



La Programación Lineal



Aspectos generales

- Se considera a George Dantzig el padre de la P. L.
- Su objetivo es el de asignar recursos escasos a actividades que compiten por ellos.
- Técnica matemática que permite seleccionar el mejor curso de acción o programa de un conjunto de soluciones factibles.
- Los modelos que describen las relaciones son funciones lineales.





Formulación típica



- El planteamiento típico se puede suponer como:

Optimizar alguna variable dependiente, expresada como una función lineal de n variables independientes, sujeta a una serie de restricciones lineales que son a su vez funciones de las n variables independientes.



Formulación típica

- La variable dependiente se conoce como **Función Objetivo**
- Está relacionada a menudo con conceptos económicos tales como ganancias, costos, ingresos, tiempo, distancia, etc.
- Las variables independientes son **variables de decisión**



Formulación estándar

Optimizar :

$$f(x) = Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

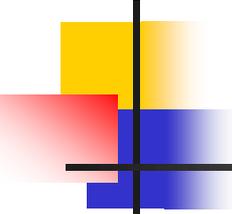
Función objetivo

sujeto a :

$$g(x) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

Restricciones





Donde:

- $f(\cdot)$: función objetivo
- x_j : variables de decisión
- c_j : coeficiente de la j -ésima variable de decisión en la función objetivo
- $a_{1,j}$: coeficiente de la j -ésima variable de decisión en la i -ésima restricción
- b_i : constante o límite de la i -ésima restricción



Las restricciones:

- En general las restricciones pueden ser de tres tipos:
 - $g(x) \leq b$
 - $g(x) \geq b$, o
 - $g(x) = b$
- La restricción de tipo \leq asegura que el uso de un recurso no exceda cierto límite
- La restricción de tipo \geq asegura que el uso de un recurso satisfaga un mínimo establecido
- La restricción de tipo $=$ asegura que el uso de un recurso esté limitada a una cantidad previamente establecida.



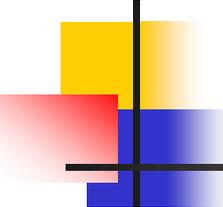


Pasos para formular el modelo



- Entender bien el problema
- Identificar las variables de decisión
- Establecer la función objetivo
- Establecer las restricciones
- Identificar los límites superior e inferior de las variables de decisión





Ejemplo



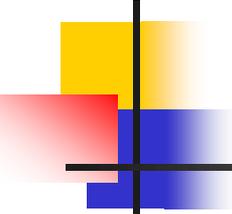
Una fábrica de ventanas produce artículos de vidrio de alta calidad, incluyendo ventanas y puertas. Tiene tres plantas. Los marcos de aluminio se producen en la planta A, los de madera se producen en la planta B y en la C se corta el vidrio y se ensamblan los productos.

Se ha decidido ampliar la producción en dos artículos adicionales: un tipo especial de puerta y una ventana de seguridad. Se ha determinado que la empresa tiene capacidad suficiente para producir estos artículos sin sacrificar la producción de los otros que tiene, aunque tendrán que competir con la capacidad excedente de la planta C. Adicionalmente se conoce que se podrá vender todo lo que se produce.

Datos del problema



Planta	Capacidad utilizada por unidad producida		Capacidad disponible
	Producto		
	Puertas	Ventanas	
A	1	0	4
B	0	2	12
C	3	2	18
Utilidad por unidad vendida	3	5	



Ejemplo ...



La empresa está interesada en encontrar una mezcla óptima de puertas especiales y ventanas de seguridad a fin de tener la mayor cantidad de ingresos posible.



Formulación

- ¿Cuál es el objetivo del problema?
 - Encontrar cuantas puertas y ventanas producir a fin de maximizar la utilidad
- ¿Cuáles son las variables de decisión?
 - La cantidad de puertas (x_1) y ventanas (x_2) a producir
- ¿Cuál es la función objetivo?
 - La utilidad por ventana y puerta vendida
- ¿Cuáles son las restricciones?
 - Las capacidades de las plantas



Formulación estándar

Maximizar:

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Resolviendo el problema

- Método intuitivo
- Enumeración completa
- Solución gráfica
- Métodos matemáticos exactos
 - Simplex
 - Otros
- Heurísticas

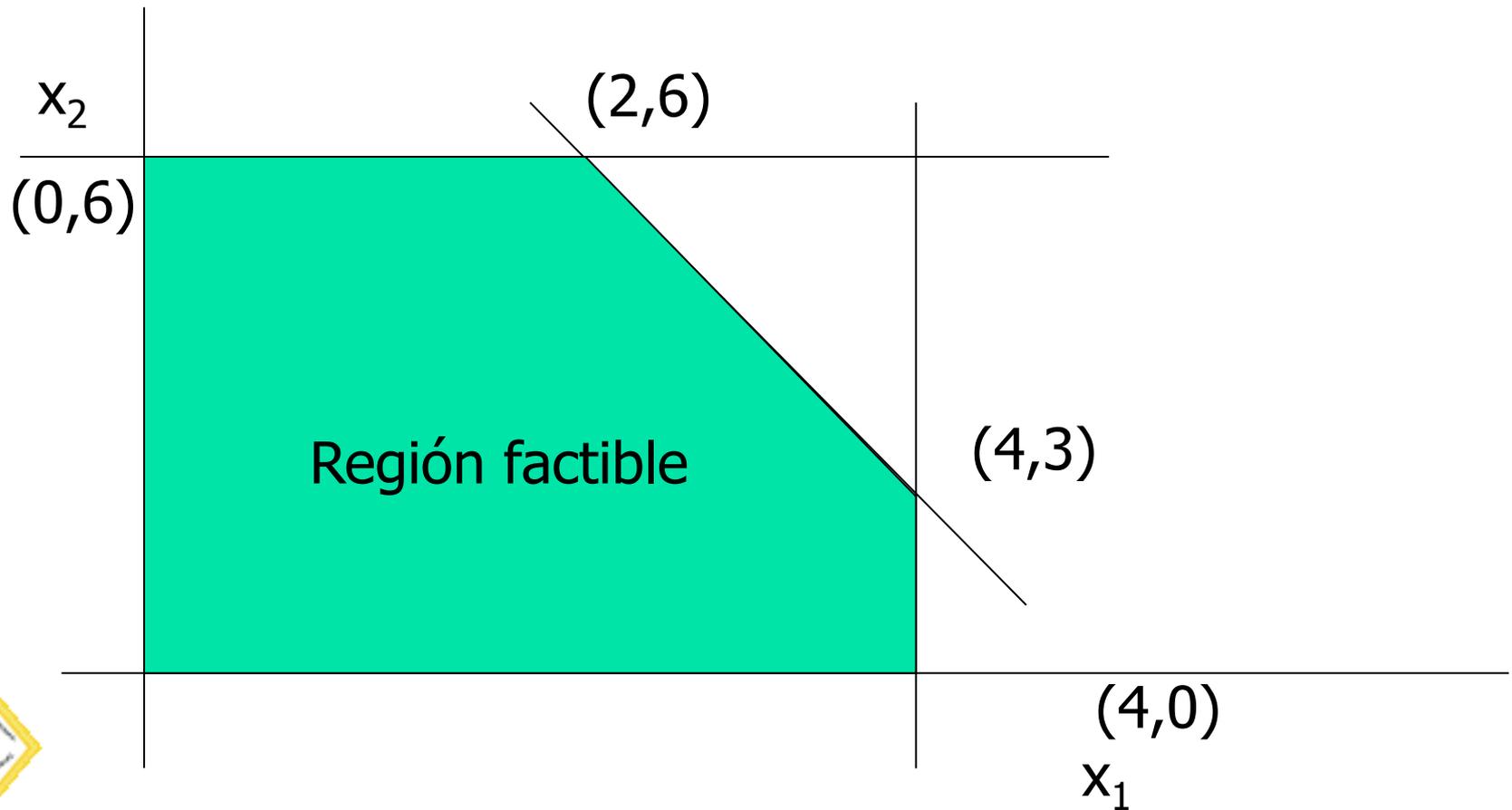


La solución gráfica

- Un problema de programación lineal puede representarse como un espacio convexo
- Formado por la intersección de las diferentes restricciones
- De manera general, se formará un hiperespacio en la región \mathcal{R}^n , formado por la intersección de m hiperplanos, también localizados en \mathcal{R}^n



Solución gráfica



La solución óptima

- La región factible es el conjunto de valores que una variable de decisión puede asumir y simultáneamente satisfacer las diferentes restricciones.
- Es una región convexa, por lo tanto sus esquinas son una función ponderada de cualquier combinación de los puntos que la forman.
- Las posibles soluciones están localizadas en las intersecciones o esquinas de los hiperplanos formados por las restricciones.



La solución óptima

- Si existe una solución óptima, ésta deberá estar en una esquina.
- Si hay más de una solución, al menos dos de ellas deberán estar en esquinas adyacentes.
- Existe un número finito de soluciones esquinas.
- Si una esquina proporciona una solución igual o mejor que sus puntos esquinas factibles adyacentes, entonces es óptimo.



La solución óptima

Esquinas		Función objetivo	
		x_1	x_2
x_1	x_2	3	5
0	6	30	
2	6	36	
4	3	27	
4	0	12	

← Óptimo



Significado de la solución



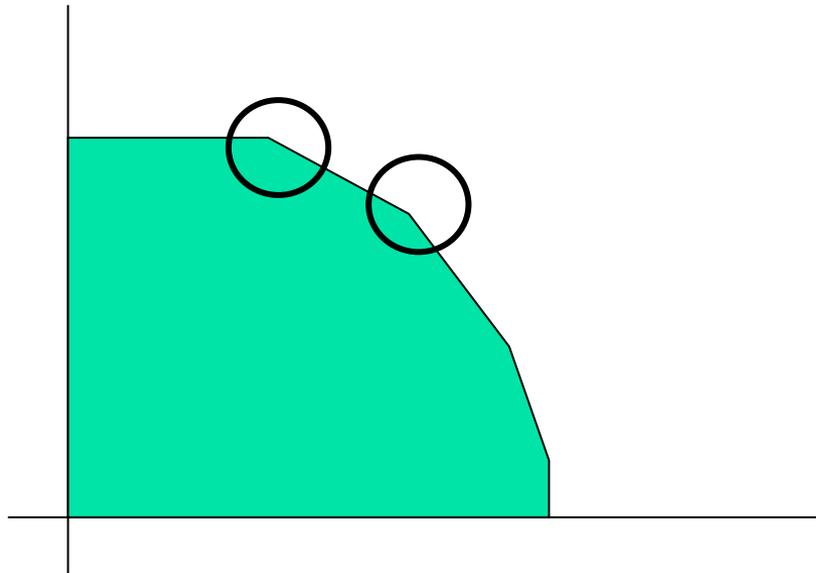
- La mezcla óptima de productos será
 - 2 puertas y 6 ventanas
 - Un ingreso o utilidad de 36 unidades monetarias
 - Quedarán disponible recursos en la planta A para poder hacer 2 puertas más ($2 \leq 4$)
 - No quedarán recursos disponibles recursos en la planta B ($2*6 = 12$)
 - No quedarán recursos disponibles en la planta B ($3*2 + 2*6 = 18$)



Algunas condiciones especiales

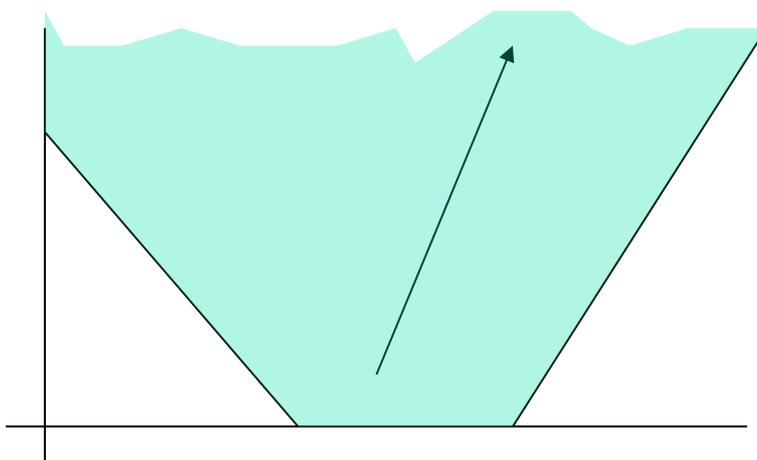


- Soluciones alternas: puede existir más de una solución óptima, pero al menos una de ellas debe estar en una esquina.



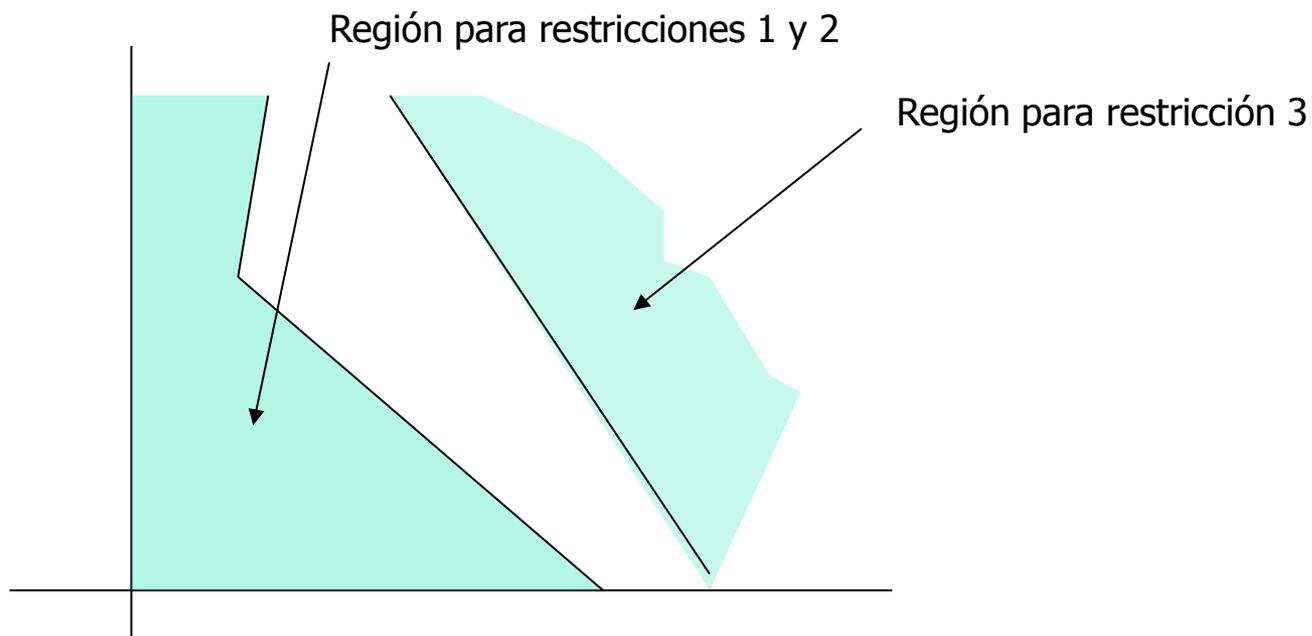
Solución no limitada

- El espacio o región de la solución no está limitado por ninguna restricción, por lo que la solución podrá variar de manera infinita sin límite. Normalmente esto indica un error en la formulación



Problema no factible

- Cuando el conjunto de soluciones es un conjunto vacío, esto es, no hay puntos dentro de la región factible que satisfaga todas las soluciones



Restricciones redundantes

- Hay más de una restricción que no afecta la región factible, al estar la misma limitada por otras restricciones. Estas restricciones no son necesarias para encontrar la solución del modelo

