



Casos especiales de la P. L.



Programación por Objetivos



- Proporciona una manera racional de intentar alcanzar varios objetivos de manera simultánea, jerarquizando los mismos o asociándoles una ponderación a cada uno.
- El enfoque básico es establecer un objetivo numérico específico para cada uno de los objetivos, formular una función objetivo para cada uno y después buscar una solución que minimice la suma ponderada de las desviaciones de estas funciones objetivo de sus metas respectivas



Tipos de metas



- Meta unilateral inferior: establece un límite inferior por abajo del cual no se quiere ir (pero se aceptan desvíos a la meta que deberá minimizarse)
 - Ej. : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq \text{Meta}_1$
- Meta unilateral superior: establece un límite superior que no se quiere exceder (pero se aceptan desvíos a la meta que deberá minimizarse)
 - Ej. : $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq \text{Meta}_2$
- Meta bilateral: establece un “blanco” específico que no se quiere perder hacia ningún lado.
 - Ej. : $\text{Meta}_3 \leq a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq \text{Meta}_4$



Tipos de restricciones



- Existen dos tipos de restricciones funcionales:
 - Las restricciones ordinarias de Programación Lineal (restricciones "duras" o estrictas). Requieren ser cumplidas de manera estricta.
 - Las ecuaciones objetivo ("blandas" o flexibles). Pueden admitir desvíos a la meta establecida, pero estos desvíos estarán asociados a una penalización que se reflejará en un parámetro en la Función Objetivo.



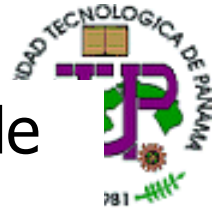
El valor objetivo de la Meta

- Se descompone en dos elementos:
 - El valor correspondiente al nivel de la Meta alcanzado efectivamente $\sum_j a_{ij}x_j$
 - El desvío o diferencia entre el valor meta y el nivel alcanzado (d_i) :

$$\sum_j a_{ij}x_j = M_i + d_i$$



Variables de desvío



- Para formalizar los desvíos aceptados a cada una de las metas se emplean las variables auxiliares d_i
- Estas, por definición pueden obtener valores positivos o negativos.
- Para poder hacer factible el modelo de Programación Lineal cada d_i se sustituirá por la diferencia de dos variables no-negativas : $d_i = d_i^+ - d_i^-$
- Donde: $d_i^+, d_i^- \geq 0$ tal que:

$$d_i^+ = \begin{cases} d_i & \text{si } d_i \geq 0 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

$$d_i^- = \begin{cases} |d_i| & \text{si } d_i \leq 0 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$



La función objetivo

- Se consideran los diferentes objetivos de manera simultánea (Objetivos sin prioridades) o si por el contrario se adopta un procedimiento secuencial (Objetivos con prioridades).
- En el primer caso se tratará de Minimizar una función ponderada de las variables de desvío.
- En el segundo caso se identificarán “m” modelos de PL a ser optimizados de manera secuencial y de acuerdo a los “m” niveles de jerarquía asignados a los objetivos. La secuencia se resuelve por nivel de jerarquía, desde el nivel de mayor prioridad al de menor.



Programación por Objetivos no secuencial



- Cada meta representa una Ecuación Objetivo y en la Función Objetivo se incluirán las variables de desvío relevantes correspondientes a cada Objetivo.
- Metas prioritarias. En este caso los desvíos en la Función Objetivo serán ponderadas por los coeficientes de penalización.
- Metas no prioritarias. En este caso todas las metas tienen una importancia comparable, tienen mismo nivel de prioridad y los coeficientes de penalización en la Función Objetivo son iguales a 1.



Programación por Objetivos secuencial



- Existe una jerarquía de niveles de prioridad para las metas.
- Las metas de más importancia reciben atención con primera prioridad y las de importancia secundaria reciben atención de segunda prioridad, y así sucesivamente.
- Los objetivos de diferente nivel de prioridad no son comparados de manera simultáneamente.



Metas de primera prioridad

- Representan metas jerarquizadas.
- El decisor no está dispuesto a sacrificar ningún resultado de las meta de este nivel de prioridad.
- Procedimiento Secuencial:
 - El programa de objetivos con prioridades jerarquizadas se resuelve mediante una secuencia de modelos de Programación Lineal.
 - En este procedimiento, al pasar de un nivel de prioridad superior al nivel inferior, las Restricciones Objetivo del nivel superior inicialmente "blandas" se convierten en una restricción "dura" que no admite desvíos a la meta respectiva.
- Es decir que no puede sacrificarse nada en el logro de una meta de prioridad superior al tratar de alcanzar un objetivo inferior.



Etapas del Procedimiento para un Problema de 3 Objetivos



- Encontrar el mejor logro del objetivo de 1^o prioridad.
- Encontrar el mejor logro del objetivo de 2^o prioridad sin comprometer el logro alcanzado del Objetivo de 1^o prioridad.
- Encontrar el mejor logro del objetivo de 3^o prioridad sin comprometer el logro alcanzado del Objetivo de prioridad superior (1^o y 2^o).



Ejemplo

Un Inversor está dispuesto a invertir un capital de \$ 80,000 en seleccionar una cartera de inversiones en base a 2 tipos de acciones (US OIL y HUB Properties).

El Inversor ha identificado 2 objetivos para su selección de cartera:

- 1º Objetivo : asumir un riesgo inferior a un Índice de Riesgo de la Cartera de 700 puntos
- 2º Objetivo : obtener un rendimiento anual mínimo de \$9,000

La tabla siguiente resume los datos de precio y de rendimiento anual en pesos por acción y además se detalla el índice de riesgo que posee cada tipo de acción.

Acciones	Precio \$/Accion	Rend. Anual \$/Acción	Indice de Riesgo p/Accion
US Oil	\$25	\$3	0.5
HUB Properties	\$50	\$5	0.25



Formulación

Variables de Decisión:

- x_1 : total de Acciones US Oil compradas
- x_2 : total de Acciones de HUB Properties compradas

$$\min (\text{o max}) Z = 0 x_1 + 0 x_2$$

s.r

$$0.50 x_1 + 0.25 x_2 \leq 700$$

Riesgo

$$3 x_1 + 5 x_2 \geq 9000$$

Rendimiento

} Objetivos
simultáneos

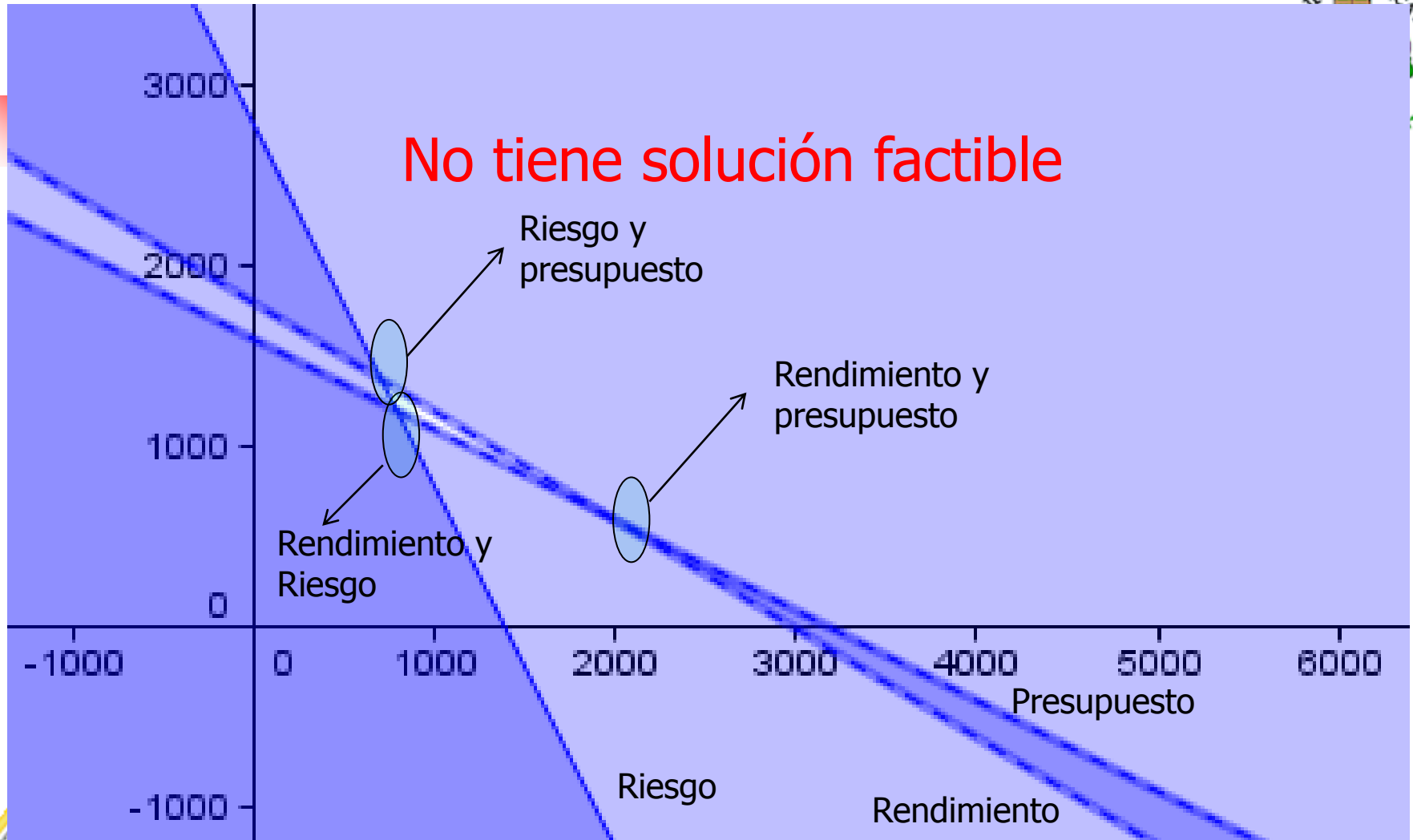
$$25 x_1 + 50 x_2 \leq 80,000$$

Presupuesto

$$x_1, x_2 \geq 0$$



No tiene solución factible



Formulación con metas

d_1	Desvío que excede la meta
d_2	Desvío que se necesita para alcanzar la meta

$$\text{Min } Z = d_1^+ + d_2^- \left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar la cantidad excedente y la} \\ \text{cantidad faltante para alcanzar ambos} \\ \text{objetivos} \end{array} \right.$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{l} 0.5X_1 + 0.25X_2 = 700 + d_1 \text{ Riesgo} \\ 3.0X_1 + 5.0 X_2 = 9,000 + d_2 \text{ Rendimiento} \\ 25.0X_1 + 50.0 X_2 \leq 80,000 \text{ Presupuesto} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Valor meta mas la diferencia} \\ \text{y el valor alcanzado} \end{array} \right.$$

$$X_1, X_2, d_1, d_2 \geq 0$$



Reescribiendo

d_1	Desvío que excede la meta
d_2	Desvío que se necesita para alcanzar la meta

$$\text{Min } Z = d_1^+ + d_2^-$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 0.5X_1 + 0.25X_2 + d_1^- - d_1^+ &= 700 \\ 3.0X_1 + 5.0 X_2 + d_2^- - d_2^+ &= 9,000 \\ 25.0X_1 + 50.0 X_2 &\leq 80,000 \end{aligned}$$

$$X_1, X_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \geq 0$$

Recordando siempre que

$$d_i^+ = \begin{cases} d_i & \text{si } d_i \geq 0 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

$$d_i^- = \begin{cases} |d_i| & \text{si } d_i \leq 0 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$



Solución en MPL



SOLUTION RESULT

Optimal solution found

```

MINIMIZE METAS=P1+M2;
SUBJECT TO
  0.5X1+0.25X2+M1-P1=700;
  3X1+5X2+M2-P2=9000;
  25X1+50X2<=80000;
END
  
```

MIN METAS = 450.0000

DECISION VARIABLES

PLAIN VARIABLES

Variable Name	Activity	Reduced Cost
P1	450.0000	0.0000
X1	2000.0000	0.0000
X2	600.0000	0.0000

CONSTRAINTS

PLAIN CONSTRAINTS

Constraint Name	Slack	Shadow Price

END





¿Cuál es la respuesta?



Comprar 2,000 acciones de US Oil
Comprar 600 acciones de HUB Properties
No se cumple el objetivo o restricción del nivel de riesgo:

Diferencia de $d_1^+ = 450$

$$0.5X1 + 0.25X2 - 450 = 700$$

ó 1,115 como índice de riesgo de la inversión.

