retribución para A es a_{ij}, y la retribución para B es $-a_{ij}$.

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\
\hline
A_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\
A_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_m & a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

Problema 12 (Libro Investigación de Operaciones/Taha/capítulo 15, Análisis de Decisiones y juegos/ página 542/ problema de Juegos).

Dos compañías, *A* y *B*, venden dos marcas de un medicamento para la gripe. La compañía *A* se anuncia en radio (*A*1), televisión (*A*2) y periódicos (*A*3). La compañía *B,* además de utilizar la radio (*B*1), la televisión (*B*2) y los periódicos (*B*3), también envía folletos por correo (*B*4).

Dependiendo de la efectividad de cada campaña publicitaria, una compañía puede capturar una parte del mercado de la otra. La siguiente matriz resume el porcentaje del mercado capturado o perdido por la compañía *A*.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Fila mín
A_1	8	−2	9	−3	−3
A_2	6	**5**	6	8	**5** ← Maximin
A_3	−2	4	−9	5	−9
Columna máx	8	**5**	9	8	
		↑ Minimax			

La solución del juego se basa en el principio de asegurar lo mejor de lo peor para cada jugador. Si la compañía A selecciona la estrategia A1, entonces, independientemente de lo que haga B, lo peor que puede suceder es que A pierda 3% del segmento del mercado ante B. Esto se representa por medio del valor mínimo de las entradas en la fila 1.Asimismo, con la estrategia A2, el peor resultado es que A capture 5% de B, y con la estrategia A3, el peor resultado es que A pierda 9% ante B. Estos resultados aparecen bajo fila mín. Para lograr lo mejor de lo peor, la compañía A elige la estrategia A2 porque corresponde a un valor maximin.
Luego, para la compañía B, la matriz de retribuciones dada es para A, la mejor de la peor solución de B está basada en el valor minimax. El resultado es que la compañía B elegirá la estrategia B2. La solución óptima del juego exige seleccionar las estrategias A2 y B2, lo que significa que ambas compañías deben utilizar la publicidad por televisión. La retribución favorecerá a la compañía A porque su segmento del mercado se incrementará 5%. En este caso decimos que el valor del juego es 5% y que A y B están utilizando una solución de punto de silla.
La solución de punto de silla impide seleccionar una mejor estrategia por parte de cualquiera de las compañías. Si B cambia de estrategia (B1,B3 o B4), la compañía A puede seguir con la estrategia A2, lo que resultaría en una pérdida peor para B (6 u 8%). Por la misma razón, A no buscaría una estrategia diferente porque B puede cambiar a B3 para obtener 9% de ganancia del mercado si se utiliza A1, y 3% si se utiliza A3.
El problema anterior lo resolveremos con POM-QM.

Hacemos clic en **Module** y después clic en **Game Theory.** Con esto activa el módulo de teoría de juegos. Ahora procederemos a hacer clic en **File** y luego **New**. La matriz de trabajo será 3x4 (tres filas y cuatro columnas). Como se muestra, donde introducimos los datos y etiquetas de filas y columnas.

Enter the name for this column strategy. Almost any character is permissible.

	B1	B2	B3	B4
A1	8	-2	9	-3
A2	6	5	6	8
A3	-2	4	-9	5

Para resolverlo procedemos a dar clic en Solve. Se muestra la siguiente ventana.

Edit Data F9
1 Game Theory Results
2 Row's Expected Values
3 Column's Expected Values
4 Maximin/Minimax
5 Results in list form

1. Resultados del problema
2. Valor en filas esperados
3. Valor en columnas esperado
4. Maximin/Minimax
5. Resultados en forma de lista

Game Theory Results

(untitled) Solution

	B1	B2	B3	B4	Row Mix
A1	8	-2	9	-3	0
A2	6	5	6	8	1
A3	-2	4	-9	5	0
Column Mix--->	0	1	0	0	
Value of game (to row)	5				

Row's Expected Values

(untitled) Solution

	Col mix 1 * cell payoff	Col mix 2 * cell payoff	Col mix 3 * cell payoff	Col mix 4 * cell payoff	Expected Value (row
Column's Optimal Mix	0	1	0	0	
A1	0	-2	0	0	-2
A2	0	5	0	0	5
A3	0	4	0	0	4
Value of game (to row)					5

Column's Expected Values

(untitled) Solution

	Optimal Row Mix	B1	B2	B3	B4
Row 1 mix * cell payoff	0	0	0	0	0
Row 2 mix * cell payoff	1	6	5	6	8
Row 3 mix * cell payoff	0	0	0	0	0
Expected Value (Col sum)		6	5	6	8
Value of game (to row)	5				

Maximin/Minimax

(untitled) Solution

	B1	B2	B3	B4	Row Minimum	Maximin
A1	8	-2	9	-3	-3	
A2	6	5	6	8	5	5
A3	-2	4	-9	5	-9	
Column Maximum	8	5	9	8		
Minimax		5				
Value=5						

Results in list form

ROW	
A1	0
A2	1
A3	0
COLUMN	
B1	0
B2	1
B3	0
B4	0

Problema 2:

Dos bancos del sistema compiten por atraer el mayor número de cuenta habientes en un poblado del occidente del país: Banco "Le cuido su dinero" el primero, y Banco " Le Guardo su Plata" el segundo; para el logro de su objetivo cada uno aplica las estrategias siguientes:

A. Sorteo de electrodomésticos
B. Tasa de interés más alta
C. Sorteo de dinero en efectivo

Si el segundo banco ofrece sorteo de electrodomésticos atrae 200 cuenta habientes más que el primero, cuando este ofrece lo mismo, 1000 más cuando el primero ofrece tasa de interés más alta y 800 menos cuando el primero ofrece sorteo de dinero en efectivo. Si el segundo banco ofrece una tasa de interés más alta atrae 1300 más cuando el primero ofrece sorteo de electrodomésticos, 700 más cuando el primero ofrece lo mismo y 900 menos cuando el primero ofrece sorteo de dinero en efectivo. Si el segundo banco ofrece sorteo de dinero en efectivo atrae 2000 menos cuando el primero ofrece sorteo de electrodomésticos, 1500 más cuando el primero ofrece tasa de interés más alta y 850 menos cuando el primero ofrece lo mismo.

1. ¿Qué banco es el ganador del juego?
2. ¿Qué estrategia debe aplicar cada banco?
3. ¿Cuánto gana?

Solución:

Lo primero que haremos, es construir la matriz de pagos: para lo cual sabemos que hay dos jugadores que los denominaremos Banco 1 y Banco 2. Cada jugador tiene tres estrategias que las llamaremos A, B y C. Donde A es Sorteo de electrodomésticos; B es Tasa de interés más alta y C es Sorteo de dinero en efectivo.

Por lo que la matriz será como se detalla:

		BANCO 2		
		A	B	C
BANCO 1	**A**	-200	-1300	2000
	B	-1000	-700	-1500
	C	800	900	850

Es importante es claro que debemos tener una notación para entender la matriz de pago que construimos. Esto es: Los valores positivos indicarán que son a favor del Banco 1 y los negativos serán a favor del Banco 2.

El enunciado del problema dice: ***Si el segundo banco ofrece sorteo de electrodomésticos atrae 200 cuenta habientes más que el primero, cuando este ofrece lo mismo***. Es decir en la casilla: columna A y fila A, hay 200 clientes a favor del Banco 2, por lo que en esa casilla escribimos, -200.

Luego dice: **1000 más cuando el primero ofrece tasa de interés más alta**. Es decir en la casilla: columna A y fila B, hay 1000 clientes a favor del Banco 2, por lo que en esa casilla escribimos, -1000.

Termina ese párrafo diciendo: **y 800 menos cuando el primero ofrece sorteo de dinero en efectivo**. Es decir en la casilla: columna A y fila C, hay 800 clientes a favor del Banco 1, por lo que escribimos, 800.

De forma similar podemos leer el siguiente segmento: **Si el segundo banco ofrece una tasa de interés más alta atrae 1300 más cuando el primero ofrece sorteo de electrodomésticos, 700 más cuando el primero ofrece lo mismo y 900 menos cuando el primero ofrece sorteo de dinero en efectivo**.

Por lo que en la casilla: columna B y fila A, hay 1300 clientes a favor del Banco 2, por lo que en esa casilla escribimos, -1300.

En la columna B y fila B, hay 700 clientes a favor del Banco 2, por lo que en esa casilla escribimos, -700.

En la columna B y fila C, hay 900 clientes a favor del Banco 1, por lo que en esa casilla escribimos, 900.

<u>El último segmento del texto que nos permite completar la tabla de pago es el siguiente</u>: **Si el segundo banco ofrece sorteo de dinero en efectivo atrae 2000 menos cuando el primero ofrece sorteo de electrodomésticos, 1500 más cuando el primero ofrece tasa de interés más alta y 850 menos cuando el primero ofrece lo mismo**.

Por lo que en la casilla: columna C y fila A, hay 2000 clientes a favor del Banco 1, por lo que en esa casilla escribimos, 2000.

En la columna C y fila B, hay 1500 clientes a favor del Banco 2, por lo que en esa casilla escribimos, -1500.

En la columna C y fila C, hay 850 clientes a favor del Banco 1, por lo que en esa casilla escribimos, 850.

Puede ver que hemos completado la matriz de pago, para encontrar la solución recurrimos al método de estrategia dominante:

Puede apreciarse que el Banco 1: tiene una estrategia dominante que es la C. y su peor estrategia es la B ya que en todas pierde independientemente de la estrategia que use el Banco 2. Por lo al Banco 1 le conviene eliminar su peor estrategia.

Paso 1: Jugador: Banco 1: La estrategia C domina a la estrategia B. (800>-1000; 900>-700 y 850>-1500) Por lo tanto se elimina la estrategia B del Banco 1.

		BANCO 2		
BANCO 1		**A**	**B**	**C**
	A	-200	-1300	2000
	C	800	900	850

Nota que la matriz de pago ya no contiene la fila B. Porque se ha eliminado. Pero ahora la matriz resultante el Banco 1 ya no tiene estrategia dominante, por lo que revisemos si el otro jugador o sea el Banco 2 tiene estrategia dominante.

Paso 2: Jugador: Banco 2: La estrategia A domina a la estrategia C. (200>-2000; -800>-850) Por lo tanto se elimina la estrategia C del Banco 2.

Puede notar que el Banco 2 siempre pierde con la estrategia C, por lo que es recomendable su eliminación.

BANCO 1		BANCO 2	
		A	B
	A	-200	-1300
	C	800	900

Puede notar en la matriz resultante que el Banco 1 y el Banco 2 se han quedado con dos estrategias cada uno. También note que el Banco 2 ya no tiene estrategia dominante, pero si hay estrategia dominante en el Banco 1.

Paso 3: Jugador: Banco 1: La estrategia C domina a la estrategia A. (800>-200; 900>-1300). Por lo tanto se elimina la estrategia A del Banco 1.

BANCO 1		BANCO 2	
		A	B
	C	800	900

Puede observar la matriz resultante, el Banco 2 tiene dos estrategias en ambas pierde, por lo que deberá eliminar la estrategia que le cause más perdida.

Paso 4: Jugador: Banco 2: La estrategia A domina a la estrategia B. (-800>-900) Por lo tanto se elimina la estrategia B del Banco 2.

BANCO 1		BANCO 2
		A
	C	800

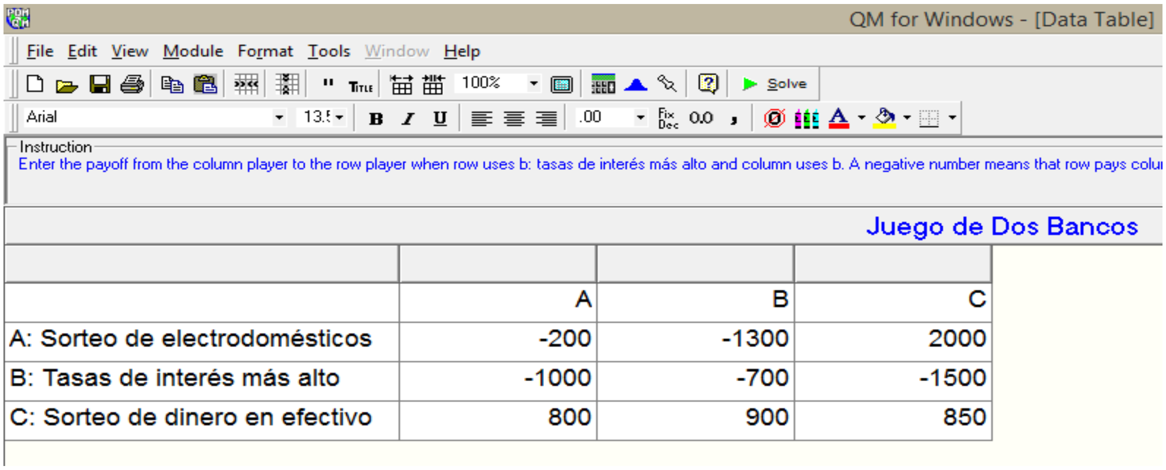
La matriz resultante muestra a los dos jugadores: Banco 1 y Banco 2 con una única estrategia, es la forma inteligente en que resultará el juego, de esta manera el Banco minimiza sus pérdidas y el Banco 1 optimiza su ganancia.

Conclusión: Jugador ganador: **Banco 1**

Estrategia ganadora **C**: **Sorteo de dinero en efectivo**
Valor del juego : **800 cuentahabientes más que el Banco 2**

<u>Ahora obtendremos una solución usando el Módulo de Teoría de Juegos de POM-QM.</u>

Abrimos el módulo "**Game Theory**" del programa POM-QM, al mismo tiempo le indicamos el número de estrategias de cada jugador que en este caso son tres para cada uno y le asignamos los valores a la matriz de pago.

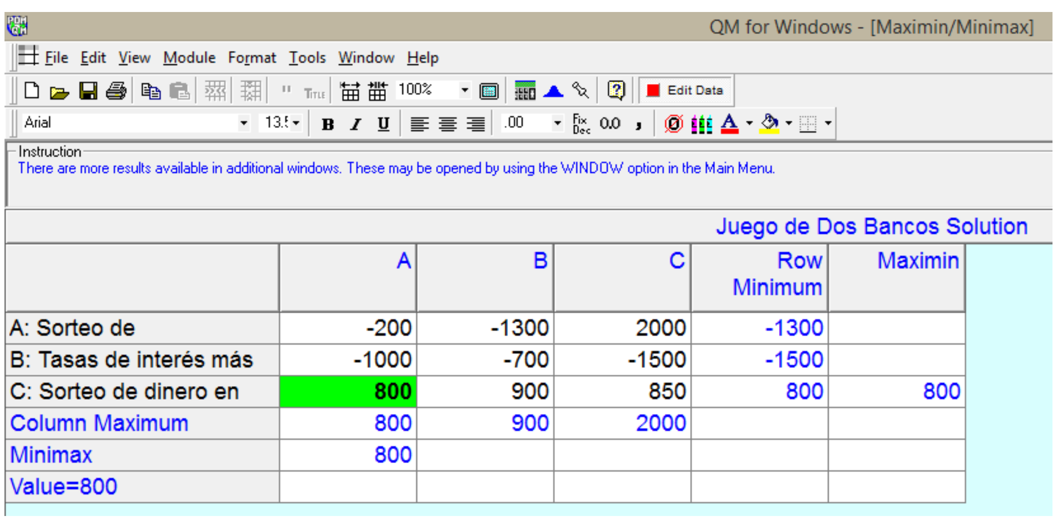


	A	B	C
A: Sorteo de electrodomésticos	-200	-1300	2000
B: Tasas de interés más alto	-1000	-700	-1500
C: Sorteo de dinero en efectivo	800	900	850

Puede ver como ha quedado la matriz de pago, hay dos jugadores, el jugador de la fila y el jugador de la comuna, tal como lo convenimos anteriormente el Banco 2 será el jugador de Columnas y el Banco 1 el jugador de las filas.

Para resolver el programa lo hará por el método Maximin/Minimax, recuerde que este problema ya lo resolvimos usando el método de estrategias dominante.

Una vez que hemos revisado que todos los valores de la matriz de pago son los correctos hacemos clic en Solve y luego en opción **Maximin/Minimax y se no muestra la siguiente imagen.**



	A	B	C	Row Minimum	Maximin
A: Sorteo de	-200	-1300	2000	-1300	
B: Tasas de interés más	-1000	-700	-1500	-1500	
C: Sorteo de dinero en	800	900	850	800	800
Column Maximum	800	900	2000		
Minimax	800				
Value=800					

El método Minimax/Maximin consiste en lo siguiente.

En cada fila (estrategias del jugador Banco 1) selecciona el valor mínimo y lo ubica en una columna que se titula **Row Minimum** y aparecen según la fila los valores -1300, -1500, 800 correspondiendo a la fila de A, B, y C respectivamente. Luego aparece una última columna con el encabezado de **Maximin.** Aquí se registra el valor máximo de todos los mínimos que están en la columna anterior, es decir selecciona el mayor valor entre -1300, -1500 y 800. Siendo 800 el valor máximo y lo ubica en la última columna pero en la fila donde lo encontró.

Para calcular el Maximin (estrategias del Jugador Banco 2) selecciona de cada columna el valor máximo y los ubica en una nueva fila que tiene como encabezado Column Maximum y selecciona según la columna los valores 800, 900 y 2000 correspondiente a la columna A, B y C respectivamente. Luego abre una nueva fila que tiene como encabezado Minimax. Aquí se registra el valor mínimo de todos los valores máximos que registro en la fila anterior, es decir selecciona el menor valor entre 800, 900 y 2000. Siendo 800 el mínimo y lo ubica en la fila con encabezado Minimax pero en la columna donde lo encontró.

El teorema Minimax/Maximin plantea que Si Minimax=Maximin entonces hay solución estable y el valor del juego es la casilla donde se interceptan el Maximin con Minimax.

En nuestro caso Minimax=800 y Maximin=800 Por lo tanto hay solución estable, es decir hay un ganador del juego y el valor del juego es la casilla de intercepción o sea valor del juego es 800 que aparece sombreado con verde.

En conclusión:

Jugador ganador: El jugador de fila es decir Banco 1
Estrategia ganadora: C sorteo de dinero en efectivo
Valor del juego: 800 cuentahabientes más que el Banco 2.

Hemos usado dos métodos diferentes no obstante los resultados finales son los mismos.

Problema 3: Las dos principales cadenas de tiendas de una ciudad están preparando su mejor estrategia para realizar la liquidación de término de temporada de invierno. Estas empresas deben decidir qué semana del mes de julio es la más conveniente para realizar su liquidación. En la siguiente matriz se indican las posibles estrategias y los resultados que obtienen cada empresa en términos de las utilidades netas de la temporada.

		Cadena 2		
Cadena 1		1ra. Semana	2da. Semana	3ra. Semana
	1ra. Semana	30 30	15 40	35 65
	2da. Semana	40 15	25 25	35 35
	3ra. Semana	65 35	35 35	60 60

De acuerdo a los datos responda justificando claramente:

a) ¿Tiene la cadena 1 una estrategia dominante? ¿Tiene alguna estrategia dominada?
b) ¿Tiene la cadena 2 una estrategia dominante? ¿Tiene alguna estrategia dominada?
c) ¿Existe algún equilibrio de Nash?
d) ¿Es una solución estable?

Solución:

Lo primero que debemos saber cómo debemos leer las utilidades mostrada en la tabla o matriz de pago dada. Las dos cadenas obtendrían utilidades cualquier semana que decidan realizar su liquidación de verano. Pera cada una está interesada en optimizar sus ganancias y precisamente en eso está la búsqueda, de una solución óptima para cada una de las cadenas, obviamente este es un problema de teoría de juegos es decir posiblemente habrá un ganador o ambos llegaran a un equilibrio.

Podemos ver que la matriz de muestra en fila a la Cadena 1 que tiene tres posibles estrategias que eventualmente podría usar; 1ra. Semana, 2da. Semana y 3ra. Semana. Si observamos las utilidades de la 2da. Semana de la Cadena 1 (valores de la esquina izquierda inferior de la fila), estos son 15, 25 y 35 y si los comparamos con los 1ra. Semana y 3ra. Semana de la misma Cadena 1, diríamos que es una estrategia dominada o es la menos recomendable para la Cadena 1. Es decir la 1ra. y 3ra. Semana resultan estrategias dominante frente a la 2da. Semana.

De manera similar podemos ver que la Cadena 2 tiene tres estrategias que puede usar; 1ra. Semana, 2da. Semana y 3ra. Semana. Si observamos las utilidades de la 2da. Semana de la cadena 2 (valores de la esquina derecha superior de la columna), estos son 15, 25 y 35 y si los comparamos con los de la 1ra. y 3ra. Semana de la cadena 2, diríamos que es una estrategia dominada por la 1ra. y 3ra. Semana resultan ser estrategias dominantes.

Entonces podemos decir que ambas cadenas tienen estrategias dominadas o estrategias no recomendables frente a otras que son mejores. Por lo procederemos a simplificar cada casilla a un solo valor para luego aplicar el método de estrategia dominante para resolver el juego.

Para lo cual procederemos a realizar un proceso de cálculo sencillo, realizando la diferencia de los valores de cada casilla. Realizando las diferencias de izquierda a derecha.

La matriz resultante se muestra a continuación, estos nos facilitará y simplificará todo el proceso.

	Cadena 2			
Cadena 1		1ra. Semana	2da. Semana	3ra. Semana
	1ra. Semana	0	25	30
	2da. Semana	-25	0	0
	3ra. Semana	-30	0	0

Podemos observar que ahora la tabla de pago a quedado más simple. En todas las casillas debemos entenderlo en los casos que ambas cadenas obtendrían las mismas utilidades. En el resto de las casillas obviamente habrá un ganador o una cadena con mejores utilidades que su competidora.

Después de esta exploración del problema procederemos a aplicar el método de estrategia dominante a la matriz transformada.

Paso 1: Jugador Cadena 1: la estrategia 3ra. Semana es dominada por la 1ra. semana. (0>-30, 25>0 y 30>0) Por lo tanto eliminamos la estrategia 3ra. semana de la Cadena 1.

	Cadena 2			
Cadena 1		1ra. Semana	2da. Semana	3ra. Semana
	1ra. Semana	0	25	30
	2da. Semana	-25	0	0

Podemos ver que la matriz de pago ha quedado reducida. Ahora la cadena 1 solo tiene dos estrategias. Al revisar los valores de cada estrategia de la cadena 1, sigue la cadena 1 siendo dominante sobre la 2da. semana, por lo que la cadena 1 debe eliminar esa estrategia.

Paso 2: Jugador Cadena 1:la estrategia 2da. Semana es dominada por la 1ra. semana. (0 >-25, 25>0 y 30>0) Por lo tanto eliminamos la estrategia 2da. semana de la Cadena 1.

	Cadena 2			
Cadena 1		1ra. Semana	2da. Semana	3ra. Semana
	1ra. Semana	0	25	30

La cadena 1 ha quedado con solo una estrategia, con su mejor estrategia. Ahora revisaremos la Cadena 2 y nos encontramos que tiene dos estrategias dominadas la 2da. y la 3ra. semana.

Paso 3: Jugador Cadena 2:la estrategia 2da. Semana y 3ra. semana son dominadas por la 1ra. semana. (0 >-25 y 0>-30) Por lo tanto eliminamos la estrategia 2da. semana y la 3ra. Semana de la Cadena 2.

Cadena 2		
Cadena 1		1ra. Semana
	1ra. Semana	0

Ahora tanto la cadena 1 como la cadena 2 se han quedado con su mejor estrategia y para ambas la mejor estrategia es hacer liquidación en la 1ra. Semana de Julio.

Ambas cadena obtendrían las mismas utilidades de 30.

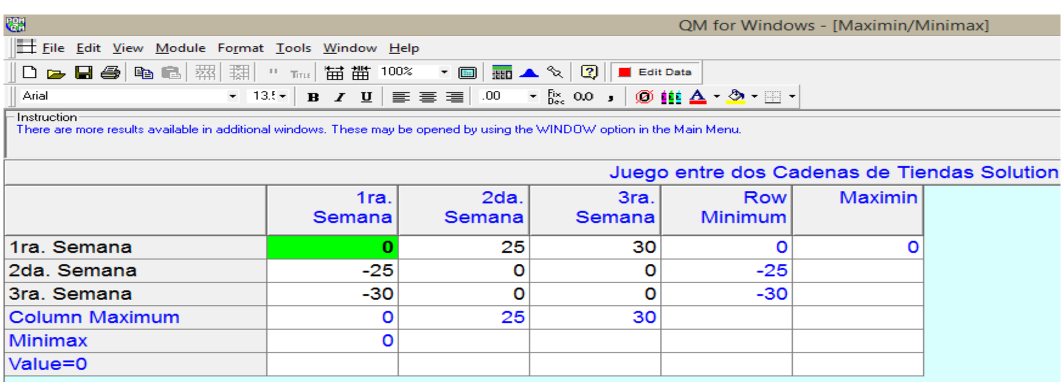
La solución es estable.

<u>Ahora obtendremos una solución usando el Módulo de Teoría de Juegos de POM-QM.</u>

Abrimos el módulo "**Game Theory**" del programa POM-QM, al mismo tiempo le indicamos el número de estrategias de cada jugador que en este caso son tres para cada una y le asignamos los valores a la matriz de pago.

	1ra. Semana	2da. Semana	3ra. Semana
1ra. Semana	0	25	30
2da. Semana	-25	0	0
3ra. Semana	-30	0	0

Una vez que hemos verificado que todos los valores de la matriz de pago son los correctos hacemos clic en Solve y luego en opción **Maximin/Minimax y se no muestra la siguiente imagen.**



	1ra. Semana	2da. Semana	3ra. Semana	Row Minimum	Maximin
1ra. Semana	0	25	30	0	0
2da. Semana	-25	0	0	-25	
3ra. Semana	-30	0	0	-30	
Column Maximum	0	25	30		
Minimax	0				
Value=0					

El teorema Minimax/Maximin plantea que Si Minimax=Maximin entonces hay solución estable y el valor del juego es la casilla donde se interceptan el Maximin con Minimax.

En nuestro caso Minimax=0 y Maximin=0 Por lo tanto hay solución estable, es decir hay un ganador del juego y el valor del juego es la casilla de intercepción o sea valor del juego es 0 que aparece sombreado con verde.

En conclusión:

Jugador ganador: Ambas cadenas obtienen las mismas utilidades.
Estrategia ganadora: 1ra. Semana de julio.
Valor del juego: 30 para cada tienda.

En el problema se nos hace la pregunta si hay algún equilibro de Nah:

Para lo cual debemos conocer que el equilibrio de **Nash** en la teoría de los juegos, es un "concepto de solución" para juegos con dos jugadores, el cual asume que:

- Cada jugador conoce y ha adoptado su mejor estrategia, y
- Cada jugador conoce las estrategias del otro.

Consecuentemente, cada jugador individual no gana nada modificando su estrategia mientras él otro mantenga la suya. Así, cada jugador está ejecutando el mejor "movimiento" que puede dados los movimientos de del otro jugador.

En otras palabras, un equilibrio de Nash es una situación en la cual los jugadores han puesto en práctica, y saben que lo han hecho, una estrategia que maximiza sus ganancias dadas las estrategias del otro. Consecuentemente, ningún jugador tiene ningún incentivo para modificar individualmente su estrategia.

Es importante tener presente que un equilibrio de Nash no implica que se logre el mejor resultado conjunto para los participantes, sino sólo el mejor resultado para cada uno de ellos considerados individualmente. Es perfectamente posible que el resultado fuera mejor para todos si, de alguna manera, los jugadores coordinaran su acción.

En resumen en el problema que hemos resuelto hay un equilibrio de **Nash** es una solución estable, así lo conforma el teorema Maximin/Minimax.

Tema 8: Análisis de Markov

El análisis de Markov es una técnica que maneja las probabilidades de ocurrencias futuras mediante el análisis de las probabilidad conocidas en el presente.1 La técnica tiene diversas aplicaciones en los negocios, incluyendo análisis de la participación en el mercado, predicción de deudas incobrables, predicción de la matrícula universitaria y determinación de si una máquina se descompondrá en el futuro.

El análisis de Markov hace la suposición de que el sistema comienza en un estado o una condición inicial. Por ejemplo, dos fabricantes competidores pueden tener respectivamente 40% y 60% de las ventas del mercado. Tal vez en dos meses las participaciones del mercado de las dos empresas cambiarían a 45% y 55% del mercado, respectivamente. Predecir los estados futuros implica conocer las posibilidades o probabilidades de cambio del sistema de un estado a otro. Para un problema en particular, tales probabilidades se pueden recolectar y colocar en una matriz o tabla. Esta matriz de probabilidades de transición muestra la probabilidad de que el sistema cambie de un periodo al siguiente. Este es el proceso de Markov que nos permite predecir los estados o las condiciones futuras.

Al igual que muchas otras técnicas cuantitativas, el análisis de Markov se puede estudiar con cualquier nivel de profundidad y complejidad. Por fortuna, los requisitos matemáticos más importantes son tan solo saber cómo realizar operaciones y manipulaciones básicas con matrices, y resolver conjuntos de ecuaciones con varias incógnitas.

Enfocamos nuestra presentación a los procesos de Markov que cumplen con cuatro suposiciones:

1. Existe un número limitado o finito de estados posibles.
2. La probabilidad de cambiar de estados permanece igual con el paso del tiempo.
3. Podemos predecir cualquier estado futuro a partir de los estados anteriores y de la matriz de probabilidades de transición.
4. El tamaño y la composición del sistema (es decir, el número total de fabricantes y clientes) no cambia durante el análisis.

Los estados sirven para identificar todas las condiciones posibles de un proceso o sistema. Por ejemplo, una máquina puede estar en uno de dos estados en cualquier momento: funcionar correctamente o no funcionar correctamente. Podemos llamar a la operación adecuada de la máquina el primer estado, y llamar al funcionamiento incorrecto el segundo estado. Sin duda, es posible identificar los estados específicos para muchos procesos o sistemas. Si hay solamente tres tiendas de abarrotes en un pueblo pequeño, un residente puede ser cliente de cualquiera de las tres tiendas en cierto momento. Por lo tanto, hay tres estados correspondientes a las tres tiendas. Si los estudiantes puede tomar una de tres especialidades en el área de administración (digamos, ciencias de la administración, sistemas de información gerencial o administración general), cada una de las tres se considera un estado.

En un análisis de Markov también suponemos que los estados son tanto *colectivamente exhaustivos* como *mutuamente excluyentes*. Colectivamente exhaustivos significa que podemos numerar todos los estados posibles de un sistema o proceso. Nuestro estudio del análisis de

Markov supone que hay un número finito de estados para cualquier sistema. Mutuamente excluyentes significa que un sistema puede estar tan solo en un estado en cualquier momento. Un estudiante puede estar únicamente en una de las tres áreas de especialidad en administración, y *no* en dos o más áreas al mismo tiempo. También significa que una persona únicamente puede ser cliente de *una* de las tres tiendas de abarrotes en un punto en el tiempo.

Después de identificar los estados, el siguiente paso consiste en determinar la probabilidad de que el sistema esté en dicho estado, cuya información se coloca entonces en un vector de probabilidades de estado.

$$\pi(i) = \text{vector de probabilidades de estado para el periodo } i$$
$$= (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n)$$

donde

$$n = \text{número de estados}$$
$$\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n = \text{probabilidad de estar en el estado 1, estado 2,..., estado } n$$

En algunos casos donde solo manejamos un artículo, como una máquina, es posible saber con total certidumbre en qué estado se encuentra el artículo. Por ejemplo, si investigamos tan solo una máquina, sabríamos que en este momento funciona correctamente. Entonces, el vector de estado se representa como: **$\pi(1) = (1,0)$.**

donde **:**

$\pi(1)$ = vector de estado para la máquina en el periodo 1

$\pi_1 = 1$ = probabilidad de estar en el primer estado

$\pi_2 = 0$ = probabilidad de estar en el segundo estado

Esto muestra que la probabilidad de que la máquina funcione correctamente, estado 1, es 1; y que la probabilidad de que la máquina funcione de manera incorrecta, estado 2, es 0 para el primer periodo. Sin embargo, en la mayoría de los casos, tenemos que estudiar más de un artículo.

Problema 13 (**Libro Métodos cuantitativos para negocios/Render-Stair-Hanna/capítulo 15, Análisis de Markov/ página 575/ Problema de Análisis de Markov)**

Veamos el vector de estados para los clientes en el pequeño pueblo con tres tiendas de abarrotes. Puede haber un total de 100,000 personas que compran en las tres tiendas durante un mes dado. Unas 40,000 personas compran en American Food Store, que se llamará estado 1. Por otro lado, 30,000 pueden compraren Food Mart, que se llamará estado 2; y 30,000 pueden comprar en Atlas Foods, que será el estado 3. La probabilidad de que una persona compre en una de las tres tiendas es la siguiente:

Estado 1: American Food Store	40,000/100,000 = 0.40 = 40%
Estado 2: Food Mart	30,000/100,000 = 0.30 = 30%
Estado 3: Atlas Foods	30,000/100,000 = 0.30 = 30%

Estas probabilidades se colocan en el vector de probabilidades de estado como:$\pi(1)=(0.4,0.3,0.3)$
Dónde:

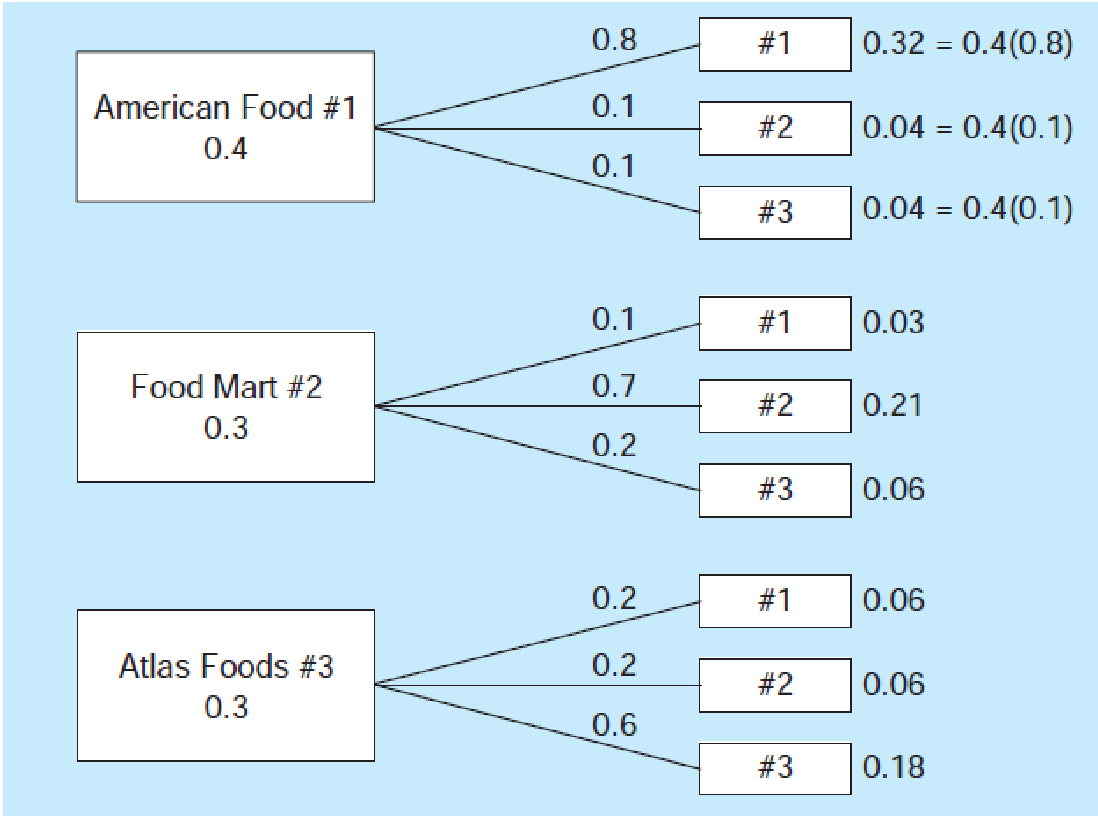
$\pi(1)$ =vector de probabilidades de estado para tres tiendas en el periodo 1
π_1 = 0.4 = probabilidad de que una persona compre en American Food, estado 1
π_2 = 0.3 = probabilidad de que una persona compre en Food Mart, estado 2
π_3 = 0.3 = probabilidad de que una persona compre en Atlas Foods, estado 3

También debería observarse que las probabilidades en el vector de estado para las tres tiendas de abarrotes representan la participación en el mercado para las mismas en el primer periodo. Así, en el periodo 1 Amercan Food tiene 40% el mercado; Food Mart, 30%; y Atlas Foods, 30%. Cuando se trata de participación en el mercado, estos se pueden utilizar en vez de los valores de probabilidad.

La gerencia de las tres tiendas debería estar interesada en la manera en que cambian sus participaciones de mercado con el paso del tiempo. Los clientes no siempre compran en una tienda, sino que quizá vayan a una tienda diferente para su siguiente compra. En este ejemplo, se realizó un estudio para determinar la lealtad de los clientes. Se determinó que 80% de los clientes que compran en American Food un mes regresarán a esa tienda el siguiente. Del otro 20% de sus clientes, 10% cambia a Food Mart y 10% a Atlas Foods en su siguiente compra. Para los clientes que compran este mes en Food Mart, 70% regresan, 10% cambia a American Food y 20% a Atlas Foods. De los clientes que compran este mes en Atlas Foods, 60% regresan, pero 20% cambiará a American Food y 20% a Food Mart.

La gráfica siguiente presenta un diagrama de árbol que ilustra la situación. Observe que de la participación de mercado de 40% para American Food este mes, 32% (0.40 X 0.80 = 0.32) regresa, 4% compra en Food Mart y 4% compra en Atlas Foods. Para encontrar la participación de mercado de American el siguiente mes, sumamos este 32% de clientes que regresan al 3% de quienes vienen de Food Mart y al 6% de quienes vienen de Atlas Foods. Entonces, American Food tendrá 41% del mercado el próximo mes.

Aunque el diagrama de árbol y los cálculos que se acaban de ilustrar quizá sean útiles para encontrar las probabilidades de estado para el siguiente mes y el otro mes que sigue, pronto se volvería muy grande. En vez de usar un diagrama de árbol, es más sencillo usar una matriz de probabilidades de transición, la cual se utiliza con las probabilidades de estado actuales para predecir las condiciones futuras.



El concepto que nos permite ir de un estado actual, como las participaciones en el mercado, a un estado futuro es la *matriz de probabilidades de transición*. Se trata de una matriz de probabilidades condicionales de estar en un estado futuro dado que estamos en el estado actual. La siguiente definición es útil:

Sea P_{ij} = probabilidad condicional de estar en el estado j en el futuro, dado que el estado actual es i

Por ejemplo, P_{12} es la probabilidad de estar en el estado 2 en el futuro, dado que el evento estaba en el estado 1 en el periodo anterior.

Definimos P = matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_{m1} & & \cdots & & P_{mn} \end{bmatrix}$$

Los valores P_{ij} individuales casi siempre se determinan en forma empírica. Por ejemplo, si observamos al paso del tiempo que 10% de las personas que actualmente compran en la tienda 1 (o estado 1) comprarán en la tienda 2 (estado 2) el siguiente periodo, entonces, sabemos que P_{12} =0.1 o 10%.

Probabilidades de transición para las tres tiendas de abarrotes

Usamos los datos históricos de las tres tiendas para determinar qué porcentaje de clientes cambiaría cada mes. Ponemos estas probabilidades de transición en la siguiente matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Recuerde que American Foods representa el estado 1, Food Mart es el estado 2 y Atlas Foods es el estado 3. El significado de sus probabilidades se expresa en términos de los diferentes estados, como sigue:

***Renglón* 1**

0.8= P_{11} = probabilidad de estar en el estado 1 después de estar en el estado 1 el periodo anterior
0.1 = P_{12} =probabilidad de estar en el estado 2 después de estar en el estado 1 el periodo anterior
0.1 = P_{13} =probabilidad de estar en el estado 3 después de estar en el estado 1 el periodo anterior

***Renglón* 2**

0.1 = P_{21}= probabilidad de estar en el estado 1 después de estar en el estado 2 el periodo anterior
0.7 = P_{22} = probabilidad de estar en el estado 2 después de estar en el estado 2 el periodo anterior
0.2 = P_{23} = probabilidad de estar en el estado 3 después de estar en el estado 2 el periodo anterior

***Renglón* 3**

0.2 = P_{31} = probabilidad de estar en el estado 1 después de estar en el estado 3 el periodo anterior
0.2 = P_{32} = probabilidad de estar en el estado 2 después de estar en el estado 3 el periodo anterior
0.6 = P_{33} = probabilidad de estar en el estado 3 después de estar en el estado 3 el periodo anterior

Observe que las tres probabilidades en el renglón superior suman 1. Las probabilidades para cualquier renglón en una matriz de probabilidades de transición también suman 1.
Después de determinar las probabilidades de estado y la matriz de probabilidades de transición, es posible predecir las probabilidades de estado futuras.

Predicción de la participación futura en el mercado

Uno de los propósitos del análisis de Markov es predecir el futuro. Dado el vector de probabilidades de estado y la matriz de probabilidades de transición, no es muy difícil determinar las probabilidades de estado en una fecha futura. Con ese tipo de análisis, podemos comparar la probabilidad de que un individuo compre en una de las tiendas en el futuro. Como tal probabilidad es equivalente a la participación en el mercado, es posible determinar participación futura en el mercado para American Food, Food Mart y Atlas Foods. Cuando el periodo actual es 0, calcular las probabilidades de estado para el siguiente periodo (periodo 1) se hace como sigue:

$$\boldsymbol{\pi(1) = \pi(0)P} \qquad *$$

Más aún, si estamos en cualquier periodo n, calculamos las probabilidades de estado para el periodo n +1 como:

π(n+1) = π(n)P **

La ecuación * sirve para contestar la pregunta de las participaciones de mercado del siguiente periodo para las tiendas. Los cálculos son:

$$\begin{aligned}\pi(1) &= \pi(0)P \\ &= (0.4, 0.3, 0.3)\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \\ &= [(0.4)(0.8) + (0.3)(0.1) + (0.3)(0.2), (0.4)(0.1) \\ &\quad + (0.3)(0.7) + (0.3)(0.2), (0.4)(0.1) + (0.3)(0.2) + (0.3)(0.6)] \\ &= (0.41, 0.31, 0.28)\end{aligned}$$

Como se observa, la participación de mercado para American Food y Food Mart aumenta, en tanto que la de Atlas Food disminuye. ¿Continuará esta tendencia en el siguiente periodo y en el que le sigue? De la ecuación **, derivamos un modelo que nos dirá cuáles serán las probabilidades en cualquier periodo futuro. Considere dos periodos a partir de ahora:

$$\pi(2) = \pi(1)P$$

Como sabemos que

$$\pi(1) = \pi(0)P$$

Tenemos

$$\pi(2) = [\pi(1)]P = [\pi(0)P]P = \pi(0)PP = \pi(0)P^2$$

En general,

$$\pi(n) = \pi(0)P^n \qquad ***$$

Entonces, las probabilidades de estado *n* periodos en el futuro se obtienen de las probabilidades de estado actuales y la matriz de probabilidades de transición.

En el ejemplo de las tres tiendas, vimos que American Food y Food Mart incrementaron su participación en el mercado en el siguiente periodo, mientras que para Atlas Food disminuyó. ¿Algún día Atlas perderá todo su mercado? ¿O todas las tiendas llegarán a una condición estable? Aunque la ecuación *** ofrece cierta ayuda para determinarlo, es mejor estudiarlo en términos de condiciones de equilibrio o de estado estable.

$$(\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)$$ **Ec. De equilibrio estable.**

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Con estas ecuaciones podemos determinar la condición estable.

Ahora con el apoyo de POM-QM resolveremos el problema de las tres tiendas.

Hacemos clic en **Module** y después clic en **Markov Analysis** con esto activamos el módulo de análisis de Markov.
Ahora hacemos clic en **New** y se nos muestra la ventana siguiente. Vamos a trabajar con tres estados.
En esta ventana introducimos la distribución de clientes actual y las probabilidades históricas de rotación de los clientes.

Number of transitions 1

Use the scroll bar or the text box to enter the number of transitions.

Análisis de Markov de las tiendas

	Initial	E1	E2	E3
E1	.4	.8	.1	.1
E2	.3	.1	.7	.2
E3	.3	.2	.2	.6

Para ver la solución, indicamos que solo queremos una iteración (P^1) y luego hacemos clic en solve. Se muestra la ventana siguiente.

Edit Data F9

1 Markov Analysis Results
2 Multiplications
3 State analysis

1. Resultados del Analisis de Markov
2. Multiplicaciones
3. Análisis de Estados

Markov Analysis Results

Análisis de Markov de las tiendas 1 step transition matrix

	E1	E2	E3
E1	.8	.1	.1
E2	.1	.7	.2
E3	.2	.2	.6
Ending probability (given initial)	.41	.31	.28
Steady State probability	.42	.32	.26

Multiplications

Análisis de Markov de las tiendas solution

	E1	E2	E3
End of Period 1			
E1	.8	.1	.1
E2	.1	.7	.2
E3	.2	.2	.6
End prob (given initial)	.41	.31	.28

State analysis

Análisis de Markov de las tiendas solution

State	Type	Class number
E1	Recurrent	1
E2	Recurrent	1
E3	Recurrent	1

- **Def.: Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias parametrizadas por el tiempo.**

- **Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias definida sobre un espacio de probabilidad. Es decir:**

$$\{X_t : \Omega \to \Re, \quad t \in T\}$$

Necesitamos una herramienta que modele procesos aleatorios en el tiempo, y para ello usaremos los *procesos estocásticos.*

$$\omega \to X_t(\omega) = X(\omega, t)$$

- **Tendremos que *X* es una función de dos argumentos. Fijado $\omega = \omega_0$, obtenemos una**

$$X(\cdot, \omega_0) : T \to \Re \qquad\qquad t \to X(t, \omega_0)$$

función determinista (no aleatoria):

- **Asimismo, fijado $t=t_0$, obtenemos una de las variables aleatorias de la familia:**
- **El espacio de estados S de un proceso estocástico es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar dicho proceso:**

$$S = \{X_t(\omega) \mid t \in T \wedge \omega \in \Omega\} \qquad\qquad X(t_0, \cdot) : \Omega \to \Re$$

$$\omega \to X(t_0, \omega)$$

Ejemplo de proceso estocástico discreto:

- Lanzamos una moneda al aire 6 veces. El jugador gana $1 cada vez que sale cara (C), y pierde $1 cada vez que sale cruz (F).
- X_i = estado de cuentas del jugador después de la *i*- ésima jugada
- La familia de variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots, X_6\}$ constituye un proceso estocástico

  Solución:

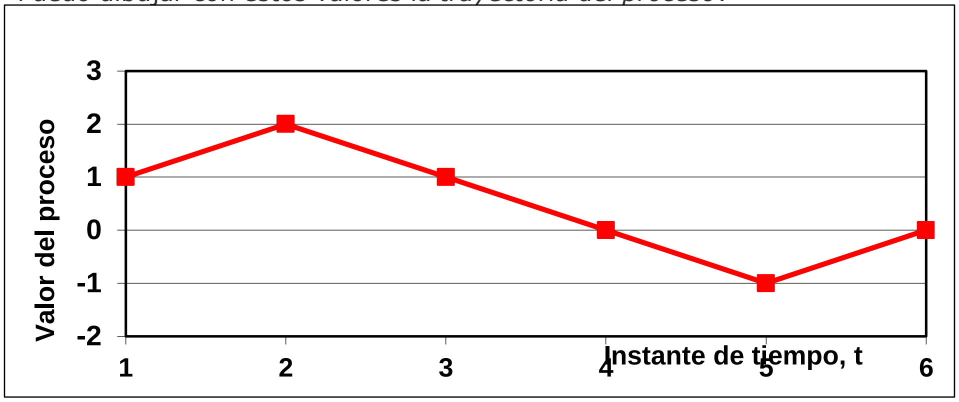
- Ω={CCCCCC,CCCCCF,…,FFFFFF} conjunto de sucesos posibles
- cardinal(Ω) = 2^6 = 64 Total de sucesos
- ω suceso del conjunto Ω
- $P(\omega)=1/64 \quad \forall\ \omega\in\Omega$ La probabilidad de que ocurra cada suceso
- T={1, 2, 3, 4, 5, 6} Conjuntos de Tiempos t
- S={–6, –5, …, –1, 0, 1, 2, …, 5, 6} Espacio de probabilidad
- $X_1(\Omega)$={–1, 1} Valores posible de la Variable Aleatoria X_1
- $X_2(\Omega)$={–2, 0, 2} Valores posible de la Variable Aleatoria X_2
- $X_3(\Omega)$={–3,-1, 1,3} Valores posible de la Variable Aleatoria X_3
- $X_4(\Omega)$={–4,-2, 0,2,4} Valores posible de la Variable Aleatoria X_4
- $X_5(\Omega)$={–5,-3-1, 1,3,5} Valores posible de la Variable Aleatoria X_5
- $X_6(\Omega)$={–6,-4,-2,0, 2,4,6} Valores posible de la Variable Aleatoria X_6

Si fijo ω, por ejemplo ω_0=CCFFFC (un suceso particular), obtengo una secuencia de valores completamente determinista:

$X_1(\omega_0)=1$ $X_2(\omega_0)=2$ $X_3(\omega_0)=1$

$X_4(\omega_0)=0$ $X_5(\omega_0)= -1$ $X_6(\omega_0)= 0$

- Puedo dibujar con estos valores la *trayectoria del proceso*:



Si fijo t, por ejemplo t_0=3, obtengo una de las variables aleatorias del proceso:

$$X_3 : \Omega \to \Re \qquad\qquad \omega \to X_3(\omega)$$

Los posibles valores que puede tomar el proceso en t_0=3 son: $X_3(\Omega)$={–3, –1, 1, 3}

Podemos hallar la probabilidad de que el proceso tome uno de estos valores:

$$P[X_3(\omega)=1]=P[CFC]+P[CCF]+P[FCC]=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P[X_3(\omega)=3]=P[CCC]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P[X_3(\omega)=-1]=P[FCF]+P[FFC]+P[CFF]=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P[X_3(\omega)=-3]=P[FFF]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Def.: Cadena de Markov

Las cadenas de Markov a tiempo discreto son modelos probabilísticos (estocásticos) que se usan para predecir la evolución y el comportamiento a corto y a largo plazo de determinados sistemas. Ejemplos: reparto del mercado entre marcas; dinámica de las averías de máquinas para decidir política de mantenimiento; evolución de una enfermedad,…

- Una Cadena de Markov (CM) es:
    - Un proceso estocástico
    - Con un número finito de estados (M)
    - Con probabilidades de transición estacionarias
    - Que tiene la propiedad Markoviana

Propiedad Markoviano:

- Conocido el estado del proceso en un momento dado, su comportamiento futuro no depende del pasado. Dicho de otro modo, “dado el presente, el futuro es independiente del pasado”
- Sólo estudiaremos las cadenas de Markov, con lo cual tendremos espacios de estados S discretos y conjuntos de instantes de tiempo T también discretos, T={t_0, t_1, t_2,…}
- Las CM están completamente caracterizadas por las probabilidades de transición en una etapa.

$$P\left[X_{t+1}=j \middle/ X_t=i\right], \quad i, j \in S, t \in T$$

$$\forall i, j \in S \ \forall\, t \in T, P\left[X_{t+1}=j \middle/ X_t=i\right]=q_{ij}$$

- Sólo trabajaremos con CM homogéneas en el tiempo, que son aquellas en las que

  donde q_{ij} se llama probabilidad de transición en una etapa desde el estado i hasta el estado j

$$Q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \left(q_{ij}\right)_{i,j\in S}$$

Matriz de transición: Los q_{ij} se agrupan en la denominada matriz de transición de la CM:

Propiedades de la matriz de transición:

1. Por ser los q_{ij} probabilidades

   $$\forall i, j \in S, \quad q_{ij} \in [0,1]$$

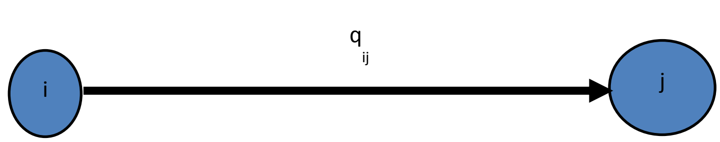
2. Por ser 1 la probabilidad del suceso seguro, cada fila ha de sumar 1, es decir,

   $$\forall i \in S, \quad \sum_{j\in S} q_{ij} = 1$$

3. Una matriz que cumpla estas dos propiedades se llama matriz estocástica

Diagrama de transición de estados (DTE)

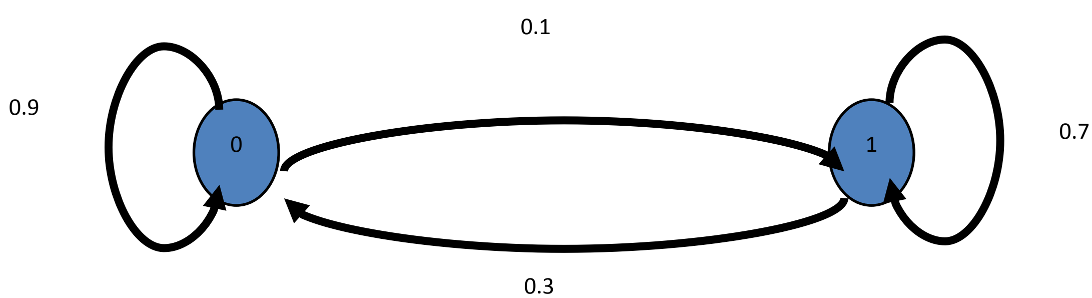
El diagrama de transición de estados (DTE) de una CM es un grafo dirigido cuyos nodos son los estados de la CM y cuyos arcos se etiquetan con la probabilidad de transición entre los estados que unen. Si dicha probabilidad es nula, no se pone arco.



Ejemplo: línea telefónica:

Sea una línea telefónica de estados ocupado=1 y desocupado=0. Si en el instante t+1 está ocupada, en el instante t+1 estará ocupada con probabilidad 0.7 y desocupada con probabilidad 0.3. Si en el instante t está desocupada con probabilidad 0.9, en el t+1 estará ocupada con probabilidad 0.1.

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$



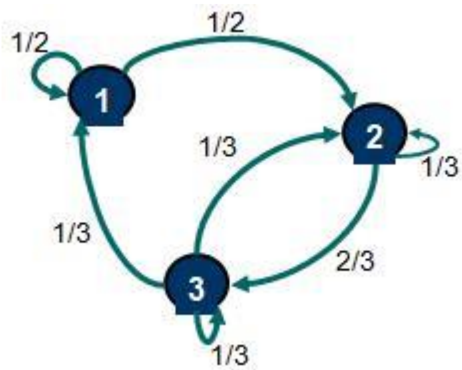
Tipos de estados y Cadenas de Markov

Podemos considerar $f_{ij}^{(n)}$ para (n=1,2,..) como la función de probabilidad de la variable aleatoria tiempo de primera pasada

Para la clasificación de estados de una Cadena de Markov en tiempo discreto utilizaremos 2 ejemplos:

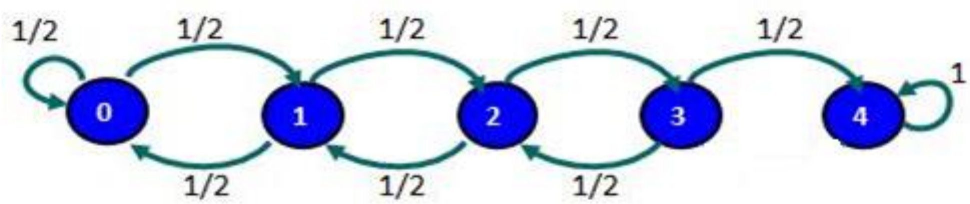
Ejemplo 1:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \textit{1} & \textit{2} & \textit{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}$$



	0	1	2	3	4
0	1/2	1/2	0	0	0
1	1/2	0	1/2	0	0
2	0	1/2	0	1/2	0
3	0	0	1/2	0	1/2
4	0	0	0	0	1

Ejemplo 2:



Si existe una probabilidad no nula que comenzando en un estado i se pueda llegar a un estado j al cabo de un cierto número de etapas (digamos n) se afirma que el estado j es **accesible** desde el estado i. Si consideramos el ejemplo 1 podemos afirmar que el estado 3 es accesible desde el estado 1. Aun cuando en una etapa no podemos llegar desde el estado 1 al estado 3, si podemos hacerlo al cabo de 2, 3, ..., n etapas. Cabe destacar en este punto que es relevante que exista una probabilidad no nula que comenzando en 1 se pueda llegar a 3 al cabo de un cierto número de etapas no importando el valor exacto de esta probabilidad para un n cualquiera. En cuanto al ejemplo 2, se puede verificar que el estado 2 es accesible desde el estado 3, sin embargo, el estado 2 no es accesible desde el estado 4 (esto porque una vez que se llega al estado 4 no se sale de ese estado). Finalmente, **dos estados que son accesibles y viceversa se dice que se comunican y que pertenecen a una misma clase de estados**.

Una Cadena de Markov donde todos sus estados son accesibles entre sí y por tanto se comunican se dice que es **irreducible**, es decir, que existe una **única clase de estados**. Este es el caso del ejemplo 1.

En cambio sí al menos existen 2 clases de estados la cadena ya no es irreducible. Si tenemos **2 estados que no se comunican** (esto porque no son accesibles y viceversa) estos estados **pertenecerán a distintas clases de estados**. En el ejemplo 2 existen dos clases de estados {0,1,2,3}, {4} (en consecuencia no es una cadena irreducible). En cuanto al estado 0,1,2 y 3 son **transitorios** y en el caso del estado 4, es **absorbentes** debido a que una vez que se accede a él la probabilidad de seguir en ese estado es de un 100%. Un estado absorbente define una clase de estados por sí mismo.

Una definición adicional es la periodicidad de un estado. Un estado se dice que tiene periodo d, para el mayor valor entero de d que cumpla:

$$p_{ii}^{(n)} = \mathrm{IP}(X_n = i / X_0 = i) > 0$$

Sólo para valores de n pertenecientes al conjunto {d, 2d, 3d, ...}. Si d=1 decimos que el estado es **aperiódico**. En otras palabras, un estado es **periódico** si, partiendo de ese estado, sólo es posible volver a él en un número de etapas que sea múltiplo de un cierto número entero mayor que uno

En el ejemplo 1 todos los estados son aperiódicos. En el ejemplo 2 los estados 1, 2 y 3 son periódicos con periodo d=2, es decir, que comenzando, por ejemplo, en el estado 1, la probabilidad de volver al mismo estado es sólo no nula para una cierta cantidad de pasos o etapas múltiplo de 2.

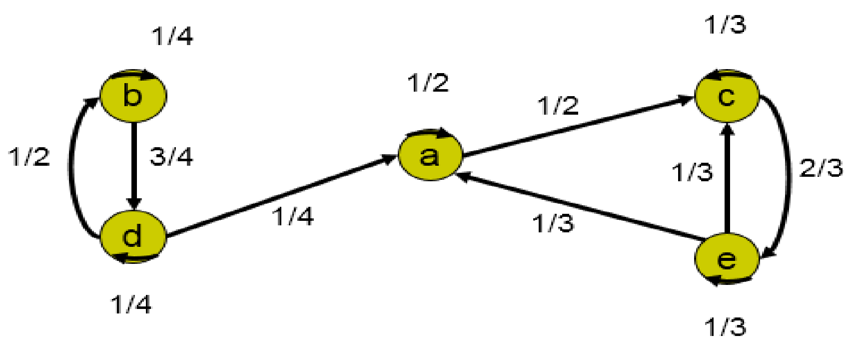
Un estado es **recurrente** en la medida que comenzando en él se tenga la certeza de volver en algún momento del tiempo (una determinada cantidad de etapas) sobre sí mismo. Alternativamente, un estado es **transitorio** si no se tiene la certeza de volver sobre sí mismo. En el ejemplo 1 todos los estados son recurrentes. En el ejemplo 2 los estados 0,1, 2 y 3 son transitorios debido a que si se comienza en cualquiera de ellos no se puede asegurar con certeza que se volverá al mismo estado en algún momento (esto debido a que existe una probabilidad no nula de acceder a un estado absorbente: 4. Los estados absorbentes por definición son estados recurrentes.

Si tenemos una Cadena de Markov que tiene una cantidad finita de estados e identificamos un estado recurrente, este será **recurrente positivo**. Si la cantidad de estados es infinito entonces un estado recurrente será **recurrente nulo**.

- Sea *X* una CM finita. Diremos que *X* es Ergódica si es irreducible, recurrente y aperiódica.
- **Ejemplo:** Analizar la siguiente CM, con S={a, b, c, d, e}:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- 1º Dibujar el DTE:

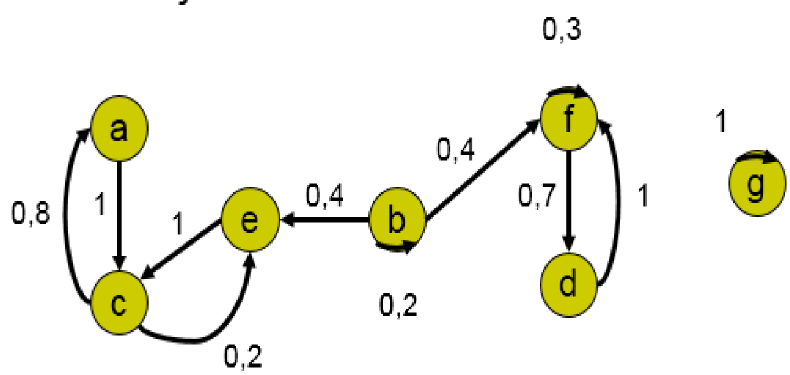


- 2º Clasificar los estados
  - Recurrentes: a, c, e
  - Transitorios: b, d
  - Periódicos: ninguno
  - Absorbentes: ninguno

Ejemplo: Analizar la siguiente CM, con S={a, b, c, d, e, f, g}:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1º Dibujar el DTE:



Recurrentes: **a, c, e , d, f**

Transitorios: b

Absorbente: g

Ejemplo
La matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los estados 0 y 4 son absorbentes, y por lo tanto son recurrentes. Veamos que los otros estados, 1, 2 y 3, son transitorios.

Si estamos en 1 y la cadena pasa a 0, nunca regresará a 1, de modo que la probabilidad de nunca regresar a 1 es

---

Ejemplo
Determine cuáles estados son recurrentes y cuáles transitorios para la cadena de Markov con la siguiente matriz de transición.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

La siguiente gráfica presenta las transiciones posibles (en un paso) entre estados diferentes para esta cadena

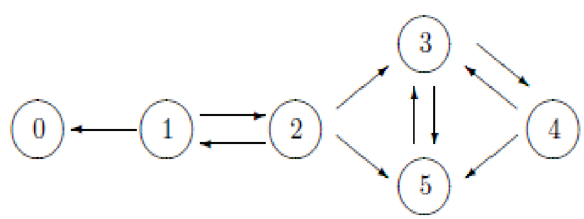


Figura 2.2

Vemos que hay tres clases de equivalencia $\{0\}$; $\{1, 2\}$ y $\{3, 4, 5\}$. La primera clase es recurrente porque 0 es un estado absorbente. La clase $\{1, 2\}$ es transitoria porque es posible salir de ella y no regresar nunca, por ejemplo, pasando de 1 a 0. Finalmente, la tercera clase es recurrente. ▲

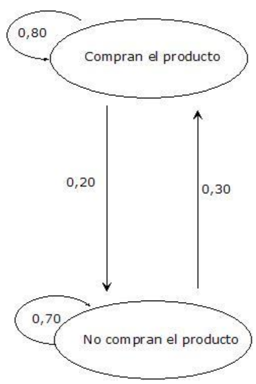
PROBLEMAS RESUELTOS DE CADENAS DE MARKOV

I. El departamento de estudios de mercado de una fábrica estima que el 20% de la gente que compra un producto un mes, no lo comprará el mes siguiente. Además, el 30% de quienes no lo compren un mes lo adquirirá al mes siguiente. En una población de 1000 individuos, 100 compraron el producto el primer mes. ¿Cuántos lo comprarán al mes próximo? ¿Y dentro de dos meses?

Solución:

Para resolver este tipo de problemas, lo primero es hacer un esquema.

A la vista del esquema podemos pasar a construir la matriz de probabilidades de transición:



Del 100% de clientes que compra en un mes un producto el 20% no compra el mes siguiente, o sea el 80% lo sigue comprando el siguiente mes.

Del 100% de clientes que quienes no lo compran en un mes, solo el 30% lo adquieren el mes siguiente. O sea el 70% no lo compran el siguiente mes.

Cálculo: con esa información construimos la matriz 2x2. $P^{(0)}$ representa la situación inicial.

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$(C,\ N) = (100 \quad 900)\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = (350{,}650)$$

El primer mes comprarán C=350 y no comprarán N=650

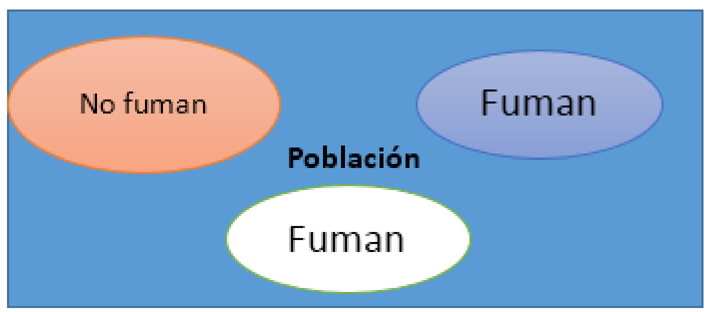
$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix}$$

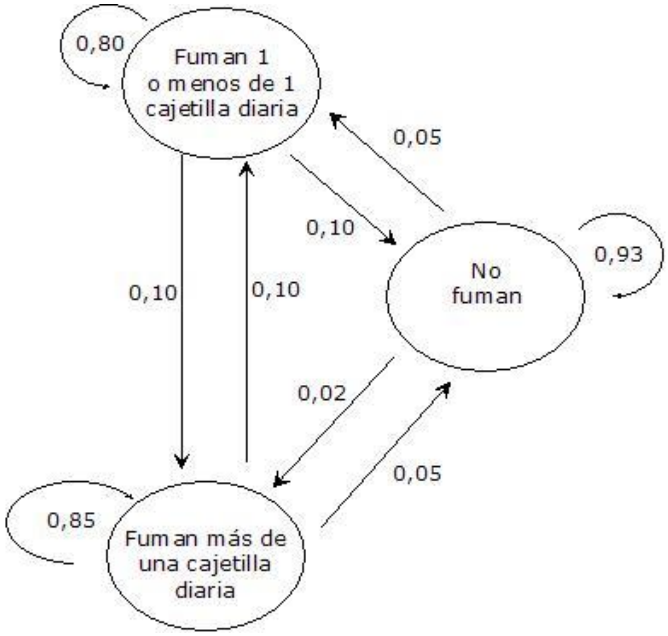
$$(C,\ N) = (100 \quad 900)\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix} = (475{,}525)$$

El segundo mes comprarán C=475 y no comprarán N= 525

II. En una población de 10,000 habitantes, 5000 no fuman, 2500 fuman uno o menos de un paquete diario y 2500 fuman más de un paquete diario. En un mes hay un 5% de probabilidad de que un no fumador comience a fumar un paquete diario, o menos, y un 2% de que un no fumador pase a fumar más de un paquete diario. Para los que fuman un paquete, o menos, hay un 10% de probabilidad de que dejen el tabaco, y un 10% de que pasen a fumar más de un paquete diario. Entre los que fuman más de un paquete, hay un 5% de probabilidad de que dejen el tabaco y un 10% de que pasen a fumar un paquete, o menos. ¿Cuántos individuos habrá de cada clase el próximo mes?

Solución:





$P^{(1)} =$

	0	1	2
0	0.93	0.05	0.02
1	0.10	0.80	0.10
2	0.05	0.10	0.85

NF= No fuman
FC= fuman uno o menos de un paquete diarios
FCC= fuman más de un paquete diario.

$$(NF, FC, \mathrm{FCC}) = (5000\ 2500\ 2500)\begin{pmatrix} 0.93 & 0.05 & 0.02 \\ 0.10 & 0.80 & 0.10 \\ 0.05 & 0.10 & 0.85 \end{pmatrix} = (5025, 2500, 2475)$$

Después de un mes habrán NF=5025, FC=2500, FCC=2475

III. Una urna contiene dos bolas sin pintar. Se selecciona una bola al azar y se lanza una moneda. Si la bola elegida no está pintada y la moneda produce cara, pintamos la bola de rojo; si la moneda produce cruz, la pintamos de negro. Si la bola ya está pintada, entonces cambiamos el color de la bola de rojo a negro o de negro a rojo, independientemente de si la moneda produce cara o cruz.

a) Modele el problema como una cadena de Markov y encuentre la matriz de probabilidades de transición.

Solución:

a) Identificando estados:
Vamos a utilizar vectores con el siguiente formato: [S R N] donde S es el número de bolas sin pintar, R el número de bolas rojas y N el número de bolas negras que hay en la urna.

E0: [0 1 1] Una bola roja y una negra.
E1: [0 2 0] Dos bolas rojas.
E2: [0 0 2] Dos bolas negras.
E3: [2 0 0] Inicialmente, cuando las dos bolas están sin pintar.
E4: [1 1 0] Una bola pintada de rojo.
E5: [1 0 1] Una bola pintada de negro.

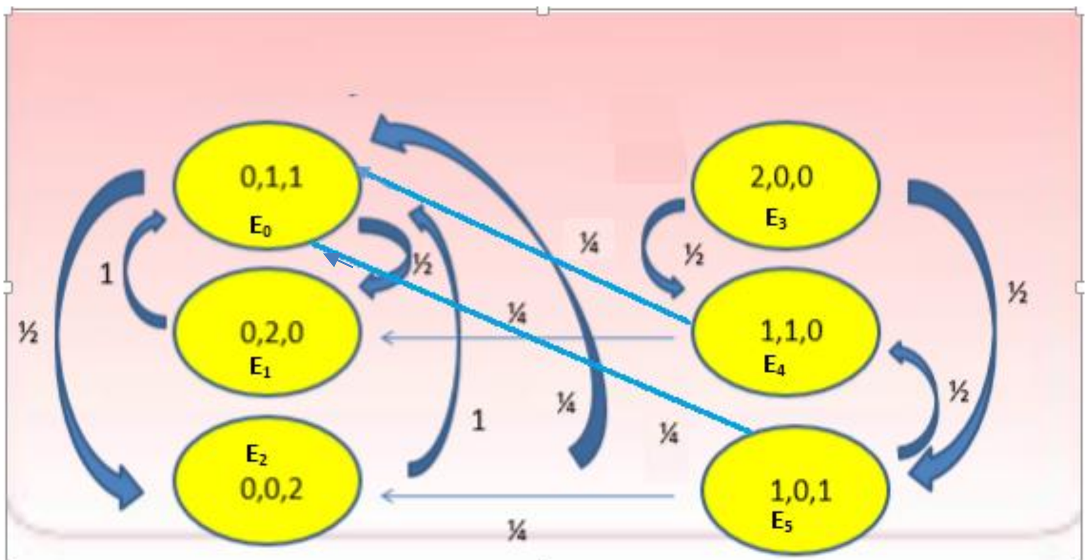
Probabilidades de transición:
Como el estado de la urna después del siguiente lanzamiento de la moneda depende solo del pasado del proceso hasta el estado de la urna después del lanzamiento actual, se trata de una cadena de Markov. Como las reglas no varían a través del tiempo, tenemos una cadena estacionaria de Markov. La matriz de transición es la siguiente:

Cálculos de las probabilidades de transición si el estado actual es (1 1 0):

EVENTO	PROBABILIDAD	ESTADO NUEVO
Sacar cara en el lanzamiento y escoger una bola sin pintar	¼	(0 2 0)
Escoger bola roja	½	(1 0 1)
Sacar cruz en el lanzamiento y escoger una bola sin pintar	¼	(0 1 1)

Para ver cómo se forma la matriz de transición, determinamos la fila (1 1 0)

Si el estado actual (1 1 0), entonces debe suceder uno de los eventos que aparecen en la tabla anterior. Así, el siguiente estado será (1 0 1) con la probabilidad ½; (0 2 0) con probabilidad ¼ y (0 1 1) con probabilidad ¼. En la siguiente imagen se da la



representación gráfica de esta matriz de transición.

$$
= \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\
1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

IV. En un pueblo, al 90% de los días soleados le siguen días soleados, y al 80% de los días nublados le siguen días nublados. Con esta información modelar el clima del pueblo como una cadena de Markov.

SOLUCIÓN:
Se trata de una cadena de Markov con dos estados {Soleado, Nublado} que para abreviar representaremos por {S, N}, siendo la matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

V. El ascensor de un edificio con bajo y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. El piso en el que finaliza el viaje n-ésimo del ascensor sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del bajo se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25% de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en el bajo. Se pide:

a) Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena
b) Dibujar el gráfico asociado.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos.

SOLUCIÓN:

a) Los estados de la cadena los denotaremos por $\{0, 1, 2\}$ haciendo corresponder el 0 al bajo y 1 y 2 al primer y segundo piso respectivamente. Las probabilidades de transición son:

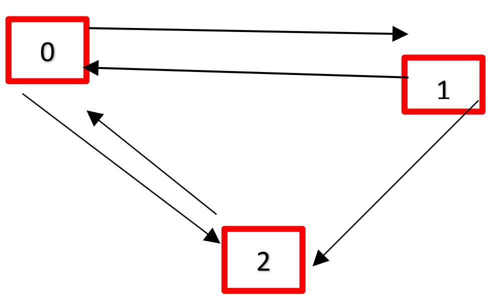
P_{00}= P(R_n=0/R_{n-1}=0), esto es la probabilidad de que el ascensor se encuentre en la planta baja si en la etapa anterior estaba en la planta baja. Obviamente es 0, porque se supone que de etapa a etapa el ascensor se mueve.

P_{01}= P(R_n=1/R_{n-1}=0), esto es la probabilidad de que el ascensor se encuentre en la planta primera si en la etapa anterior estaba en la planta baja. Obviamente es ½. Basta leer el enunciado .Y así sucesivamente vamos obteniendo las distintas probabilidades de

$$P = \begin{pmatrix} p00 & p01 & p02 \\ p10 & p11 & p12 \\ p20 & p21 & p22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

transición cuya matriz es:

b)



b) $\vec{q} \cdot P = \vec{q}$ siendo q = (x,y,z) los valores de las probabilidades pedidas, añadiendo la ecuación x+ y+ z = 1

$(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad z)$, añadiendo x + y + z = 1. Produce el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 4z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Cuyas soluciones son x=8/17 ; y=4/17; z=5/17

VI. Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y allí pernocta, desplazándose a otra ciudad al día siguiente, si no tiene suficiente trabajo. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0.4, la de tener que viajar a B es 0.4 y la de tener que ir a A es 0.2. Si el viajante duerme un día en B, con probabilidad de un 20% tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60% de los casos viajará a C, mientras que irá a A con probabilidad 0.2. Por último si el agente comercial trabaja todo un día en A, permanecerá en esa misma ciudad, al día siguiente, con una probabilidad 0.1, irá a B con una probabilidad de 0.3 y a C con una probabilidad de 0.6.

a) Si hoy el viajante está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?

b) ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?

SOLUCIÓN:

a) La matriz de transición P es la siguiente para el orden A, B, C.

$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$ El inciso a) consiste en averiguar el término P_{33}^4, es decir el término que ocupa la tercera fila y la tercer columna de la matriz P^4, lo cual se obtiene con la fila 3 y columna 3 de P^2, cuyos valores son.

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{100} & \frac{33}{100} & \frac{12}{25} \\ \frac{9}{50} & \frac{17}{50} & \frac{12}{25} \\ \frac{9}{50} & \frac{3}{10} & \frac{13}{25} \end{bmatrix}$$

$$P^4=P^2*P^2= \begin{bmatrix} \frac{19}{100} & \frac{33}{100} & \frac{12}{25} \\ \frac{9}{50} & \frac{17}{50} & \frac{12}{25} \\ \frac{9}{50} & \frac{3}{10} & \frac{13}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{19}{100} & \frac{33}{100} & \frac{12}{25} \\ \frac{9}{50} & \frac{17}{50} & \frac{12}{25} \\ \frac{9}{50} & \frac{3}{10} & \frac{13}{25} \end{bmatrix}$$

P^4= 9/50 * 12/25 + 3/10*12/25 + 13/25*13/25 =0.0864+0.1440+0.2704=**0.5008**

b) Nos piden las probabilidades estacionarias. Para ello hay que resolver el Siguiente sistema:

$$(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.20 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad z);\ x + y + z = 1$$

Desarrollando resulta el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -9x + 2y + 2z = 0 \\ 3x - 8y + 4z = 0 \\ 6x + 6y - 6z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Elimino *y* en las dos primeras: -33x+12z = 0, y elimino y

en las dos últimas: 12z=6 ; de ambas se deduce que: **x** =2/11=0.1818; **y** = 7/22 =0.3181; **z** = 0.5. En porcentajes serían el 18.18% para la ciudad A, el 31.81 para B y el 50% para la ciudad C.

VII. Suponga que toda la industria de refresco produce dos colas: Coca Cola y Pepsi Cola. Cuando una persona ha comprado Coca Cola hay una probabilidad de 90% de que siga comprándola la vez siguiente. Si una persona compró Pepsi, hay 80% de que repita la vez siguiente. Se pide:

a) Si una persona actualmente es comprador de Pepsi. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas dos compras a partir de hoy?
b) Si en la actualidad una persona es comprador de Coca Cola. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas tres compras a partir de ahora?
c) Supongamos que el 60% de toda la gente toma hoy Coca Cola y el 40% Pepsi. A tres compras a partir de ahora, ¿Qué fracción de los compradores estará tomando Coca Cola?.

SOLUCIÓN:

La situación se puede modelar como una cadena de Markov con dos estados {Coca-Cola, Pepsi-Cola}= {C, P}. La matriz de transición para el orden C,P, es:

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

a) Se pide la probabilidad de transición en dos pasos, es decir que se pide el valor en fila 2, columna 1 para la matriz P^2, obteniéndose que este es : 0.2.0.9 + 0.8.0.2 =**0.34**

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{pmatrix}$$

b) Al igual que en el apartado anterior se pide el valor de probabilidad de transición en fila 1 y columna 1 para la matriz P^3. La matriz es:

$$P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.781 & 0.219 \\ 0.438 & 0.562 \end{pmatrix}$$

La solución **0.781** de que una persona que consume Coca cola pasada tres compra consuma Coca cola.

c) El vector de probabilidad inicial es (0.6, 0.4), por tanto la probabilidad de consumir ambos estados a partir de tres etapas es:

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.781 & 0.219 \\ 0.438 & 0.562 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6438 & 0.3562 \end{pmatrix}$$

esto es que al cabo de tres compras el 64.38% comprará Coca Cola y el 35.62% comprará Pepsi Cola.

d) El estado estable se determina resolviendo el sistema de ecuaciones:

$(x \quad y)\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (x \quad y)$ Añadiendo la ecuación x + y =1 siendo x la probabilidad de que una persona compre Coca Cola a largo plazo y lo mismo de que compre Pepsi Cola.

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Observe que las dos primeras ecuaciones son iguales, por lo que trabaremos con las dos últimas, resultando x=2/3; y= 1/3

VIII. La cervecería más importante del mundo (Guiness) ha contratado a un analista de investigación de operaciones para analizar su posición en el mercado. Están preocupados en especial por su mayor competidor (Heineken). El analista piensa que el cambio de marca se puede modelar como una cadena de Markov incluyendo tres estados, los estados G y H representan a los clientes que beben cerveza producida por las mencionadas cervecerías y el estado I representa todas las demás marcas. Los datos se toman cada mes y el analista ha construido la siguiente matriz de transición de los datos históricos.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{G} & \text{H} & \text{I} \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ H \\ I \end{array} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.75 & 0.05 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Cuáles son los porcentajes de mercado en el estado estable para las dos cervecerías grandes?

SOLUCIÓN:

Tres estados {G, H, I}. El problema consiste en resolver el sistema formado por las ecuaciones siguientes:

(*x*, *y*, *z*).*P* = (*x*, *y*, *z*); *x* + *y* + *z* = 1, siendo x la probabilidad de que el consumidor compre G, y de que el consumidor compre H y z la del que consumidor compre I.

De ambas expresiones se obtiene el siguiente sistema:

$$(x \;\; y \;\; z)\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.75 & 0.05 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} = (x \;\; y \;\; z)\text{ ; x + y + z =1}$$

Resolviendo la matriz resulta:

$$\begin{cases} -3x+2y+z=0 \\ 20x-25y+10z=0 \\ 10x+5y-20z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

Cuya solución es: x=9/16; y=10/26; z=7/26

IX. En una comunidad hay 3 supermercados (S1, S2, S3) existe la movilidad de un cliente de uno a otro. El 1 de septiembre, ¼ de los clientes va al S1, 1/3 al S2 y 5/12 al S3 de un total de 10.000 personas. Cada mes el S1 retiene el 90% de sus clientes y pierde el 10% que se va al S2. Se averiguó que el S2 solo retiene el 5% y pierde el 85% que va a S1 y el resto se va a S3, el S3 retiene solo el 40%, pierde el 50% que va al S1 y el 10% va al S2.

a. Establecer la matriz de transición
b. ¿Cuál es la proporción de clientes para los supermercados el 1 de noviembre?
c. Hallar el vector de probabilidad estable.

Solución:

a) La matriz de transición para el orden S1, S2, S3 es:

$$P=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.10 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

b) Para el mes de noviembre (han transcurrido 2 meses desde 1 de septiembre), la proporción de clientes es

$$P^2=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.10 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.10 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.895 & 0.095 & 0.010 \\ 0.8575 & 0.0975 & 0.045 \\ 0.735 & 0.095 & 0.17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}P^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.895 & 0.095 & 0.010 \\ 0.8575 & 0.0975 & 0.045 \\ 0.735 & 0.095 & 0.17 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.816 & 0.096 & 0.088 \end{pmatrix}$$

La proporción es del 81.6% para S1, 9.6% para S2 y 8.8% para S3

c) El vector de probabilidad estable se obtiene resolviendo:
$(x, y, z).P = (x, y, z)$; $x + y + z = 1$

El sistema resultante es:

$$(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.10 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad z)$$

$$\begin{cases} -10x + 85y + 50z = 0 \\ 10x - 95y + 10z = 0 \\ y - 6z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$ de donde y = 2/31, z =1/93; x = 86/93

X. Consumidores de café en el área de Pontevedra usan tres marcas A, B, C. En marzo de 1995 se hizo una encuesta en la que se entrevistó a las 8450 personas que compran café y los resultados fueron:

Compra en el siguiente mes

Compra actual	Marca A	Marca B	Marca C	TOTALES
Marca A = 1690	507	845	338	1690
Marca B = 3380	676	2028	676	3380
Marca C = 3380	845	845	1690	3380
TOTALES	2028	3718	2704	**8450**

a) Si las compras se hacen mensualmente, ¿cuál será la distribución del mercado de café en Pontevedra en el mes de junio?
b) A la larga, ¿cómo se distribuirán los clientes de café?
c) En junio, cual es la proporción de clientes leales a sus marcas de café?

SOLUCIÓN:

a) Con las frecuencias anteriores calculamos las probabilidades de transición, conservando el mismo orden que la tabla (A,B,C) es:

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$ De marzo a junio hay 4 meses, por lo que debemos

obtener la matriz de transición P^4.

$$P^2=\begin{pmatrix}0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.2 & 0.6 & 0.2\\ 0.25 & 0.25 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.2 & 0.6 & 0.2\\ 0.25 & 0.25 & 0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.24 & 0.5 & 0.26\\ 0.23 & 0.51 & 0.27\\ 0.25 & 0.40 & 0.35\end{pmatrix}$$

$$P^4=\begin{pmatrix}0.24 & 0.5 & 0.26\\ 0.23 & 0.51 & 0.27\\ 0.25 & 0.40 & 0.35\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.24 & 0.5 & 0.26\\ 0.23 & 0.51 & 0.27\\ 0.25 & 0.40 & 0.35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.2376 & 0.4790 & 0.2834\\ 0.2375 & 0.4791 & 0.2834\\ 0.2395 & 0.469 & 0.2915\end{pmatrix} \leftarrow \textbf{Junio}$$

b) A la larga se trata de la situación estable:

$$(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix}0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.2 & 0.6 & 0.2\\ 0.25 & 0.25 & 0.5\end{pmatrix}=(x \quad y \quad z);\ x + y + z = 1$$

$$\begin{cases}-7x+2y+2.5z=0\\ 5x-4y+2.5z=0\\ 2x+2y-5z=0\\ x+y+z=1\end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene x = 5/21, y=10/21, z =6/21.

c) En Marzo la proporción de clientes de A es: 2028/8450 = 0.24; para B es 3718/8450 = 0.44 y para C es 2704/8450 = 0.32. En el mes de junio la proporción es:

$$(0.34 \quad 0.44 \quad 0.32)\begin{pmatrix}0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.2 & 0.6 & 0.2\\ 0.25 & 0.25 & 0.5\end{pmatrix}=(0.24 \quad 0.464 \quad 0.296)$$

Es decir 24% para A, 46.4% para B y 29.6% para C.

XI. En cierta ciudad los habitantes pueden tener alguna de las profesiones A, B, C. En cada caso los hijos tienden a seguir la profesión del padre con probabilidades 3/5, 2/3 y ¼ respectivamente. Quienes no siguen la tradición del padre eligen equiprobablemente alguna de las otras dos.

Hallar: a) La distribución porcentual de las profesiones en la próxima generación, si actualmente es de 20% para A, 30% para B y 50% para C. b) Construya el diagrama de transición de estados. c) Clasificar los estados y d) La distribución límite de las generaciones cuando transcurren muchas generaciones. (Estado estable)

Solución:
Primero resolveremos el problema analíticamente y luego nos auxiliaremos con el computador usando el módulo "Análisis de Markov" de POM-QM.

Lo primero que hay que hacer es construir la matriz de transición.

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Puede apreciar que la Matriz que hemos construido cumple con los dos criterios básicos de Markov. Cada valor de la matriz q_{ij} es un valor de probabilidad, esto es $0 \leq q_{ij} \leq 1$ además la suma de cada fila de la matriz suman uno.

a) Hallar La distribución porcentual de las profesiones en la próxima generación, si actualmente es de 20% para A, 30% para B y 50% para C.

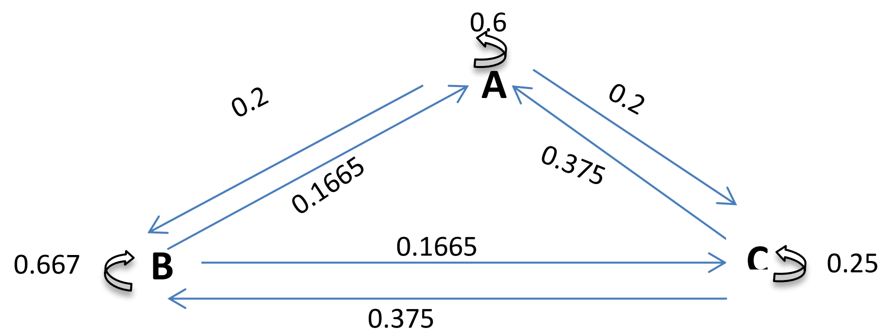
Para responder esta pregunta multiplicaremos el vector que contiene la distribución actual por la matriz P. Esto es:

$$(0.20 \quad 0.30 \quad 0.50)\begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix} = (0.36 \quad 0.43 \quad 0.21)$$

Lo que nos indica que la próxima generación tendrá la siguiente distribución porcentual: 36% para A, 43% para B y 21% para C.

b) Construya el diagrama de transición de estados.

Tenemos tres profesiones A, B y C. cada una de ellas representará un estado, basado en matriz P que hemos construido, hacemos el diagrama de transición de estados (DTE) como se muestra:



c)

c) Clasificar los estados.

Si observamos el DTE puede notarse que todos los estados (A, B y C) son recurrentes.

Debemos recordar que un estado es recurrente si existe probabilidad mayor que cero que puede volver a su mismo estado, cual es posible en los tres estados.

d) La distribución límite de las generaciones cuando transcurren muchas generaciones. (Estado estable)

Resulta interesante conocer si la matriz de Markov tiene un estado estable. Para saberlo resolvemos el sistema de ecuaciones siguientes:

$$(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad z)$$

x + y + z = 1

Donde x es la probabilidad de A en el estado estable, y es la probabilidad de B en el estado estable y así mismo z es la probabilidad de C en el estado estable, eso si la matriz tiene un estado estable.

Del producto matricial resultan tres ecuaciones:

0.6x + 0.167y +0.375z = x → -0.4x + 0.167y +0.375z = 0 Ecuación 1

0.2x + 0.667y + 0.375z =y → 0.2x - 0.333y + 0.375z = 0 Ecuación 2

0.2x + 0.167y + 0.25z = z → 0.2x + 0.167y - 0.75z = 0 Ecuación 3

Además de la ecuación base x + y + z =1 (esto es porque la suma de las probabilidades de los tres estados debe ser uno). Ecuación 4

Ahora resolveremos el sistema:

Trabajamos la Ecuación 1 y 4, para eliminar la variable X.

-0.4x + 0.167y +0.375z = 0

0.4 x + 0.4y + 0.4z =0.4 multiplicamos la ecuación 4 por 0.4

+ 0.567 y + 0.775z = 0.4 Ecuación 5.

Trabajamos la Ecuación 2 y la 4, para eliminar la misma variable que eliminamos anteriormente.

0.2x - 0.333y + 0.375z = 0

-0.2x -0.2y -0.2z = -0.2 multiplicamos la ecuación 4 por -0.2

-0.533y + 0.175z = -0.2 Ecuación 6

Ahora tenemos dos ecuaciones nuevas (5 y 6) con dos variables, las que resolveremos para obtener los valores de las variables y, z.

+ 0.567 y + 0.775z = 0.4 → despejamos z en la ecuación 5 y obtenemos la siguiente ecuación.

$z = \frac{0.4-0.567y}{0.775}$ Ahora z lo sustituimos en la ecuación 6.

$\mathbf{-0.533y + 0.175}\left(\frac{0.4-0.567y}{0.775}\right) = -0.2$→ -0.413y +0.07 – 0.099y =-0.155

y= (-0.07 -0.155)/(-0.413-0.099) =-0.225/-0.512 = 0.439

Sustituimos el valor encontrado de y en la ecuación $z = \frac{0.4-0.567y}{0.775}$

y obtenemos z= (0.4 -0.567*0.439)/0.775 = (0.4-0.2489)/0.775 = 0.195

Ahora solo falta obtener el valor de x, lo cual lo obtendremos al sustituir los valores de y y z

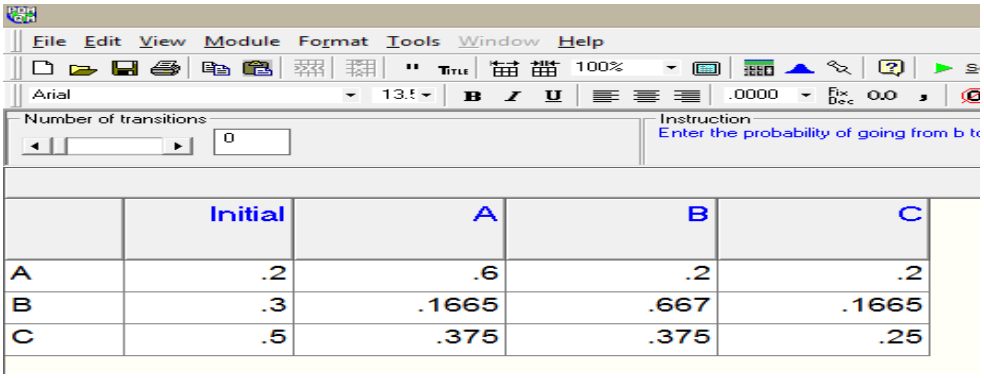
En la ecuación 4.

x + y + z = 1 → x = 1 – 0.439 – 0.195 = 1-0.634 = 0.366

Por lo tanto hemos encontrado la solución estable o estacionaria: esto es 36.6% para A; 43.9% para B y 19.5% para C.

Usando el Módulo "Markov Analysis" de POM-QM para resolver el problema anterior.

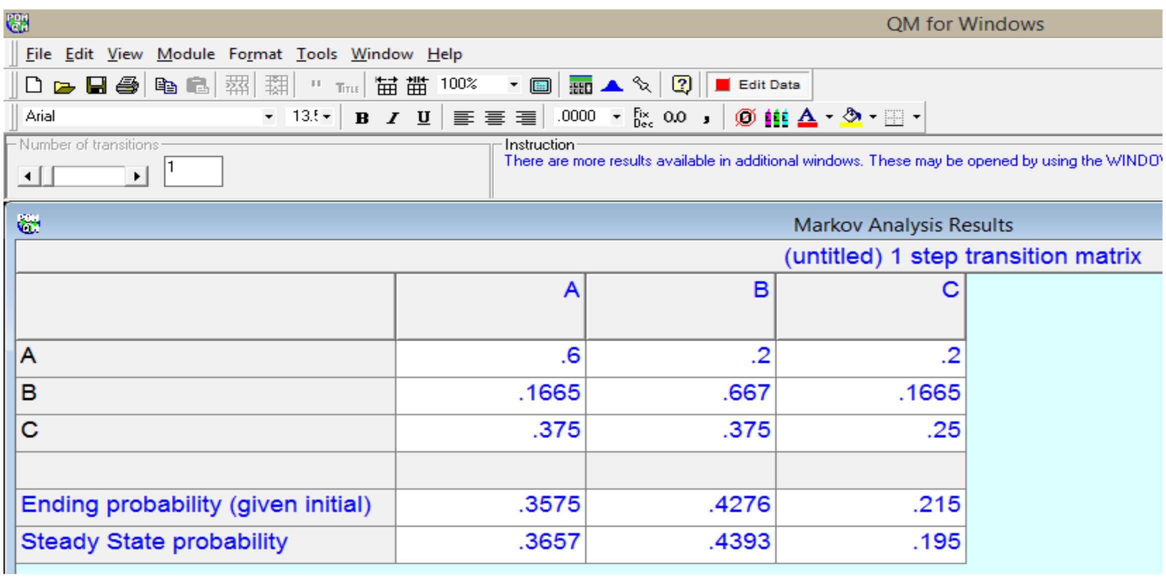
Ingresamos los datos de en la matriz 3x3 como se muestra en la imagen 1:



	Initial	A	B	C
A	.2	.6	.2	.2
B	.3	.1665	.667	.1665
C	.5	.375	.375	.25

Puede observar que hemos ingresado los datos en formato decimal de manera que la suma de las filas sea uno. Para los tres estados; en la columna **initial (inicial)** hemos ingresados la distribución de probabilidades iniciales para cada profesión.

a) Hallar La distribución porcentual de las profesiones en la próxima generación, si actualmente es de 20% para A, 30% para B y 50% para C.



	A	B	C
A	.6	.2	.2
B	.1665	.667	.1665
C	.375	.375	.25
Ending probability (given initial)	.3575	.4276	.215
Steady State probability	.3657	.4393	.195

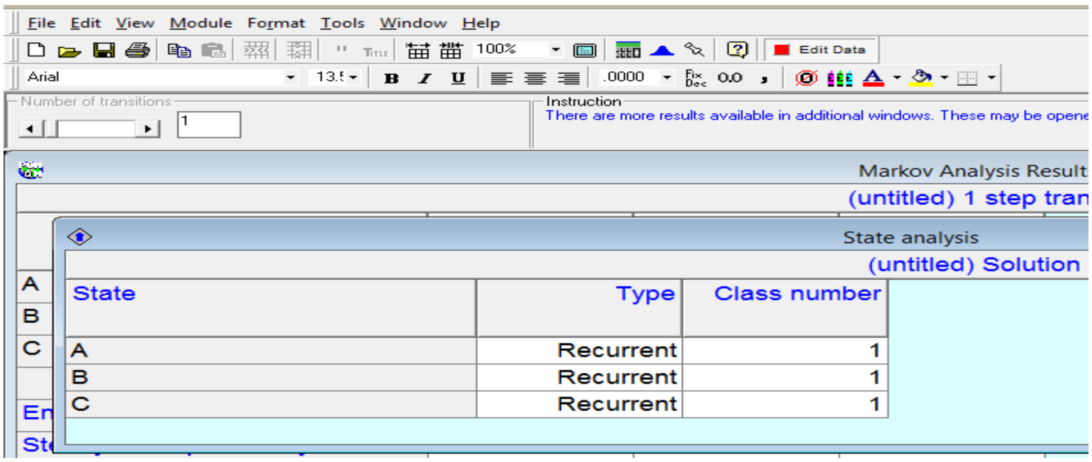
Para responder el inciso (a) procedemos a ingresar 1 en la casilla de derecha de "***Number of transitions"*** y hacemos clic en **Solve**. Nos mostrará la imagen que observamos. Puede ver que únicamente ha realizado el producto del vector inicial por la matriz P.

El vector resultante se encuentra en "Ending probability (given initial): es decir: 35.75% para A, 42.76 para B y 21.5 para C. que son muy aproximados con los obtenidos sin software.

b) Construya el diagrama de transición de estados.

El software no trae la opción para mostrar el DTE (diagrama de transición de estados) en forma gráfica. Por lo que hay construirlo como lo hicimos anteriormente.

c) Clasificar los estados.

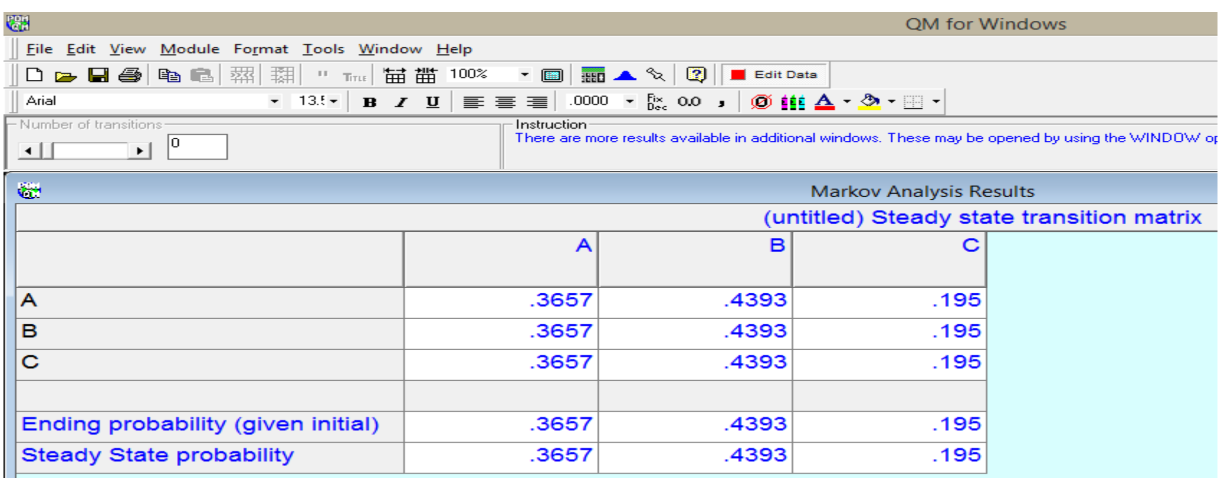


State	Type	Class number
A	Recurrent	1
B	Recurrent	1
C	Recurrent	1

El software tiene una opción “State analysis” que permite conocer la clasificación de los estados de la matriz. Puede observar que los estados A, B y C son de tipo **recurrentes**.

d) La distribución límite de las generaciones cuando transcurren muchas generaciones. (Estado estable)

Para conocer si la matriz tiene un estado estable o estacionario, a la derecha de “***Number of transitions” escribimos 0 (cero)*** *y hacemos clic* ***en Solve.***



	A	B	C
A	.3657	.4393	.195
B	.3657	.4393	.195
C	.3657	.4393	.195
Ending probability (given initial)	.3657	.4393	.195
Steady State probability	.3657	.4393	.195

Se le mostrará una imagen la mostrada. Puede ver que la matriz tiene una característica muy importante, los valores de cada columna son iguales. Al final se indica:

Steady State probability (probabilidad del estado estable o estacionario): 36.57% para A, 43.93% para B y 19.5% para C. Puede compararlos con los obtenidos analíticamente con el sistema de ecuaciones lineales.

Tema 9: Modelos de Teorías de Colas y líneas de esperas.

El estudio de líneas de espera, llamado teoría de colas, es una de las técnicas de análisis cuantitativo más antiguas y que se utilizan con mayor frecuencia. Las líneas de espera son un suceso cotidiano, que afecta a las personas que van de compras a las tiendas de abarrotes, a cargar gasolina, a hacer depósitos bancarios, o bien, a quienes esperan en el teléfono a que conteste la primera operadora disponible para hacer su reservación en una aerolínea. Las colas, otro término de las líneas de espera, también podrían tomar la forma de máquinas que esperan a ser reparadas, camiones que esperan para descargar o aeroplanos formados en una pista que aguardan la autorización para despegar. Los tres componentes básicos de un proceso de colas son las llegadas, las instalaciones de servicio y la línea de espera real.

Se analizará la forma en que los modelos analíticos de líneas de espera ayudan a los gerentes a evaluar el costo y la eficacia del sistema de servicio. Se comienza con una mirada a los costos de la línea de espera y, después, se describen las características de las líneas de espera y las suposiciones matemáticas subyacentes, que se utilizan para desarrollar los modelos de colas. También se presentan las ecuaciones necesarias para calcular las características de operación de un sistema de servicio y se dan ejemplos de cómo utilizarlo. Posteriormente, en este capítulo se verá cómo ahorrar tiempo de computadora mediante la aplicación de las tablas de colas y la ejecución de software de líneas de espera.

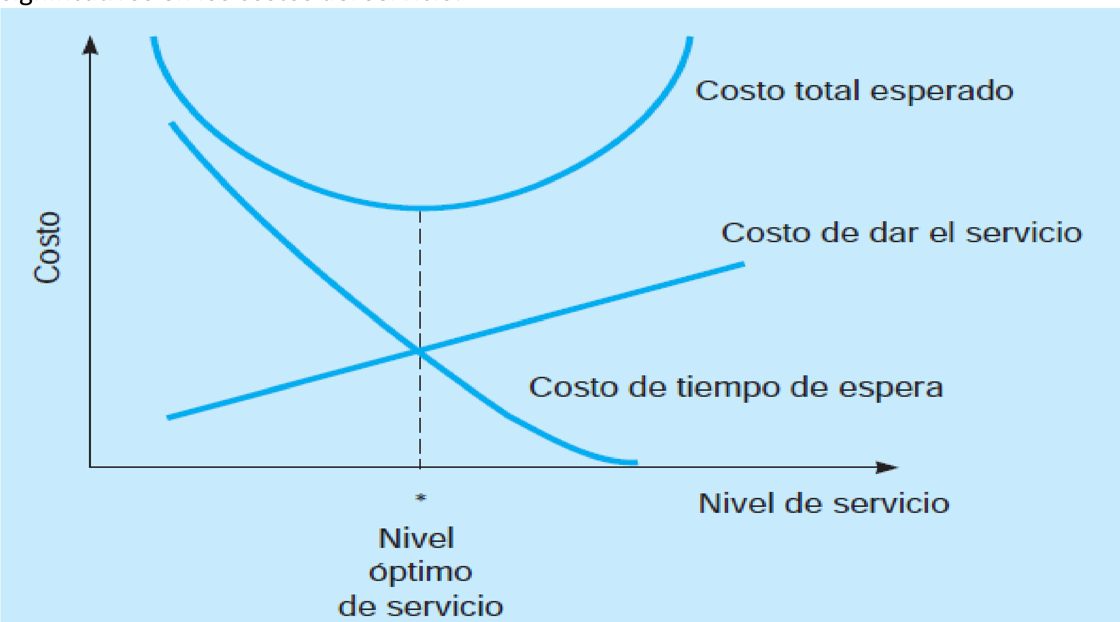
Costos de líneas de espera

La mayoría de los problemas de **líneas de espera** se centran en la cuestión de encontrar el nivel ideal de servicio que debería proporcionar una empresa. Los supermercados deben decidir cuántas cajas registradoras tener abiertas. Las estaciones de gasolina tienen que decidir cuántas bombas de servicio abrir y cuántos empleados asignar al turno. Las plantas de manufactura deben determinar el número óptimo de mecánicos que tienen que cubrir cada turno, para reparar las máquinas que se descomponen.

Los bancos deberán decidir cuántas ventanillas o cajas mantener funcionando para atender a los clientes durante los diversos horarios del día. En la mayoría de los casos, este nivel de servicio es una opción sobre la cual la administración tiene cierto control. Un cajero adicional, por ejemplo, se podría tomar prestado de otra actividad, o bien, contratar y entrenar rápidamente si la demanda así lo requiere. Sin embargo, tal vez este no siempre sea el caso. Una planta quizá no sea capaz de localizar o contratar a mecánicos con habilidades para reparar maquinaria electrónica avanzada. Cuando una organización *en verdad* tiene el control, por lo general, su objetivo es encontrar un feliz punto medio entre los dos extremos. Por un lado, una organización puede tener un gran número de personal y ofrecer *muchas* instalaciones de servicio. Tales factores suelen dar como resultado un excelente servicio al cliente, y que rara vez haya más de una o dos personas en una cola. Los clientes se mantienen contentos con la respuesta rápida y aprecian la comodidad. Sin embargo, esto quizá resulte demasiado costoso.
El otro extremo es tener el *mínimo* número posible de cajas registradoras, bombas de gasolina o ventanillas abiertas, lo cual reduce el **costo del servicio**, aunque podría resultar en la insatisfacción

en los clientes. ¿Cuántas veces regresaría usted a un gran almacén de descuento que cuenta con tan solo una sola caja registradora abierta en el día que va de compras? Conforme aumenta la longitud promedio de la cola, y como resultado se da un servicio deficiente, se podrían perder clientes y su buena voluntad.

La mayoría de los gerentes reconocen que se debe alcanzar el equilibrio entre el costo de dar un buen servicio y el costo del tiempo de espera de los clientes. Quieren colas que sean lo suficientemente cortas como para que los clientes no se sientan insatisfechos y se vayan enfadados sin haber comprado, o que compren pero que jamás regresen. Sin embargo, están dispuestos a hacerlos pasar algún tiempo en la fila de espera, si ello se equilibra con ahorros significativos en los costos del servicio.



Uno de los medios para evaluar una instalación de servicio consiste en observar el *costo total esperado*, un concepto que se ilustra en la gráfico, que es la suma de los *costos de servicio* esperados más los **costos de espera**.
Los costos de servicio parecen aumentar conforme la empresa trata de elevar su nivel de servicio.
Por ejemplo, si se utilizan tres cuadrillas de estibadores en vez de dos para descargar un buque de carga, los costos de servicio aumentan en la medida que lo hacen los montos del salario. No obstante, al mejorar la rapidez del servicio, disminuye el costo del tiempo que se pasa esperando en la fila. El costo de espera podría reflejar pérdidas de productividad de los trabajadores mientras sus herramientas o maquinaria esperan ser reparadas, o bien, podría simplemente ser una estimación de los costos de clientes perdidos debido al mal servicio y a las largas colas.

Características de un sistema de colas

La fuente de entrada que genera las llegadas o los clientes al sistema de servicio muestra tres características principales. Es importante considerar el *tamaño* de la población potencial, el *patrón* de llegadas al sistema de colas y el *comportamiento* de las llegadas.

TAMAÑO DE LA POBLACIÓN POTENCIAL Los tamaños de las poblaciones se consideran **ilimitados** (esencialmente *infinitos*) o **limitados** (*finitos*). Cuando el número de clientes o llegadas disponibles en cualquier momento dado es tan solo una pequeña parte de las llegadas potenciales, la población potencial se considera ilimitada. Para fines prácticos, los ejemplos de poblaciones ilimitadas incluyen automóviles que llegan a una caseta de cobro en una autopista, compradores que llegan al supermercado o estudiantes que se registran para tomar una clase en una universidad grande. La mayoría de los modelos de colas suponen una población potencial infinita como las anteriores. Cuando este no es el caso, el modelado se vuelve mucho más complejo. Un ejemplo de una población finita es un taller con solamente ocho máquinas que se podrían descomponer y requerir servicio.

PATRÓN DE LLEGADAS AL SISTEMA Los clientes llegan a la instalación de servicio de acuerdo con algún patrón conocido (por ejemplo, un paciente cada 15 minutos o un estudiante a quien asesorar cada media hora), o bien, llegan *aleatoriamente*. Las llegadas se consideran aleatorias cuando son independientes entre sí y su ocurrencia no se predice con exactitud. En los problemas de colas, con frecuencia el número de llegadas por unidad de tiempo se calcula mediante una distribución de probabilidad conocida como la **distribución de Poisson**.

COMPORTAMIENTO DE LAS LLEGADAS La mayoría de los modelos de colas suponen que un cliente que llega es un cliente paciente. Los clientes pacientes son personas o máquinas que esperan en la cola hasta que se les atiende y no se cambian de fila. Por desgracia, la vida y el análisis cuantitativo se complican por el hecho de que es bien conocido que la gente trata de eludir la espera o se rehúsa a aceptarla. **Eludir** se refiere a clientes que rechazan incorporarse a la fila de espera porque es demasiado larga para adaptarse a sus necesidades o intereses. Los clientes que se **rehúsan** son aquellos que entran a la cola pero les gana la impaciencia y se retiran sin completar su transacción. Realmente, ambas situaciones sirven tan solo para acentuar la necesidad de aplicar la teoría de las colas y realizar el análisis de líneas de espera. ¿Cuántas veces ha visto a un comprador con una canasta llena de abarrotes, que incluyen productos perecederos como leche, alimentos congelados o carnes, simplemente abandonar el carrito de las compras antes de pagar, debido a que la fila era demasiado larga? Este suceso tan costoso para la tienda hace que los gerentes estén muy atentos a la importancia de las decisiones de nivel de servicio.

Características de las líneas de espera

La línea de espera en sí misma es el segundo componente de un sistema de colas. La longitud de la fila puede ser limitada o ilimitada. Una cola es limitada cuando no puede, por la ley de las restricciones físicas, aumentar hasta un tamaño infinito. Este sería el caso en un restaurante pequeño que únicamente tiene 10 mesas y no puede atender a más de 50 comensales en una noche. Los modelos analíticos de colas se estudian con la suposición de una longitud de cola ilimitada. Una cola es ilimitada cuando su tamaño no está restringido, como en el caso de la caseta de pago en la autopista que atiende automóviles.

Una segunda característica de las líneas de espera está relacionada con la disciplina en la cola, que se refiere a la regla con la cual los clientes que están en la línea van a recibir el servicio. La mayoría de los sistemas utilizan la disciplina en la cola conocida como regla de primeras entradas, primeras salidas (PEPS). Sin embargo, en una sala de urgencias de un hospital o en la fila de la caja rápida del supermercado, varias prioridades asignadas podrían reemplazar las PEPS. Los pacientes que están heridos de gravedad deben tener una prioridad de tratamiento mayor que los pacientes con la nariz o los dedos rotos.

Los compradores con menos de 10 artículos pueden entrar a la fila de la caja rápida pero *entonces* se les atiende según el criterio de primeros en llegar, primeros en salir. La ejecución de programas de software es otro ejemplo de sistemas de colas que funcionan con programación de prioridades. En la mayoría de las empresas grandes, cuando los cheques de nómina elaborados por computadora deben estar listos en una fecha determinada, el programa de nóminas tiene la prioridad mayor, sobre las demás corridas.

Características de las instalaciones de servicio

La tercera parte de cualquier sistema de colas son las instalaciones de servicio. Es importante examinar dos propiedades básicas: **1.** la configuración del sistema de servicio y **2.** el patrón de los horarios de servicio.

CONFIGURACIONES BÁSICAS DE LOS SISTEMAS DE COLAS Los sistemas de servicio generalmente se clasifican en términos del número de canales, o del número de servidores, y el número de fases o de número de paradas de servicio, que deben realizarse. Un **sistema de un solo canal**, con un solo servidor, se tipifica como la ventanilla del banco para atender a los automóviles que solamente tiene una caja abierta, o como el tipo de restaurante de comida rápida tan popular en Estados Unidos donde hay servicio en el vehículo. Si, por otro lado, el banco tuviera varios cajeros atendiendo y cada cliente esperara su turno en una fila común para pasar con el primer cajero disponible, se tendría en funcionamiento un **sistema multicanal**. Actualmente, muchos bancos son sistemas de servicio multicanal, así como muchas grandes peluquerías y varios mostradores de aerolíneas.

Un **sistema de una sola fase** es aquel donde el cliente recibe el servicio en una sola estación y luego sale del sistema. Un restaurante de comida rápida en el cual la persona que toma la orden también entrega la comida y cobra, es un sistema de una sola fase. También lo es una agencia de licencias de manejo donde la persona que recibe la solicitud también califica el examen y cobra el pago de la licencia. Pero, si el restaurante requiere que usted haga su pedido en una estación, pague en la segunda y recoja la comida en una tercera parada de servicio, este será un **sistema multifase**.

Asimismo, si la agencia de licencias de manejo es grande o muy concurrida, quizá tenga que esperar en una fila para llenar la solicitud (la primera parada de servicio), luego hacer otra fila para que le apliquen el examen (segunda parada de servicio) y, por último, ir a un tercer mostrador de servicio para pagar la tarifa. Para ayudarle a relacionar los conceptos de canales y fases, en la gráfica A-95 se presentan cuatro configuraciones posibles.

CONFIGURACIONES BÁSICAS DE LOS SISTEMAS DE COLAS Los patrones de servicio son como los patrones de llegadas en el sentido de que pueden ser constantes o aleatorios. Si el tiempo de servicio es constante, le toma la misma cantidad de tiempo atender a cada uno de los clientes. Este es el caso en una operación de servicio realizada por una máquina, como un lavado automático de automóviles. Sin embargo, con frecuencia los tiempos de servicio se distribuyen aleatoriamente. En muchos casos, es posible suponer que los tiempos de servicio aleatorios se describen con la distribución de probabilidad exponencial negativa. La distribución exponencial es importante en el proceso de construcción de los modelos matemáticos de colas, debido a que muchos de los respaldos teóricos del modelo se basan en la suposición de llegadas de tipo Poisson y de servicios de tipo exponencial. Sin embargo, antes de aplicarlos, el analista cuantitativo debe observar, recolectar y graficar datos de tiempos de servicio para determinar si estos se ajustan a la distribución exponencial.

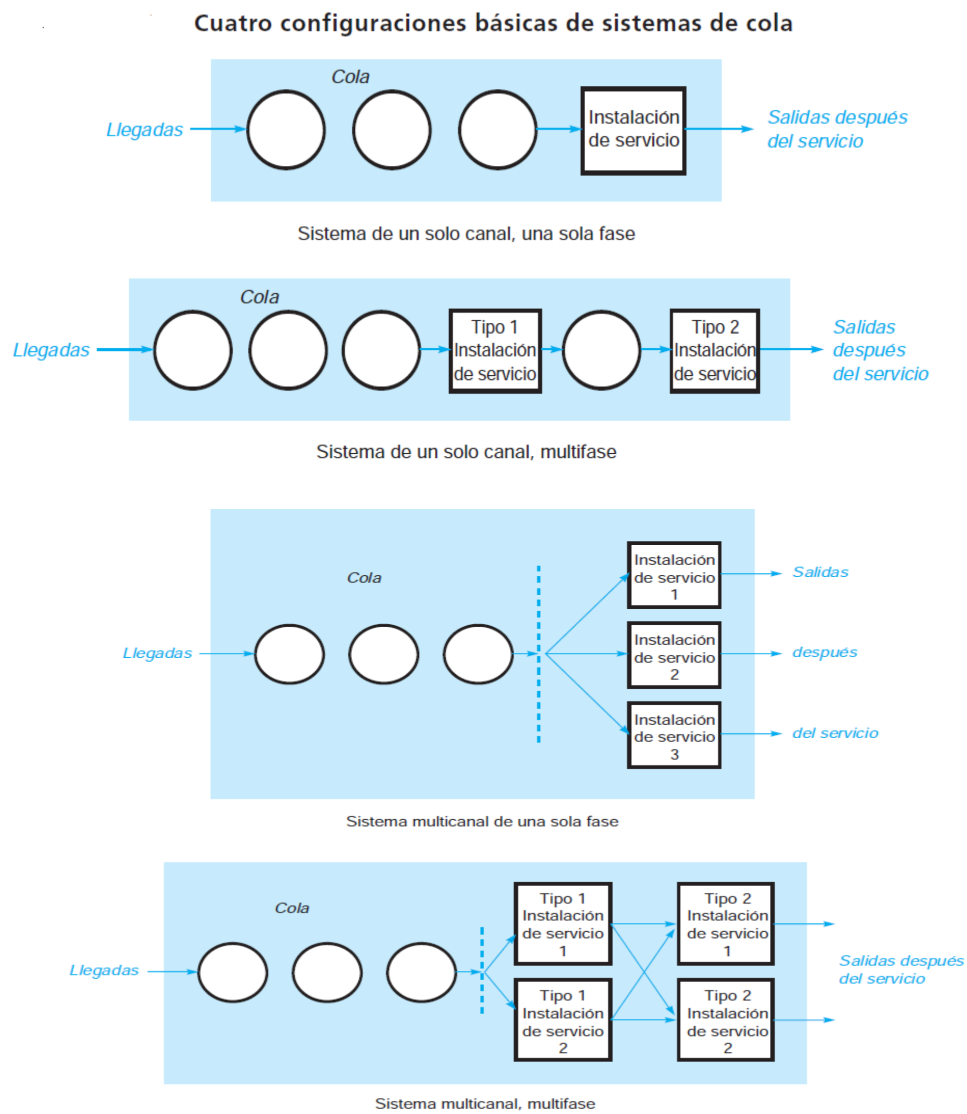
Identificación de modelos usando notación de Kendall

D. G. Kendall desarrolló una notación ampliamente aceptada para especificar el patrón de las llegadas, la distribución del tiempo de servicio y el número de canales en un modelo de colas. Con frecuencia esta notación se encuentra en el software de modelos de colas. La **notación de Kendall** básica de tres símbolos tiene la forma:

Distribución de llegadas/Distribución de tiempos de servicio/Número de canales de servicio abiertos donde se utilizan letras específicas para representar las distribuciones de probabilidad. Las siguientes letras se utilizan comúnmente en la notación de Kendall:

M = distribución de Poisson del número de ocurrencias (o tiempos exponenciales)
D = tasa constante (determinística)
G = distribución general con media y varianza conocidas

Gráfico A-95



Así, un modelo de un solo canal con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales se representaría por: M/M/1

Cuando se agrega un segundo canal: M/M/2

Si hay m canales de servicio distintos dentro del sistema de colas con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales, la notación de Kendall sería M/M/m. Un sistema de tres canales con llegadas de Poisson y tiempo de servicio constante se identificaría como M/D/3. Un sistema de cuatro canales con llegadas de Poisson y tiempos de servicio que están normalmente distribuidos se identificaría como M/G/4.

Modelo de colas de un solo canal con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales (M/M/1)

Método analítico para determinar medidas importantes del desempeño de un sistema de servicio común. Después de haber calculado estas medidas numéricas, será posible agregar los datos de costo y comenzar a tomar decisiones, que equilibren los niveles de servicio con los costos de servicio de la línea de espera.

Suposiciones del modelo

El modelo de un solo canal y una sola fase que se considera aquí es uno de los modelos de colas más sencillos y más ampliamente utilizados. Implica suponer que existen siete condiciones:

1. Las llegadas se atienden sobre una base de PEPS.
2. Cada llegada espera a ser atendida independientemente de la longitud de la fila; es decir, no se elude ni se rehúsa.
3. Las llegadas son independientes de las llegadas anteriores, pero su número promedio (la tasa de llegadas) no cambia a lo largo del tiempo.
4. Las llegadas se describen con una distribución de probabilidad de Poisson y provienen de una población infinita o muy grande.
5. Los tiempos de servicio también varían de un cliente al siguiente y son independientes entre sí, pero se conoce su tasa promedio.
6. Los tiempos de servicio ocurren de acuerdo con una distribución de probabilidad exponencial negativa.
7. La tasa de servicio promedio es mayor que la tasa de llegadas promedio.

Cuando se cumplen las siete condiciones, se pueden desarrollar una serie de ecuaciones que definen las **características de operación** de la cola. Las matemáticas que se utilizan para deducir cada ecuación son más bien complejas y están más allá del alcance de este libro, por lo que a continuación tan solo se presentaran las fórmulas.

Ecuaciones de colas

Sea:

λ = número medio de llegadas por periodo (por ejemplo, por hora)

μ =número medio de personas o artículos que se atienden por periodo

Cuando se determina la tasa de llegada (λ) y la tasa de servicio (μ), se debe utilizar el mismo periodo.

Por ejemplo, si λ es el número promedio de llegadas por hora, entonces μ debe indicar el número promedio que podría atenderse por hora.

Las ecuaciones de colas se presentan a continuación.

1. El número promedio de clientes o unidades en el sistema, *L*, es decir, el número en la fila más el

número que se está atendiendo: $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

2. El tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema, *W*, es decir, el tiempo que pasa en la fila más el tiempo en que se le atiende:

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

3. El número promedio de clientes en la cola, *Lq*:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

4. El tiempo promedio que pasa un cliente esperando en la cola, *Wq*:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

5. El **factor de utilización** del sistema, ρ (la letra griega rho), es decir, la probabilidad de que se esté utilizando la instalación de servicio:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

6. Porcentaje de tiempo ocioso, P_0, es decir, la probabilidad de que nadie esté en el sistema:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

7. La probabilidad de que el número de clientes en el sistema sea mayor que k, $P_{n>k}$:

$$P_{n>k} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$$

Problema 14 (**Libro Métodos cuantitativos para negocios/Render-Stair-Hanna/capítulo 13, Modelos de Teorías de colas y líneas de esperas/ página 507/ Problema de líneas de espera)**

Caso del taller de silenciadores (mofles) Arnold

Ahora se aplicarán estas fórmulas al caso del taller de silenciadores de Arnold, en Nueva Orleans. El mecánico de Arnold, Reid Blank, es capaz de instalar nuevos silenciadores a una tasa promedio de 3 por hora, o aproximadamente 1 cada 20 minutos. Los clientes que necesitan el servicio llegan al taller a un promedio de 2 por hora. Larry Arnold, el dueño del taller, estudió modelos de colas en un programa de maestría en administración de negocios y siente que se cumplen todas las siete condiciones para el modelo de un solo canal. Entonces, procede a calcular los valores numéricos de las características de operación anteriores.

Solución:

λ= llegan 2 automóviles por hora

μ = se atienden 3 autos por hora

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3-2} = \frac{2}{1} = 2 \text{ autos en el sistema en promedio}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3-2} = 1 \text{ hora que en promedio pasa el auto en el sistema}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2^2}{3(3-2)} = \frac{4}{3(1)} = \frac{4}{3} = 1.33 \text{ autos esperan en promedio en la fila}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2}{3(3-2)} = \frac{2}{3} \text{ de hora} = 40 \text{ minutos} = \text{tiempo de espera promedio por auto}$$

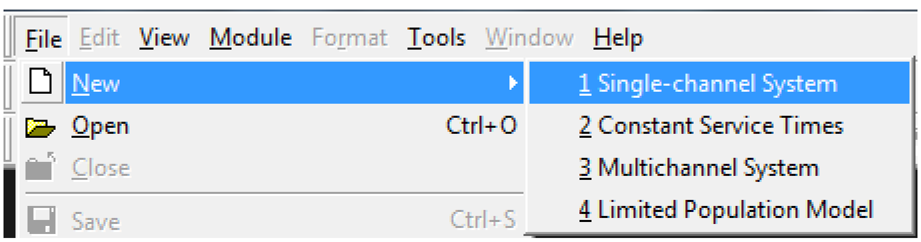
Observe que W y W_q están en *horas*, ya que λ se definió como el número de llegadas por *hora*.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} = 0.67 = \text{porcentaje de tiempo que el mecánico esta ocupado, o probabilidad de que el servidor esté ocupado}$$

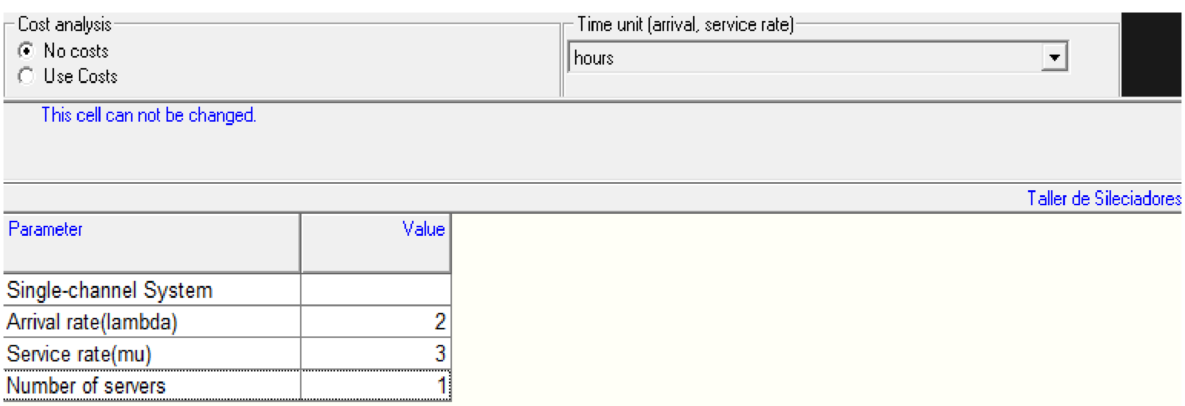
$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{2}{3} = 0.33 = \text{probabilidad de que haya 0 autos en el sistema}$$

Ahora resolveremos usando POM-QM para el problema del taller de silenciadores Arnold

Hacemos clic en **Module y después en "Wainting Lines"** para activar el módulo de líneas de esperas. Ahora hacemos clic en **File** y luego en **New, seleccionamos Single –channel System**



En la ventana siguiente ingresamos los datos en horas.



Para resolverlo, hacemos clic en Solve. Se mostrará una vrentana como la siguiente.

Edit Data F9

1 Waiting Lines Results
2 Table of Probabilities
3 Graphs of Probabilities

1. Resultados de la línea de espera
2. Tabla de probabilidades
3. Gráfico de probabilidades.

Waiting Lines Results

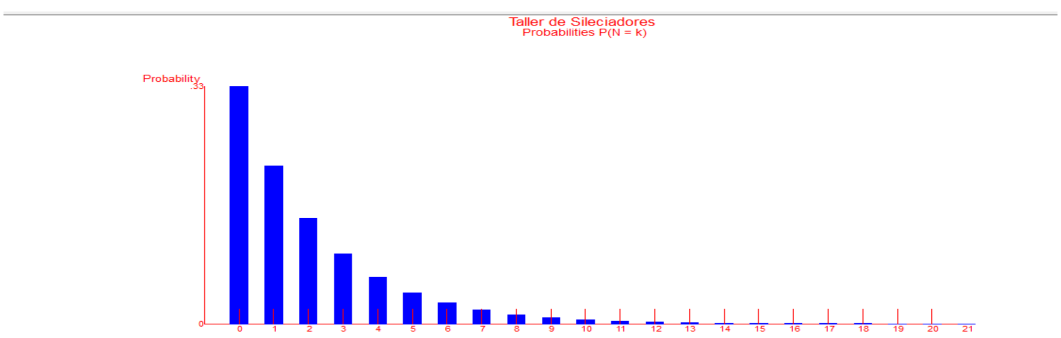
Taller de Sileciadores Solution

Parameter	Value	Parameter	Value	Minutes	Seconds
Single-channel System		Average server utilization	.67		
Arrival rate(lambda)	2	Average number in the queue(Lq)	1.33		
Service rate(mu)	3	Average number in the system(Ls)	2		
Number of servers	1	Average time in the queue(Wq)	.67	40	2400
		Average time in the system(Ws)	1	60	3600

Table of Probabilities

Taller de Sileciadore

k	Prob (num in sys = k)	Prob (num in sys <= k)	Prob (num in sys >k)
0	.33	.33	.67
1	.22	.56	.44
2	.15	.7	.3
3	.1	.8	.2
4	.07	.87	.13
5	.04	.91	.09
6	.03	.94	.06
7	.02	.96	.04
8	.01	.97	.03
9	.01	.98	.02
10	.01	.99	.01
11	.0	1	.01
12	.0	1	.01
13	.0	1	.0
14	.0	1	.0
15	0	1	.0
16	0	1	.0
17	0	1	0
18	0	1	0
19	0	1	0
20	0	1	0
21	0	1	0



PROBLEMAS RESUELTOS DE TEORÍA DE COLAS.

(*M*/*M*/1: Un servidor con llegadas de Poisson y tiempos de servicio Exponenciales)

1. Suponga que en una estación con un solo servidor llegan en promedio 45 clientes por hora, Se tiene capacidad para atender en promedio a 60 clientes por hora. Se sabe que los clientes esperan en promedio 3 minutos en la cola.
Se solicita: a) Tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema. b) Número promedio de clientes en la cola. c) Número promedio de clientes en el Sistema en un momento dado.

Solución: Se conoce la siguiente información:
λ= 45 clientes/hora (media de llegada de los clientes)= 45/60 clientes/minutos
μ= 60 clientes/hora (media de servicio a los clientes) = 60/60 clientes/minutos=
W_q = 3 minutos (tiempo promedio de espera de un cliente en la cola)

a) Para calcular el tiempo promedio que un cliente pasa en el Sistema (W_s). Lo podemos calcular a partir de W_q y μ.

$$\boldsymbol{W_s = W_q + \frac{1}{\mu}} = \textbf{3 minutos} + \boldsymbol{\frac{1}{1} = 3 + 1 = 4\ minutos}$$

Es decir en promedio un cliente pasa 4 minutos en el Sistema: distribuidos así 3 minutos pasa esperando en la cola + 1 minutos en servicio.

b) Para calcular el número de clientes en la cola (Lq), usaremos la fórmula siguiente: Lq= λ W_q.

$$L_q = \lambda * W_q = 0.75\frac{clientes}{minutos} * 3 \text{ minutos} = 2.25 \text{ clientes.}$$

Es decir los cálculos nos muestran que en la cola puede haber más de dos clientes en la cola.

c) Para calcular cual es el número de clientes en la cola (L_s). Lo podemos hacer con la fórmula: L_s= λ W_s.

$$L_S = \lambda * W_S = 0.75\frac{cliente}{minutos} * 4\ minutos = 3\ clientes$$

Es decir en promedio hay tres clientes en el sistema, como se nos ha dicho que solo hay un servidor, sabemos que solo un cliente puede estar en servicio, por lo que los demás deben estar en la cola. Esto indica que hay dos clientes en espera.

2. Suponga un restaurante de comidas rápidas al cual llegan en promedio 100 clientes por hora. Se tiene capacidad para atender en promedio a 150 clientes por hora Se sabe que los clientes esperan en promedio 2 minutos en la cola Calcule las medidas de desempeño del sistema
   a) ¿Cuál es la probabilidad que el sistema este ocioso?
   b) ¿Cuál es la probabilidad que un cliente llegue y tenga que esperar, porque el sistema está ocupado?
   c) ¿Cuál es el número promedio de clientes en la cola?
   d) ¿Cuál es la probabilidad que hayan 10 clientes en la cola?

Solución: Se conoce la siguiente información:

λ= 100 clientes/hora (media de llegada de los clientes)= 100/60 clientes/minutos

μ= 150 clientes/hora (media de servicio a los clientes) = 150/60 clientes/minutos=

W_q = 2 minutos (tiempo promedio de espera de un cliente en la cola)

a) Para conocer cuál es la probabilidad de que el sistema este ocioso, primero conoceremos, cual es la probabilidad que esté ocupado o factor de utilización del sistema.

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{100\ cliente/hora}{150\ cliente/hora} = 0.66 = 66.7\%$ este porcentaje representa tiempo que el sistema está ocupado. Es decir (1- ρ) representa el tiempo ocioso del sistema, es decir 1- 0.667= 0.333 = 33.3% el sistema permanece ocioso.

b) La probabilidad que un cliente llegue y tenga que esperar es suponer que estará como primer cliente en la cola. Usaremos la fórmula:

$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ Para nuestro caso n=1 y la formula se convierte en:

$$P_1 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 = (1 - \frac{100}{150})\left(\frac{100}{150}\right)^1 = (1 - 0.667)(0.667) = 0.222 = 22.2\%$$

Es decir existe un 22.2% de posibilidad que haya un cliente en la cola esperando ser atendido.

c) Ahora requerimos calcular el número de clientes en la línea de espera.

$L_q = \lambda * W_q$=1.667$\frac{clientes}{minutos}$* 2 minutos = 3.334 clientes.≈4 clientes en la cola.

Es decir existe la posibilidad de llegar a tener un promedio de 4 clientes en la línea de espera.

d) La probabilidad de que hayan 10 clientes en la cola, como hemos visto existe un promedio de tener hasta 4 clientes en la cola que hayan más de 4 las probabilidades serán muy pequeñas, para ese cálculo haremos uso de la fórmula que usamos en el inciso b de este mismo ejemplo.

$P_{10} = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{10} = (1 - \frac{100}{150})\left(\frac{100}{150}\right)^{10} = (1 - 0.667)(0.667)^{10} =$ 0.0058=0.58% (lo cual es casi cero). Es decir es muy remoto o poco probable que pueda haber 10 clientes en la línea de espera.

3. Un lava carro puede atender un auto cada 5 minutos y la tasa media de llegadas es de 9 autos por hora. Obtenga las medidas de desempeño de acuerdo con el modelo M/M/1.
Además la probabilidad de tener 0 clientes en el sistema, la probabilidad de tener una cola de más de 3 clientes y la probabilidad de esperar más de 30 minutos en la cola y en el sistema

Solución: Se conoce la siguiente información:
λ= 9 clientes/hora (media de servicio a los clientes) = 0.15 clientes/minutos
μ= 0.2 clientes/minutos (media de llegada de los clientes)

a) Vamos calcular el factor de desempeño del sistema calculando ρ.
$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.15\ cliente/minutos}{0.20\ cliente/minutos} = 0.75 = 75\%$. El sistema está ocupado el 75% del tiempo. O sea pasa un 25% ocioso. Es decir la probabilidad de tener 0 clientes en el sistema es cuando el sistema está vacío y eso puede ocurrir con una probabilidad del 25%. Su cálculo puede hacerse directamente con la fórmula:

$$P_0 = \left((1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 = \left(1 - \frac{0.15}{0.2}\right) = 0.25 = 25\%$$

b) La probabilidad de tener una cola de más de 3 clientes

$$P^0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 = (0.25)(0.75)^2 = 0.25$$

$$P^1 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 = (0.25)(0.75)^1 = 0.1875$$

$$P^2 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 = (0.25)(0.75)^2 = 0.1406$$

$$P^3 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 = (0.25)(0.75)^3 = 0.1055$$

La probabilidad que haya más de tres clientes en el Sistema, implica que debemos conocer la Probabilidad que haya cero, uno, dos y tres clientes. La diferencia con 1.
Será la probabilidad que hayan más de tres.
P(Ls>3)=1 – (P^0 + P^1 + P^2 + P^3)= 1- (0.25+0.1875+0.1406+0.1055)=1- 0.6836=**0.3164**

c) La probabilidad de esperar más de 30 minutos en la cola.
Primero calcularemos el tiempo promedio que un cliente espera en la cola.
$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{0.15}{0.2(0.2-0.15)} = \frac{0.15}{0.01}$=15 minutos (es el tiempo promedio que un cliente tiene que esperar en la cola)

Ahora vamos a calcular tiempo (t) de espera sea mayor de 30 minutos.
$P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$ Vamos aplicar esta ecuación para calcular dicha probabilidad.

$P(W_q > 30) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$=(0.75) $e^{-0.2(1-0.75)30}$=(0.75)$e^{-1,5}$= (0.75)(0.2231)= =0.167=16.7% (COMO PUEDE VER LA PROBABILIDAD ES BAJA)

d) La probabilidad de esperar más de 30 minutos en el Sistema.

$P(W_S > t) = e^{-\mu(1-\rho)t}$ Vamos aplicar esta ecuación para calcular dicha probabilidad.

$P(W_S > 30) = e^{-\mu(1-\rho)t}$= $e^{-0.2(1-0.75)30}$=$e^{-1,5}$= 0.2231= =22.3% (COMO PUEDE VER LA PROBABILIDAD ES BAJA, pero es más alta que la probabilidad de que el tiempo promedio que un cliente espere más de 30 minutos en la cola).

4. Un promedio de 10 automóviles por hora llegan a un cajero con un solo servidor que proporciona servicio sin que uno descienda del automóvil. Suponga que el tiempo de

servicio promedio por cada cliente es 4 minutos, y que tanto los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicios son exponenciales. Conteste las preguntas siguientes:

a. ¿Cuál es la probabilidad que el cajero esté ocioso?
b. ¿Cuál es el número promedio de automóviles que están en la cola del cajero? (se considera que un automóvil que está siendo atendido no está en la cola esperando)
c. ¿Cuál es la cantidad promedio de tiempo que un cliente pasa en el estacionamiento del banco, (incluyendo el tiempo de servicio)?
d. ¿Cuántos clientes atenderá en promedio el cajero por hora?

Solución: Se conoce la siguiente información:

λ= 10 clientes/hora (media de llegada de los clientes) = 1/6 clientes/minutos

μ= 1 clientes/4minutos (media de servicio de los clientes)=1/4 cliente/minuto

a) Por tanto $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/6}{1/4} = \frac{2}{3} = 66.67\%$ factor de utilización del sistema. Es decir que el sistema permanece ocioso el 33.33%.

b) ¿Cuál es el número promedio de automóviles que están en la cola del cajero?

$$\boldsymbol{L_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1/6}{1/4(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})} = \frac{4}{3} = 1.333}$$ **Puede haber 2 autos en la cola.**

c) ¿Cuál es la cantidad promedio de tiempo que un cliente pasa en el estacionamiento del banco (incluyendo el tiempo de servicio)?

Nos preguntan por el tiempo promedio que el cliente pasa en el sistema. W_s.

$$W_S = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{4} - 1/6} = \frac{1}{1/12} = 12\ minutos\ pasa\ el\ cliente\ en\ el\ sistema.$$

d) ¿Cuántos clientes atenderá en promedio el cajero por hora?
Si el cajero siempre estuviera ocupado, atendería un promedio de μ=15 clientes por hora. Según la solución encontrada en el inciso a (1/4*60=15), el cajero está ocupado 2/3 del tiempo. Por tanto dentro de cada hora, el cajero atenderá un promedio de (2/3)(15)= 10 clientes. Esto es ρ*μ= 2/3 * 15 = 10 clientes.

5. En el departamento de emergencia de un hospital los pacientes llegan con una distribución de probabilidad Poisson a una media de 3 clientes por hora. El médico que está en dicho departamento los atiende con una frecuencia de servicio exponencial a una tasa media de 4 clientes por hora. ¿Contrataría o no a un segundo médico?

Determine:

a. Razón de utilización del sistema (ρ).
b. Probabilidad de que no se encuentren pacientes en el sistema.
c. Probabilidad de que existan 3 pacientes en el sistema (P_3).
d. Tiempo total del cliente en el sistema (W_s).
e. Tiempo total de espera por en la cola (Wq).
f. El número de pacientes en el sistema en un momento dado (L_s).
g. El número de pacientes en el sistema esperando por servicio (Lq).
h. Probabilidad de que el cliente se espere más de 1 hora en el sistema [$W_s > 1$]

SOLUCION:

Población = infinita

Línea de espera =infinita

Tasa de llegadas = λ= 3 pacientes/hora

Tasa de servicio= μ = 4 pacientes/hora

a. $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$ utilización del sistema
b. $1 - \rho = 1 - 0.75 = 0.25 = 25\%$ probabilidad que el sistema este ocioso o ningún paciente en el sistema.
c. $P_3 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 = \left(1 - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^3 = (0.25)(0.421875) = 0.105$ probabilidad que hayan 3 clientes en el sistema.
d. $W_s = \lambda W_q = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{4-3} = 1\ hora.$
e. $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{3}{4(4-3)} = 0.75\ hora\ (45\ minutos)$ tiempo promedio de espera.
f. $L_s = \lambda W_s = 3\frac{pacientes}{hora} x1\ hora = 3\ pacientes$ en el sistema
g. $L_q = \lambda W_q = 3\frac{pacientes}{hora} x0.75\ hora = 2.25\ pacientes\ en\ la\ cola$
h. $P(W_s > 1hora) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-4(1-0.75)(1)}$=0.3678

6. Durante un período de 8 horas, llegaron 96 carros a la estación de servicio de Joe. Suponiendo que el tiempo entre llegadas tiene una distribución exponencial, use los datos proporcionados para estimar:
   a) El valor de la frecuencia de llegadas.
   b) El tiempo medio entre llegadas.
   c) La razón media de llegadas

Solución:

Población = infinita

Línea de espera =infinita
Tasa de llegadas constante = λ
Tasa de servicio constante= µ

a. Sabemos que 96 carros llegan en 8 horas, necesitamos saber cuántos carros llegan en una hora. Para obtener la tasa de llegada por hora.

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{96\ carros}{8\ horas} = 12\ carros/hora}$$

b. Tiempo medio entre llegadas.
Esto se saca haciendo: la inversa de la tasa de llegada.

$$\boldsymbol{\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{12} = 0.0833\ horas}$$

c. La razón media de llegada

$$\lambda n = \lambda = 12\frac{carros}{hora}$$

7. Una computadora procesa los trabajos que se le asignan sobre la base "primero en llegar primero ser atendido (FIFO=PEPS). Los trabajos llegan con una distribución Poisson con promedio de tiempo entre llegadas de cinco minutos. En el procesamiento de los trabajos consiste en que ningún trabajo pase más de seis minutos promedio en el sistema. ¿Qué tan rápido debe de trabajar el procesador para cumplir con este objetivo?

Solución:
Datos:

$$\boldsymbol{\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5}\ min\left(60\frac{min}{hora}\right) = \frac{60}{5}}$$

Entonces: λ= 12 trabajos/hora
W_s : tiempo promedio que tardan los trabajos en el sistema.
W_s=6 min =6/60 = 0.1 hora
Nos piden el tiempo del servicio µ?

Población = infinita
Línea de espera =infinita
Tasa de llegadas constante =λ
Tasa de servicio constante= µ

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_s(\mu - \lambda) = 1$$

$$\mu - \lambda = \frac{1}{W_s}$$
$$\mu = \frac{1}{W_s} - \lambda$$

$$\mu = \frac{1}{0.1} + 12$$
$$\mu = 10 + 12$$

$\mu = 22\ trabajos/hora$; el procesador debe sacar 22 trabajos por hora. Para que los trabajos tarden en promedio 6 minutos en el sistema.

8. Actualmente una gasolinera tiene 2 bombas y está considerando agregar una tercera. Los vehículos llegan al sistema con un promedio de 1 cada 10 minutos, cada vehículo requiere de un promedio de 5 minutos para ser atendido. Supóngase que los vehículos llegan de acuerdo con una distribución Poisson y que el tiempo necesario para prestar el servicio se distribuye en forma exponencial.
   a) Determine la razón de utilización del sistema. (ρ)
   b) ¿Cuál sería el efecto sobre la línea de espera si se agrega una tercera bomba?
   c) ¿Cómo se evaluarían los costos en esta situación?

Solución:

Población = infinita

Línea de espera =infinita

Tasa de llegadas constante =λ

Tasa de servicio constante= μ

Datos:

$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10} x60 \frac{min}{hora} \longrightarrow \lambda = 6\ cliente/hora$

$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{5} minx60 \longrightarrow \mu$ =12 clientes/hora

En este problema hay que notar que son dos servidores (s=2) que están atendiendo por lo que la fórmula para calcular la utilización del sistema será:

i. $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{6}{2x12} = 0.25 = 25\%$ El sistema está utilizado solo en un 25% o sea pasa ocioso el 75% del tiempo.

ii. ¿Cuál sería el efecto sobre la línea de espera si se agrega una tercera bomba? Calcularemos L_q para conocer el número de clientes en la cola.

$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{6}{12(12-6)} = \frac{6}{12(6)}$ = 0.0833 horas=5min (tiempo de espera en la cola)

$L_q = \lambda W_q$ = 6*0.0833= 0.5 cliente.

En relación a la pregunta c) no se justifica la instalación de nueva bomba, dado que el sistema está subutilizado, lo podemos ver en el tiempo de espera y el número de cliente en el sistema en un momento dado.

En promedio un cliente espera 5 minutos en la cola y nunca hay más de un cliente en la cola.

9. Considere una oficina de inmigración. Suponiendo que el modelo básico es una aproximación razonable de la operación, recuerde que si la agente estuviese ocupada todo el tiempo procesaría 120 ingresos durante su turno de 8 horas. Si a su oficina llega un promedio de un ingreso cada 6 minutos, encuentre:
a) El número esperado en el sistema
b) El número esperado en la fila
c) El tiempo previsto de línea de espera
d) El tiempo previsto de espera
e) La probabilidad de que el sistema este vacío

Solución:
Población = infinita
Línea de espera =infinita
Tasa de llegadas constante =λ
Tasa de servicio constante= μ

Datos:
1/λ = 6 minutos / 60 hora
λ = 10 /hora
μ = 120/8 =15 clientes/hora

a) $L_s = \lambda W_s = 10 * 0.2 horas/personas$ **=2 personas**
b) $L_q = \lambda W_q = 10 * 0.1333$ **horas/personas = 1.33 personas**
c) $W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{15-10} = \frac{1}{5}$**=0.2 horas/persona**
d) $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{10}{15(15-10)} = \frac{1}{75} = 0.1333$ **horas/personas**

10. Suponga que todos los dueños de automóvil acuden a la gasolinera cuando sus tanques están a la mitad. En el momento actual llega un promedio de 7.5 clientes por hora a una gasolinera que tiene una sola bomba. Se requiere un promedio de 4 minutos para servir a un automóvil. Suponga que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicios son exponenciales.

a) Calcule L_s y W_s para los tiempos actuales.

b) Suponga que hay un déficit de gasolina y que hay compras de pánico. Para modelar este fenómeno, suponga que todos los dueños de automóviles compran ahora gasolina cuando sus tanques tienen ¾ de combustible. Como cada dueño pone ahora menos gasolina en el tanque cada vez que acude a la gasolinera, supongamos que el tiempo de servicio promedio se reduce a 3 minutos y un tercio. Qué tanto afectan a L y W las compras de pánico?

Solución:

- Tenemos un sistema M/M/1 con λ= 7.5 automóviles por hora y μ=15 (60/4) automóviles por hora. Por lo tanto

$\rho = \frac{7.5}{15} = 0.50$ =50% Tiempo que la bomba pasa ocupada.

$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.50}{1-0.50} = 1$ Promedio de clientes presentes en el sistema

$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{7.5} = 0.13 \text{ horas}$

(Tiempo promedio que un cliente pasa en la cola).

Por tanto bajo estas circunstancias todo está bajo control.

λ=2(7.5)= 15 automóviles por hora(esto se infiere porque cada dueño llenará su tanque dos veces) . Ahora

$$\mu = \frac{60}{3.333} \approx 18$$

Automóviles por hora. $\rho = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$=0.83333=83.3% Entonces.

$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{5/6}{1-5/6} = 5$ Automóviles estarán como máximo en el sistema en un momento dado

$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \; hora = 20 \min$ Esto es el tiempo que los clientes tardan en el sistema.

BLOQUE DE PROBLEMAS DE PL PARA RESOLVERLOS POR MÉTOD GRÁFICO

TOMADOS DEL LIBRO INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES -TAHA NOVENA EDICIÓN (páginas 20++)

1. OilCo está construyendo una refinería para producir cuatro productos: diesel, gasolina, lubricantes y combustible para avión. La demanda mínima (en barriles por día) de cada uno de esos productos es de 14,000, 30,000, 10,000 y 8000, respectivamente. Iraq y Dubai firmaron un contrato para enviar crudo a OilCo. Debido a las cuotas de producción especificadas por la OPEP (Organización de Países Exportadores de Petróleo), la nueva refinería puede recibir por lo menos 40% de su crudo de Iraq y el resto de Dubai. OilCo pronostica que la demanda y las cuotas de petróleo crudo no cambiarán durante los próximos 10 años.
   Las especificaciones de los dos crudos conducen a mezclas de productos diferentes: Un barril de crudo de Iraq rinde .2 barriles de diesel, .25 barriles de gasolina, 1 barril de lubricante y .15 barriles de combustible para avión. Los rendimientos correspondientes del crudo de Dubai son: .1, .6, 1.5 y .1, respectivamente. OilCo necesita determinar la capacidad mínima de la refinería (barriles por día).

2. Day Trader desea invertir una suma de dinero que genere un rendimiento anual mínimo de $10,000. Están disponibles dos grupos de acciones: acciones de primera clase y acciones de alta tecnología, con rendimientos anuales promedio de 10 y 25%, respectivamente. Aunque las acciones de alta tecnología producen un mayor rendimiento, son más riesgosas, y Trader quiere limitar la suma invertida en estas acciones a no más de 60% de la inversión total. ¿Cuál es la suma mínima que Trader debe invertir en cada grupo de acciones para alcanzar su objetivo de inversión?

3. Un centro de reciclaje industrial utiliza dos chatarras de aluminio, *A* y *B,* para producir una aleación especial. La chatarra *A* contiene 6% de aluminio, 3% de silicio, y 4% de carbón. La chatarra *B* contiene 3% de aluminio, 6% de silicio, y 3% de carbón. Los costos por tonelada de las chatarras *A* y *B* son de $100 y $80, respectivamente. Las especificaciones de la aleación especial requieren que (1) el contenido de aluminio debe ser mínimo de 3% y máximo de 6%; (2) el contenido de silicio debe ser de entre 3 y 5%, y (3) el contenido de carbón debe ser de entre 3 y 7%. Determine la mezcla óptima de las chatarras que deben usarse para producir 1000 toneladas de la aleación.

4. Una compañía fabrica dos productos, *A* y *B*. El volumen de ventas de *A* es por lo menos 80% de las ventas totales de *A* y *B*. Sin embargo, la compañía no puede vender más de 100 unidades de *A* por día. Ambos productos utilizan una materia prima, cuya disponibilidad diaria máxima es de 240 lb. Las tasas de consumo de la materia prima son de 2 lb por unidad de *A* y de 4 lb por unidad de *B*. Las utilidades de *A* y *B* son de $20 y $50, respectivamente. Determine la combinación óptima de productos para la compañía.

5. Alumco fabrica láminas y varillas de aluminio. La capacidad de producción máxima se estima en 800 láminas o 600 varillas por día. La demanda diaria es de 550 láminas y 580 varillas. La utilidad por tonelada es de $40 por lámina y de $35 por varilla. Determine la combinación de producción diaria óptima.

6. Una persona desea invertir $5000 durante el próximo año en dos tipos de inversión. La inversión *A* reditúa 5% y la inversión *B* 8%. La investigación de mercado recomienda una asignación de por lo menos 25% en *A* y cuando mucho 50% en *B*. Además, la inversión *A* debe ser por lo menos de la mitad de la inversión *B*. ¿Cómo deben asignarse los fondos a las dos inversiones?

7. La tienda de abarrotes Ma-and-Pa tiene un espacio de anaqueles limitado y debe utilizarlo con eficacia para incrementar las utilidades. Dos marcas de cereal, Grano y Wheatie, compiten por un total de espacio de 60 pies2en anaqueles. Una caja de Grano ocupa .2 pies2, y una caja de Wheatie requiere .4 pies2. Las demandas diarias máximas de Grano y Wheatie son de 200 y 120 cajas, respectivamente. Una caja de Grano reditúa una utilidad neta de $1.00 y la de una de Wheatie es de $1.35. Ma-and-Pa considera que como la utilidad neta de Wheatie es 35% mayor que la de Grano, a Wheatie se le debe asignar 35% más espacio que a Grano, lo que equivale a asignar aproximadamente 57% a Wheatie y 43% a Grano. ¿Usted qué piensa?

8. Wild West produce dos tipos de sombreros tejanos. El sombrero tipo 1 requiere el doble de mano de obra que el tipo 2. Si toda la mano de obra disponible se dedica sólo al tipo 2, la compañía puede producir un total de 400 sombreros tipo 2 al día. Los límites de mercado respectivos para el tipo 1 y el tipo 2 son de 150 y 200 sombreros por día, respectivamente. La utilidad es de $8 por sombrero tipo 1, y de $5 por sombrero tipo 2. Determine la cantidad de sombreros de cada tipo que maximice la utilidad.

9. Top Toys planea una nueva campaña de publicidad por radio y TV. Un comercial de radio cuesta $300 y uno de TV $2000. Se asigna un presupuesto total de $20,000 a la campaña. Sin embargo, para asegurarse de que cada medio tendrá por lo menos un comercial de radio y uno de TV, lo máximo que puede asignarse a uno u otro medio no puede ser mayor que el 80% del presupuesto total. Se estima que el primer comercial de radio llegará a 5000 personas, y que cada comercial adicional llegará sólo a 2000 personas nuevas. En el caso de la televisión, el primer anuncio llegará a 4500 personas y cada anuncio adicional a 3000. ¿Cómo debe distribuirse la suma presupuestada entre la radio y la TV?

10. Burroughs Garment Company fabrica camisas para caballero y blusas de dama para las tiendas de descuento Wallmart, corporación que aceptará toda la producción surtida por Burroughs. El proceso de producción incluye el corte, la costura y el empaque. Burroughs emplea 25 trabajadores en el departamento de corte, 35 en el de costura, y 5 en empaque. La fábrica trabaja un turno de 8 horas, 5 días a la semana. La siguiente tabla muestra los requerimientos de tiempo y utilidades por unidad para las dos prendas:

	Minutos por unidad			Utilidad
Prenda	*Corte*	*Costura*	*Empaque*	unitaria ($)
Camisas	20	70	12	8
Blusas	60	60	4	12

Determine el programa de producción semanal óptimo para Burroughs.

TOMADOS DEL LIBRO INTRODUCCION A LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES de Hiller-Lieberman NOVENA EDICIÓN (páginas 71++)

11. La compañía WorldLight produce dos dispositivos para lámparas (productos 1 y 2) que requieren partes de metal y componentes eléctricos. La administración desea determinar cuántas unidades de cada producto debe fabricar para maximizar la ganancia. Por cada unidad del producto 1 se requieren 1 unidad de partes de metal y 2 unidades de componentes eléctricos. Por cada unidad del producto 2 se necesitan 3 unidades de partes de metal y 2 unidades de componentes eléctricos. La compañía tiene 200 unidades de partes de metal y 300 de componentes eléctricos. Cada unidad del producto 1 da una ganancia de $1 y cada unidad del producto 2, hasta 60 unidades, da una ganancia de $2. Cualquier exceso de 60 unidades del producto 2 no genera ganancia, por lo que fabricar más de esa cantidad está fuera de consideración.
    a) Formule un modelo de programación lineal.
    b) Utilice el método gráfico para resolver este modelo. ¿Cuál es la ganancia total que resulta?

12. La compañía de seguros Primo está en proceso de introducir dos nuevas líneas de productos: seguro de riesgo especial e hipotecas. La ganancia esperada es de $5 por el seguro de riesgo especial y de $2 por unidad de hipoteca. La administración desea establecer las cuotas de venta de las nuevas líneas para maximizar la ganancia total esperada. Los requerimientos de trabajo son los siguientes:

Departamento	Horas de trabajo por unidad: Riesgo especial	Horas de trabajo por unidad: Hipoteca	Horas de trabajo disponibles
Suscripciones	3	2	2 400
Administración	0	1	800
Reclamaciones	2	0	1 200

    ***a*)** Formule un modelo de programación lineal.
    ***b*)** Use el método gráfi co para resolver el modelo.
    ***c*)** Verifi que el valor exacto de su solución óptima del inciso *b*) con la solución algebraica de las dos ecuaciones simultáneas relevantes.

13. Hoy es su día de suerte. Acaba de ganar un premio de $10 000. Dedicará $4 000 a impuestos y diversiones, pero ha decidido invertir los otros $6 000. Al oír esta noticia, dos amigos le han ofrecido una oportunidad de convertirse en socio en dos empresas distintas, cada una planeada por uno de ellos. En ambos casos, la inversión incluye dedicar parte de su tiempo el siguiente verano y dinero en efectivo. Para ser un socio *pleno* en el caso del primer amigo debe invertir $5 000 y 400 horas, y su ganancia estimada (sin tomar en cuenta el valor de su tiempo) sería de $4 500. Las cifras correspondientes para el segundo caso son $4 000 y 500 horas, con una ganancia estimada igual a la anterior. Sin embargo, ambos amigos son flexibles y le permitirían asociarse con cualquier *fracción* de

participación que quiera. Si elige una participación parcial, todas las cifras dadas para la sociedad plena (inversión de dinero y tiempo, y la ganancia) se pueden multiplicar por esta fracción. Como de todas formas usted busca un trabajo de verano interesante (máximo 600 horas), ha decidido participar en una o ambas empresas en alguna combinación que maximice su ganancia total estimada. Usted debe resolver el problema de encontrar la mejor combinación.

***a*)** Identifique las actividades y los recursos.

***b*)** Formule un modelo de programación lineal para este problema.

***c*)** Use el método gráfico para resolver el modelo. ¿Cuál es su ganancia total estimada?

14. Considere un problema con dos variables de decisión, *x*1 y *x*2, que representan los niveles de las actividades 1 y 2, respectivamente. Los valores permitidos para cada variable son 0, 1 y 2, en donde las combinaciones factibles de estos valores de las dos variables están determinadas por una serie de restricciones. El objetivo es maximizar cierta medida de desempeño denotada por *Z*. Se estima que los valores de *Z* para los valores posiblemente factibles de (*x*1, *x*2) son los que se dan en la siguiente tabla:

	x_2		
x_1	0	1	2
0	0	4	8
1	3	8	13
2	6	12	18

Con base en esta información indique si este problema satisface por completo cada uno de los supuestos de programación lineal. Justifique sus respuestas.

15. La carne con papas es el plato favorito de Ralph Edmund. Por eso decidió hacer una dieta continua de sólo estos dos alimentos (más algunos líquidos y suplementos de vitaminas) en todas sus comidas. Ralph sabe que ésa no es la dieta más sana y quiere asegurarse de que toma las cantidades adecuadas de los dos alimentos para satisfacer los requerimientos nutricionales. Él ha obtenido la información nutricional y de costo que se muestra en el siguiente cuadro.

Ralph quiere determinar el número de porciones diarias (pueden ser fraccionales) de res y papas que cumplirían con estos requerimientos a un costo mínimo.

a) Formule un modelo de programación lineal.

b) Use el método gráfico para resolver el modelo.

	Gramos de ingrediente por porción		
Ingrediente	**Res**	**Papas**	**Requerimiento diario (gramos)**
Carbohidratos	5	15	≥ 50
Proteínas	20	5	≥ 40
Grasa	15	2	≤ 60
Costo por porción	\$4	\$2	

TOMADOS DEL LIBRO METODOS CUANTITATIVOS PARA NEGOCIOS UNDECIMA EDICIÓN (página 290++)

16. El candidato a la alcaldía en un pequeño pueblo asignó $40,000 para propaganda de último minuto en los días anteriores a la elección. Se utilizarán dos tipos de anuncios: radio y televisión. Cada anuncio de radio cuesta $200 y llega a unas 3,000 personas. Cada anuncio de televisión cuesta $500 y llega a un estimado de 7,000 personas. En la planeación de la campaña de propaganda, la jefa de la campaña quiere llegar a tantas personas como sea posible, aunque ha establecido que se deben utilizar al menos 10 anuncios de cada tipo. Asimismo, el número de anuncios de radio debe ser al menos tan grande como el número de anuncios de televisión.

    - ¿Cuántos anuncios de cada tipo se deberían utilizar?
    - ¿A cuántas personas llegarán?

17. La corporación Outdoor Furniture fabrica dos productos, bancos y mesas de picnic, para su uso en jardines y parques. La empresa cuenta con dos recursos principales: sus carpinteros (mano de obra) y el suministro de madera de secoya para fabricar muebles. Durante el siguiente ciclo de producción están disponibles 1,200 horas de mano de obra de acuerdo con el sindicato. La empresa también cuenta con un inventario de 3,500 pies de secoya de buena calidad. Cada banco que produce Outdoor Furniture requiere de 4 horas de mano de obra y de 10 pies de secoya, en tanto que cada mesa de picnic toma 6 horas de mano de obra y 35 pies de secoya. Los bancos terminados darán una utilidad de $9 cada uno; y las mesas una utilidad de $20 cada una. ¿Cuántos bancos y mesas debería fabricar Outdoor Furniture para obtener la mayor utilidad posible? Utilice el método gráfico de la PL.

18. El decano del Western College of Business debe planear la oferta de cursos de la escuela para el semestre de otoño. Las demandas de los estudiantes hacen que sea necesario ofrecer un mínimo de 30 cursos de licenciatura y 20 de posgrado durante el semestre. Los contratos de los profesores también dictan que se ofrezcan al menos 60 cursos en total. Cada curso de licenciatura impartido cuesta a la universidad un promedio de $2,500 en salarios de docentes, y cada curso de posgrado cuesta $3,000. ¿Cuántos cursos de licenciatura y posgrado se deberían impartir en otoño, de manera que los salarios totales del profesorado se reduzcan al mínimo?

19. La corporación MSA Computer fabrica dos modelos de minicomputadoras, Alpha 4 y Beta 5. La empresa contrata a cinco técnicos, que trabajan 160 horas cada mes, en su línea de ensamble. La gerencia insiste en que se mantenga pleno empleo (es decir, las 160 horas de tiempo) para cada trabajador durante las operaciones del siguiente mes. Se requiere 20 horas de trabajo para ensamblar cada equipo Alpha 4 y 25 horas de trabajo para ensamblar cada modelo Beta 5. MSA desea producir al menos 10 Alfa 4 y por lo menos 15 Beta 5 durante el periodo de producción. Las Alfa 4 generan $1,200 de utilidad por unidad, y las Beta 5 producen $1,800 cada una. Determine el número más rentable de cada modelo de minicomputadora que se debe producir durante el próximo mes.

20. Considere esta formulación de PL:

Minimizar el costo $= \$X + 2Y$
sujeto a

$$X + 3Y \geq 90$$
$$8X + 2Y \geq 160$$
$$3X + 2Y \geq 120$$
$$Y \leq 70$$
$$X, Y \geq 0$$

Muestre gráficamente la región factible y aplique el procedimiento de la recta de isocosto, para indicar qué punto esquina genera la solución óptima.
¿Cuál es el costo de esta solución?

BLOQUE DE PROBLEMAS DE PL PARA RESOLVERLOS POR MÉTOD SIMPLEX

1. Fox Enterprises está considerando seis posibles proyectos de construcción durante los próximos 4 años. Fox puede emprender cualquiera de los proyectos en parte o en su totalidad. La ejecución parcial de un proyecto prorrateará proporcionalmente tanto el rendimiento como los desembolsos de efectivo. Los rendimientos (valor presente) y los desembolsos de efectivo para los proyectos se dan en la siguiente tabla.

	Desembolso de efectivo ($1000)				
Proyecto	*Año 1*	*Año 2*	*Año 3*	*Año 4*	Rendimiento ($1000)
1	10.5	14.4	2.2	2.4	32.40
2	8.3	12.6	9.5	3.1	35.80
3	10.2	14.2	5.6	4.2	17.75
4	7.2	10.5	7.5	5.0	14.80
5	12.3	10.1	8.3	6.3	18.20
6	9.2	7.8	6.9	5.1	12.35
Fondos disponibles ($1000)	60.0	70.0	35.0	20.0	

(a) Formule el problema como un programa lineal, y determine la combinación óptima de proyectos que maximice el rendimiento total utilizando POM-QM. Pase por alto el valor en el tiempo del dinero.
(b) Suponga que si se emprende una parte del proyecto 2, entonces debe emprenderse por lo menos una parte igual del proyecto 6. Modifique la formulación del modelo y determine la nueva solución óptima.
(c) En el modelo original, suponga que los fondos no utilizados al final de un año se utilizan en el año siguiente. Halle la nueva solución óptima, y determine qué tanto cada año “le pide prestado” al año anterior .Por sencillez, pase por alto el valor del dinero en el tiempo.

(d) Suponga en el modelo original que los fondos anuales disponibles para cualquier año se pueden exceder, si fuera necesario, pidiendo prestado a otras actividades financieras dentro de la compañía. Ignorando el valor del dinero en el tiempo, reformule el modelo de PL y determine la solución óptima. ¿Requeriría la nueva solución que se pida prestado en cualquier año? De ser así, ¿cuál es la tasa de rendimiento sobre el dinero pedido en préstamo?

2. El inversionista Doe dispone de $10,000 para invertirlos en cuatro proyectos. La tabla siguiente presenta el flujo de efectivo para las cuatro inversiones.

	Flujo de efectivo ($1000) al inicio del				
Proyecto	*Año 1*	*Año 2*	*Año 3*	*Año 4*	*Año 5*
1	−1.00	0.50	0.30	1.80	1.20
2	−1.00	0.60	0.20	1.50	1.30
3	0.00	−1.00	0.80	1.90	0.80
4	−1.00	0.40	0.60	1.80	0.95

La información que aparece en la tabla puede interpretarse como sigue: Para el proyecto 1, $1.00 invertido al inicio del año 1 redituará $.50 al inicio del año 2; $.30 al inicio del año 3; $1.80 al inicio del año 4, y $1.20 al inicio de año 5. Las entradas restantes pueden interpretarse de la misma manera. La entrada 0.00 indica que no se están realizando transacciones. Doe tiene opción adicional de invertir en una cuenta bancaria que gana 6.5% anual. Todos los fondos acumulados al final del año 1 pueden volverse a invertir en el año siguiente. Formule el problema como un programa lineal para determinar la asignación óptima de fondos a oportunidades de inversión. Resuelva el modelo con POM-QM.

3. La compañía manufacturera Omega discontinuó la producción de cierta línea de productos no redituable. Esta medida creó un exceso considerable de capacidad de producción. La administración quiere dedicar esta capacidad a uno o más de tres productos, llamados 1, 2 y 3. En la siguiente tabla se resume la capacidad disponible de cada máquina que puede limitar la producción:

Tipo de máquina	Tiempo disponible (en horas-máquina por semana)
Fresadora	500
Torno	350
Rectificadora	150

El número de horas-máquina que se requieren para elaborar cada unidad de los productos respectivos es

Coeficiente de productividad (en horas-máquina por unidad)

Tipo de máquina	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Fresadora	9	3	5
Torno	5	4	0
Rectificadora	3	0	3

El departamento de ventas indica que las ventas potenciales de los productos 1 y 2 exceden la tasa máxima de producción y que las ventas potenciales del producto 3 son de 20 unidades por semana. La ganancia unitaria sería de $50, $20 y $25, para los productos 1, 2 y 3, respectivamente. El objetivo es determinar cuántos productos de cada tipo debe producir la compañía para maximizar la ganancia.

***a*)** Formule un modelo de programación lineal para este problema.

***b*)** Utilice una computadora para resolver este modelo mediante el método símplex

4. En anticipación a los fuertes gastos académicos, Joe y Jill iniciaron un programa de inversión anual en el octavo cumpleaños de su hijo, el cual terminará hasta que cumpla dieciocho años. Planean invertir las siguientes cantidades al principio de cada año:

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad ($)	2000	2000	2500	2500	3000	3500	3500	4000	4000	5000

Para evitar sorpresas desagradables, quieren invertir el dinero sin riesgo en las siguientes opciones: Ahorros asegurados con rendimiento anual de 7.5%, bonos del gobierno a seis años que rinden 7.9% y cuyo precio de mercado actual es de 98% de su valor nominal, además de bonos municipales a 9 años que rinden 8.5% y cuyo precio de mercado actual es de 1.02 de su valor nominal. ¿Cómo deberá invertirse el dinero?

5. *Lewis (1996).* Las facturas en una casa se reciben mensualmente (por ejemplo, servicios e hipoteca de la casa), trimestralmente (pagos de impuestos estimados), semestralmente (como los seguros), o anualmente (renovaciones y pagos vencidos de suscripciones). La siguiente tabla da las facturas mensuales durante el próximo año.

Mes	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.	Total
$	800	1200	400	700	600	900	1500	1000	900	1100	1300	1600	12000

Para solventar estos gastos, la familia aparta $1000 cada mes, cantidad que es el promedio del total dividido entre 12 meses. Si el dinero se deposita en una cuenta de ahorros convencional, puede ganar un interés anual de 4%, siempre que permanezca en la cuenta por lo menos 1 mes. El banco también ofrece certificados de depósito a 3 y 6 meses que pueden ganar el 5.5% y 7% de interés anual, respectivamente. Desarrolle un programa de inversión de 12 meses que maximizará la ganancia total de la familia durante el año.

Establezca cualesquier suposiciones o requerimientos necesarios para llegar a una solución factible. Resuelva el modelo con POM-QM.

6. Una compañía fabrica tres productos, *A*, *B* y *C*. El volumen de ventas de *A* es como mínimo 50% de las ventas totales de los tres productos. Sin embargo, la compañía no puede vender más de 75 unidades por día. Los tres productos utilizan una materia prima de la cual la máxima disponibilidad diaria es de 240 lb. Las tasas de consumo de la materia prima son de 2 lb por unidad de *A*, 4 lb por unidad de *B,* y 3 lb por unidad de *C*. Los precios unitarios de *A*, *B* y *C* son $20, $50 y $35, respectivamente.
   (a) Determine la combinación óptima de productos para la compañía.
   (b) Determine el precio dual de la materia prima y su intervalo permisible. Si la materia prima disponible se incrementa en 120 lb, determine la solución óptima y el cambio del ingreso total mediante el precio dual.
   (c) Use el precio dual para determinar el efecto de cambiar la demanda máxima del producto *A* en 610 unidades.

7. Un avión de carga tiene tres compartimientos para almacenar: delantero, central y trasero. Estos compartimientos tienen un límite de capacidad tanto de *peso* como de *espacio*. Los datos se resumen a continuación:

Compartimiento	Capacidad de peso (ton)	Capacidad de espacio (ft^3)
Delantero	12	7 000
Central	18	9 000
Trasero	10	5 000

Más aún, para mantener el avión balanceado, el peso de la carga en los respectivos compartimientos debe ser proporcional a su capacidad. Se tienen ofertas para transportar cuatro cargamentos en un vuelo próximo ya que se cuenta con espacio:

Carga	Peso (ton)	Volumen (ft^3/ton)	Ganancia ($/ton)
1	20	500	320
2	16	700	400
3	25	600	360
4	13	400	290

Se puede aceptar cualquier fracción de estas cargas. El objetivo es determinar cuál cantidad de cada carga debe aceptarse (si se acepta) y cómo distribuirla en los compartimientos para maximizar la ganancia del vuelo.
***a*)** Formule un modelo de programación lineal.
***b*)** Resuelva el modelo por el método símplex para encontrar una de sus soluciones óptimas múltiples.

8. Oxbridge University tiene una computadora grande para uso de académicos, estudiantes de doctorado y ayudantes de investigación. Durante las horas hábiles debe haber un trabajador para operar y dar mantenimiento a la computadora y realizar algunos servicios de programación. Beryl Ingram, director del centro de cómputo, coordina la operación. Al principio del semestre de otoño, Beryl se enfrenta al problema de asignar horas de trabajo distintas a sus operadores. Debido a que éstos son estudiantes de la universidad, están disponibles para el trabajo sólo un número limitado de horas al día, como se muestra en la tabla.

Operadores	Tasa salarial	Máximo de horas disponibles				
		Lun.	Mar.	Mier.	Jue.	Vie.
K. C.	$10.00/hora	6	0	6	0	6
D. H.	$10.10/hora	0	6	0	6	0
H. B.	$ 9.90/hora	4	8	4	0	4
S. C.	$ 9.80/hora	5	5	5	0	5
K. S.	$10.80/hora	3	0	3	8	0
N. K.	$11.30/hora	0	0	0	6	2

Hay seis operadores (cuatro de licenciatura y dos de posgrado).
Todos tienen salarios diferentes según su experiencia con computadoras y su aptitud para programar. La tabla muestra estos salarios junto con el número máximo de horas al día que cada uno puede trabajar. Se garantiza a cada operador un número mínimo de horas de trabajo a la semana que lo mantendrán con un conocimiento adecuado de la operación. Este nivel se estableció de modo arbitrario en 8 horas por semana para licenciatura (K. C., D. H., H. B. y S. C.) y 7 horas por semana para posgrado (K. S. y N. K).

El centro de cómputo debe abrir de 8 a.m. a 10 p.m. de lunes a viernes con un operador de guardia en este horario. Sábados y domingos, lo operan otras personas.
Debido al presupuesto reducido, Beryl tiene que minimizar el costo. Por lo tanto, quiere determinar el número de horas que debe asignar a cada operador cada día.

a) Formule un modelo de programación lineal para este problema
b) Resuelva este modelo por el método símplex.

9. Joyce y Marvin tienen una guardería. Intentan decidir qué dar a los niños de almuerzo. Desean mantener sus costos bajos, pero también deben cumplir con los requerimientos nutritivos de los niños. Ya decidieron darles sándwiches de mantequilla de maní y mermelada y alguna combinación de galletas, leche y jugo de naranja. El contenido nutritivo de cada alimento y su costo se presenta en la siguiente tabla**.**

Ingredientes	Calorías de grasa	Calorías totales	Vitamina C (mg)	Proteína (g)	Costo (¢)
Pan (l rebanada)	10	70	0	3	5
Mantequilla de maní (1 cuch.)	75	100	0	4	4
Mermelada de fresa (1 cuch.)	0	50	3	0	7
Galleta (1 pieza)	20	60	0	1	8
Leche (1 taza)	70	150	2	8	15
Jugo (1 taza)	0	100	120	1	35

Los requerimientos nutritivos son los siguientes. Cada niño debe recibir de 400 a 600 calorías. No más de 30% de las calorías totales deben provenir de grasas. Cada niño debe consumir al menos 60 mg de vitamina C y 12 g de proteína. Todavía más, por razones prácticas, cada niño necesita 2 rebanadas de pan (para un sándwich), al menos el doble de mantequilla de maní que de mermelada y al menos una tasa de líquido (leche y/o jugo de naranja).

Joyce y Marvin desean seleccionar las opciones de alimento para cada niño que minimice el costo mientras cumple con los requerimientos establecidos.

***a*)** Formule un modelo de programación lineal para este problema.

***b*)** Resuelva el modelo por el método símplex.

10. Maureen Laird es directora de inversiones de Alva Electric Co., empresa importante en el medio oeste. La compañía ha programado la construcción de nuevas plantas hidroeléctricas a 5, 10 y 20 años para cumplir con las necesidades de la creciente población en la región que sirve. Maureen debe invertir parte del dinero de la compañía para cubrir sus necesidades de efectivo futuras. Puede comprar sólo tres tipos de activos, cada una de las cuales cuesta 1 millón. Se pueden comprar unidades fraccionarias. Los activos producen ingresos a 5, 10 y 20 años, y el ingreso se necesita para cubrir necesidades mínimas de flujos de efectivo en esos años. (Cualquier ingreso arriba del mínimo que se requiere para cada periodo se usará para incrementar el pago de dividendos a los accionistas en lugar de ahorrarlo para ayudar a cumplir con los requerimientos mínimos de efectivo del siguiente periodo.) La tabla que se presenta a continuación muestra la cantidad de ingreso generada por cada unidad de acciones y la cantidad mínima de ingreso requerida para cada periodo futuro en se construirá una nueva planta.

Año	Ingresos por acción			Flujo de efectivo requerido
	Activo 1	Activo 2	Activo 3	
5	$2 millones	$1 millón	$0.5 millones	$400 millones
10	$0.5 millones	$0.5 millones	$1 millón	$100 millones
20	0	$1.5 millones	$2 millones	$300 millones

Maureen desea determinar la mezcla de inversiones en estas acciones que cubrirá los requerimientos de efectivo y que minimizará la cantidad total invertida.

a. Formule un modelo de programación lineal para este problema.
b. Despliegue el modelo en una hoja de cálculo.
c. Utilice la hoja de cálculo para verificar la posibilidad de comprar 100 unidades de la acción 1, 100 de la acción 2 y 200 de la 3. ¿Cuánto efectivo generará esta mezcla de inversiones dentro de 5, 10 y 20 años, respectivamente? ¿Cuál será la cantidad total invertida?
d. Utilice el enfoque de prueba y error con la hoja de cálculo para obtener su mejor solución óptima. ¿Cuál es la inversión total de su solución?
e. Use POM-QM para resolver el modelo por el método símplex.

BLOQUE DE PROBLEMAS DE TRANSPORTES Y TRANSBORDO

(Puede hacer uso del software POM-QM)

1. La gerencia de la corporación Executive Furniture decidió expandir la capacidad de producción en su fábrica de Des Moines y disminuir la producción en sus otras fábricas. También reconoce un cambio de mercado para sus escritorios y revisa los requerimientos en sus tres almacenes.

a) Utilice la regla de la esquina noroeste para establecer un programa de envíos factible inicial y calcular su costo.

b) Utilice el método del costo mínimo para probar si es posible obtener una solución mejorada.

NUEVOS REQUERIMIENTOS DEL ALMACÉN		NUEVAS CAPACIDADES DE FÁBRICA	
Albuquerque (*A*)	200 escritorios	Des Moines (*D*)	300 escritorios
Boston (*B*)	200 escritorios	Evansville (*E*)	150 escritorios
Cleveland (*C*)	300 escritorios	Fort Lauderdale (*F*)	250 escritorios

Tabla para el problema de la corporación Executive Furniture.

DE \ A	ALBUQUERQUE	BOSTON	CLEVELAND
DES MOINES	5	4	3
EVANSVILLE	8	4	3
FORT LAUDERDALE	9	7	5

2. La compañía Hardrock Concrete tiene plantas en tres lugares y trabaja actualmente en tres proyectos de construcción importantes, cada uno ubicado en un sitio diferente. El costo de envío por camión cargado de concreto, las capacidades diarias y los requerimientos diarios se muestran en la tabla correspondiente.

a) Formule una solución factible inicial para el problema de transporte de Hardrock con la regla de la esquina noroeste. Luego, evalúe cada ruta de envío no utilizada calculando todos los índices de mejora. ¿Es óptima la solución? ¿Por qué?

b) ¿Hay más de una solución óptima para este problema? ¿Por qué?

Datos para el problema

DE \ A	PROYECTO *A*	PROYECTO *B*	PROYECTO *C*	CAPACIDAD DE PLANTA
PLANTA 1	\$10	\$4	\$11	70
PLANTA 2	12	5	8	50
PLANTA 3	9	7	6	30
REQUERIMIENTOS DEL PROYECTO	40	50	60	150

3. La compañía Krampf Lines Railway se especializa en manejo de carbón. El viernes 13 de abril, Krampf tenía vagones vacíos en los siguientes pueblos en las cantidades indicadas:

PUEBLO	VAGONES DISPONIBLES
Morgantown	35
Youngstown	60
Pittsburgh	25

Para el lunes 16 de abril, los siguientes pueblos necesitarán vagones de carbón como sigue:

PUEBLO	DEMANDA DE VAGONES
Coal Valley	30
Coaltown	45
Coal Junction	25
Coalsburg	20

Usando una gráfica de distancias de ciudad a ciudad para ferrocarriles, el despachador elabora una tabla de millas para los pueblos anteriores. El resultado se muestra en la tabla correspondiente. Calcule el mejor envío de vagones de carbón que minimice las millas totales de los carros que se mueven a los nuevos lugares.

DE \ A	COAL VALLEY	COALTOWN	COAL JUNCTION	COALSBURG
MORGANTOWN	50	30	60	70
YOUNGSTOWN	20	80	10	90
PITTSBURGH	100	40	80	30

4. MG Auto Company tiene plantas en Los Ángeles, Detroit y Nueva Orleáns. Sus centros de distribución principales son Denver y Miami. Las capacidades de las plantas durante el trimestre próximo son 1000, 1500, y 1200 automóviles. Las demandas trimestrales en los dos centros de distribución son de 2300 y 1400 vehículos.

El costo del transporte de un automóvil por tren es de 8 centavos por milla. El diagrama de las distancias recorridas entre las plantas y los centros de distribución son.

	Denver	Miami
Los Ángeles	1 000	1 690
Detroit	1 250	1 350
Nueva Orleans	1 275	850

Esto produce en costo por automóvil a razón de 8 centavos por milla recorrida. Produce los costos siguientes (redondeados a enteros), que representan a C_{ij} del modelo original.

	Denver	Miami
Los Ángeles	80	215
Detroit	100	108
Nueva Orleans	102	68

Calcular el costo que minimice el transporte de los vehículos de las plantas a los Centros de distribución.

5. Tres plantas de energía eléctrica con capacidades de 25, 40 y 50 millones de kilovatios/hora, respectivamente, ubicadas en Lima (Provincia. Bs As), Costanera Sur, y Arroyo Seco (Provincia de Santa Fe) deben suministrar electricidad a Junín (Provincia. Bs As), Buenos Aires, y Rosario. La demanda máxima prevista es en cada ciudad de 30, 35 y 25 millones de kilovatios/hora, respectivamente. El costo de transporte UM (unidades monetarias) por millón de kilovatio/hora está dado en la siguiente tabla:

	Junín	Buenos Aires	Rosario
Lima	600	700	700
Costanera Sur	320	300	300
Arroyo Seco	500	480	450

Hay que tener una ciudad ficticia porque es superior la oferta a la demanda minimice los costos.

6. Una empresa energética dispone de cuatro plantas de generación para satisfacer la demanda diaria eléctrica en cuatro ciudades, Junín, Salto, Vedia y Lincoln. Las plantas 1,2,3 y 4 pueden satisfacer 80, 30, 60 y 45 millones de KW al día respectivamente. Las necesidades de las ciudades de Junín, Salto, Vedia y Lincoln son de 70, 40, 70 y 35 millones de Kw al día respectivamente.

Los costos asociados al envío de suministro energético por cada millón de KW entre cada planta y cada ciudad son los registrados en la siguiente tabla.

	Junín	Salto	Vedia	Lincoln
Planta 1	5	2	7	3
Planta 2	3	6	6	1
Planta 3	6	1	2	4
Planta 4	4	3	6	6

Encuentre el costo mínimo.

7. Una fábrica dispone de tres centros de distribución A, B y C cuyas disponibilidades de materia prima son 100, 120 y 120 tm respectivamente. Dicha materia prima debe ser entregada a cinco almacenes I, II, III, IV y V, los cuales deben de recibir respectivamente 40, 50, 70, 90 y 90 tm. Determinar una solución que optimice el costo de envío.

MATRIZ DE COSTES

Orígenes	DESTINOS				
	I	II	III	IV	V
A	10	20	5	9	10
B	2	10	8	30	5
C	1	20	7	10	4

8. Tres (3) fábricas envían su producto a cinco (5) distribuidores. Las disponibilidades, los requerimientos y costos unitarios de transporte, se dan en la siguiente tabla.

Fábricas	Distribuidores					Disponibilidades
	1	2	3	4	5	
1	20	19	14	21	16	40
2	15	20	13	19	16	60
3	18	15	18	20	X	70
Requerimientos	30	40	50	40	60	

¿Qué cantidad del producto se debe enviar desde cada fábrica a cada distribuidor para minimizar los costos del transporte?
NOTA: La "X" significa que desde la fábrica 3 es imposible enviar unidades al distribuidor 5.

9. Una cadena de cinco (5) Almacenes, ubicados en diferentes partes del país, requieren cierta mercancía para cada uno de sus almacenes. Las Empresas abastecedoras han informado que disponen de la mercancía solicitada, pero en tres (3) diferentes fábricas. La escasez del producto hace que la cadena de almacenes deba transportar la mercancía. En base a los costos del transporte por unidad, a los requerimientos de los almacenes y a la disponibilidad de las fábricas, que se muestra en el siguiente cuadro; Formule el problema de programación lineal que minimice los costos totales del transporte y resuélvalo.

	ALMACENES					Disponibilidad
FÁBRICAS	1	2	3	4	5	
A	10	20	40	30	50	1.000
B	20	30	50	40	10	1.000
C	30	40	10	50	20	1.500
Requerimientos	1.000	800	600	800	300	3.500

10. Una Compañía desea saber, que política de distribución minimizará sus costos totales, se cuenta con tres (3) fábricas y cuatro (4) clientes, la producción de las fábricas es de: 550, 300 y 260 unidades respectivamente; y las necesidades de los cuatro (4) clientes son: 250, 300, 200, y 160 unidades respectivamente. Los costos de enviar una (1) unidad entre cada fábrica y los clientes se da a continuación:

		CLIENTES				OFERTA
		1	2	3	4	
FÁBRICAS	A	8	3	4	5	550
	B	7	6	5	2	300
	C	2	4	3	3	260
DEMANDA		250	300	200	160	

Minimice los costos de envío.

11. Una fábrica posee dos plantas de manufactura, una en Memphis y otra en Denver. La planta de Memphis puede producir hasta 150 unidades al día, la de Denver hasta 200 unidades al día. Los productos son enviados por avión a Los Ángeles y Boston. En ambas ciudades, se requieren 130 unidades diarias. Existe una posibilidad de reducir costos enviando algunos productos en primer lugar a New York o a Chicago y luego a sus destinos finales. Los costos unitarios de cada tramo factible se ilustran en la siguiente tabla:

Tabla de Costos de transporte

Hacia

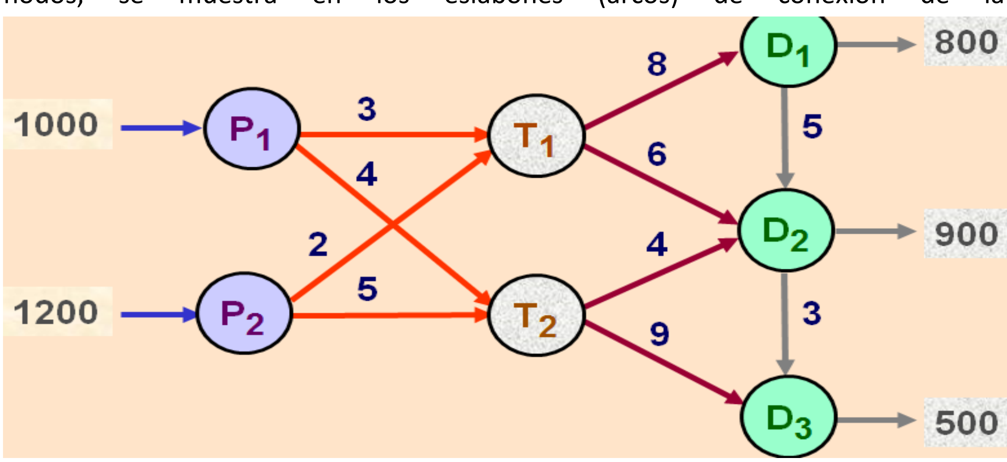
Desde

	Memphis	Denver	N.Y.	Chicago	L.A.	Boston
Memphis	0	-	8	13	25	28
Denver	-	0	15	12	26	25
N.Y.	-	-	0	6	16	17
Chicago	-	-	6	0	14	16
L.A.	-	-	-	-	0	-
Boston	-	-	-	-	-	0

La fábrica desea satisfacer la demanda, minimizando el costo total de envío. En este problema, Memphis y Denver son puntos de oferta de 150 y 200 unidades respectivamente. New York y Chicago son puntos de transbordo. Los Ángeles y Boston son puntos de demanda de 130 unidades cada uno.

12. Dos fábricas de automóviles, P_1 y P_2, están conectadas a tres distribuidores, D_1, D_2 y D_3, por medio de dos centros de tránsito, T_1 y T_2, de acuerdo con la red que se muestra.

Las cantidades de las ofertas en las fábricas P_1 y P_2, son de 1000 y 1200 automóviles, y las cantidades de la demanda en las distribuidoras D_1, D_2 y D_3, son de 800, 900 y 500 automóviles. El costo de envío por automóvil (en decenas de dólares) entre los pares de nodos, se muestra en los eslabones (arcos) de conexión de la red.

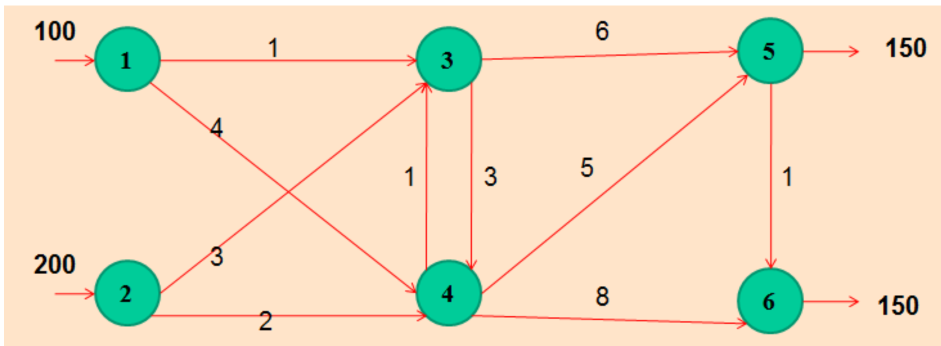


Minimizar los costos de envíos de las fábricas a los tres centros de distribución.

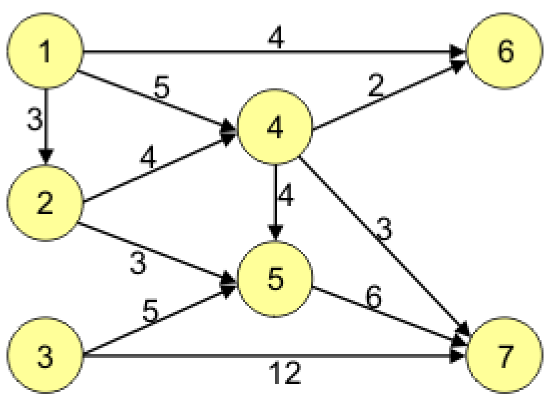
13. La red de la figura, muestra las rutas de transporte de los nodos 1 y 2 a los nodos 5 y 6, pasando por los nodos 3 y 4. Se ven, en los arcos respectivos, los costos unitarios de transporte.

a. Formule el modelo correspondiente de transbordo

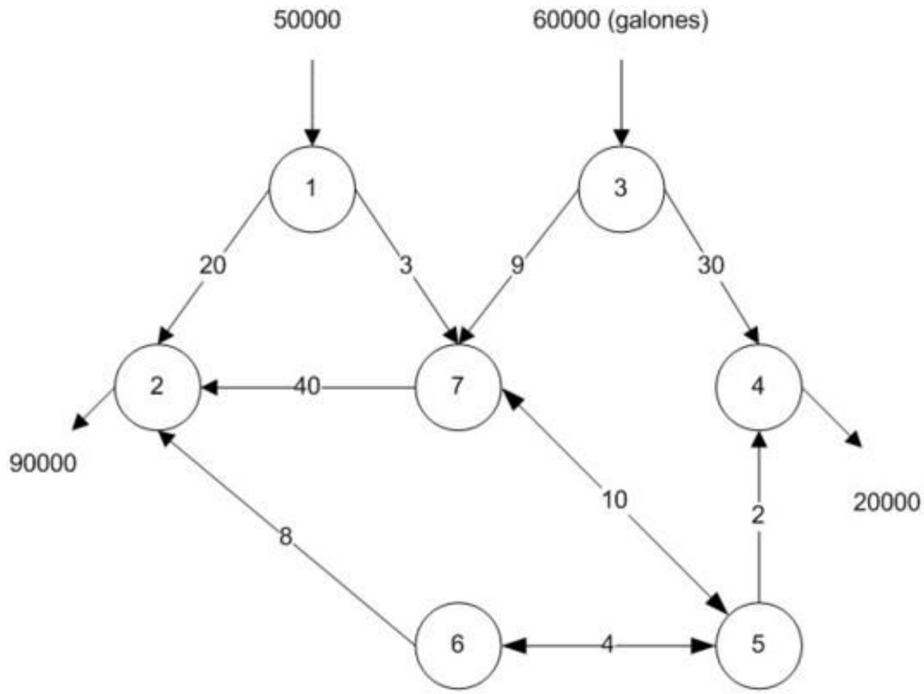
b. Resuelva el modelo e indique cual es la solución óptima.



14. Convierta el siguiente problema de transbordo a la tabla usual del problema de transporte y resuélvalo; en donde la respectiva oferta en los nodos 1, 2 y 3 son 10, 20 y 15 unidades, y la respectiva demanda en los nodos 5, 6 y 7 es 10, 25 y 10 unidades.



15. Este es un problema propuesto en el texto "Investigación de Operaciones de TAHA" que hace referencia a una red de gasoductos en la que los distintos nodos representan estaciones de bombeo y recepción, los costos se encuentran en las rutas de la siguiente red. Los nos nodos 1 y 3 son nodos de bombeo, los nodos 2 y 4 de recepción y el resto de nodos son de transbordo. Resuélvalo minimizando el costo de envío.



BLOQUE DE PROBLEMAS DE ASIGNACIÓN

(Puede hacer uso del software POM-QM)

1. La compañía de manufactura "Jiménez y Asociados" desea realizar una jornada de mantenimiento preventivo a sus tres máquinas principales A, B y C. El tiempo que demanda realizar el mantenimiento de cada máquina es de 1 día, sin embargo la jornada de mantenimiento no puede durar más de un día, teniendo en cuenta que la compañía cuenta con tres proveedores de servicios de mantenimiento debe de asignarse un equipo de mantenimiento a cada máquina para poder cumplir con la realización del mantenimiento preventivo. Teniendo en cuenta que según el grado de especialización de cada equipo prestador de servicios de mantenimiento el costo de la tarea varía para cada máquina en particular, debe de asignarse el equipo correcto a la máquina indicada con el objetivo de minimizar el costo total de la jornada. Los costos asociados se pueden observar en la siguiente tabla:

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
Equipo de mantenimiento 1	€ 10	€ 9	€ 5
Equipo de mantenimiento 2	€ 9	€ 8	€ 3
Equipo de mantenimiento 3	€ 6	€ 4	€ 7

2. Se desea asignar 4 máquinas a 4 lugares posibles. A continuación se presentan los costos asociados. Se solicita minimizar los costos de asignación.

Maquina\Lugar	1	2	3	4
1	3	5	3	3
2	5	14	10	10
3	12	6	19	17
4	2	17	10	12

3. El entrenador de un equipo de natación debe asignar competidores para la prueba de 200 metros de relevo combinado que irán a las Olimpiadas Juveniles. Como muchos de sus mejores nadadores son rápidos en más de un estilo, no es fácil decidir qué nadador asignar a cada uno de los cuatro estilos. Los cinco mejores nadadores y sus mejores tiempos (en segundos) en cada estilo son los siguientes. Asigne óptimamente los mejores a cada categoría para minimizar el tiempo total.

	Tiempo de Nado				
	Carlos	Cristy	David	Antony	José
Dorso	37.7	32.9	33.8	37	35.4
Pecho	43.4	33.1	42.2	34.7	41.8
Mariposa	33.3	28.5	38.9	30.4	33.6
Libre	29.2	26.4	29.6	28.5	31.1

4. El gerente de la línea de producción de una empresa electrónica debe asignar personal a cinco tareas. Existen cinco operadores disponibles para asignarlos. El gerente de línea tiene a su disposición datos de prueba que reflejan una calificación numérica de productividad para cada uno de los cinco trabajos. Estos datos se obtuvieron a través de un examen de operación y prueba administrado por el departamento de ingeniería industrial (véase la tabla P3-20). Suponiendo que un operador puede ejecutar un solo trabajo, plantee un modelo que conduzca a la asignación óptima de tareas.

Número de operador	Número de trabajo				
	1	2	3	4	5
Op1	12	16	24	8	2
Op2	6	8	20	14	6
Op3	10	6	26	18	12
Op4	2	4	2	24	20
Op5	7	10	6	6	18

5. Se deben utilizar cuatro barcos cargueros para transportar bienes de un puerto a otros cuatro puertos (numerados 1, 2,3, y 4). Se puede usar cualquier barco para hacer cualquiera de los cuatro viajes. Sin embargo, dadas algunas diferencias entre los barcos y las cargas, el costo total de carga, transporte y descarga de bienes de las distintas combinaciones de barcos y puertos varía de manera considerable. Estos costos se muestran en la tabla siguiente.

		Puertos			
		1	2	3	4
Barcos	1	\$500	\$400	\$600	\$700
	2	\$600	\$600	\$700	\$500
	3	\$700	\$500	\$700	\$600
	4	\$500	\$400	\$600	\$600

6. El profesor Michell ha terminado 4 capítulos de su libro y está pensando en pedir ayuda para terminarlo. El ha elegido a 4 secretarias que podrían tipearle cada uno

de sus capítulos. El costo asociado refleja la velocidad de la secretaria y la exactitud con la que realiza el trabajo. Además los capítulos difieren en la cantidad de hojas y en la complejidad. ¿Qué puede hacer el profesor si conoce la siguiente tabla:

Capítulos

Secretaría	13	14	15	16
Juana	96	99	105	108
María	116	109	107	96
Jackeline	120	102	113	111
Edith	114	105	118	115

7. Llegan cuatro automóviles al taller de reparación de Bubba para varios tipos de trabajos: desde una transmisión averiada hasta un ajuste de frenos. El nivel de experiencia de los mecánicos varía considerablemente y Bubba quiere minimizar el tiempo requerido para completar todos los trabajos. Estima el tiempo en minutos para que cada mecánico termine cada trabajo. Billy puede terminar el trabajo 1 en 400 minutos, el trabajo 2 en 90 minutos, el trabajo 3 en 60 minutos y el trabajo 4 en 120 minutos. Taylor terminará el trabajo 1 en 650 minutos, el trabajo 2 en 120 minutos, el trabajo 3 en 90 minutos y el trabajo 4 en 180 minutos. Mark puede terminar trabajo 1 en 480 minutos, el trabajo 2 en 120 minutos, el trabajo 3 en 80 minutos y el trabajo 4 en 180 minutos. John terminará el trabajo 1 en 500 minutos, el trabajo 2 en 110 minutos, el trabajo 3 en 90 minutos y el trabajo 4 en 150 minutos. Cada mecánico debe asignarse a solo uno de los trabajos. ¿Cuál es el tiempo total mínimo requerido para terminar los cuatro trabajos? ¿Quién debería asignarse a cada trabajo?

8. Los equipos de ampáyeres de béisbol se encuentran en cuatro ciudades donde darán inicio series de tres juegos. Cuando los juegos terminen, los ampáyeres deberán trabajar en juegos en otras cuatro ciudades. Las distancias (en millas) de cada ciudad donde se encuentran trabajando los equipos a las ciudades donde comenzarán los nuevos juegos se indican en la siguiente tabla:

	A			
DE	KANSAS	CHICAGO	DETROIT	TORONTO
Seattle	1,500	1,730	1,940	2,070
Arlington	460	810	1,020	1,270
Oakland	1,500	1,850	2,080	X
Baltimore	960	610	400	330

La X indica que el equipo que está en Oakland no se puede enviar a Toronto. Determine cuál equipo debería ir a cada ciudad para minimizar la distancia total recorrida. ¿Cuántas millas se recorrerán si se realizan estas asignaciones?

9. Roscoe Davis, presidente del departamento de negocios de una universidad, ha decidido aplicar un método nuevo para asignar a profesores a los cursos del siguiente semestre. Como criterio para juzgar quién debe enseñar cada curso, el señor Davis revisa las evaluaciones de profesores (hechas por estudiantes) de los dos años anteriores. Como cada uno de los cuatro profesores ha enseñado los cuatro cursos en algún momento durante los dos años, Davis puede registrar una puntuación del curso para cada profesor. Las puntuaciones se muestran en la tabla que sigue. Encuentre la mejor asignación de profesores para los cursos que maximice la puntuación general de enseñanza.

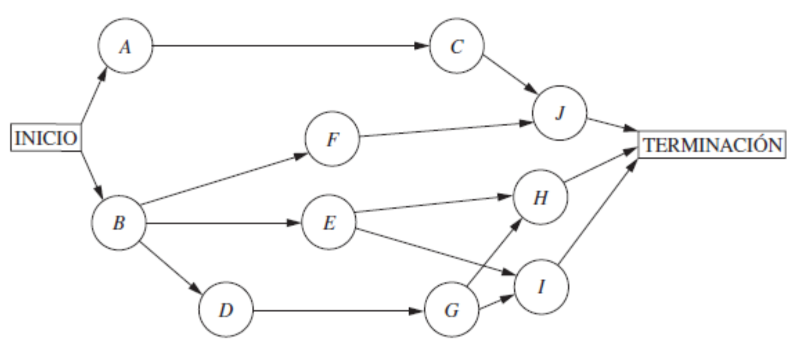
	CURSO			
PROFESOR	ESTADÍSTICA	ADMINISTRACIÓN	FINANZAS	ECONOMÍA
Anderson	90	65	95	40
Sweeney	70	60	80	75
Williams	85	40	80	60
McKinney	55	80	65	55

10. La compañía Patricia García fabrica siete productos médicos nuevos. Cada una de las ochos plantas de García puede agregar un producto más a sus líneas actuales de dispositivos médicos. Los costos unitarios de manufactura para producir las partes en las ocho plantas se muestran en la tabla correspondiente. ¿Cómo debería García asignar los nuevos productos a las plantas para minimizar los costos de manufactura?

COMPONENTE ELECTRÓNICO	PLANTA 1	2	3	4	5	6	7	8
C53	$0.10	$0.12	$0.13	$0.11	$0.10	$0.06	$0.16	$0.12
C81	0.05	0.06	0.04	0.08	0.04	0.09	0.06	0.06
D5	0.32	0.40	0.31	0.30	0.42	0.35	0.36	0.49
D44	0.17	0.14	0.19	0.15	0.10	0.16	0.19	0.12
E2	0.06	0.07	0.10	0.05	0.08	0.10	0.11	0.05
E35	0.08	0.10	0.12	0.08	0.09	0.10	0.09	0.06
G99	0.55	0.62	0.61	0.70	0.62	0.63	0.65	0.59

BLOQUE DE PROBLEMAS DE PLANIFICACIÓN DE PROYECTOS/(PERT-CPM) PARA RESOLVERLOS CON POM-QM

1. La compañía Lockhead Aircraft está lista para comenzar un proyecto cuyo objetivo es desarrollar un nuevo avión para la Fuerza Aérea de Estados Unidos. El contrato de la compañía con el Departamento de Defensa impone la conclusión del proyecto en 92 semanas, con penalizaciones impuestas por entregas retrasadas.
   El proyecto incluye 10 actividades (etiquetadas *A*, *B*, . . . , *J*), donde sus relaciones de precedencia se muestran en la red de proyecto siguiente



La administración desearía evitar las duras penalizaciones impuestas por no cumplir con la fecha límite establecida en el contrato. Por tanto, ha tomado la decisión de acelerar el proyecto; use el método PERT-CPM para determinar cómo hacerlo en el tiempo previsto. Los datos que se necesita para aplicar este método se proporcionan a continuación.

Actividad	Tiempo (semanas)	Costo (MILLONES)	Actividad Predecesora
A	32	$160	
B	28	$125	
C	36	$170	A

D	16	$60	B
E	32	$135	B
F	54	$215	B
G	17	$90	D
H	20	$120	E,G
I	34	$190	E,G
J	18	$80	C,F

a) Calcular el el tiempo de la ruta crítica.
b) Dibuje la red con los tiempos tempranos, tardíos.
c) Calcular el costo de la ruta crítica.

2. Construya la red del proyecto compuesta de las actividades *A* a *L*, con las siguientes relaciones de precedencia:
   a) *A*, *B* y *C*, las primeras actividades del proyecto, pueden ejecutarse de forma concurrente.
   b) *A* y *B* preceden a *D*.
   c) *B* precede a *E*, *F* y *H*.
   d) *F* y *C* preceden a *G*.
   e) *E* y *H* preceden a *I* y *J*.
   f) *C*,*D*, *F* y *J* preceden a *K*.
   g) *K* precede a *L*.
   h) *I*,*G* y *L* son las actividades terminales del proyecto

3. Construya la red del proyecto compuesta de las actividades *A* a *P* que satisfaga las siguientes relaciones de precedencia:
   a) *A*,*B* y *C*, las primeras actividades del proyecto, pueden ejecutarse de forma concurrente.
   b) *D*, *E* y *F* vienen después de *A*.
   c) *I* y *G* vienen después de *B* y *D*.
   d) *H* viene después de *C* y *G*.
   e) *K* y *L* vienen después de *I*.
   f) *J* viene después de *E* y *H*.
   g) *M* y *N* vienen después de *F*, pero no pueden iniciarse hasta que *E* y *H* se completen.
   h) *O* viene después de *M* e *I*.
   i) *P* viene después de *J*, *L* y *O*.
   j) *K*, *N* y *P* son las actividades terminales del proyecto.

4. Un editor firmó un contrato con un autor para publicar un libro de texto. El autor somete a consideración una copia impresa de un archivo de computadora del manuscrito. Las

actividades (simplificadas) asociadas con la producción del libro de texto se resumen en la siguiente tabla.

Actividad	Predecesora(s)	Duración (semanas)
A: Corrección del manuscrito, por parte del editor	—	3
B: Preparación de páginas muestra	—	2
C: Diseño de la portada del libro	—	4
D: Preparación de las ilustraciones	—	3
E: Aprobación del manuscrito editado y de páginas muestra, por parte del autor	*A*, *B*	2
F: Formación del libro	*E*	4
G: Revisión de las páginas formadas, por parte del autor	*F*	2
H: Revisión de las ilustraciones por el autor	*D*	1
I: Producción de las placas de impresión	*G*, *H*	2
J: Producción y encuadernación del libro	*C*, *I*	4

a) Construya la red del proyecto
b) Encuentre la ruta crítica.

5. Las actividades en la siguiente tabla describen la construcción de una casa nueva. Construya la red del proyecto asociada.

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
A:	Limpiar el terreno	—	1
B:	Llevar los servicios al terreno	—	2
C:	Excavar	*A*	1
D:	Colar los cimientos	*C*	2
E:	Plomería externa	*B*, *C*	6
F:	Armar la estructura de la casa	*D*	10
G:	Instalar el cableado eléctrico	*F*	3
H:	Colocar el piso	*G*	1
I:	Colocar el techo	*F*	1
J:	Plomería interior	*E*, *H*	5
K:	Colocar tejas	*I*	2
L:	Recubrimiento aislante exterior	*F*, *J*	1
M:	Instalar ventanas y puertas externas	*F*	2
N:	Enladrillar	*L*, *M*	4
O:	Aislar muros y cielo raso	*G*, *J*	2
P:	Cubrir muros y cielo raso	*O*	2
Q:	Aislar techo	*I*, *P*	1
R:	Terminar interiores	*P*	7
S:	Terminar exteriores	*I*, *N*	7
T:	Jardinería	*S*	3

6. Tom Schriber, el director de personal de Management Resources, Inc., está en proceso de diseñar un programa que utilicen sus clientes en el proceso de búsqueda de empleo. Algunas actividades incluyen preparar el currículum, escribir cartas, concertar citas para

visitar prospectos de empleadores, etcétera. Parte de la información de las actividades se incluye en la siguiente tabla:

ACTIVIDAD	DÍAS a	DÍAS m	DÍAS b	PREDECESOR INMEDIATO
A	8	10	12	—
B	6	7	9	—
C	3	3	4	—
D	10	20	30	*A*
E	6	7	8	*C*
F	9	10	11	*B, D, E*
G	6	7	10	*B, D, E*
H	14	15	16	*F*
I	10	11	13	*F*
J	6	7	8	*G, H*
K	4	7	8	*I, J*
L	1	2	4	*G, H*

a) Construya una red para este problema.
b) Determine el tiempo esperado y la varianza para cada actividad.
c) Determine la ruta crítica
d) Determine el tiempo de terminación del proyecto para un 95% de confianza

7. Dream team Productions está en la fase del diseño final de su nueva película, *Mujer detective*, que saldrá el próximo verano. Market Wise, la empresa contratada para coordinar lanzamiento de los juguetes de *Mujer detective*, identificó 16 tareas críticas a realizar antes del estreno de la película.
   a) ¿Cuántas semanas antes del estreno debería Market Wise iniciar su campaña de marketing?
   b) ¿Cuáles son las actividades de la ruta crítica?

   Las tareas son las siguientes:

ACTIVIDAD	PREDECESOR INMEDIATO	TIEMPO OPTIMISTA	TIEMPO MÁS PROBABLE	TIEMPO PESIMISTA
Tarea 1	—	1	2	4
Tarea 2	—	3	3.5	4
Tarea 3	—	10	12	13
Tarea 4	—	4	5	7
Tarea 5	—	2	4	5
Tarea 6	Tarea 1	6	7	8
Tarea 7	Tarea 2	2	4	5.5
Tarea 8	Tarea 3	5	7.7	9
Tarea 9	Tarea 3	9.9	10	12
Tarea 10	Tarea 3	2	4	5
Tarea 11	Tarea 4	2	4	6
Tarea 12	Tarea 5	2	4	6
Tarea 13	Tareas 6, 7, 8	5	6	6.5
Tarea 14	Tareas 10, 11, 12	1	1.1	2
Tarea 15	Tareas 9, 13	5	7	8
Tarea 16	Tarea 14	5	7	9

8. Bender Construction Co. interviene en la construcción de edificios municipales y otras estructuras que utiliza principalmente el gobierno de la ciudad y el estado. Esto requiere elaborar documentos legales, desarrollar estudios de factibilidad, obtener calificación de bonos, etcétera.

Bender recibió hace poco una petición para someter una propuesta para la construcción de un edificio municipal. El primer paso es desarrollar los documentos legales y realizar todos los pasos necesarios, antes de firmar el contrato de construcción, lo cual requiere más de 20 actividades diferentes que deben terminarse. Las actividades, sus predecesoras inmediatas y los requerimientos de tiempo se dan en la tabla siguiente.

Como se observa se dan las estimaciones de tiempo optimista (a), más probable (m) y pesimista (b), para todas las actividades descritas en la tabla. Utilice los datos para determinar el tiempo total de terminación del proyecto para este paso preliminar, la ruta crítica y el tiempo de holgura de todas las actividades.

	TIEMPO REQUERIDO (SEMANAS)				
ACTIVIDAD	*a*	*m*	*b*	DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD	PREDECESORES INMEDIATOS
1	1	4	5	Borrador de los documentos legales	—
2	2	3	4	Preparación de estados financieros	—
3	3	4	5	Borrador histórico	—
4	7	8	9	Borrador de parte de demanda del estudio de factibilidad	—
5	4	4	5	Revisión y aprobación de los documentos legales	1
6	1	2	4	Revisión y aprobación del borrador histórico	3
7	4	5	6	Revisión de estudio de factibilidad	4
8	1	2	4	Borrador final de parte financiera de estudio de factibilidad	7
9	3	4	4	Borrador de hechos relevantes de la transacción de bonos	5
10	1	1	2	Revisión y aprobación de estados financieros	2
11	18	20	26	Recepción del precio del proyecto de la empresa	—
12	1	2	3	Revisión y terminación de parte financiera de estudio de factibilidad	8
13	1	1	2	Terminación de borradores	6, 9, 10, 11, 12
14	.10	.14	.16	Envío de todo el material al servicio de calificación de bonos	13
15	.2	.3	.4	Impresión y distribución de estados a todas las partes interesadas	14
16	1	1	2	Calificación de bonos	14
17	1	2	3	Recepción de calificación de bonos	16
18	3	5	7	Comercialización de bonos	15, 17
19	.1	.1	.2	Contrato de compra ejecutado	18
20	.1	.14	.16	Autorización y terminación de estados finales	19
21	2	3	6	Contrato de compra	19
22	.1	.1	.2	Disponibilidad de fondos	20
23	0	.2	.2	Firma de contrato de construcción	21, 22

9. La empresa contable Scott Corey está instalando un nuevo sistema de cómputo. Debe hacer varias cosas para asegurarse de que el sistema funciona en forma adecuada, antes de ingresar todas las cuentas al nuevo sistema. La siguiente tabla brinda información acerca de este proyecto. ¿Cuánto tiempo tomará instalar el sistema? ¿Cuál es la ruta crítica?

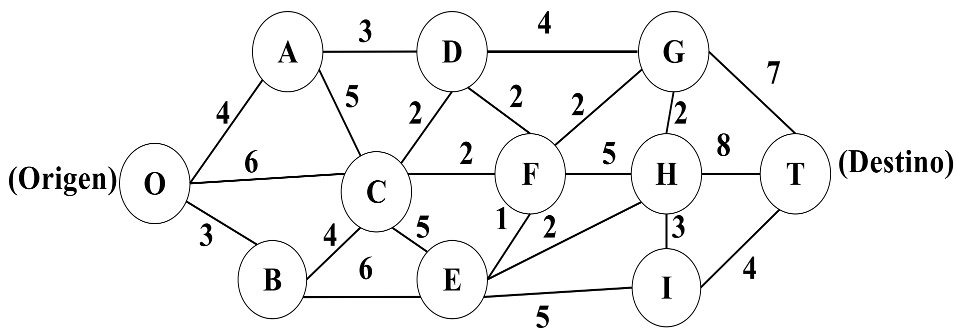
ACTIVIDAD	PREDECESOR INMEDIATO	TIEMPO (SEMANAS)
A	—	3
B	—	4
C	*A*	6
D	*B*	2
E	*A*	5
F	*C*	2
G	*D, E*	4
H	*F, G*	5

10. La corporación L. O. Gystics necesita un nuevo centro de distribución regional. La planeación está en las primeras fases del proyecto, aunque ya se han identificado las actividades con sus predecesores y sus tiempos en semanas. La siguiente tabla presenta la información. Desarrolle un programa lineal para determinar la duración de la ruta crítica (es decir, el tiempo mínimo requerido para terminar el proyecto). Resuelva este programa lineal para encontrar la ruta crítica y el tiempo que requiere el proyecto.

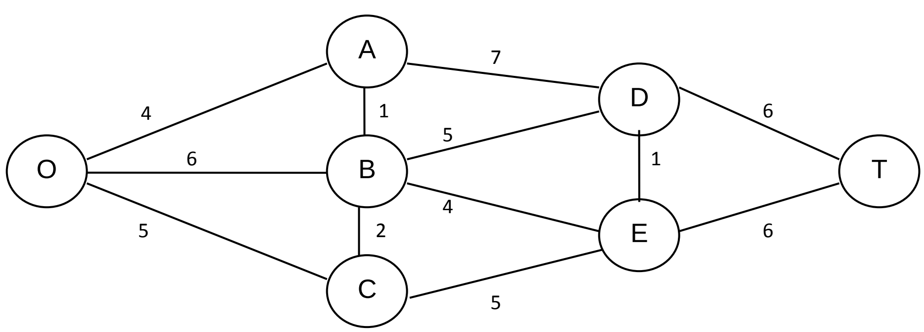
ACTIVIDAD	PREDECESORA INMEDIATA	TIEMPO (SEMANAS)
A	—	4
B	—	8
C	*A*	5
D	*B*	11
E	*A, B*	7
F	*C, E*	10
G	*D*	16
H	*F*	6

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN DE REDES
(Puede hacer uso del software POM-QM)

1. Encuentre la ruta más corta de la siguiente red. Los números representan las distancias correspondientes reales entre los nodos.

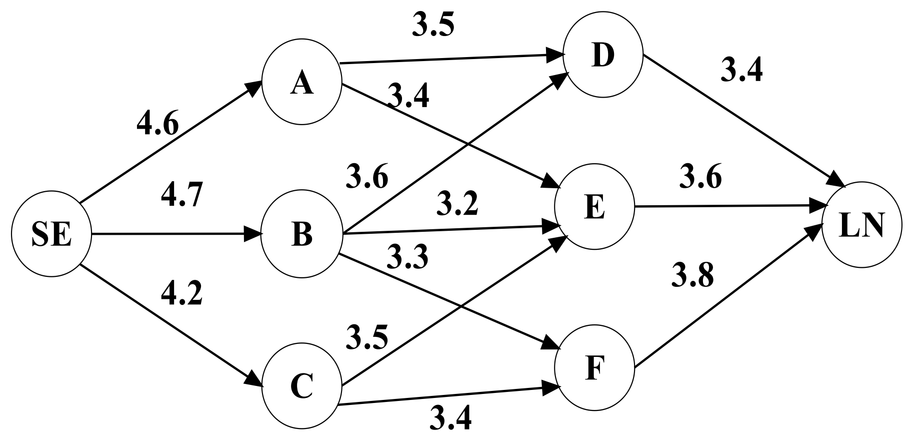


2. Utilice el algoritmo adecuado para encontrar la ruta más corta a través de la red que se muestra a continuación, en donde los números representan las distancias reales entre los nodos correspondientes.

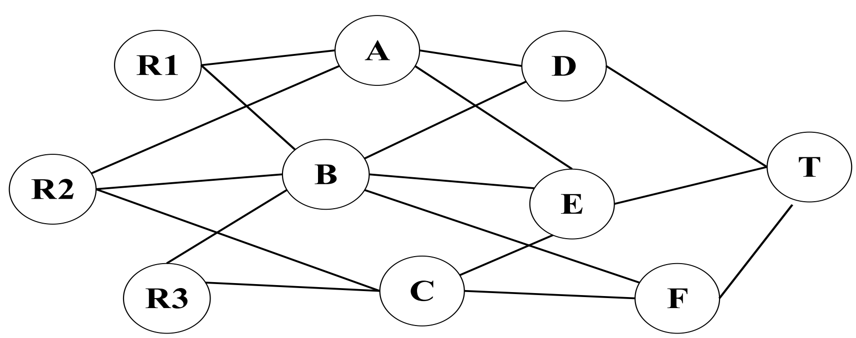


3. Un vuelo de Speedy Airlines está a punto de despegar de Seatle sin escalas a Londres. Existe cierta flexibilidad para elegir la ruta precisa, según las condiciones del clima. La siguiente red describe las rutas posibles consideradas, donde SE y LN, son Sealte y Londres respectivamente, y los otos nodos representan varios lugares intermedios. El viento a lo largo de cada arco, afecta de manera considerable el tiempo de vuelo, y por ende el consumo de combustible. Con base en el informe meteorológico actual, junto a los arcos de muestran los tiempos de vuelo (en horas). Debido al alto costo del combustible, la administración ha adoptado la política de elegir la ruta más corta que minimice el tiempo total de vuelo.

a. ¿Qué papel tienen "las distancias" en la interpretación de este problema?
b. Resuélvalo como un problema de la ruta más corta.



4. El siguiente diagrama describe un sistema de acueductos que se origina en tres ríos (R1, R2, R3) y termina en una ciudad importante (nodo T), donde los otros nodos son puntos de unión del sistema.



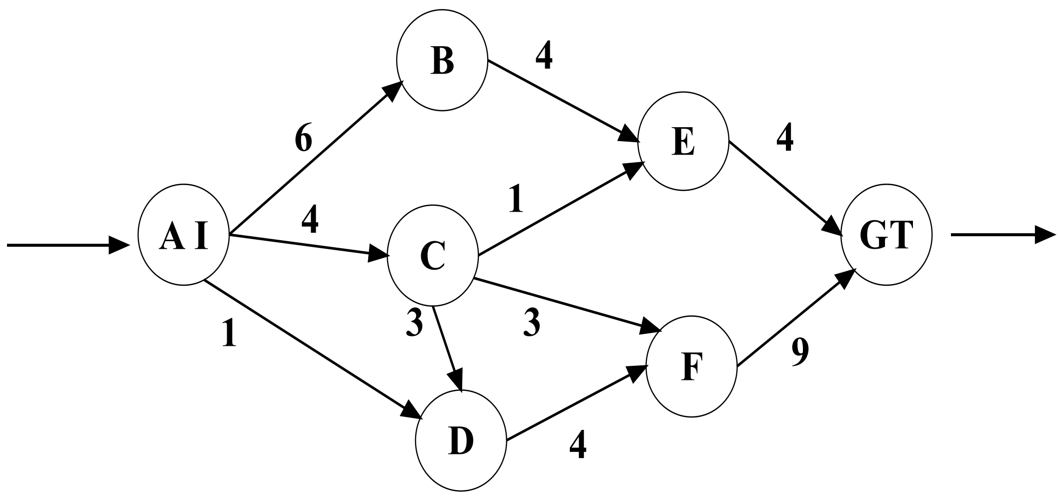
Utilice unidades de miles de acres –pie; las siguientes tablas muestran la cantidad máxima de agua que puede bombearse, a través de cada acueducto cada día.

DE/A	A	B	C	DE/A	D	E	F	DE/A	T
R1	75	65	---	**A**	60	45	---	**D**	120
R2	40	50	60	**B**	70	55	45	**E**	190
R3	---	80	70	**C**	----	70	90	**F**	130

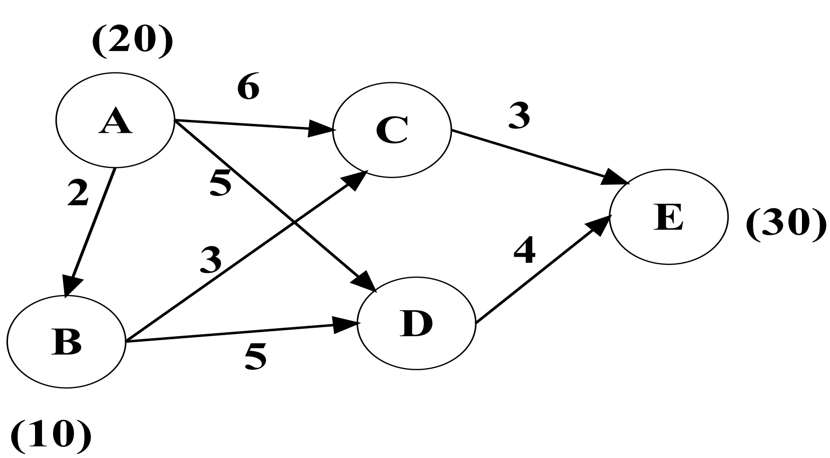
La comisión de agua desea determinar el plan que maximice el flujo de agua hacia la ciudad:

a. Formule el problema como un problema de flujo máximo.
b. Identifique su origen, su destino, los nodos de trasbordo y trace la red completa que muestre la capacidad de cada arco.

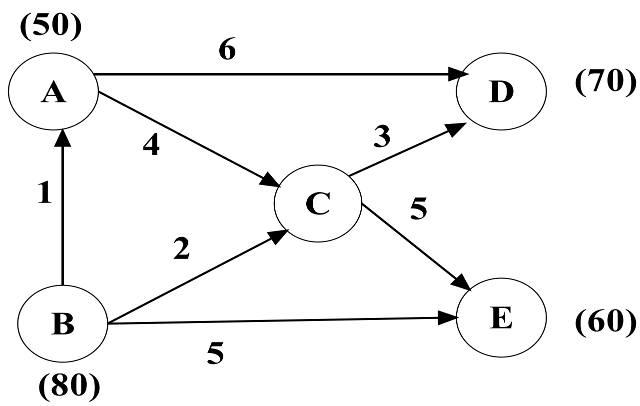
5. Encuentre el flujo máximo de la red que se le muestra a continuación, donde el nodo inicial es (AI) y el terminal es (GT).



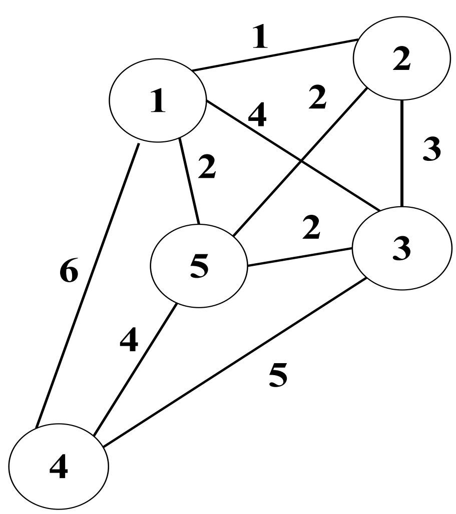
6. Considere y resuelva el problema de costo mínimo que se le presenta a continuación.



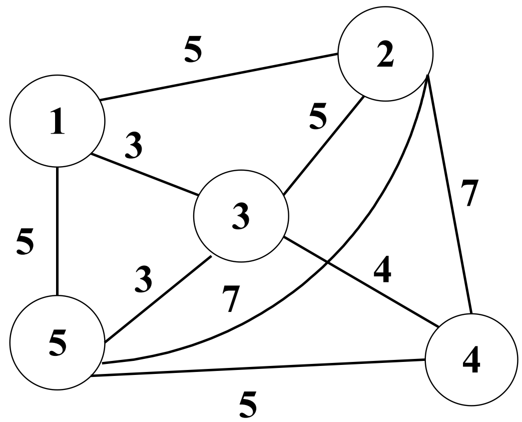
7. Considere y resuelva el problema de flujo de costo mínimo que se le muestra a continuación:



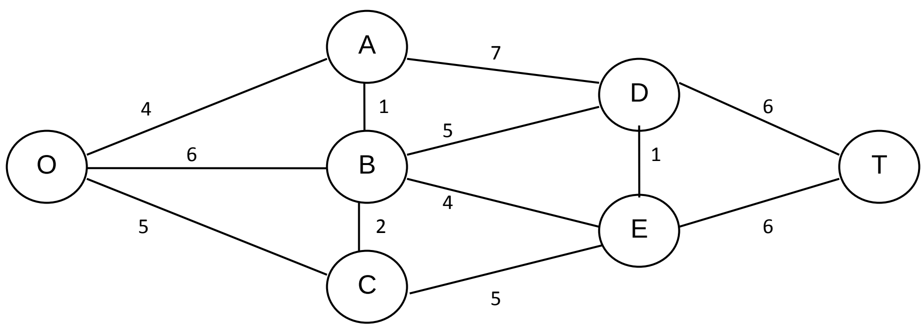
8. El campus de la universidad estatal tiene cinco mini computadoras, dan las distancias entre cada par de computadoras (expresada en las computadoras que deben conectarse mediante el cable subterráneo). La universidad desea conocer la mínima cantidad de cable que necesita. Observe que si no hay un par de nodos, esto significa que no se puede colocar un cable de computadoras; debido al subsuelo rocoso. Se desea obtener el árbol de extensión mínima.



9. La ciudad de Smalltown tiene cinco subdivisiones. El alcalde desea instalar líneas telefónicas, para asegurar la comunicación entre todas las subdivisiones. En la figura se dan las distancias entre las subdivisiones. ¿Cuál es la longitud mínima necesaria de la línea telefónica? Supóngase que ninguna línea puede colocarse entre las subdivisiones 1 y 4.



10. Utilice el algoritmo adecuado para encontrar la ruta más corta a través de la red que se muestra a continuación, en donde los números representan las distancias reales entre los nodos correspondientes. Formule el problema de la ruta más corta como uno de PL.

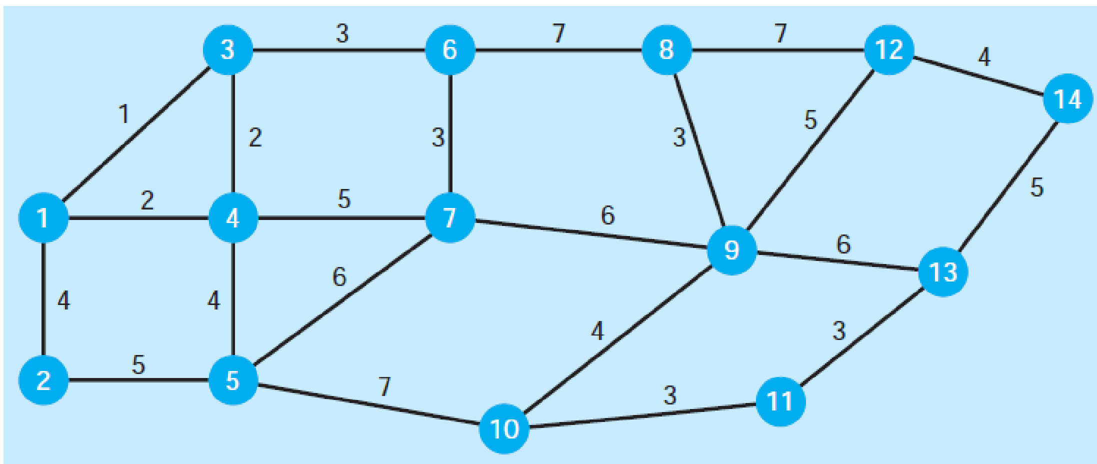


11. El servicio de Parques Nacionales planea desarrollar una zona campestre para el turismo. Se han señalado cuatro sitios en el área para llegar a ellos en automóviles. Estos sitios y las distancias (en millas) entre ellos, se presentan en la tabla.

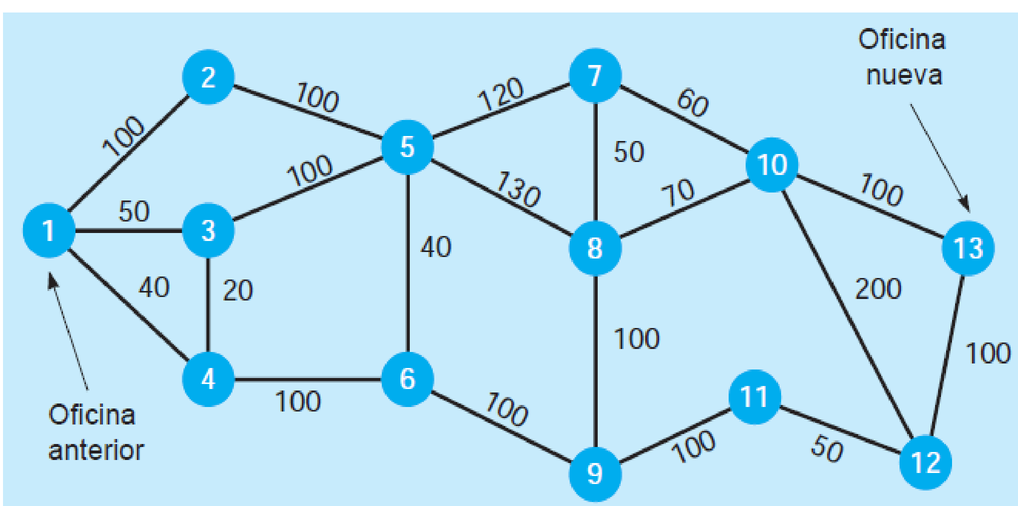
	Entrada al parque	Cascada	Formación rocosa	Mirador	Pradera
Entrada al parque	....	7.1	19.5	19.1	25.7
Cascada	7.1	....	8.3	16.2	13.2
Formación rocosa	19.5	8.3	....	18.1	5.2
Mirador	19.1	16.2	18.1	....	17.2
Pradera	25.7	13.2	5.2	17.2	....

Para dañar lo menos posible al medio ambiente, el Servicio de Parques desea minimizar el número de millas de caminos necesario para proporcionar el acceso deseado. Determínese cómo deberán construirse los caminos para lograr este objetivo. (Problema de expansión mínima)

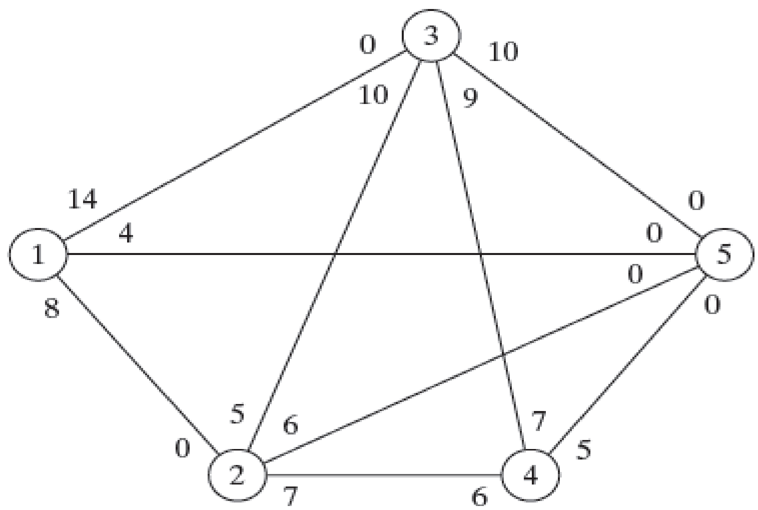
12. Bechtold Construction está en proceso de instalar líneas de energía eléctrica en un desarrollo habitacional grande. Steve Bechtold quiere minimizar la longitud total de cable, lo cual minimizará sus costos. El desarrollo habitacional se muestra en la red que se muestra. Cada casa se numeró y las distancias entre ellas se dan en cientos de pies. ¿Qué le recomienda?



13. Se contrató a Transworld Moving para trasladar mobiliario y equipo de oficina de Cohen Properties a sus nuevas instalaciones. ¿Qué ruta le recomienda para minimizar costos? La red de caminos se ilustra a continuación.



14. Determine el flujo máximo teniendo como origen el nodo (1) y como destino el nodo (5), para la red siguiente:



15. El Premiere Bank ha decidido conectar terminales de computadora de cada sucursal a la computadora central de su oficina matriz mediante líneas telefónicas especiales con dispositivos de telecomunicaciones. No es necesario que la línea telefónica de una sucursal esté conectada directamente con la oficina matriz. La conexión puede ser indirecta a través de otra sucursal que esté conectada (directa o indirectamente) a la matriz. El único requisito es que exista alguna ruta que conecte a todas las sucursales con la oficina matriz. El cargo por las líneas telefónicas especiales es directamente proporcional a la distancia cableada, donde la distancia (en millas) entre cada par de oficinas es:

	Distancia entre pares de oficinas					
	Principal	**S.1**	**S.2**	**S.3**	**S.4**	**S.5**
Oficina principal	—	190	70	115	270	160
Sucursal 1	190	—	100	110	215	50
Sucursal 2	70	100	—	140	120	220
Sucursal 3	115	110	140	—	175	80
Sucursal 4	270	215	120	175	—	310
Sucursal 5	160	50	220	80	310	—

La administración desea determinar qué pares de sucursales conectar directamente con las líneas telefónicas especiales para que todas queden conectadas (de modo directo o indirecto) a la oficina matriz con un costo total mínimo.

a) Explique cómo se ajusta este problema a la descripción del problema del árbol de expansión mínima y resuélvalo.

16. La Texago Corporation tiene cuatro campos de petróleo, cuatro refinerías y cuatro centros de distribución. Una fuerte huelga en la industria del transporte ha reducido de manera considerable la capacidad de Texago para enviar petróleo de sus campos a las refinerías y los productos derivados a los centros de distribución. Use unidades en miles de barriles de petróleo crudo (y su equivalente en productos refinados); las tablas siguientes muestran el número máximo de unidades que puede enviar al día de cada campo a cada refinería y de éstas a cada centro de distribución.

	Refinería			
Campo	**N. Orleans**	**Charleston**	**Seattle**	**San Luis**
Texas	11	7	2	8
California	5	4	8	7
Alaska	7	3	12	6
Medio oeste	8	9	4	15

	Centro de distribución			
Refinería	**Pittsburgh**	**Atlanta**	**Kansas City**	**San Francisco**
N. Orleans	5	9	6	4
Charleston	8	7	9	5
Seattle	4	6	7	8
San Luis	12	11	9	7

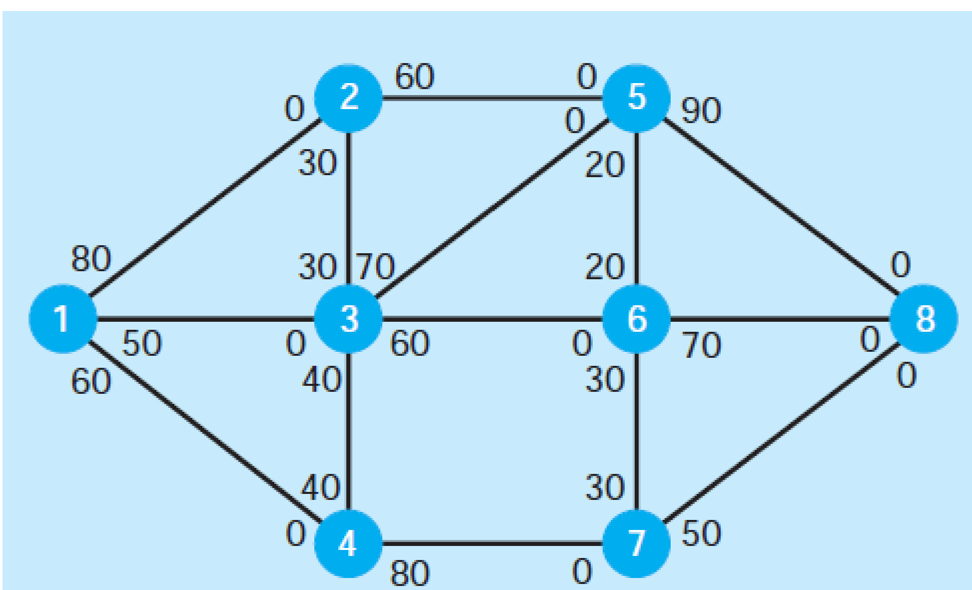
La administración de Texago desea elaborar un plan para determinar cuántas unidades debe enviar de cada campo petrolero a cada refinería y de cada refinería a cada centro de distribución de manera que se maximice el número total de unidades que llegan a los centros de distribución.

a. Bosqueje un plano que muestre la ubicación de los campos, refinerías y centros de distribución de Texago. Agregue el fl ujo del petróleo crudo y de los productos del petróleo a través de la red de distribución.
b. Dibuje de nuevo la red alineando en una columna los nodos de los campos, en otra los de refinerías y en una tercera los de centros de distribución. Después agregue arcos para mostrar el flujo posible.
c. Modifique la red del inciso b) para formular este problema como uno de flujo máximo con sólo una fuente, un destino y una capacidad de cada arco.

17. La siguiente tabla representa una red con los arcos identificados por sus nodos inicial y final. Dibuje la red y use el árbol de expansión mínima para encontrar la distancia mínima requerida para conectar estos nodos.

ARCO	DISTANCIA
1–2	12
1–3	8
2–3	7
2–4	10
3–4	9
3–5	8
4–5	8
4–6	11
5–6	9

18. La red siguiente representa las calles de una ciudad e indica el número de automóviles por hora que pueden circular por dichas calles. Encuentre el número máximo de autos que pueden viajar por el sistema. ¿Cuántos automóviles circularían por cada calle (arco) para permitir este flujo máximo?



19. Una compañía fabricará el mismo producto nuevo en dos plantas y después lo enviará a dos almacenes. La fábrica 1 puede enviar una cantidad ilimitada por ferrocarril sólo al almacén 1, mientras que la fábrica 2 puede mandar una cantidad ilimitada por la misma vía sólo al almacén 2. Sin embargo, se puede usar camiones de carga independientes para enviar hasta 50 unidades de cada fábrica a un centro de distribución desde el que se pueden enviar hasta 50 unidades a cada almacén. En la siguiente tabla se muestra el costo unitario de embarque de cada alternativa junto con las cantidades que se producirán en las fábricas y las cantidades que se necesitan en los almacenes.

A / De	Costo unitario de embarque			
	Centro de distribución	Almacén 1	Almacén 2	Producción
Fábrica 1	3	7	—	80
Fábrica 2	4	—	9	70
Centro de distribución		2	4	
Asignación		60	90	

a) Formule la representación de redes de este problema como un problema de flujo de costo mínimo.

b) Formule un modelo de programación lineal para este problema.

20. Makonsel es una compañía integral que produce bienes y los vende en sus propias tiendas. Después de producidos los bienes se colocan en dos almacenes hasta que las tiendas los necesitan. Se usan camiones para transportar los bienes a los almacenes y luego a las tres tiendas.

Utilice una carga completa de camión como unidad; la siguiente tabla muestra la producción mensual de cada planta, su costo de transporte por carga enviada a cada almacén y la cantidad máxima que se puede enviar al mes a cada uno.

A / De	Costo unitario de envío		Capacidad de envío		
	Almacén 1	Almacén 2	Almacén 1	Almacén 2	Producción
Planta 1	$1 175	$1 580	375	450	600
Planta 2	$1 430	$1 700	525	600	900

La siguiente tabla contiene la demanda mensual de cada tienda (*T*), el costo de transporte por camión desde cada almacén y la cantidad máxima que se puede enviar al mes desde cada uno.

A / De	Costo unitario de envío			Capacidad de envío		
	T1	T2	T3	T1	T2	T3
Almacén 1	$1 370	$1 505	$1 490	300	450	300
Almacén 2	$1 190	$1 210	$1 240	375	450	225
Demanda	450	600	450	450	600	450

La administración desea determinar un plan de distribución: número de cargas enviadas al mes de cada planta a cada almacén y de cada uno de éstos a cada tienda de modo que se minimice el costo total de transporte.
Formule este problema como uno de flujo de costo mínimo y coloque todos los datos necesarios.

BLOQUE DE PROBLEMAS DE ANALISIS DE DECISIÓN

1. Un empresario desea invertir U$ 10,000.00 en el mercado de valores comprando acciones de una de dos compañías: A y B. Las acciones de la compañía A representan un riesgo, pero podrían dar un rendimiento del 50% sobre la inversión durante el siguiente año. Si las condiciones de la bolsa no son favorables (es decir , mercado "a la baja"), las acciones pueden perder el 20% de su valor. La compañía B proporciona inversiones seguras con 15% de rendimiento en un mercado "a la alza" y sólo 5% en un mercado "a la baja" Dónde debe el empresario invertir su dinero?. Construya la matriz de resultados y el VME.

2. El pequeño productor Fernández puede producir Maíz o frijol. Las probabilidades de que los precios de la siguiente cosecha de estos productos aumenten, permanezcan iguales o desciendan son 0.25, 0.30 y 0.45 respectivamente. Si los precios aumentan, la cosecha de maíz producirá 30,000 dólares netos y el frijol 10,000 dólares netos. Si los precios permanecen sin cambios. Fernández (apenas) quedará a mano. Pero si los precios descienden, las cosechas de maíz y frijol tendrán pérdidas de 35,000 y 5000 dólares respectivamente. Cuál cosecha debe producir Fernández?

3. Un inversionista tiene el objetivo de lograr la máxima tasa posible de retorno. Suponiendo que solamente tiene tres inversiones posibles (sus estrategias): acciones especulativas, acciones de alto grado, o bonos. También suponga que solo pueden ocurrir tres estados posibles de la naturaleza: guerra, paz y depresión. Ignore todos los problemas de ganancia de capital, impuestos, etc., y suponga que el inversionista ha determinado sus tasas de retorno (en porcentaje) para cada una de las nuevas combinaciones posibles acciones-estado de la naturaleza como se muestra en la matriz ¿Cuál es la acción óptima utilizando los diversos criterios de elección?

	P1=1/3	P2=1/3	P3=1/3
Acción	S1:Guerra	S2:Paz	S3:Depresión
A1: acciones especulativos	20	1	-6
A2:acciones de alto grado	9	8	0
A3:bonos	4	4	4

4. La compañía Rodney Sportswear ha diseñado dos nuevos estilos de pantalonetas de tenis para el año próximo, “Wimbledon” y “Forest Hill”. La compañía puede producir cualquiera de las dos o ninguna de las dos. Así, ellos deben seleccionar una de las cuatro acciones disponibles; solamente Wimbledon, solamente Forest Hill, ambas o ninguna. El costo de producción, con todo el cual debe cargarse por adelantado, si el modelo diseñado es producido, es $50,000 para cualquiera de los dos modelos; pero es $125,000 para ambos debido al esfuerzo en la capacidad involucrada en la producción de los estilos. La ganancia, incluyendo todos los ingresos y costos excepto los de producción, es $100,000 por estilo si el estilo es satisfactorio y cero si el estilo es un fracaso. ¿Cuál es el mejor curso de acción?

5. Considere la siguiente matriz de pago.

Acción	P1=1/4	P2=1/2	P3=1/4
	S1	S2	S3

A1	$10	$6	$3
A2	5	8	4
A3	2	5	9

- Especifique la matriz de costo de oportunidad.
- Calcule el valor esperado de la información perfecta VMEIP.
- Si se pudiera comprar la información perfecta por $2, ¿la compraría usted?

6. Una empresa está programando un espectáculo de Corrida de Toros para el 15 de agosto, con motivo del aniversario de la Fundación de la Ciudad. Las ganancias que se obtengan dependerán en gran medida del clima en el día del evento. En concreto, si el día es lluvioso la empresa pierde 15 mil dólares; si es soleado gana 10 mil dólares. Se supone que los días o son lluviosos o son soleados. La empresa puede decidir cancelar el evento, pero si lo hace pierde el depósito de 1,000 dólares efectuado por el alquiler del local. Los registros del pasado indican que en la quinta parte de los últimos cincuenta años, ha llovido en esa fecha.

   Resolver : (a) Construya la matriz de decisión, (b) La decisión óptima sin información perfecta, usando VME, Maxmax, Maxmin y Laplace (c) Entre qué limites puede variar la probabilidad de que llueva, sin que cambie la decisión establecida en b), (d) Cuál es el monto máximo que estaría dispuesto a pagar la Empresa por la información perfecta.
   El dueño de la empresa piensa recurrir a una clarividente, llamada Cotty, muy famosa que ofrece sus servicios a quienes lo requieren. En las ocasiones que ha llovido, Cotty acertó el 90% de las veces. Cuando predijo un día soleado, acertó sólo el 80% de las veces. (e)¿Cuánto estaría dispuesto a pagar el dueño de la empresa por los servicios de Cotty?.

   a) Construya la matriz de decisión
   b) La decisión óptima sin información perfecta, usando VME, Maxmax, Maxmin y Laplace
   c) Entre qué límites puede variar la probabilidad de que llueva, sin que cambie la decisión establecida en b).
   d) Cuál es el monto máximo que estaría dispuesto a pagar la Empresa por la información perfecta.

7. Una Compañía de Manufacturas Eléctricas que produce aparatos de aire acondicionado, tiene que decidir si comprar o no un componente importante para

su producto final de un abastecedor o fabricarlo en su propia planta. Las alternativas de decisión son entonces:

1) Comprar el componente (C)

2) Fabrica el componente (F)

La determinación de la mejor decisión dependerá de la aceptación (demanda) de su producto final en el mercado. Dado que la demanda que la Cía. enfrenta por su producto final está fuera del control del Decisor, esta constituye una variable de estado. De acuerdo con la administración de la Cía. Los posibles valores de la demanda por su producto final pueden ser:

DA = Demanda alta del producto final de la Cía.

DM = Demanda media del producto final de la Cía.

DB = Demanda baja del producto final de la Cía.

Para determinar la decisión óptima fue necesario conocer mayor información respecto a las probabilidades de ocurrencia de cada estado de la naturaleza (DA,DM,DB).

El resultado final de la decisión se expresa en términos de ganancias netas. La administración de la Cía. ha estimado las ganancias netas para este problema:

Alternativas De Decisión	**Estados de la Naturaleza (Niveles de demanda)**		
	DA	**DM**	**DB**
Fabricar (F)	**130**	**40**	**-20**
Comprar(C)	**70**	**45**	**10**

- Determine la decisión óptimo según criterio del valor esperado (VME)y suponiendo P(DA)= 0.30, P(DM) = 0.30, P(DB) = 0.40.
- Calcular el valor esperado de la información perfecta (VMEIP)
- Calcular el valor esperado de la información de la muestra e identifique la decisión óptima.
- Calcule la información de la eficiencia de la muestra.

8. La empresa Global de TV, está analizando un nuevo programa en un horario de gran audiencia. La empresa ha entrado en negociaciones con varios actores conocidos que pudieran dirigir el programa. El presidente del directorio de Global, quiere saber cuánto invertir?. Todo dependería del éxito que puede tener este nuevo programa.
   - El objetivo principal es la cantidad a invertir y la decisión estratégica que se debe tomar es el nivel de inversión.
   - Las alternativas de decisión, sobre niveles de inversión son :

   1) Nivel bajo (B): Ninguno de los actores contratados es "conocido"
   2) Nivel moderado (M): El conductor del programa sería un "actor conocido" apoyado por otros no conocidos.
   3) Nivel Alto (A): El programa tendría dos actores conocidos más otros "no conocidos"

   Las implicancias financieras de estas decisiones dependen del éxito futuro desconocido del programa. Los estados futuros o posibles resultados serían:

   1) Fracaso (F): Menos del 10% de los televidentes ven el programa
   2) Éxito (E): Entre el 10 y 20% de los televidentes ven el programa
   3) Gran Éxito (G): Más del 20% de los televidentes ven el programa.

   La matriz de ganancias (en millones de $), luego de un riguroso análisis es:

	F	**E**	**G**
B	**-2**	**5**	**8**
M	**-5**	**10**	**12**
A	**-8**	**6**	**15**

   CRITERIO PROBABILISTICO (Criterio del Valor Monetario Esperado) según el conocimiento del mercado y del problema, se pueden asignar probabilidades. El área de investigación supone que tanto el éxito como el fracaso pueden tener igual probabilidad de ocurrencia. En cambio la probabilidad de que el programa sea un gran éxito es diferente y menor. Puede ser entonces: P(F) = 0.40, P(E) = 0.40, P(G) = 0.20

   - Calcular el valor monetario esperado (VME)
   - Calcular por Maxmax, Maxmin, Minmax, Intermedio, Laplace.

9. Observa la tabla de pagos, en el cual las entradas están en rendimientos netos en dólares. Suponga que esta es una decisión sin ningún conocimiento del estado de la naturaleza.

a) ¿Cuál es la decisión óptima si se usa el criterio de LAPLACE?
b) ¿Cuál es la decisión óptima si se usa el criterio maximax?
c) ¿Cuál es la decisión óptima si se usa el criterio maximin?

Acción	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**
A1	**35**	**22**	**25**	**12**
A2	**27**	**25**	**20**	**18**
A3	**22**	**25**	**25**	**28**
A4	**20**	**25**	**28**	**33**

10. Phil Johnson, de Johnson´s Printing en Chicago, debe decidir si acepta un contrato de trabajo de impresión para el gobierno o volar a los Ángeles para participar en la licitación para un folleto. Restricciones en la capacidad le impiden realizar los dos trabajos y tiene que decidir sobre el contrato del gobierno antes de comenzar el proceso de licitación. El estima la tabla de retribuciones en términos del rendimiento neto en dólares, como se muestra en la tabla.

Decisión	No obtener en contrato del folleto. S1	Obtener el contrato del folleto. S2
A1: Aceptar el contrato del gobierno	1000	1000
A2: No Aceptar el contrato del gobierno	-1000	4000

a) ¿Cuál es la decisión óptima si se usa el criterio maximax?
b) Si la probabilidad de obtener el trabajo del folleto es 1/3, cual decisión maximizaría su utilidad?
c) ¿Cuál debe ser el valor más pequeño de P(s2) para que Phil debe decidir ir a los Ángeles, si desea maximizar sus utilidades?

11. Se desea invertir $ 30000.- en la industria del desarrollo de software durante el próximo año, se sabe que la inversión puede financiar un empleado durante 12 meses y se debe decidir a qué empresa conviene desarrollarle software, ya que el rendimiento de la inversión está directamente relacionado con la venta de dicho

software. Si se desarrolla para la empresa A y el mercado está "a la alza" la inversión puede producir un rendimiento del 50 %. Si las condiciones del mercado de software no son favorables (mercado "a la baja") el rendimiento puede ser negativo del 20 % de lo que se invirtió. La empresa B es más segura, garantiza una ganancia del 25 % si el mercado está en alza y sólo de un 5 % si el mercado está en baja. Las nuevas publicaciones en revistas relacionadas al mercado de la producción de software predicen un 60 % de probabilidad de que el mercado esté en alza y un 40 % de probabilidad de que el mercado esté en baja.

12. Un granjero recibe una oferta de $ 50000.- por su próxima cosecha de naranjas, los cuales recibirá independientemente de la cantidad y calidad de las mismas. . Si no acepta la oferta deberá venderlas en el mercado, en el cual, en condiciones normales obtendrá $ 70000. Si tiene algún inconveniente climático, la cosecha se estropeará y percibirá solo $ 15000.-
    Determinar la opción recomendable:

    a. Suponiendo que existe la misma probabilidad de que se den las condiciones normales y de que haya algún inconveniente climático.

    b.- ¿Cuál sería la decisión si los pronósticos climáticos auguran buen clima con una probabilidad de 65%?

    c.- ¿Cuál es la probabilidad donde se igualen los valores esperados de ambas alternativas de decisión? A partir de este resultado ¿Qué conclusiones puede elaborar?

13. Una compañía que elabora un analgésico se encuentra ante la alternativa de realizar la compra de la materia prima básica. Esta es una droga que debe importarse y puede comprarse de dos formas distintas: encargando al extranjero el envío con cuatro meses de anticipación al invierno a un precio de $ 200 por toneladas, u ordenar en el extranjero los pedidos con un mes de anticipación al invierno con un recargo de $ 25 por tonelada si se compran 4 toneladas y $ 75 por tonelada si la compra es de una cantidad mayor.
    En el caso de elegirse la primera alternativa y resultar insuficiente la cantidad pedida para satisfacer la demanda, se deberán realizar compras durante el invierno a los proveedores de la competencia en el mercado nacional, debiéndose pagar $ 350 por la primera tonelada que se compre y $ 550 por las siguientes.

La compañía se ha impuesto la restricción de no dejar demanda instatisfecha pues ello le arrancaría una pérdida de mercado tan importante que se le ha asignado un costo infinito.

Si se sabe con precisión que la demanda, si el invierno es suave, implicará un consumo de materia prima de 4 toneladas, 5 si el invierno es normal y 6 si es riguroso.

No se puede atribuir ninguna probabilidad objetiva a cada uno de los estados de la naturaleza.

Las materias primas que han sido compradas, pero que no se utilizan son inútiles para ser empleadas al año siguiente o en otro producto, por lo tanto su valor de salvamento es cero.

a) Armar la matriz de decisiones.
b) Cuál sería la decisión recomendada según los siguientes criterios:

1) Wald
2) Laplace
3) Savage
4) Hurwicz (coeficiente de optimismo = 0.8)

14. Mickey Lawson considera invertir un dinero que heredó. La siguiente tabla de pagos da las ganancias que obtendría durante el siguiente año para cada una de las tres alternativas de inversión que Mickey está considerando:

	ESTADO DE NATURALEZA	
ALTERNATIVA DE DECISIÓN	ECONOMÍA BUENA	ECONOMÍA MALA
Mercado de valores	80,000	–20,000
Bonos	30,000	20,000
Certificados de depósito	23,000	23,000
Probabilidad	0.5	0.5

¿Qué decisión maximizaría las ganancias esperadas?

b) ¿Cuál es la cantidad máxima que debería pagar por un pronóstico perfecto de la economía?

15. Allen Young siempre ha estado orgulloso de sus estrategias de inversión personales y le ha ido muy bien en los años recientes. Invierte principalmente en el

mercado de valores. Sin embargo, durante los últimos meses Allen ha estado muy preocupado por el mercado de valores como una buena inversión. En algunos casos, hubiera sido mejor que tuviera su dinero en un banco y no en la bolsa de valores. Durante el siguiente año, Allen debe decidir si invertir $10,000 en el mercado de valores o en un certificado de depósito (CD) a una tasa de interés de 9%. Si el mercado es bueno, Allen cree que puede tener un rendimiento de 14% sobre su dinero. Con un mercado regular, espera obtener 8% de rendimiento. Si el mercado es malo, lo más probable es que no tenga rendimiento —en otras palabras, el retorno sería de 0%. Allen estima que la probabilidad de un mercado bueno es de 0.4, la probabilidad de un mercado regular es de 0.4, y la probabilidad de un mercado malo es de 0.2, y él busca maximizar su rendimiento promedio a largo plazo.

a. Desarrolle una tabla de decisiones para este problema.
b. ¿Cuál es la mejor decisión?

(**ARBOLES DE DESICIÓN**)

16. Mónica Britt ha disfrutado la navegación en barcos pequeños desde que tenía 7 años, cuando su madre comenzó a navegar con ella. En la actualidad Mónica considera la posibilidad de comenzar una compañía para fabricar veleros pequeños para el mercado recreacional. A diferencia de la producción de veleros en masa, estos veleros se harían específicamente para niños de entre 10 y 15 años. Los botes serán de la más alta calidad y extremadamente estables, y el tamaño de las velas se reducirá para evitar que se volteen.

Su decisión básica es si construir una planta de manufactura grande, una pequeña o no construir ninguna. Con un mercado favorable, Mónica puede esperar un ingreso de $90,000 con la planta grande, o bien, $60,000 con la planta más pequeña. Sin embargo, si el mercado es desfavorable, Mónica estima que perdería $30,000 con una planta grande y tan solo $20,000 con una planta pequeña. Debido a los gastos para desarrollar los moldes iniciales y adquirir el equipo necesario para producir veleros de fibra de vidrio para niños, Mónica ha decidido realizar un estudio piloto para asegurase de que el mercado de veleros será adecuado. Estima que el estudio piloto le costará $10,000. Asimismo, el estudio puede ser favorable o desfavorable.

Mónica estima que la probabilidad de un mercado favorable dado que el estudio piloto fue favorable es de 0.8. La probabilidad de un mercado desfavorable dado que el estudio fue desfavorable se estima en 0.9. Mónica piensa que hay una posibilidad de 0.65 de que el estudio piloto sea favorable. Desde luego, Mónica puede saltarse el estudio piloto y simplemente tomar la decisión de construir una planta grande, una pequeña o ninguna. Sin hacer pruebas con un estudio piloto, estima que la probabilidad de un mercado favorable es de 0.6. ¿Qué le recomendaría? Calcule el VEIM.

17. Jenny Lind es una escritora de novelas románticas. Tanto una compañía fílmica como una red televisiva quieren los derechos exclusivos de una de sus obras más populares. Si ella firma con la red recibirá una sola suma fija, pero si firma con la compañía fílmica la cifra que recibirá dependerá de la respuesta del mercado ante la película. Las retribuciones de Jenny están resumidas en la tabla.

Decisión	ESTADOS DE LA NATURALEZA		
	Taquilla baja 0.3	Taquilla media 0.6	Taquilla alta 0.1
Firmar con la compañía fílmica	\$200,000	\$1,000,000	\$3,000,000
Firmar con la red de TV	900,000	900,000	900,000

Si las estimaciones de probabilidades para los estados de la naturaleza son P(baja)=0.3; P(media)=0.6 y P(alta)=0.1. ¿A quién debe vender Jenny los derechos? , ¿Cuánto es lo más que debe estar dispuesto a pagar para saber el monto de la taquilla, antes de decidir con quien firmar?

Ella puede contratar a una empresa que se dedique a la investigación mercado, para hacer una encuesta con un costo de \$100,000. El resultado de la encuesta consistirá en una respuesta del público favorable (F) o desfavorable (D) a la película. La capacidad de la firma para poner una tasa en el mercado medido mediante probabilidades condicionales es:

P(F/baja)=0.3 P(D/baja)=0.7

P(F/media)=0.6 P(D/media)=0.4

P(F/alta)=0.8 P(D/alta)=0.2

a) Dibuje un árbol de decisión para este modelo.
b) ¿Debe Jenny debe mandar a hacer la encuesta? ¿Cómo debe utilizar los resultados de la encuesta?

18. Una empresa tiene que decidir si continúa la distribución regional (CA) de un producto o lo ensancha a una distribución nacional. Esto representa un punto de decisión para la empresa.
Los eventos causales que pueden afectar la decisión de distribución nacional o regional consisten en saber si habrá una gran demanda nacional para el producto, una demanda mediana o una limitada.
Si hay una gran demanda podrían esperarse utilidades de 4 millones de dólares, mientras que podrían esperarse utilidades de 2 millones de dólares o de 0.5 millones con una demanda mediana o limitada respectivamente.
Para una distribución regional pueden pronosticarse las utilidades siguientes.
Si la demanda es grande, la empresa puede obtener 2 millones de dólares. Por otra parte, si la demanda regional es mediana o limitada las utilidades en 1.8 y 1.5 millones de dólares respectivamente.
Las probabilidades de ocurrencia de los tres tipos de demanda son 0.5 para una gran demanda, 0.25 y 0.25 para demandas mediana y limitada respectivamente.

19. Una compañía de seguros le ofrece una indemnización por accidente de $210,000; Si no acepta la oferta y decide ir a juicio, puede obtener $185,000, $415,000 o $580,000 dependiendo de las alegaciones que el juez considere aceptable. Si pierde el juicio debe pagar los costos que ascienden a $30,000.
Se sabe que el 70% de los juicios se ganan y de éstos en el 50% se obtiene la menor indemnización, en el 30% la intermedia y en el 20% la más alta. Determinar la decisión más acertada.

20. Una fábrica esta evaluada en 15 millones. La fábrica desea incorporar un nuevo producto al mercado. Existen tres estrategias para incorporar el nuevo producto.
    - Alternativa 1: Hacer un estudio de mercado del producto para determinar si se introduce o no al mercado.
    - Alternativa 2: Introducir inmediatamente el producto (sin estudio)
    - Alternativa 3: No lanzar el producto al mercado.

En ausencia de estudios de mercado, la fábrica estima que el producto tiene un 55% de posibilidades de ser exitoso y de 45% de ser un fracaso. Si el producto tiene éxito la fábrica aumentaría en 10 millones su valor, pero si fracasa se devaluaría en 3 millones.

El estudio de mercado vale 1 millón. El estudio predice que existe un 60% de probabilidad de que el producto sería exitoso. Si el estudio de mercado determina que el producto sería exitoso, existe un 85% de posibilidades que efectivamente lo sea. Si el estudio de mercado determina que el producto sería un fracaso, existe un 10% de posibilidades que el producto sea exitoso. Si la empresa no desea correr riesgo que estrategia debería seguir.

21. Usemos un árbol de decisión para ayudar al dueño y gerente de un hotel invernal cómo administrarlo en la próxima temporada. Sus utilidades durante la estación del esquiar en el presente año dependerá de las nevadas que caigan en los meses invernales. Basándose en su experiencia pasada, piensa que la distribución de probabilidad de las nevadas y la utilidad resultante pueden ser resumidas en la siguiente tabla.

Distribución de las nevadas y utilidades del hotel

Cantidad de nieve	**Utilidad**	**Probabilidad de ocurrencia**
Más de 40 pulgadas	$120,000	0.4
De 20-40 pulgadas	40,000	0.2
Menos de 20 pulgadas	-40,000	0.4

El director recibió una oferta de una gran cadena hotelera para dirigir el hotel en la estación invernal garantizándole una ganancia de $45,000. También ha estado examinando la conveniencia de arrendar el equipo para producir nieve en esa estación. Si arrienda el equipo, el hotel podrá operar todo el tiempo sin importar la cantidad de nevadas naturales. Si decide emplear nieve producida por el equipo para complementar la nieve natural, su utilidad en la temporada será de $120,000 menos el costo de arrendamiento de $12,000 por estación, prescindiendo de cuanto lo use. El costo de operación será de $10,000 si la nieve tiene más 40 pulgadas, 50,000 si fluctúa entre 20 y 40 pulgadas y 90,000 si es menor que 20 pulgadas.

BLOQUE DE PROBLEMAS DE TEORÍA DE JUEGOS

1. El sindicato y la administración de una compañía negocian el nuevo contrato colectivo. Por ahora las negociaciones están congeladas, pues la empresa ha hecho una oferta “final” de un aumento salarial de $1.10 por hora y el sindicato una demanda “final” de un aumento de $1.60 por hora. Ambas partes han acordado que un árbitro imparcial establezca el aumento en alguna cantidad entre $1.10 por hora y $1.60 por hora (inclusive).
   El arbitraje ha pedido a cada parte que le presente una propuesta confidencial de un aumento salarial económicamente razonable y justo (redondeado a los diez centavos más cercanos). Por experiencias anteriores, ambas partes saben que por lo general el árbitro acepta la propuesta del lado que cede más en su cifra final. Si ningún lado cambia su cantidad final o si ambos ceden en la misma cantidad, el arbitraje suele establecer una cifra a la mitad ($1.35 en este caso). Ahora, cada parte necesita determinar qué aumento proponer para obtener un beneficio máximo.
   Formule este problema como un juego de dos personas y suma cero.

2. Dos fabricantes compiten por las ventas de dos líneas de productos distintas pero igualmente redituables. En ambos casos, el volumen de ventas del fabricante 2 es el triple del que logra el fabricante 1. En vista de algunos avances tecnológicos, ambos harán mejoras importantes a los dos productos, pero no están seguros de la estrategia de desarrollo y comercialización que deben seguir. Si desarrollan al mismo tiempo las mejoras de los dos productos, ningún fabricante podrá tenerlos listos para la venta antes de 12 meses. Una alternativa es llevar a cabo un “programa intensivo” para desarrollar primero uno de los dos productos y tratar de comercializarlo antes de que la competencia lo haga. Si actúa de esta manera, el fabricante 2 podría tener un producto listo para la venta en nueve meses, mientras que el fabricante 1 requeriría 10 meses (por compromisos previos de sus instalaciones). Cualquiera de los fabricantes podría tener el segundo producto listo en otros nueve meses.
   Para cualquier línea de producto, si los dos fabricantes comercializan los modelos mejorados simultáneamente, se estima que el fabricante 1 aumentaría 8% (de 25 a 33%) el porcentaje del total de las ventas futuras de este producto. De la misma manera, el fabricante 1 aumentaría sus ventas 20, 30 y 40% del total si comercializa el producto 2, seis y ocho meses antes que el fabricante 2, respectivamente. Por otro lado, el fabricante 1 perdería 4, 10, 12 y 14% del total si el fabricante 2 logra comercializar uno, tres, siete y diez meses antes que él.
   Formule este problema como un juego de suma cero de dos personas y determine la estrategia que deben seguir los dos fabricantes según el criterio minimax.

3. Para la siguiente matriz de pagos determine la estrategia óptima de cada jugador. Para ello elimine de manera sucesiva las estrategias dominadas. (Indique el orden en el que elimina las estrategias.)

		Jugador 2		
Estrategia		**1**	**2**	**3**
Jugador 1	1	−3	1	2
	2	1	2	1
	3	1	0	−2

4. En la siguiente matriz de pago, determine la estrategia óptima de cada jugador. Para ello elimine de manera sucesiva las estrategias dominadas. Proporcione una lista de estas estrategias dominadas (y la estrategia dominante correspondiente) en el orden en el que las eliminó.

		Jugador 2			
Estrategia		**1**	**2**	**3**	**4**
	1	2	−3	−1	1
Jugador 1	2	−1	1	−2	2
	3	−1	2	−1	3

5. Encuentre el punto silla del juego que tiene la siguiente matriz de pagos. Utilice el criterio minimax para encontrar la mejor estrategia de cada jugador. ¿Tiene este juego un punto silla? ¿Se trata de un juego estable?

		Jugador 2		
Estrategia		**1**	**2**	**3**
	1	1	−1	1
Jugador 1	2	−2	0	3
	3	3	1	2

6. Encuentre el punto silla del juego que tiene la siguiente matriz de pagos. Aplique el criterio minimax para encontrar la mejor estrategia de cada jugador. ¿Tiene este juego un punto silla? ¿Se trata de un juego estable?

		Jugador 2			
Estrategia		**1**	**2**	**3**	**4**
	1	3	−3	−2	−4
Jugador 1	2	−4	−2	−1	1
	3	1	−1	2	0

7. Considere el juego que tiene la siguiente matriz de pagos.

a. Formular el problema para encontrar las estrategias mixtas óptimas de acuerdo con el criterio minimax, como un problema de programación lineal.
b. Aplique el método simplex para encontrar estas estrategias mixtas.

Estrategia		Jugador 2: 1	2	3	4
Jugador 1	1	5	0	3	1
	2	2	4	3	2
	3	3	2	0	4

8. Siga las instrucciones del problema anterior (VII) para el juego que tiene la siguiente matriz de pagos.

Estrategia		Jugador 2: 1	2	3	4	5
Jugador 1	1	1	−3	2	−2	1
	2	2	3	0	3	−2
	3	0	4	−1	−3	2
	4	−4	0	−2	2	−1

9. En los juegos (a) y (b) dados a continuación, la retribución es para el jugador *A*. Cada juego tiene una solución de estrategia pura. En cada caso, determine las estrategias que definan el punto de silla y el valor del juego.

(a)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	6	2	8
A_2	8	9	4	5
A_3	7	5	3	5

(b)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	−4	−5	6
A_2	−3	−4	−9	−2
A_3	6	7	−8	−9
A_4	7	3	−9	5

10. Dos compañías promueven dos productos competidores. En la actualidad, cada producto controla 50% del mercado. Debido a mejoras recientes en los dos productos, cada compañía planea lanzar una campaña publicitaria. Si ninguna de las dos compañías se anuncia, continuarán iguales las partes del mercado. Si alguna de las compañías lanza una campaña más agresiva, la otra compañía con toda certeza perderá un porcentaje proporcional de sus clientes.
Un encuesta del mercado muestra que se puede llegar a 50% de los clientes potenciales por medio de la televisión, a 30% por medio de periódicos, y a 20% por medio de la radio.

- Formule el problema como un juego de suma cero entre dos personas, y determine el medio publicitario para cada compañía.

11. La Empresa DI, después de seguir consejo y haber conseguido resultados óptimos, decide consultar la estrategia a seguir para competir con la empresa DII. Ha desarrollado un modelo de pronósticos de ventas de cada uno de los productos de su empresa, en función de sus decisiones y las de la empresa DII. Estos datos los han recogido en la matriz de pago que se muestra. ¿Cuál es el informe que debes presentar a la empresa DI? Describir su estrategia, la de DII y el valor del juego.

DI \ DII	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	50	20	120	-50
A_2	60	20	70	60
A_3	-20	0	-40	60

12. Dos prisioneros han sido acusados de cometer un robo junto. El juez les da una oportunidad: Si ambos confiesan, los sentenciará a 5 años de prisión a cada uno; si uno confiesa y el otro no, al primero le dará un año y al segundo 10; finalmente, si ninguno de los dos confiesa, el juez, a falta de pruebas, sólo los puede sentenciar a 2 años a cada uno por posesión ilegal de armas. Resolver el dilema de los prisioneros. ¿Cuáles son los años esperados de prisión para cada prisionero?

13. Las dos principales cadenas de tiendas de una ciudad están preparando su mejor estrategia para realizar la liquidación de término de temporada de invierno. Estas empresas deben decidir qué semana del mes de julio es la más conveniente para realizar su liquidación. En la siguiente matriz se indican las posibles estrategias y los resultados que obtienen cada empresa en términos de las utilidades netas de la temporada.

Cadena 1 \ Cadena 2	1ª Semana	2ª Semana	3ª Semana
1ª Semana	30 30	15 40	35 65
2ª Semana	40 15	25 25	35 35
3ª Semana	65 35	35 35	60 60

De acuerdo a los datos responda justificando claramente:

(a) ¿Tiene la cadena 1 una estrategia dominante? ¿Tiene alguna estrategia dominada?
(b) ¿Tiene la cadena 2 una estrategia dominante? ¿Tiene alguna estrategia dominada?
(c) ¿Existe algún equilibrio de Nash?
(d) ¿Cuál es el equilibrio cooperativo? ¿Es estable?

14. Los dos principales canales de televisión (TVX y TVY) están compitiendo por la teleaudiencia en los horarios entre las 20 y 21 horas y entre las 22 y 23 horas de las noches de los lunes. Cada canal tiene dos programas, uno de ellos más atractivo (estelar) que el otro, y debe decidir en qué horario transmitir cada programa. Las programaciones posibles para el programa estelar de cada canal llevan a los siguientes ratings totales (ambos programas sumados) para cada canal:

Matriz de Pagos		TVY	
		20-21 hrs.	22-23 hrs.
TVX	20-21 hrs.	23 / 17	26 / 16
	22-23 hrs.	14 / 13	21 / 18

15. Dos firmas compiten por un mercado que vale 100. Cada firma tiene dos opciones: ser agresiva (A) o ser negociadora (N). Si las dos firmas eligen la misa estrategia, el mercado se divide equitativamente. Si una firma agresiva se enfrenta con una negociadora, la agresiva se queda con el 75% del mercado y la negociadora con el 25%. El costo del comportamiento agresivo (por ejemplo, por bajar los precios) es un valor c.

(a) Represente el juego en forma normal
(b) ¿Para qué valores de c negociar es una estrategia estrictamente dominante? Interprete

BLOQUE DE PROBLEMAS DE ANALISIS DE MARKOV

1. Cada familia nicaragüense se clasifica según donde vive como urbana, rural o suburbana. Durante un año específico, 15% de las familias urbanas se mudaron a una ubicación suburbana, y 5% a un área rural; también 6% de las familias suburbanas se trasladaron a un área urbana y 4% se pasaron a una ubicación rural; por último 4% de las familias rurales se ubicaron en un área urbana y 6% se cambiaron a un lugar suburbano.
    a. Si una familia vive ahora en un lugar urbano, cual es la probabilidad de que viva en un área urbana dentro de dos años a partir de ahora? Un área suburbana? Un área rural?.
    b. Suponga que en el presente el 40% de las familias viven en el área urbana, 35% viven en un área suburbana y 25% viven en un área rural. Dos años a partir de ahora ¿Qué porcentaje de familias nicaragüenses vivirán en un área urbana?

2. Suponga que cada estadounidense en cada uno de los tres grupos: niños, adultos que trabajan y adultos retirados. Durante un periodo de un año, 0.959 de los niños seguirán siendo niños, 0.04 de los niños se convertirán en adultos, y 0.001 de los niños mueren. En cualquier año 0.96 de los adultos que trabajan permanecen trabajando y 0.3 de las personas que trabajan se volverán personas retiradas, y 0.1 de los adultos que trabajan morirán, También 0.95 de las personas retiradas permanecerán así, y 0.05 de las personas retiradas morirán.

   Determine la matriz estacionaria o estable

3. La ciudad de Nueva York produce 1000 toneladas de aire contaminado por día, la ciudad de Jersey 100 toneladas y Newark 50 toneladas. Todos los días, los vientos arrastran 1/3 de la contaminación de Nueva York a Newark, 1/3 se disipa y el otro tercio permanece en Nueva York. Cada día el viento se lleva a Nueva York 1/3 de la contaminación de la ciudad de Jersey, 1/3 se queda en Jersey y 1/3 se va Newark. Todos los días, 1/3 de la contaminación de Newark permanece allí y el resto se va con el viento a la ciudad de Jersey. ¿En un día representativo cual ciudad será la más contaminada?

4. El ascensor de un edificio con planta baja y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. El piso en el que finaliza el viaje n-ésimo del ascensor sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten de la planta baja se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25% de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en la planta baja. Se pide:
   a) Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena
   b) Dibujar el diagrama de transición de estado
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos. (matriz estacionaria)

5. Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y allí pernocta, desplazándose a otra ciudad al día siguiente, si no tiene suficiente trabajo. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0.4, la de tener que viajar a B es 0.4 y la de tener que ir a A es 0.2. Si el viajante duerme un día en B, con probabilidad de un 20% tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60% de los casos viajará a C, mientras que irá a A con probabilidad 0.2. Por último si el agente comercial trabaja todo un día en A, permanecerá en esa misma ciudad, al día siguiente, con una probabilidad 0.1, irá a B con una probabilidad de 0.3 y a C con una probabilidad de 0.6.

   a. Si hoy el viajante está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?
   b. ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?

6. Suponga que toda la industria de refresco produce dos colas: Coca Cola y Pepsi Cola. Cuando una persona ha comprado Coca Cola hay una probabilidad de 90% de que siga comprándola la vez siguiente. Si una persona compró Pepsi, hay 80% de que repita la vez siguiente. Se pide:
   a. Si una persona actualmente es comprador de Pepsi. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas dos compras a partir de hoy?
   b. Si en la actualidad una persona es comprador de Coca Cola. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas tres compras a partir de ahora?
   c. Supongamos que el 60% de toda la gente toma hoy Coca Cola y el 40% Pepsi. A tres compras a partir de ahora, ¿Qué fracción de los compradores estará tomando Coca Cola.
   Determinar la matriz de Markov estable

7. Hallar, si existe, la distribución estacionaria para esta CM con S={1, 2, 3}:

$$Q = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

8. Central State University administra exámenes de competencias en computación cada año. Los exámenes permiten a los estudiantes “exentar” de la clase introducción a la computación que imparte la universidad. Los resultados de los exámenes se pueden clasificar en uno de los siguientes cuatro estados:
   Estado 1: aprobar todos los exámenes de computación y exentar el curso
   Estado 2: no aprobar todos los exámenes de computación en el tercer intento y tener que tomar el curso
   Estado 3: reprobar los exámenes de computación en el primer intento
   Estado 4: reprobar los exámenes de computación en el segundo intento

   El coordinador de los exámenes del curso observó la siguiente matriz de probabilidades de transición:

   Actualmente, hay 200 estudiantes que no aprobaron todos los exámenes en el primer intento. Además, hay 50 estudiantes que no aprobaron en el segundo intento. A largo plazo, ¿cuántos estudiantes estarán exentos del curso por aprobar los exámenes? ¿Cuántos de los 250 estudiantes requerirán tomar el curso de computación?

9. Ray Cahnman es el orgulloso propietario de una automóvil deportivo 1955. En un día dado, Ray no sabe si su auto va a arrancar. Arranca el 90% de las veces si arrancó la mañana anterior, y el 70% de las veces no arranca si no arrancó la mañana anterior.
   a) Construya la matriz de probabilidades de transición.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que arranque mañana si arrancó hoy?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de arranque mañana si *no* arrancó hoy?

10. En un mes dado, Dress-Rite pierde 10% de sus clientes que cambian a Fashion, Inc. y 20% de su mercado cambia a Luxury Living; pero Fashion, Inc., pierde 5% de su mercado que cambia a Dress-Rite y 10% que cambia a Luxury Living cada mes; luego, Luxury Living pierde 5% de su mercado que cambia a Fashion, Inc., y 5% de su mercado que cambia a Dress-Rite. En este momento, cada una de las tiendas de ropa tiene una participación igual en el mercado. ¿Cuáles cree que serán las participaciones en el mercado el próximo mes? ¿Cuáles serán dentro de tres meses?

11. La compañía Goodeating Dog Chow elabora diferentes marcas de alimento para perros. Uno de sus mejores productos es la bolsa de 50 libras de Goodeating Dog Chow. George Hamilton, presidente de Goodeating, utiliza una máquina muy antigua para empacar automáticamente las 50 libras de Goodeating Chow en una bolsa. Por desgracia, como la máquina es antigua, en ocasiones llena las bolsas con más o con menos producto. Cuando el llenado es correcto y coloca 50 libras de comida en cada bolsa, existe una probabilidad de 10% de que la máquina ponga solo 49 libras en cada bolsa el siguiente día, y una probabilidad de 0.20 de que coloque 51 libras en cada bolsa el siguiente día. Si la máquina está colocando 49 libras en cada bolsa, hay una probabilidad de 0.30 de que mañana ponga 50 libras y una probabilidad de 0.20 de que ponga 51 libras en cada bolsa. Además, si la máquina está colocando 51 libras en cada
bolsa hoy, existe una probabilidad de 0.40 de que coloque 50 libras en cada bolsa mañana y una probabilidad de 0.10 de que coloque 49 libras mañana.
    a) Si la máquina está cargando 50 libras en cada bolsa hoy, ¿cuál es la probabilidad de que coloque 50 libras en cada bolsa mañana?
    b) Resuelva el inciso a) cuando la máquina está colocando solo 49 libras en cada bolsa hoy.
    c) Resuelva el inciso a) cuando la máquina está colocando 51 libras hoy.

12. La universidad de South Wisconsin ha tenido una inscripción estable los últimos cinco años. La escuela tiene su propia librería, University Bookstore, pero también hay tres librerías privadas en la ciudad: Bill's Book Store, College Bookstore y Battle's Book Store. La universidad está preocupada por el gran número de estudiantes que están comprando en una de las librerías privadas. Como resultado, el presidente de South Wisconsin, Andy Lange, decidió dar a un estudiante tres horas de crédito universitario para que estudie el problema. Se obtuvo la siguiente matriz de probabilidades de transición:

	UNIVERSITY	BILL'S	COLLEGE	BATTLE'S
UNIVERSITY	0.6	0.2	0.1	0.1
BILL'S	0	0.7	0.2	0.1
COLLEGE	0.1	0.1	0.8	0
BATTLE'S	0.05	0.05	0.1	0.8

En la actualidad, cada una de las cuatro librerías tiene una participación igual en el mercado. ¿Cuáles serán las participaciones en el mercado para el siguiente periodo?

13. El profesor Green da cursos de programación de computadoras de dos meses durante el verano. Los estudiantes presentan varios exámenes para aprobar el curso y cada estudiante tiene tres oportunidades de tomar los exámenes. Los siguientes estados describen las situaciones posibles que pueden ocurrir:
    1. Estado 1: pasar todos los exámenes y aprobar el curso
    2. Estado 2: no pasar todos los exámenes en el tercer intento y reprobar el curso.
    3. Estado 3: reprobar un examen en el primer intento
    4. Estado 4: reprobar un examen en el segundo intento

    Después de observar varios grupos, el profesor Green obtuvo la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

    Actualmente hay 50 estudiantes que no aprobaron todos los exámenes en el primer intento y 30 estudiantes que no aprobaron todos los exámenes en el segundo intento. ¿Cuántos estudiantes de estos dos grupos pasarán el curso y cuántos lo reprobarán?

14. Establezca un vector de probabilidades de estado y una matriz de probabilidades de transición dada la siguiente información: Hoy, la tienda 1 tiene 40% del mercado; la tienda 2 tiene 60% del mercado. En cada periodo, los clientes de la tienda 1 tienen 80% de probabilidad de regresar, y 20% de cambiar a la tienda 2. En cada periodo, los clientes de la tienda 2 tienen 90% de posibilidades de regresar, y 10% de cambiar a la tienda 1.

15. Dadas las siguientes matrices de transición (de un paso) de una cadena de Markov, determine las clases de las cadenas de Markov y si son recurrentes o no

$$a)\quad \mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$b)\quad \mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

16. Un proceso de producción incluye una máquina que se deteriora con rapidez tanto en la calidad como en la cantidad de producción con el trabajo pesado, por lo que se inspecciona al final de cada día. Después de la inspección se clasifica la condición de la máquina en uno de cuatro estados posibles:

Estado	Condición
0	Tan buena como nueva
1	Operable: deterioro mínimo
2	Operable: deterioro mayor
3	Inoperable y reemplazada por una tan buena como nueva

El proceso se puede modelar como una cadena de Markov con matriz de transición (de un paso) P dada por

Estado	0	1	2	3
0	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	1	0	0	0

a) Encuentre las probabilidades de estado estable.
b) Si los costos respectivos por estar en los estados 0, 1, 2, 3 son 0, 1 000, 3 000 y 6 000 dólares, ¿cuál es el costo diario esperado a largo plazo?
c) Encuentre el tiempo de recurrencia esperado del estado 0 (esto es, el tiempo esperado que una máquina se puede usar antes de tener que reemplazarla).

17. Un fabricante de videograbadoras está tan seguro de su calidad que ofrece garantía de reposición total si un aparato falla dentro de los dos primeros años. Con base en datos compilados, la compañía ha notado que sólo 1% de sus grabadoras fallan durante el primer año, mientras que 5% de ellas sobreviven el primer año pero fallan durante el segundo. La garantía no cubre grabadoras ya reemplazadas.
   a) Formule la evolución del estado de una grabadora como una cadena de Markov cuyos estados incluyen dos estados absorbentes que representan la necesidad de cubrir la garantía o el hecho de que una grabadora sobreviva el periodo de garantía. Después construya la matriz de transición (de un paso).

18. Jim debe avanzar cinco años para completar su doctorado en la Universidad ABC. Sin embargo le agrada la vida de estudiante y no tiene prisa para obtener su grado. En cualquier año académico, hay 50% de probabilidades de que pueda tomarse un año sabático y 50% de probabilidad de dedicarle tiempo completo a su doctorado. Después de completar tres años académicos, hay 30% de probabilidades de que Jim pueda dar "marcha atrás" y simplemente obtenga una maestría, 20% de probabilidades de que se tome libre el siguiente año pero continuando con el programa de doctorado, y 50% de probabilidades de que asista a la escuela a tiempo completo en busca de su doctorado.
    (a) Exprese la situación de Jim como una cadena de Markov.
    (b) Determine el número esperado de años académicos antes de que la vida de estudiante de Jim termine.
    (c) Determine la probabilidad de que Jim termine su ciclo académico con sólo una maestría.
    (d) Si la beca de Jim desembolsa $15,000 anuales (pero sólo cuando asiste a la escuela), ¿cuánto deberá pagar antes de que obtenga un grado?

19. Una máquina NC está diseñada para que funcione adecuadamente con voltajes de 108 a 112 volts. Si el voltaje se sale de este intervalo, la máquina se detiene. El regulador de voltaje de la máquina puede detectar variaciones en incrementos de un volt. La experiencia muestra que el voltaje cambia cada 15 minutos. Dentro del intervalo permisible (118 a 112 volts) el voltaje puede subir 1 volt, permanecer igual, o bajar un volt, todos con iguales probabilidades.
    (a) Exprese la situación como una cadena de Markov.
    (b) Determine la probabilidad de que la máquina se detenga a causa de un voltaje bajo. De un voltaje alto.
    (c) ¿Cuál sería el voltaje ideal que haría que la máquina trabaje durante más tiempo?

20. Un profesor de ingeniería adquiere una computadora nueva cada dos años. El profesor puede elegir de entre tres modelos: Ml, M2 y M3. Si el modelo actual es Ml, la siguiente computadora puede ser M2 con probabilidad .2, o M3 con probabilidad .15. Si el modelo actual es M2, las probabilidades de cambiar a Ml y M3 son .6 y .25, respectivamente. Pero si el modelo actual es M3, entonces las probabilidades de comprar los modelos Ml y M2 son .5 y .1, respectivamente. Represente la situación como una Matriz (cadena) de Markov y construya el diagrama de transición de estado.

BLOQUES DE PROBLEMAS DE TEORÍA DE COLAS

1. La compañía Rockwell Electronics conserva una cuadrilla de servicio que repara las fallas de las máquinas, que ocurren con un promedio de λ= 3 al día (aproximadamente de naturaleza de Poisson). La cuadrilla puede dar servicio a un promedio de μ=8 máquinas al día con una distribución de tiempo de reparación que se asemeja a la distribución exponencial.
   a) ¿Cuál es la tasa de utilización de este sistema de servicio?
   b) ¿Cuál es el tiempo de reparación promedio de una máquina que está descompuesta?
   c) ¿Cuántas máquinas están en espera de recibir servicio en algún momento dado?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que más que una máquina se encuentre en el sistema?
   e) ¿Cuál la probabilidad de que más de dos estén descompuestas y en espera de ser reparadas o recibiendo el servicio? ¿Más de tres? ¿Y más de cuatro?

2. Con base en datos históricos, el autolavado de Harry estima que los automóviles sucios llegan a sus instalaciones a una tasa de 10 por hora durante todo el sábado. Con una cuadrilla que trabaja en la línea de lavado, Harry calcula que los vehículos se pueden lavar a un ritmo de uno cada 5 minutos. Se lava un solo auto a la vez en este ejemplo de una línea de espera de un solo canal.
   Suponiendo llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales, encuentre:
   a) el número promedio de autos en línea.
   b) el tiempo promedio que un auto espera antes de ser lavado.
   c) el tiempo promedio que un auto pasa en el sistema de servicio.
   d) la tasa de utilización del autolavado.
   e) la probabilidad de que ningún auto esté en el sistema

3. Mike Dreskin administra un gran complejo de cines en Los Ángeles llamado Cinemas I, II, III y IV. Cada uno de los cuatro auditorios proyecta una película distinta. Además, el programa está planeado de manera que los tiempos de inicio están escalonados para evitar las posibles aglomeraciones de personas de que se presentarían si las cuatro películas se iniciaran al mismo tiempo. El cine tiene una sola taquilla y un cajero que puede mantener una tasa promedio de Servicio de 280 espectadores por hora. Se supone que los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial. Las llegadas en un día activo típico tienen distribución de Poisson y un promedio de 210 por hora. Para determinar la eficiencia de la operación actual del sistema de boletaje, Mike desea examinar distintas características de operación de la cola.
   a) Determine el número promedio de asistentes al cine que esperan en la fila para comprar un boleto.
   b) ¿Qué porcentaje de tiempo está ocupado el cajero?
   c) ¿Cuál es el tiempo promedio que el cliente pasa en el sistema?
   d) ¿Cuál es el tiempo promedio que está en línea de espera para llegar a la taquilla?
   e) ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de dos personas en el sistema? ¿Más de tres personas? ¿Y más de cuatro?

4. La línea de la cafetería universitaria ubicada en el centro de recreación de estudiantes es una instalación de autoservicio donde los usuarios seleccionan la comida que desean consumir y hacen una sola fila para pagar en la caja. Los alumnos llegan a una tasa aproximada de cuatro por minuto, de acuerdo con la distribución de Poisson. El tiempo que toma la única cajera en registrar la venta es de 12 segundos por cliente, siguiendo una distribución exponencial.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de dos estudiantes en el sistema? ¿Más de tres estudiantes? ¿Y más de cuatro?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema esté vacío?
    c. ¿Cuánto tiempo esperará el alumno promedio antes de llegar a la caja?
    d. ¿Cuál es el número esperado de alumnos en la cola?
    e. ¿Cuál es el número promedio en el sistema?
    f. Si se agrega un segundo cajero (que trabaje al mismo ritmo), ¿cómo cambiarían las características operativas que se calcularon en los incisos b), c), d) y e)? Suponga que los clientes esperarán en una sola línea e irán con el primer cajero disponible

5. Los automóviles llegan a la ventanilla de atención en una oficina postal a una tasa de 4 cada 10 minutos. El tiempo promedio de servicio es de 2 minutos. La distribución de Poisson es adecuada para la tasa de llegadas y los tiempos de servicio se distribuyen de manera exponencial.
    a. ¿Cuál es el tiempo promedio que un auto está en el sistema?
    b. ¿Cuál es el número promedio de autos en el sistema?
    c. ¿Cuál es el tiempo promedio que los autos pasan en espera de recibir el servicio?
    d. ¿Cuál es el número promedio de autos que están en la línea *detrás* del cliente que está recibiendo el servicio?
    e. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya autos en la ventanilla?
    f. ¿Cuál es el porcentaje de tiempo que el empleado postal permanece ocupado?
    g. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos autos en del sistema?

6. La tienda de alimentos Mom-and-Pop's tiene un estacionamiento pequeño con tres espacios reservados para los clientes. Si la tienda está abierta los autos llegan y usan un espacio con una tasa media de 2 por hora. Para n = 0, 1, 2, 3, la probabilidad P_n de que haya exactamente n espacios ocupados es $P_0 = 0.1$, $P_1 = 0.2$, $P_2 = 0.4$, $P_3 = 0.3$.
    a. Describa la interpretación de este estacionamiento como un sistema de colas. En particular, identifique los clientes y los servidores. ¿Cuál es el servicio que se proporciona? ¿Qué constituye el tiempo de servicio? ¿Cuál es la capacidad de la cola?
    b. Determine las medidas de desempeño básicas: L, Lq, W y Wq de este sistema de colas.
    c. Use los resultados de b) para determinar el tiempo promedio que un auto permanece en el espacio.

7. Newell y Jeff son dos peluqueros que operan de manera independiente. Tienen dos sillas para clientes que esperan su corte, porque el número de clientes en el sistema varía entre 0 y 4. Para n = 1, 2, 3, 4, la probabilidad P_n de que haya exactamente n clientes en el sistema es P_0 =1/ 16 , P_1 = 4/16 , P_2 = 6/16 , P_3 = 4/16 . P_4 =1/16 .
   a. Calcule L. .Cómo describiría el significado de L a Newell y Jeff?
   b. En el caso de cada valor posible del número de clientes en el sistema, especifique cuantos clientes hay en la cola. Después calcule Lq. .Como describiría el significado de Lq a Newell y Jeff?
   c. Determine el numero esperado de clientes que estarán siendo atendidos.
   d. Dado que llega un promedio de 4 clientes por hora y esperan el corte, determine W y Wq. Describa estas cantidades en términos que Newell y Jeff comprendan.

8. Explique por qué el factor de utilización ρ del único servidor del sistema debe ser igual a 1 – P_0, donde P_0 es la probabilidad de tener cero clientes en el sistema.

9. En un banco, la tasa de llegadas es de 2 clientes por minuto. Determine lo siguiente:
   a. El promedio de llegadas durante 5 minutos.
   b. La probabilidad de que no haya llegadas durante los siguientes .5 minutos.
   c. La probabilidad de que haya al menos una llegada durante los siguientes .5 minutos.
   d. La probabilidad de que el tiempo entre dos llegadas sucesivas sea al menos de 3 minutos.

10. Una florería inicia cada semana con 18 docenas de rosas. En promedio, la florería vende 3 docenas al día (una docena a la vez), pero la demanda real sigue una distribución de Poisson. Siempre que el nivel de las existencias se reduce a 5 docenas, se coloca un nuevo pedido de 18 nuevas docenas para entrega al principio de la siguiente semana. Debido a la naturaleza de la mercancía, las rosas sobrantes al final de la semana se desechan. Determine lo siguiente:
    a. La probabilidad de colocar un pedido cualquier día de la semana.
    b. El promedio de rosas desechadas al final de la semana.

Sugerencia: Debido a que las compras ocurren a razón de µ= 3 docenas por día, la probabilidad de colocar un pedido al final del día t es.

$$p_{n\le 5}(t) = p_0(t) + p_1(t) + \cdots + p_5(t)$$
$$= p_0(t) + \sum_{n=1}^{5} \frac{(3t)^{18-n}e^{-3t}}{(18-n)!}, \; t = 1, 2, \ldots, 7$$

Bibliografía:

1. Introducción a la Investigación de Operaciones/Autores: Frederick S. Hillier y Gerald J. Lieberman/ Editorial Mc. Graw Hill/novena edición -2010.

2. Investigación de Operaciones/Autor:Hamdy A. Taha/ Editorial Pearson/novena edición - 2012.

3. Métodos cuantitativos para negocios/Autores: Render – Stair – Hanna/Editorial Pearson/ undécima edición – 2012.

4. Investigación de Operaciones/Autor: Wayne L. Wilson/Editorial Thompson/cuarta edición - 2005.

5. Investigación de Operaciones en las Ciencias Administrativas/Autores: Eppen-Gould-Schmidt-Moore-Weatherford/Editorial Pearson/quinta edición 2000.

6. Guías prácticas de Investigación de Operaciones/Autor: Julio R. Vargas - 2010

Software:
1. WinQSB ver. 2
2. POM-QM ver. 3.1
3. TORA
4. OM para Exel ver.10

Para sugerencias: jrvargas_trabajo@hotmail.com y www.jrvargas.wordpress.com