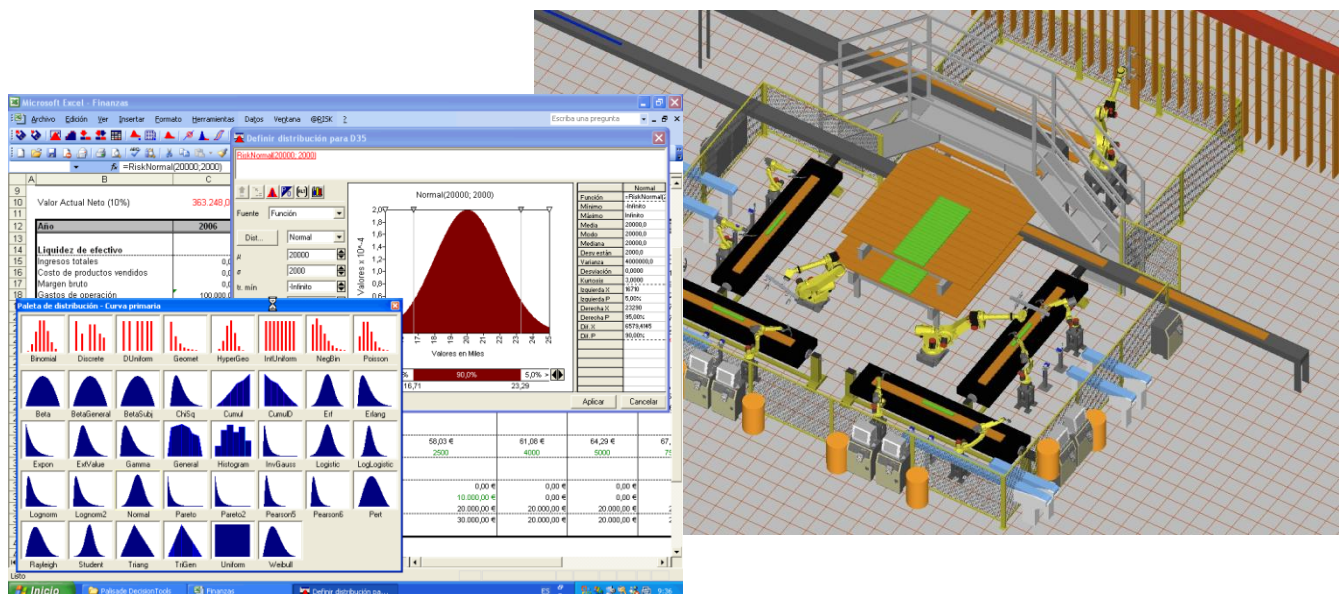


Universidad Tecnológica de Panamá

Facultad de Ingeniería Industrial

Departamento de Producción



Introducción a la Simulación

Documento para acompañar a los cursos de Diseño de Sistemas Estocásticos, Investigación de Operaciones 2 y Simulación aplicada a la Logística

Humberto R. Álvarez A., Ph. D.
Profesor de Ingeniería Industrial

Panamá, abril de 2011



Contenido

Introducción	3
1. Modelos en la toma de decisiones.	4
1.1 El uso de modelos en la toma de decisiones	7
1.2 El modelado	9
1.3 Los sistemas y la simulación	11
1.4 Principios de simulación	12
1.5 Ventajas y desventajas de la simulación	
2. Distribuciones de Probabilidad	14
2.1 Generalidades	15
2.2 Conceptos de probabilidad	16
2.3 Distribuciones de probabilidad	16
2.3.1 Distribuciones de probabilidad discretas	18
2.3.2 Distribuciones de probabilidad continuas	20
2.4 Números aleatorios	22
2.5 Ejemplos	
3. Simulación Probabilística: La Simulación Montecarlo	
3.1 Generalidades	24
3.2 El proceso de Simulación Montecarlo	24
3.3 Un ejemplo	25
4. Procesos de Poisson y Fenómenos de Espera	
4.1 Principios y conceptos básicos	31
4.2 Comportamiento de las colas	32
4.3 Teorías de colas	34
4.4 Ejemplos	38
5. Simulación de Eventos Discretos	
5.1 Principios y conceptos básicos	43
5.2 El Modelo de simulación	44
5.3 Sistemas de simulación	46
5.4 Determinando la función de probabilidades	48
5.5 Puntos a tener en cuenta en el desarrollo de un proyecto de simulación de eventos discretos	49
5.6 Verificación y validación de la simulación	50
5.7 Métodos de validación	53
5.8 Calibración del modelo	56
5.9 Ejemplos	57
Referencias	61



Introducción

El entorno actual se caracteriza por la volatilidad de los diferentes fenómenos que rigen los sistemas humanos. Un proceso aleatorio o proceso estocástico es un concepto matemático que sirve para caracterizar y estudiar todo tipo fenómenos aleatorios (estocásticos) que evolucionan, generalmente, con el tiempo. En este curso se enfatizan en las ventajas e inconvenientes del uso de la simulación a fin de describir fenómenos y sistemas sujetos a la variabilidad debido a cambios en el tiempo.

Este documento proporciona los elementos técnicos suficientes para estudiar las estructuras de sistemas susceptibles de ser modelados a través de herramientas de simulación, tendiente a obtener soluciones que representen las respuestas en el tiempo de un sistema real.

Aunque el documento no hace énfasis en ninguna herramienta en particular, presenta algunos ejemplos y su solución a través de herramientas tales como Windows Excel, WinQSB 2000, SimuAr y Risk Simulation entre otros.

Espero que este documento sirva de apoyo tanto a docentes como estudiantes de los diferentes cursos dictados en la Facultad de Ingeniería Industrial, así como de motivador a que esta herramienta, la Simulación, se de uso amplio entre todos los que estudian en la Facultad de Ingeniería Industrial.



Capítulo 1 Modelos en la Toma de Decisiones

1.1 El uso de modelos en la toma de decisiones

Los responsables de la toma de decisiones necesitan información cuantificable, sobre diferentes hechos que puedan ocurrir. Muchos de los problemas y errores frecuentemente encontrados en el arranque del nuevo sistema pueden ser evitados usando la simulación. La simulación permite visualizar la operación del sistema de manera a demostrar claramente la habilidad o inhabilidad del sistema para cumplir con el desempeño objetivo. La simulación ha ido tornándose en un procedimiento estándar para muchas organizaciones cuando nuevas instalaciones están siendo planeadas o un cambio de producción está siendo investigado ya que constituye una técnica económica que permite ofrecer varios escenarios posibles de un modelo del negocio, permite equivocarse sin provocar efectos sobre el mundo real.

El proceso racional de toma de decisiones exige que se conozcan ciertas alternativas de solución así como las consecuencias que cada alternativa presenta. Dichas alternativas se ordenan de acuerdo a prioridades predefinidas. Finalmente se utiliza un método que permita aplicar algún criterio o regla de decisión para escoger la alternativa dada.

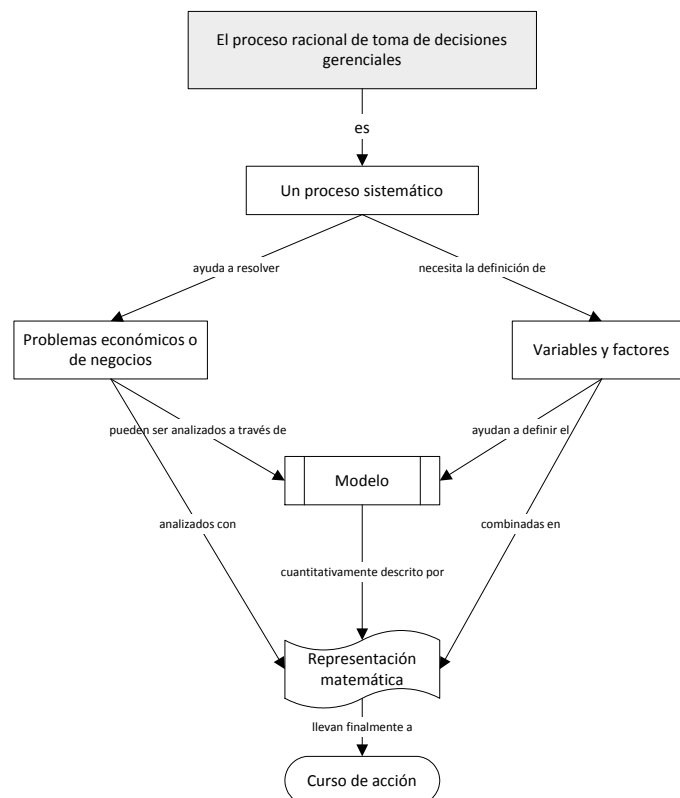


Fig. 1 El proceso racional de toma de decisiones

Adaptado de Shapiro 2001

El proceso racional de toma de decisiones, tal y como se muestra en la figura 1, utiliza modelos y reglas matemáticas que permitan un proceso sistemático y ordenados de toma de decisiones. La idea de utilizar modelos como apoyo al proceso de toma de decisiones no es nueva (Rugsdale, 1998). El uso de mapas, diagramas de flujo, gráficas y ecuaciones básicas



para apoyar el proceso de toma de decisiones no es raro, aunque su uso se ha hecho mucho más atractivo gracias a la accesibilidad de mayor poder de cómputo.

Pegden, et al. (1995) definen un modelo como una representación de un grupo de objetos o ideas de alguna manera diferente a la entidad misma. En otras palabras un modelo es una abstracción de la realidad. La figura 2 presenta una clasificación taxonómica de los modelos, la cual no es única ni exclusiva ya que diferentes modelos pueden caer en diferentes clasificaciones a la vez.

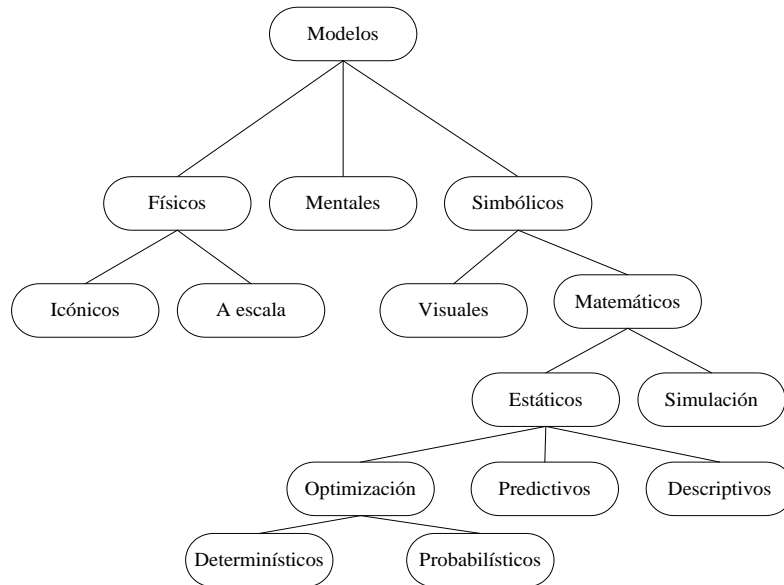


Fig. 2 Taxonomía de los modelos

Los modelos matemáticos son de gran utilidad ya que son una herramienta de gran importancia durante el proceso racional de toma de decisiones. Al ser una abstracción de la realidad es posible desarrollar modelos o representaciones de sistemas utilizando solamente las variables básicas que describen dicho sistema. Estas variables se conocen como **variables de estado** o variables **independientes** y pueden ser **endógenas** o **exógenas** de acuerdo a su función en el sistema. Adicionalmente, los modelos presentan su respuesta al efecto de las variables independientes a través de **variables dependientes** que en general son las **variables de decisión** del sistema.

De acuerdo a su objetivo, los modelos de matemáticos pueden ser **prescriptivos** o **de optimización** y los modelos **predictivos**. Los modelos predictivos tienen como objetivo predecir o estimar el valor de una variable. Los modelos de optimización, por otro lado, son aquellos que proporcionan una indicación de la acción a seguir. Los modelos de optimización están compuestos por algún tipo de **función objetivo** la cual define de alguna manera el efecto de las variables de decisión sobre el objetivo a optimizar. Adicionalmente, los modelos cuentan con una serie de **restricciones** las cuales restringen las respuestas del modelo en función a las variables de estado.

En el caso de los modelos predictivos, estos tratan de describir la mejor relación causal entre variables tratando de predecir posibles efectos en las variables dependientes como resultado de un cambio en las variables dependientes. La figura 3 presenta un resumen de estas categorías.

Categoría	Características		
	Forma de $f(\cdot)$	Variable independiente	Técnica cuantitativa
Prescriptivo u optimización	Conocida, bien definida	Conocida o bajo el control de tomador de decisiones	Programación lineal, entera o no lineal; Redes; CPM; EOQ
Predictivo	Desconocida, mal definida	Conocida o bajo el control de tomador de decisiones	Regresión, Series de Tiempo, Análisis de Discriminante
Descriptivo	Conocida, bien definida	Desconocida o bajo incertidumbre	Simulación, Colas, PERT, Modelos de Inventarios

Fig. 3 Categorías de los modelos matemáticos (Pike, 1983)

Un modelo válido es aquel que representa de manera aproximada pero representativa las características más importantes del sistema o problema a analizar. El problema que aquí aparece es el equilibrio entre representatividad del sistema y costo del modelo. Tal y como lo muestra la figura 4, a medida que aumenta el número de variables a utilizar en el modelo, es costo de analizar y resolver el mismo aumenta. Por otro lado, su valor como herramienta tiende a mantenerse o decrecer debido a que, similar a la teoría de los rendimientos decrecientes estudiada en economía, el añadir más variables al modelo no aumenta de manera proporcionalidad su efectividad. Esta característica de los modelos se conoce como la **tratabilidad** de los mismos.

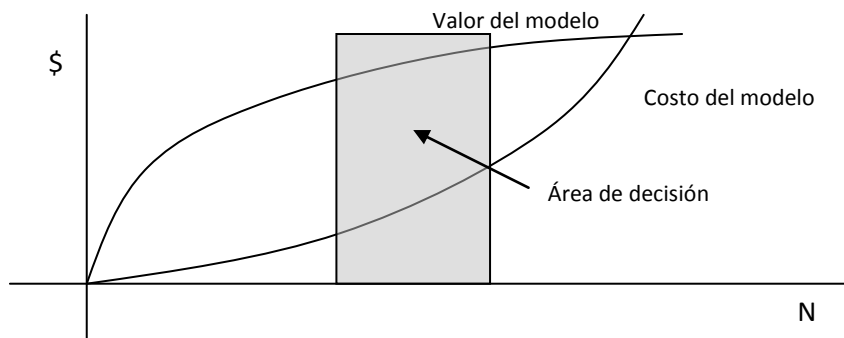


Fig. 4 Valor vs. Costo del modelo

Otro aspecto importante es la **trazabilidad** del modelo. El analista debe ser capaz de observar las respuestas del modelo en todo momento, ya sea durante la solución matemática del mismo o durante el modelado a través del tiempo.

Adicionalmente los modelos deberán ser **factibles**, en otras palabras, deberán tener solución. Así, las soluciones que estos provean deberán ser aplicables, dentro de las limitaciones de lo ideal del modelo, a la vida real. Una característica importante dentro de la factibilidad del modelo es la **convergencia** del mismo. Si el proceso de solución del modelo requiere de procesos iterativos, las variables de decisión bajo análisis deben convergir hacia valores factibles a través del proceso de solución. La figura 5 muestra tanto el elemento de trazabilidad como la convergencia de un modelo.

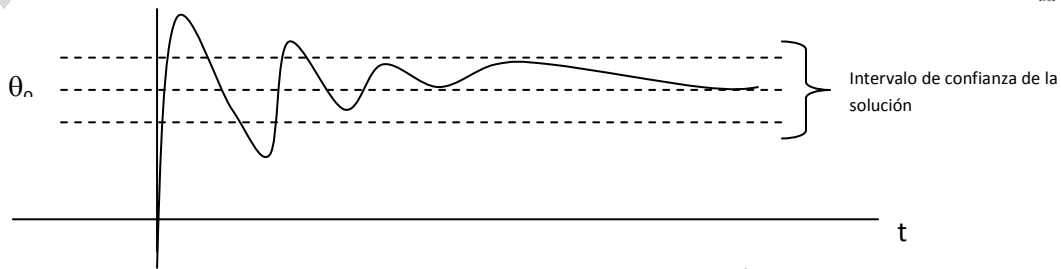


Fig.5 Trazabilidad y Convergencia de la solución

1.2 El Modelado

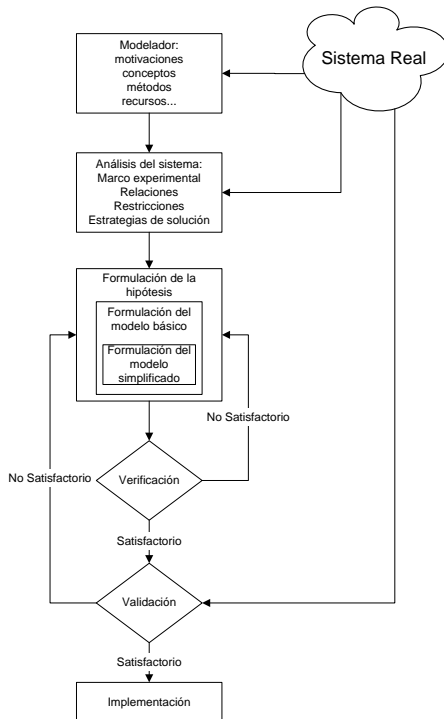


Fig. 6 El proceso de modelado
Adaptado de Sterman 2001

El Modelado es el proceso por el cual se establecen relaciones entre las entidades importantes de un sistema que se expresa en términos de metas, criterios de ejecución y restricciones que en conjunto constituyen el modelo. El proceso se puede apreciar gráficamente en la figura 6.

El proceso inicia con la concepción del modelador del sistema real, la percepción y definición de las características y variables del sistema y los elementos que definen su estado. Una vez hecho esto, se plantean las diferentes hipótesis que puedan explicar el funcionamiento del sistema, sus resultados y problemas que puedan resultar de las relaciones entre las variables.

Una vez desarrollado el modelo será necesaria su verificación y validación, para entonces pasar a su implementación.

El modelo busca ser una representación válida de la realidad combinando realismo y simplicidad. Así, el proceso de validación procura ver los resultados del modelo bajo condiciones de control compararlos con

los resultados controlados en el sistema real. Esto se hace a través de:

- Reexaminar la formulación del modelo
- Verificar las expresiones y dimensionalidad
- Variar parámetros de entrada
- Utilización de datos históricos

El diseño y control de modelos de modelos obliga a tener conocimientos de cuatro áreas de conocimiento distintas:

- Modelización: necesarios para diseñar el modelo que permita dar respuestas válidas del sistema real que represente. El diseño es una fase muy importante, ya que los errores proporcionarán modelos falsos.
- Programación: ya que el modelo se ha de implementar con un lenguaje de programación.



- Probabilidad y Estadística: la probabilidad es necesaria para definir y estudiar las variables aleatorias de las entradas, y la estadística para permitir el diseño y análisis de los experimentos.
- Métodos Heurísticos: para permitir llegar a una solución buena del problema planteado.

Los modelos deben contener sólo los aspectos esenciales del sistema real que representan. Aquellos aspectos del sistema que no contribuyen significativamente en su comportamiento no se deben incluir, ya que lo que harían sería obscurecer las relaciones entre las entradas y las salidas. ¿En qué punto se debe parar de incluir realismo en el modelo? Esto depende del propósito para el cual el modelo se haya desarrollado. Entre las características que deben presentar los modelos:

- Deben ser fáciles de entender y manejar.
- Deben ser simples y de costo no excesivo.
- Deben ser una buena aproximación del sistema real, que controle el mayor número posible de aspectos del mismo y que éstos contribuyan de forma significativa al sistema (hay relaciones en el sistema que no son significativas y pueden obviarse en el modelo).

Entre las ventajas más importantes del modelado se tienen:

- Permite la organización del conocimiento sobre el sistema
- Permite deducciones lógicas sobre el sistema y su comportamiento
- Proporciona un marco para contrastar el sistema y posibles modificaciones
- Proporciona una idea sobre detalles y aspectos relevantes
- Posibilita mayor y mejor manipulación
- Facilita el análisis
- Descripción concisa del problema
- Permite un mejor control de las fuentes de variación
- Menos costos de experimentar

Entre las desventajas principales están:

- El desarrollo de un modelo, gasta y quita tiempo y es costoso
- El modelo no representa con exactitud la situación real
- Relaciones no adecuadas generan errores por resultado imprecisos

Aunque no hay acuerdo entre las diferentes metodologías utilizadas para la modelación, si existe, entre los diferentes autores el consenso de que la metodología variará en función a las características del sistema a modelar. Algunas de estas metodologías son:

- Metodologías duras o fundamentalistas que suponen que el mundo es un sistema racional. El modelado se basa en ecuaciones y algoritmos bien definidos.
- Metodologías interpretativas o suaves asumen que el mundo no es necesariamente un sistema racional. El modelado y análisis es creativo y basado en metodologías heurísticas y simulación.



- Metodologías radicales suponen que el mundo real puede llegar a ser un sistema de una manera en común a los individuos o grupos de individuos dentro del sistema. Los modelos y el análisis se orientan para mostrar las ventajas y desventajas de la situación bajo análisis.

1.3 Los sistemas y la simulación

De manera muy general, la simulación se refiere a un gran conjunto de métodos y aplicaciones que buscan imitar el comportamiento de sistemas reales (Kelton, y otros, 2008). Se entiende por sistema una **colección de entidades relacionadas**, cada una de las cuales se caracteriza por **atributos** o características que pueden estar **relacionadas** entre ellas y con un objetivo común. De manera formal, Turban define sistema como “una colección de elementos tales como gente, recursos, conceptos y procedimientos agrupados con la intención de desarrollar una función o meta común (Turban, y otros, 1999, p. 40)”.

Ya en su obra Fishman (1978) afirmó que todo sistema consta de tres componentes, los cuales tienen a su vez características que los definen. Estos componentes son el **ambiente**, las **fronteras** o **límites** del sistema y sus **subsistemas** que llevan a cabo las funciones del sistema. Los subsistemas pueden ser entidades en sí mismas o contener entidades que desarrollan las actividades relacionadas con dichos subsistemas. La figura 7 muestra gráficamente los elementos de un sistema.

Las relaciones entre los diferentes elementos del sistema se definen, desde un punto de vista matemático, como las relaciones de clases que explican el comportamiento de dichas entidades y sus correspondientes atributos. Estas relaciones de clases pueden ser **estáticas** o **dinámicas** según el tipo de comportamiento que las definen.

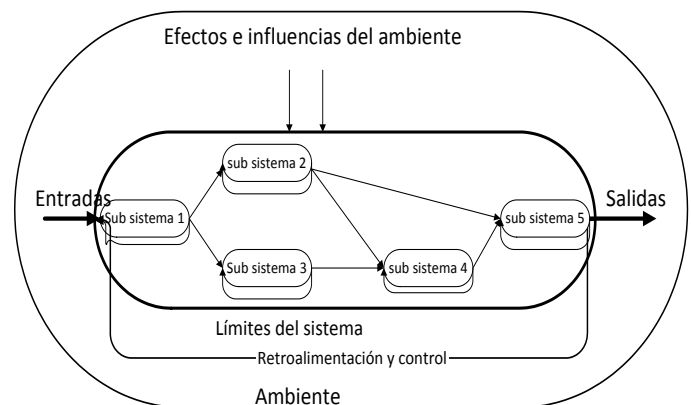


Fig. 7 Representación gráfica de un sistema

Adaptado de Wu (2002) y Turban, et al. (2002)

Los sistemas pueden clasificarse de diferentes maneras: según su origen pueden ser **naturales** y **artificiales**. Por otro lado, según su relación con el ambiente pueden ser **abiertos** o **cerrados**. De acuerdo a su poder de adaptación pueden ser **adaptables** o **fijos**. Finalmente, de acuerdo al tipo de relaciones, se pueden definir como de **complejidad combinatoria** o **dinámica**.

Los **atributos** de una **entidad** definen su **estado** y los estados de las entidades más importantes definen el estado del sistema. Analizar un sistema supone estudiar sus cambios a través del tiempo. Sea $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ el conjunto de los n diferentes estados de un sistema S . Si un sistema puede tomar un conjunto finito de estados, durante un período dado de tiempo, el estado del sistema será uno entre un conjunto finito de posibles secuencias de estados.

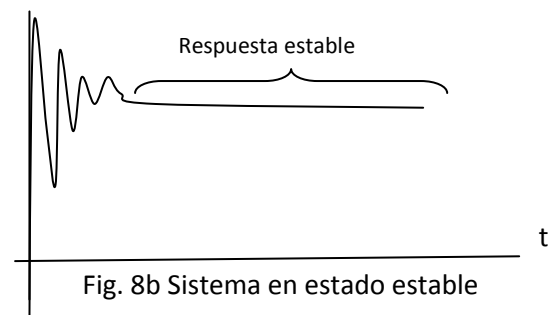
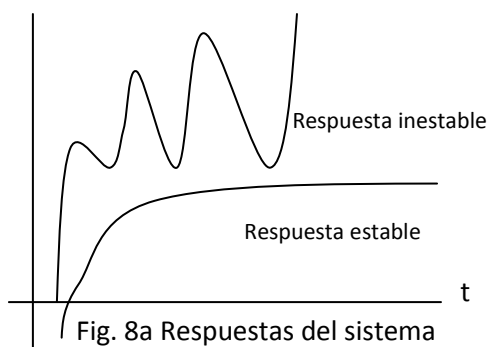


Cuanto mayor sea el intervalo de tiempo, mayor la posible secuencia de posibles estados. Entonces, el estado de un sistema $S \rightarrow S_i \in \{S_1, S_2, \dots, S_n\} \forall t_i$. En todo intervalo de tiempo Δt arbitrariamente pequeño, existe una probabilidad de encontrar un sistema en un estado determinado y también una probabilidad de que dicho estado cambie a uno de los restantes.

Dos elementos describen un cambio de estado en el tiempo: **magnitud y retraso**. La magnitud de un cambio se refiere a la diferencia absoluta en el valor de un atributo durante un período específico comparado con un valor antes del cambio. Sean S_t y S_{t+1} los estados correspondientes a los tiempos t y $t+1$, respectivamente, entonces $|S_{t+1} - S_t|$ será la magnitud del cambio de estado del tiempo t al tiempo $t+1$.

Adicionalmente, en la mayor parte de los sistemas, un estímulo externo produce un cambio en el estado del sistema, el cual puede ocurrir de manera instantánea o después de transcurrido un tiempo después de recibido el impulso o estímulo. El intervalo de tiempo Δt que transcurre hasta que se percibe el cambio del sistema se conoce como retraso. La magnitud y retraso definen la respuesta del sistema.

Una respuesta es **estable** si su comportamiento busca un **equilibrio**, de lo contrario se conoce como una respuesta **inestable**. Un sistema está en estado estable si está en equilibrio (sea este estático o dinámico) en un intervalo de tiempo lo suficientemente largo, esto es si $\Delta t \rightarrow \infty$. La figura 8a muestra ambos comportamientos, mientras la figura 8b muestra como un sistema tiende a buscar su estado estable.



La **complejidad combinatoria** de un sistema se define en relación el número de componentes de un sistema, o en el número de posibles combinaciones que hay que efectuar al momento de tomar una decisión. Es función tanto de las **variables** como de las **funciones** que rigen o modelan el sistema.

Por otro lado, la **complejidad dinámica** es función de las **relaciones e interacciones**, a **través del tiempo**, entre los diferentes componentes del sistema, ya sea entre ellos como con el exterior. La complejidad dinámica no es necesariamente función de la complejidad combinatoria

1.4 Principios de simulación

La simulación consiste en diseñar y desarrollar un modelo computarizado de un sistema o proceso y conducir experimentalmente con este modelo con el propósito de entender el



comportamiento del sistema del mundo real o evaluar varias estrategias con las cuales puedan operar el sistema (Kelton y otros, 2008).

Aunque las primeras aplicaciones de la simulación como herramienta formal se dieron en la Segunda Guerra Mundial, no es hasta los años `50 cuando se da importancia al proceso de dividir en partes un problema para examinar la interacción simultánea de todas ellas (Fishman 1978). Esto se debió en gran parte a la aparición de las primeras computadoras comerciales. La complejidad de los problemas hacía cada vez más difícil el conseguir soluciones analíticas o numéricas y se hacía necesario poder representarlos de modelos simbólicos que pudieran manejarse fácilmente y que produjeran resultados numéricos. Así, se define la simulación como una **rama experimental** dentro de la Investigación de Operaciones.

Es posible decir que la simulación busca, entre otras cosas:

- Descubrir el comportamiento de un sistema
- Postular teorías o hipótesis que expliquen el comportamiento observado
- Utilizar esas teorías para predecir el comportamiento futuro del sistema, es decir mirar los efectos que se producirían en el sistema mediante los cambios dentro de él o en su método de operación
- Disminuir los costos asociados con la experimentación en el sistema real (ej: prueba y error en el sistema real)
- Disminuir el riesgo de error en sistemas reales o en papel.

La simulación es un esfuerzo importante para su organización, por lo cual se recomienda estar seguro de que los beneficios obtenidos serán superiores al costo. Esto es, asegurarse de que el proyecto sea rentable. Por lo general, la simulación es considerada valiosa cuando las siguientes condiciones ocurren:

- El sistema permite ser modelado. Esto quiere decir que el modelo está bien entendido, puede ser definido por un diagrama de flujo y los tiempos y reglas de operación pueden ser descritos. Esto permite a quien modela estudiar las mejoras sin afectar el sistema real.
- Altos o bajos volúmenes con implicaciones de costos o ingresos importantes. Es decir escenarios en los cuales bastante dinero y recursos están en juego. Por ejemplo Terminales de contenedores, picking en bodega y complejos componentes de aviones.
- La complejidad del sistema es difícil o imposible de definir con una hoja de cálculo. La simulación permite ver todas las interacciones del sistema y como estas impactan todos los aspectos del modelo.

En algunos casos es necesario visualizar el proceso. Es por esto, que la animación en 3D le permitirá a usted y sus clientes ver lo que “realmente” va a suceder (por ejemplo en un nuevo centro de distribución).

Las técnicas de simulación pueden resumirse como:

- **Simulación estadística o Monte Carlo:** Está basada en el muestreo sistemático de variables aleatorias.



- **Simulación por eventos discretos:** Se define el modelo cuyo comportamiento varía en instantes del tiempo dados. Los momentos en los que se producen los cambios son los que se identifican como los eventos del sistema o simulación.
- **Simulación continua:** Los estados del sistema cambian continuamente su valor. Estas simulaciones se modelan generalmente con ecuaciones diferenciales.
- **Simulación por agentes:** Se aplica a casos complejos, en los que se divide al comportamiento del sistema en subsistemas más pequeños denominadas células. El resultado de la simulación está dado por la interacción de las diversas células.
- **Dinámica de Sistemas:** Es un enfoque para entender el comportamiento de sistemas complejos a través del tiempo. Lidia con ciclos de realimentación interna, flujos y retrasos en los tiempos que afecta el comportamiento del sistema total. Estos elementos describen, como sistemas aparentemente simples, despliegan una desconcertante no linealidad.

Algunas de las ventajas de emplear simulación incluyen:

- Cuando esté planeando un nuevo sistema desde cero, la simulación le permite evaluar un sistema “hipotético” cuando aún no existe.
- La simulación le provee excelentes formas de comunicar sus ideas mediante:
 - Brindar una representación gráfica del sistema estudiado
 - Incorporando animaciones 3D que le permiten visualizar el proceso. Esto permite un entendimiento mayor de los retos y características de la operación
 - Animación que permite a la directivas entender los cambios propuestos y simplifica la labor de venta de los proyectos internos a las directivas
- Así mismo, la simulación provee una herramienta para educar a los operarios y supervisores en la forma que el sistema operará. Aspectos como la administración, turnos, mantenimiento y estrategias de operación pueden ser exploradas con un mejor entendimiento de las interacciones complejas que existen entre los procesos del sistema. La Simulación provee un método para aprender cómo usar técnicas de resolución de problemas.

1.5 Ventajas y desventajas de la simulación

Es posible ver las ventajas y desventajas de la simulación frente a la solución analítica de los problemas:

Ventajas del modelado analítico:

- Conciso en la descripción del problema.
- Conjunto de soluciones cerrado.
- Permiten evaluar fácilmente el impacto producido por cambios en las entradas sobre las medidas de salida.
- Posibilidad de llegar a una solución óptima.

Desventajas:

- Las suposiciones hechas para describir el sistema puede ser poco realistas.



- Las fórmulas matemáticas pueden ser muy complicadas impidiendo llegar a una solución.

Ventajas de la simulación:

- Pueden describir sistemas que sean muy complejos.
- Pueden ser usados para experimentar con sistemas que todavía no existan, o para experimentar con sistemas existentes sin que éstos se alteren. (Esto también los pueden hacer los métodos analíticos siempre y cuando el sistema no sea muy complejo).

Desventajas:

- No existe un conjunto de soluciones cerrado.
- Cada cambio en las variables de entrada requiere una solución separada o conjunto de ejecuciones.
- Los modelos de simulación complejos pueden requerir mucho tiempo para construirlos y ejecutarlos.
- Puede resultar dificultoso establecer la validez del modelo (es decir, la correspondencia con el sistema real).

Los usos de la simulación son ilimitados. Algunos de los principales ejemplos que han sido modelados incluyen entre otros: manufactura, manejo de material, manejo de maletas en aeropuertos, bodegaje, centros de distribución, procesamiento de alimentos, salud, puertos y procesos de manufactura.



Capítulo 2 Distribuciones de Probabilidad

2.1 Generalidades

Cuando se realiza un análisis determinístico a un sistema, una serie de supuestos y variables producen un resultado de valor único. Por otro lado, un análisis probabilístico le da al analista un rango de valores como resultado. Los resultados probabilísticos son mucho más realistas que estimados de valor único ya que se enfocan tanto en la probabilidad de ocurrencia como en las consecuencias o impactos de los riesgos potenciales.

Debido a que la simulación permite ofrecer varios escenarios posibles del comportamiento de un sistema, además de las consideraciones acerca de la formulación del modelo, simulación exige afrontar ciertos problemas estadísticos entre los cuales figuran:

- Generación de números aleatorios
- Generación de variaciones aleatorias a partir de distribuciones probabilísticas específicas.
- Determinación de estadísticos muestrales como representación de los parámetros del modelo.
- El diseño experimental para llevar a cabo los experimentos de simulación.
- El análisis de los resultados de la simulación.

Algunas definiciones importantes a considerar antes de avanzar en el tema:

- **Experimento:** cualquier actividad que se puede llevar a cabo cuyo resultado exacto es incierto.
- **Población o universo:** consiste en todos los miembros de una clase o categoría de interés. Su tamaño se denota normalmente por N .
- **Muestra:** una proporción o subconjunto de la población. Su tamaño se denota normalmente por n .
- **Tipos de muestra:**
 - **Probabilística:** la probabilidad de elegir a cualquier elemento de la población es conocida.
 - Aleatoria: todos los elementos tienen la misma probabilidad de ser extraídos
 - Todas las muestras tienen el mismo tamaño.
 - Con reemplazo y sin reemplazo
 - Conglomerados
 - Estratificada
 - Sistemática
 - **No probabilística:** en el caso de que no se pueda hacer un muestreo probabilístico
 - Por conveniencia
 - Por juicio
 - Por cuota
- **Muestreo:** proceso de extraer una muestra de una población.
- **Censo:** enumeración y evaluación de todos los miembros de la población.
- **Parámetro:** son las medidas que describen la población.
- **Estadístico:** son las medidas que describen la muestra.



- **Confiabilidad:** es la medida de consistencia de los resultados de una prueba estadística.
- **Validez:** es la medida de consistencia de los datos a utilizar en una prueba estadística.

2.2 Conceptos de probabilidad

Se puede definir probabilidad como la relación existente entre los resultados esperados de un experimento en relación a todos los posibles resultados existentes del mismo. Es la medida matemática de la incertidumbre.

Si un experimento puede tener como resultado cualquiera de N diferentes resultados, igualmente probables, y si exactamente n de estos resultados corresponden al evento A , entonces la probabilidad de que el evento A ocurra está dada por:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Otra manera de ver la probabilidad es a través del enfoque empírico o posterior. Dada una distribución de frecuencias relativas obtenida de observaciones empíricas de diferentes eventos. La probabilidad de ocurrencia de un evento, bajo condiciones iguales a las observadas empíricamente, será igual a la frecuencia relativa de ocurrencia de dicho evento.

Algunas propiedades de las probabilidades se muestran a continuación:

Dado un evento A ,

$$\begin{aligned}0 &\leq P(A) \leq 1 \\ P(\emptyset) &= 0 \\ P(S) &= 1\end{aligned}$$

Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces $P(A \cup B)$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces $P(A \cup B)$,

$$P(A \cap B) = \emptyset \text{ y } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Si dos eventos A y B son independientes, entonces $P(A \cup B)$,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Para tres eventos A , B y C , entonces $P(A \cup B \cup C)$,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

Para dos eventos complementarios A y A'

$$P(A) + P(A') = 1$$



Es la probabilidad de que un evento B ocurra cuando se sabe que ya ocurrió algún evento A y se denota como $P(A|B)$

Si $P(A) > 0$, entonces $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

De otra manera, si un experimento pueden ocurrir los eventos A y B, entonces:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

La Teoría de Probabilidad trata fenómenos que pueden ser modelados por experimentos cuyos resultados están gobernados por el azar (se denominan *experimentos aleatorios*). Estos experimentos aleatorios están caracterizados por:

- Los experimentos son repetibles bajo idénticas condiciones
- El resultado de un experimento es impredecible
- Si el experimento se realiza un gran número de veces, el resultado exhibe un cierta regularidad estadística (se observa un comportamiento promedio).

Una variable aleatoria es una función que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral de un experimento. Una **variable aleatoria discreta** es aquella en la que se puede contar su conjunto de resultados posible o si están relacionadas con el conjunto de números enteros. Por otro lado, una **variable aleatoria continua** existe cuando esta puede tomar valores en la escala continua o está relacionada con un conjunto continuo de valores.

2.3 Distribuciones de probabilidad

Una variable aleatoria toma cada uno de sus valores con cierta probabilidad. La función de probabilidad es la representación de todas las probabilidades de una variable aleatoria X mediante una expresión matemática tal que $P(X = x) = f(x)$.

2.3.1 Distribuciones de probabilidad discreta

El conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ es una función de probabilidad discreta o distribución de probabilidad discreta de la variable discreta X, si para cada resultado x

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$

La distribución acumulada $F(x)$ de una variable aleatoria discreta X con distribución de probabilidad $f(x)$ está dada por la expresión:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \quad \text{para } -\infty \leq x \leq \infty$$

La media de una variable aleatoria es el valor más esperado de dicha variable. Para una variable aleatoria discreta se puede definir como:

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x), \text{ donde}$$



- x es el valor puntual o marca de clase de la variable aleatoria y
- $f(x)$ es la frecuencia relativa o probabilidad de ocurrencia de dicho valor puntual.

Sea X una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad $f(x)$ y media μ , la varianza de X estará dada por:

$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 f(x)$, donde la desviación estándar σ será la raíz de la varianza.

Distribución Uniforme

Si la variable aleatoria discreta X toma valores discretos x^1, x_2, \dots, x_k con igual probabilidad de ser obtenidos en un experimento dado, entonces estos valores están distribuidos en función a la Distribución Uniforme Discreta:

$$P(X = x) = f(x; k) = \frac{1}{k}$$

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2}{k}$$

Distribución de Bernoulli

Se un proceso de Bernoulli aquel experimento que tiene las siguientes características:

- El experimento consiste en n pruebas iguales que se repiten.
- Cada prueba produce un resultado que se puede clasificar como éxito o fracaso.
- La probabilidad de un éxito, p , permanece constante en cada prueba, siendo la probabilidad de fracaso $1-p$.
- Cada prueba es independiente.

Entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X , el número de éxitos en n pruebas independientes está dada por:

$$P(X = x) = f(x; n, x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

donde

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = npq$$

$$P(x \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

**Distribución de Poisson:**

Un proceso de Poisson se puede definir como un experimento aleatorio con las siguientes características:

- Los resultados ocurren durante un intervalo dado o en una región específica.
- Los resultados que ocurren en un intervalo son independientes de los resultados en otro intervalo o región.
- La probabilidad de que ocurra un solo resultado durante un intervalo muy corto es proporcional a la longitud del intervalo y no depende del número de resultados en otros intervalos
- La probabilidad de que se den resultados simultáneos en un intervalo es despreciable.

Sea X una variable aleatoria asociada con los eventos que ocurren en un proceso de Poisson. La función de probabilidad de esta variable aleatoria está dada por la expresión:

$$P(X = x) = \frac{e^{-1/\lambda} (1/\lambda)^x}{x!}, \text{ para } x = 1, 2, 3, \dots$$

$$P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \frac{e^{-1/\lambda} (1/\lambda)^k}{k!}$$

$$\mu = \sigma^2 = 1/\lambda$$

Donde $1/\lambda$ es el número promedio de eventos por unidad de tiempo o espacio

2.3.2 Distribuciones de probabilidad continuas

El conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ es una función de probabilidad continua o función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua X , definida en el conjunto de números reales \mathfrak{R} , si:

1. $f(x) \geq 0$, para toda $x \in \mathfrak{R}$
2. $\int_{\mathfrak{R}} f(x) = 1$
3. $P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$

La distribución acumulada $F(x)$ de una variable aleatoria continua X con distribución de probabilidad $f(x)$ es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \text{ para } -\infty \leq x \leq \infty$$

La media de una variable aleatoria continua es el valor más esperado de dicha variable y está dado por la expresión:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad $f(x)$ y media μ , la varianza de X será:

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

Donde la desviación estándar σ será la raíz de la varianza



Distribución Uniforme

Una variable aleatoria continua X tendrá una distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$ de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$
$$P(X \leq x) = \int_0^x \frac{dy}{b-a}$$
$$\mu = \frac{a+b}{2}, \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribución Exponencial

La variable aleatoria continua X tiene una distribución exponencial con parámetro λ si su función de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$
$$P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy$$
$$P(0 \leq X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$
$$\mu = \frac{1}{\lambda}, \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

Donde $1/\lambda$ es el número promedio de eventos por unidad de tiempo o espacio

Distribución Normal

Es la distribución más importante en el campo de la estadística. La curva normal describe aproximadamente muchos fenómenos que ocurren en la naturaleza. Desarrollada en 1733 por Abraham DeMoivre, fue Karl Fiedrich Gauss quien demostró su aplicabilidad.

La función de probabilidad de la variable aleatoria normal X , con media μ y varianza σ^2 está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{x-\mu}{\sigma} \right]^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

La Distribución Normal tiene ciertas características importantes:

- La variable aleatoria normal X se expresa como $N(\mu, \sigma^2)$
- La moda está localizada en el punto donde $x = \mu$
- La curva es simétrica en el eje de la media μ
- Sus puntos de inflexión están en $x = \mu \pm \sigma$
- Se aproxima al eje horizontal de manera asintótica en ambos lados
- Su área total es igual a 1

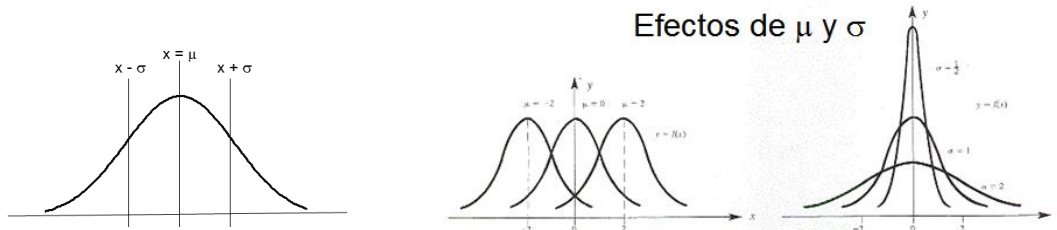


Fig. 1 Características de la curva normal

La probabilidad de que una variable aleatoria X normalmente distribuida tenga un valor dado x, estará dada por:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} dx$$

Esta función es matemáticamente difícil de determinar, por lo que se define una variable normalizada Z tal que:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Esto permite determinar el área normalizada bajo la curva tal que $P(X=x) = f(Z)$, tal y como se muestra en la figura 2.

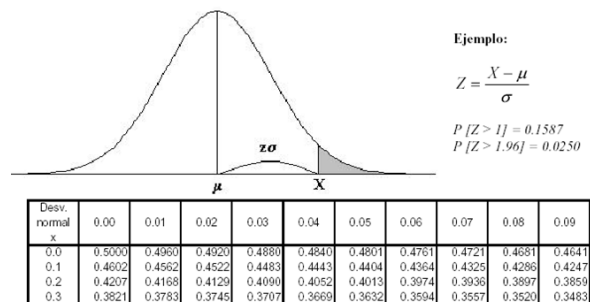


Fig. 2 Área bajo la curva normal

2.4 Números Aleatorios

Los modelos de simulación basados en el comportamiento aleatorio de los sistemas requieren de un mecanismo para generar secuencias de eventos en donde cada una de dichas secuencias obedezca una función de probabilidad que regula determinado elemento del comportamiento aleatorio a modelar.

Los números aleatorios son aquellos que pueden ser generados a partir de fuentes de aleatoriedad, las cuales, generalmente son de naturaleza física (dados, ruletas, etc.) y son gobernados por las leyes del azar, exhibiendo verdadera aleatoriedad en la realización de experimentos. Por otro lado, los números pseudo aleatorios son aquellos que tienen un comportamiento similar a la naturaleza aleatoria, pero están ceñidos a un patrón, generalmente de naturaleza matemática, que hace que su comportamiento sea determinístico.

Las secuencias de números aleatorios generados ya sea a través de secuencias físicas o métodos matemáticos, basados en relaciones recursivas, deben poseer algunas propiedades:



- Las secuencias deben ser no correlacionadas. Esto significa que en una sucesión de números aleatorios, una subsecuencia no puede estar relacionada con ninguna otra.
- Independencia estadística y aleatoriedad. Esto implica que la probabilidad de que un número específico aparezca en la sucesión debe ser la misma para cada uno de los elementos del conjunto de los números aleatorios. Esto es precisamente una característica de la función de probabilidad uniforme. Igualmente, la aparición de un número dentro de la sucesión no implica la aparición de otro.
- Deben tener período máximo. En otras palabras, los generadores pseudo aleatorios son cíclicos, por lo cual es deseable que cada uno de los elementos aparezca una vez en la secuencia antes que la misma se repita. El período y las propiedades de la secuencia no deben depender del valor inicial.

Antes de que las computadoras facilitaran la generación de números pseudo aleatorios, estos se generaban por medios físicos. Así, por ejemplo, la Rand Corporation publicó un millón de números aleatorios generados a través de pulsos de frecuencia aleatoria. Estos números han sido utilizados desde entonces como base para experimentos de simulación en general.

En la actualidad existe una gran cantidad de métodos, ya probados y ampliamente utilizados para generar números pseudo aleatorios. En general los diferentes software y aplicaciones estadísticas tienen sus propios generadores por lo que no se entrará en mayores detalles en este documento. Para mayor información se pueden leer obras y documentos como Fishman (1978) y Mancilla (2000) entre muchos otros.

La generación de eventos simulados debe tener la capacidad para producir variaciones aleatorias a partir de una variedad de distribuciones continuas y discretas. En este sentido Fishman (1978) demostró el hecho de que en la teoría de probabilidad, las variaciones pueden generarse para una gran variedad de distribuciones teóricas y empíricas, a condición de que pueda generarse una secuencia de variaciones aleatorias independientes, cada una de ellas con una distribución uniforme continua en el intervalo (0, 1). A continuación se presentan algunas funciones generadoras a partir de funciones discretas y continuas, donde R_i es un número aleatorio uniformemente distribuido entre (0, 1):

Distribución uniforme: sean a y b los límites de un conjunto de números distribuidos uniformemente. Es posible generar un valor $a \leq U_i \leq b$ en base a la siguiente función aleatoria:

$$U_{i(a,b)} = a + (b - a)R_i$$

Distribución exponencial: sea $1/\lambda$ es el número promedio de eventos por unidad de tiempo o espacio, se puede generar una variable aleatoria Y_i tal que:

$$Y_i = -1/\lambda \ln(R_i)$$

Distribución normal: Sea una variable aleatoria X_i normalmente distribuida con media μ , y desviación estándar σ , la misma puede generarse tal que:

$$X_i = \mu + (6R_i - 3)\sigma$$



2.5 Ejemplos

Ejemplo 1

Se quiere mostrar el efecto aleatorio sobre el crecimiento de una función, comparado al comportamiento determinístico de la función promedio.

Para tal efecto se tiene una función cuadrática con variación aleatoria uniforme de la forma:

$$f(t) = -U(1, 4)t^2 + U(100, 400)t + 110 \quad (1)$$

Además se tiene una función cuadrática determinística de la forma:

$Y(t) = -1.7558t^2 + 223.4t + 110.99$, que es la línea de tendencia de uno de los conjuntos de datos aleatorios obtenidos en (1)

Graficando para $t = (0, 50)$, se tienen los comportamientos mostrados en la figura 3, donde el gráfico correspondiente a $f(t)$ muestra el comportamiento aleatorio de los datos. En este caso, dicho comportamiento cambiará cada vez que se generen números aleatorios.

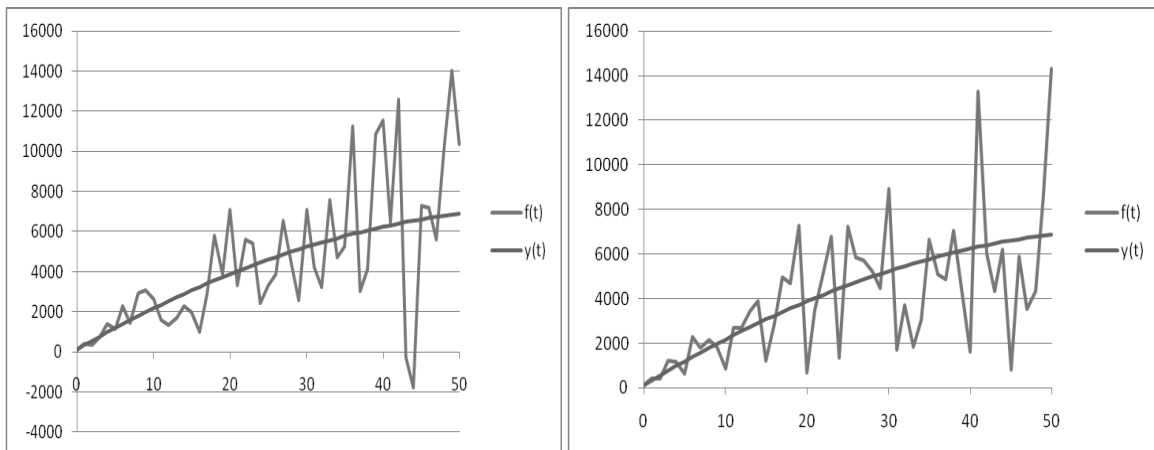


Fig. 3 Comportamiento aleatorio y determinístico de las funciones del ejemplo 1

Ejemplo 2

Se muestran crecimientos aleatorios de funciones de diferentes tipo: exponencial de la forma $Q_0 e^{U(a,b)t}$, simple de la forma $A_{t-1} + A_0 U(a,b)$, compuesta de la forma $A_{t-1}(1+U(a, b))^t$ y crecimiento ajustado exponencial con una meta fija.

Los gráficos mostrados en la figura 4, muestran los comportamientos aleatorios de las diferentes funciones a través del tiempo.

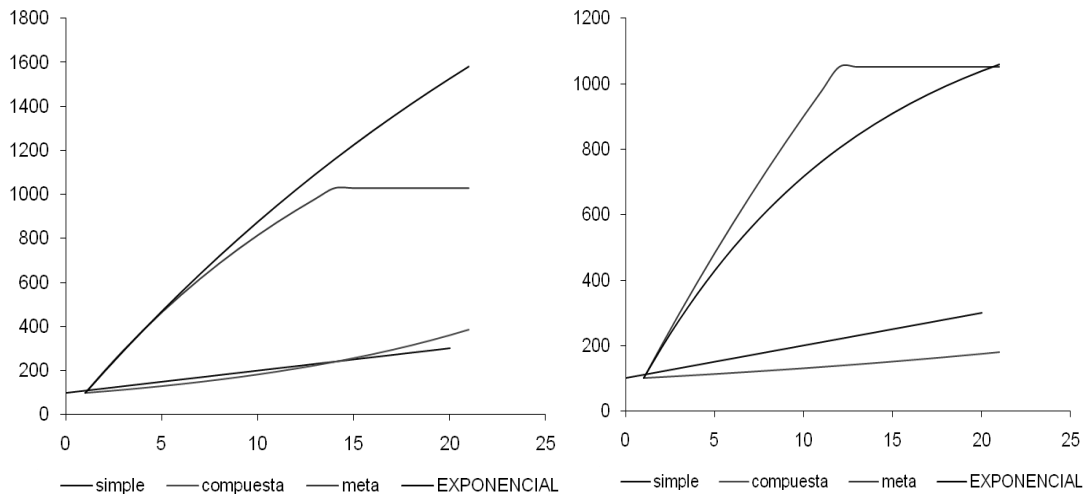


Fig. 4 Crecimientos aleatorios

Ejemplo 3:

Se desea conocer el comportamiento de una distribución normal aleatoria $\sim N(\mu = U(100, 200), \sigma = u(5, 50))$, utilizando la función Distribución Normal en Excel. La función se muestra en la figura, de A es la celda de valores de x y FALSO indica probabilidades no acumuladas.

	A	B	C	D	E	D	E	F
x		p(x)		μ	14	μ	=ALEATORIO.ENTRE(100,200)	
		0	=DISTR.NORM(A2,\$E\$1,\$E\$2,FALSO)		22		D	E
	10	2.76176E-10				μ	130	
	20	3.80856E-09				σ	=ALEATORIO.ENTRE(5,50)	

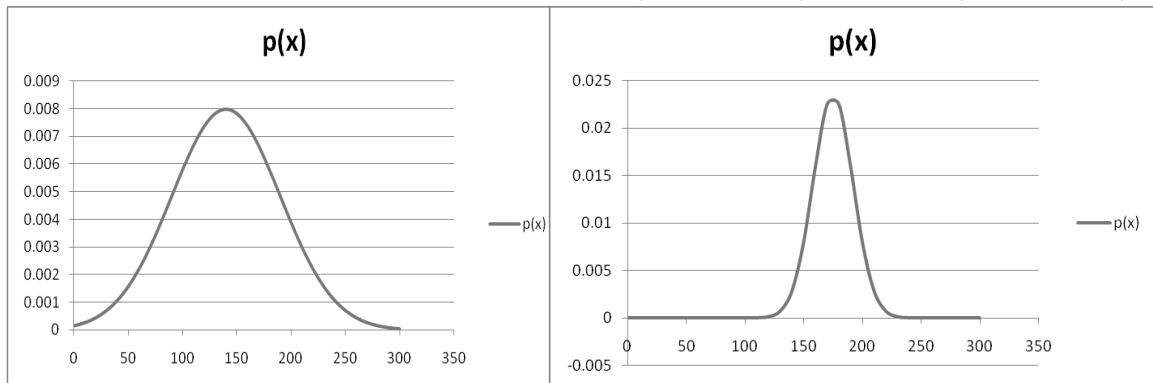


Fig. 5 Comportamiento aleatorio de la función normal del ejemplo 3



Capítulo 3

Simulación Probabilística: La Simulación Montecarlo

3.1 Generalidades

Todo método de simulación pretende comprender el comportamiento de la realidad en base al estudio de un modelo simplificado que represente el comportamiento del sistema objeto de estudio.

El método Montecarlo de simulación permite estudiar el comportamiento de las variables de salida del modelo en base a dar valores a las variables de entrada, teniendo en cuenta sus distribuciones de probabilidad.

La simulación de Montecarlo es una técnica que combina conceptos estadísticos (muestreo aleatorio) con la capacidad que tienen las computadoras para generar números pseudo-aleatorios y automatizar cálculos. Cuanto mayor sea el número de iteraciones más estables serán los valores obtenidos. Mejor 10.000 iteraciones que 1.000, y aun mejor un millón.

Los orígenes de esta técnica están ligados al trabajo desarrollado por Stan Ulam y John Von Neumann a finales de los 40 en el laboratorio de Los Álamos, cuando investigaban el movimiento aleatorio de los neutrones. En años posteriores, la simulación de Montecarlo se ha venido aplicando a una infinidad de ámbitos como alternativa a los modelos matemáticos exactos o incluso como único medio de estimar soluciones para problemas complejos.

Así, en la actualidad es posible encontrar modelos que hacen uso de simulación Montecarlo en las áreas informática, empresarial, económica, industrial e incluso social. En otras palabras, la simulación de Montecarlo está presente en todos aquellos ámbitos en los que el comportamiento aleatorio o probabilístico desempeña un papel fundamental; precisamente, el nombre de Montecarlo proviene de la famosa ciudad de Mónaco, donde abundan los casinos de juego y donde el azar, la probabilidad y el comportamiento aleatorio conforman todo un estilo de vida.

3.2 El proceso de Simulación Montecarlo

El método de Montecarlo es un método probabilístico, en contraposición de los métodos determinísticos ya que incorpora múltiples simulaciones de resultados con la variabilidad de elementos individuales para producir una distribución de resultados potenciales. Para cada simulación, la herramienta de simulación Montecarlo escoge al azar un valor para cada evento de riesgo dentro de su rango de valores posibles, pero de acuerdo con la probabilidad de ocurrencia de cada uno de éstos. Luego se combinan los valores escogidos al azar para generar un solo resultado para una simulación. Este proceso se repite un cierto número de veces (típicamente más de 1,000 iteraciones), y se produce un rango de resultados potenciales igualmente probables.

El proceso se fundamenta en el hecho de utilizar una entrada invertida en una función de probabilidad acumulada $F(x)$. Así, a través de la generación de números aleatorios entre $(0, 1)$ se genera una probabilidad acumulada, la que permite, si se conoce

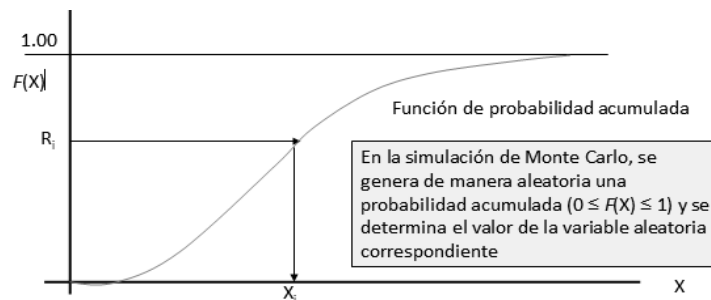


Fig. 1 Fundamento del Método Montecarlo

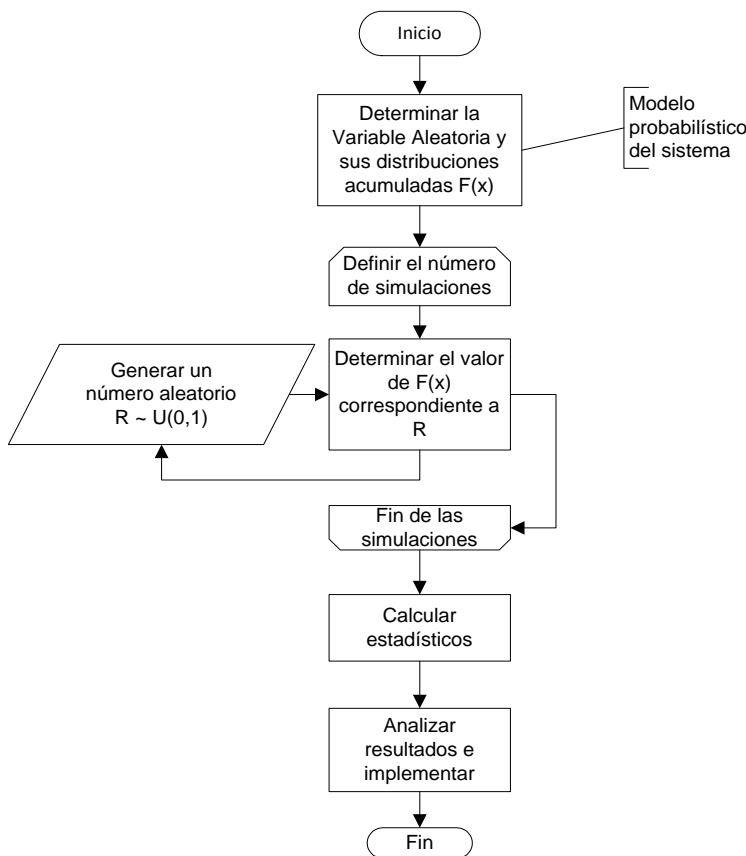


Fig. 2 Algoritmo para la aplicación del Método Montecarlo

la función $F(x)$, generar un valor de la variable aleatoria $X_i = f(x)$. La figura 1 presenta este proceso, el cual es descrito en la figura 2. El paso más importante es el la determinación de la variable aleatoria y la distribución acumulada correspondiente. Es en esta etapa que se genera el modelo probabilístico del sistema a simular.

Una vez definida esta función acumulada, la etapa de generación de un número aleatorio $R_i \sim U(0, 1)$ permitirá entonces generar los datos individuales de la variable X_i .

La precisión del método está dada en función a $1/\sqrt{N}$, por lo que a mayor cantidad de corridas en la simulación, mayor la precisión de los resultados obtenidos en el proceso.

Las principales limitantes del Método Montecarlo son por un lado, que hay que repetir varias veces los cálculos a fin de evitar inferencias causales. Por otro lado, es necesario establecer los controles periódicos necesarios a fin de garantizar la calidad de los números aleatorios o de los generadores pseudoaleatorios utilizados en la simulación.

3.3 Un ejemplo

Se tiene la demanda semanal de cierto producto en función a la frecuencia que esta se repite a lo largo de un año. Se quiere ver el comportamiento simulado de la misma a fin de poder definir una política de inventario a fin de optimizar el mismo y disminuir sus costos.



Tal y como se ve en la tabla mostrada, la misma no se ajusta a una distribución teórica sino a una distribución empírica dada en forma de una tabla de frecuencias. También se muestran los histogramas de frecuencia y acumulados correspondientes.

Tabla 1 Distribución empírica de la demanda semanal de cierto producto

Demanda	Frecuencia	Frecuencia Acumulada
42	0.1	0.1
45	0.2	0.3
48	0.5	0.8
51	0.1	0.9
54	0.1	1

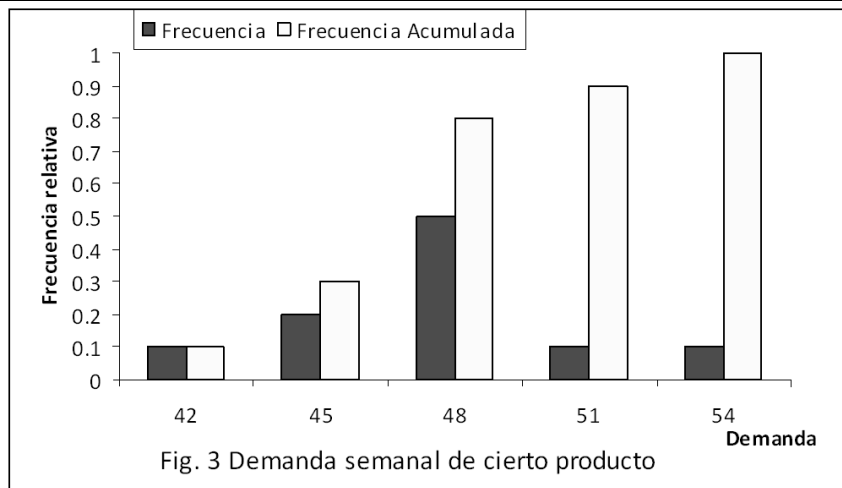


Fig. 3 Demanda semanal de cierto producto

a- De manera directa con Excel

Utilizando la hoja de cálculo Excel, se genera una función aleatoria que permita, una vez generado un número aleatorio $R_i \sim U(0, 1)$, buscar un valor X_i correspondiente a la demanda.

La tabla 2 muestra las 10 primeras simulaciones generadas en la hoja, así como los estadísticos principales

Tabla 2 Cálculo de las 10 primeras simulaciones de la demanda

N	Frecuencia acumulada	Demanda
---	----------------------	---------



1	0.501	48	Estadísticos	
2	0.148	45		
3	0.750	48	Promedio	48
4	0.007	42	σ	4.243
5	0.060	42		
6	0.925	54		
7	0.796	48		
8	0.941	54		
9	0.684	48		
10	0.890	51		

- b- En Excel se pueden hacer simulaciones de Montecarlo utilizando el complemento Generación de Números Aleatorios ubicado en Análisis de Datos.



Fig. 4 Salidas correspondientes a la simulación Montecarlo utilizando Excel

- c- Es posible correr simulaciones dinámicas con distribuciones discretas utilizando el comando BUSCAV de Excel. Debido a que la función BUSCARV entra por la primera columna de la tabla para la búsqueda, bajo el supuesto $X \geq U$, hay que reescribir la tabla original de datos, donde se parte de 0 no de 0.1 y la distribución acumulada se coloca como primera columna. En la figura 4 se puede ver la función BUSCARV, donde G1 es el número aleatorio correspondiente, D5:D9 la matriz de datos y 2 es la columna correspondiente a la demanda aleatoria.

Frecuencia Acumulada	Demanda
-------------------------	---------



0.0	42
0.3	45
0.8	48
0.9	51
1	54

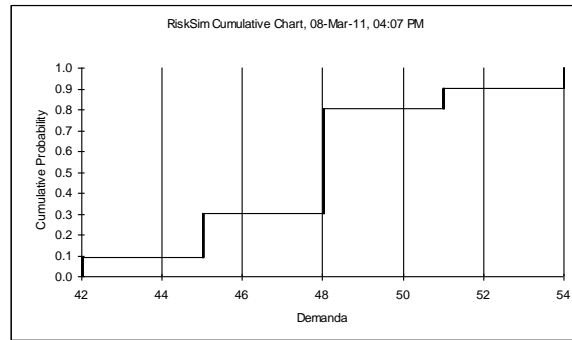
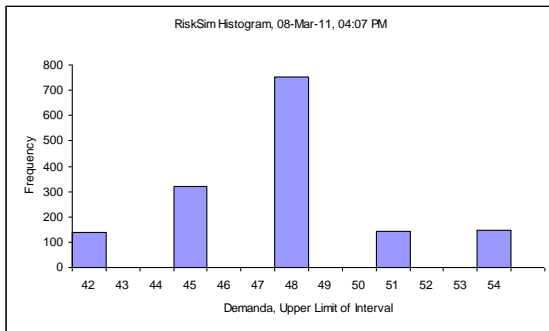
	G	H	I
	0.85661237	=BUSCARV(G1,D5:E9,2)	

Fig. 4 Uso de la función BUSCARV

d- tilizando herramientas especializadas, es posible hacer muchas simulaciones del problema. Por ejemplo, la salida que se muestra corresponde a 1,500 simulaciones del caso de la demanda.

Fig 5 Resultado de 1,500 simulaciones utilizando RiskSim

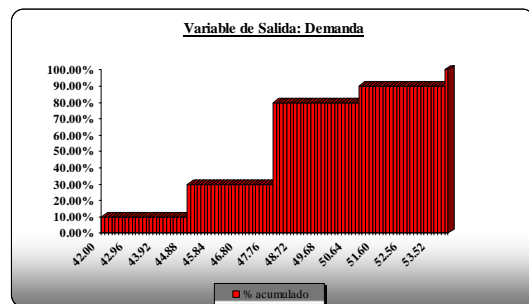
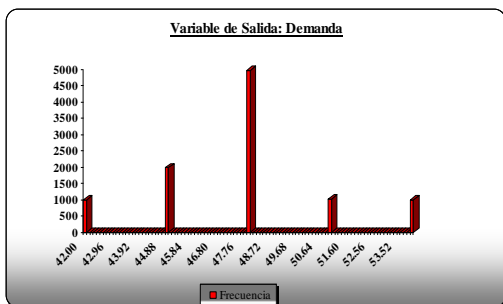
RiskSim - One Output – Summary			
		Mean	47.692
Date	8-Mar-11	St. Dev.	3.082120857
Time	4:07 PM	Mean St. Error	0.079580018
Workbook	Libro1	Minimum	42
Worksheet	Hoja1	First Quartile	45
Output Cell	\$J\$20	Median	48
Output Label	Demanda	Third Quartile	48
Seed	530616	Maximum	54
Trials	1500	Skewness	0.2433



e- Las salidas que se muestran a continuación corresponden a 10,000 simulaciones hechas con el software SimulAr:

Fig. 6 Resultado de 1,500 simulaciones, utilizando SimulAr

Nro. Iteraciones	10000
Mínimo	42
Promedio	47.7102
Máximo	54
Mediana	48
Varianza	9.84760072
Desvío Estándar	3.138088705
Rango	12
Curtosis	-0.052296064
Coef. de Asimetría	0.188221151
Coef. de Variación	6.5773958%





Capítulo 4

Procesos de Poisson y Fenómenos de Espera

4.1 Principios y conceptos básicos

En estadística y simulación un **Proceso de Poisson** (también conocido como "**Ley de los sucesos raros**") llamado así por el matemático Siméon Denis Poisson (1781–1840) es un proceso estocástico de tiempo continuo que consiste en "contar" eventos raros (de ahí el nombre "ley de los eventos raros") que ocurren a lo largo del tiempo.

Entre las propiedades de los procesos de Poisson están:

- Las variables aleatorias N_t tienen distribución Poisson con parámetro λt
- Si T_k denota el tiempo transcurrido desde el $(k-1)$ -ésimo evento hasta el k -ésimo, entonces T_k es una variable aleatoria con distribución exponencial y parámetro λ

En teoría de probabilidad y estadística, la **distribución de Poisson** es una distribución de probabilidad discreta que expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad que ocurra un determinado número de eventos durante cierto periodo de tiempo.

La función de densidad de la distribución de Poisson es

$$f(k; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!},$$

donde

- Es una distribución discreta empleada con mucha frecuencia para describir el patrón de las llegadas a un sistema de colas
- k es el número de ocurrencias del evento o fenómeno (la función da la probabilidad de que el evento suceda precisamente k veces).
- λ es un parámetro positivo que representa el número de veces que se espera que ocurra el fenómeno durante un intervalo dado. Por ejemplo, si el suceso estudiado tiene lugar en promedio 4 veces por minuto y estamos interesados en la probabilidad de que ocurra k veces dentro de un intervalo de 10 minutos, se utiliza un modelo de distribución de Poisson con $\lambda = 10 \times 4 = 40$.
- Para tasas medias de llegadas pequeñas es asimétrica y se hace más simétrica y se aproxima a la binomial para tasas de llegadas altas.

Por otro lado, en estadística la **distribución exponencial** es una distribución de probabilidad continua con un parámetro $\lambda > 0$ cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad \text{Su función de distribución es:}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$



Supóngase que para cada valor $t > 0$, que representa el tiempo, el número de sucesos de cierto fenómeno aleatorio sigue una distribución de Poisson de parámetro λt . Entonces, los tiempos discurridos entre dos sucesos sucesivos sigue la distribución exponencial.

En los procesos de Poisson, se asume que la distribución exponencial es la distribución de la longitud de los intervalos de variable continua que transcurren entre la ocurrencia de dos sucesos "raros", que se distribuyen según la distribución de Poisson.

Se pueden modelar muchos fenómenos como un proceso de Poisson:

- La cantidad de clientes que entran a una tienda.
- El número de coches que pasan por una autopista.
- La llegada de personas a una fila de espera.
- El número de llamadas que llegan a una central telefónica.
- Partículas emitidas por un material radiactivo.

El caso más general de un Proceso de Poisson está representado por las colas. La teoría de colas generalmente es considerada una rama de la investigación de operaciones porque sus resultados a menudo son aplicables en una amplia variedad de situaciones como negocios, comercio, industria, ingenierías, transporte y telecomunicaciones. Otros campos de utilización son la logística de los procesos industriales de producción, ingeniería de redes y servicios, ingeniería de sistemas informáticos, y elaboración de proyectos sustentables.

Por otro lado, en ciencias de la computación, la teoría de colas es el estudio matemático de las líneas de espera o colas dentro de una red de comunicaciones. Su objetivo principal es el análisis de varios procesos, tales como la llegada de los datos al final de la cola, la espera en la cola, entre otros.

En el contexto de la informática y de las nuevas tecnologías, las situaciones de espera dentro de una red son más frecuentes. Así, por ejemplo, los procesos enviados a un servidor para su ejecución forman colas de espera mientras no son atendidos; la información solicitada, a través de Internet, a un servidor Web puede recibirse con demora debido a la congestión en la red; también se puede recibir la señal de línea de la que depende nuestro teléfono móvil ocupada si la central está colapsada en ese momento, etc.

4.2 Comportamiento de las colas

Las colas se forman debido a un desequilibrio temporal entre la demanda del servicio y la capacidad del sistema para suministrarlo. Las transacciones pueden esperar en cola debido a que los medios existentes sean inadecuados para satisfacer la demanda del servicio; en este caso, la cola tiende a ser explosiva, es decir, a ser cada vez más larga a medida que transcurre el tiempo. Las transacciones pueden esperar temporalmente, aunque las instalaciones de servicio sean adecuadas, porque las transacciones llegadas anteriormente están siendo atendidas.

Las colas son frecuentes en la vida cotidiana:

- En un banco
- En un restaurante de comidas rápidas



- Al matricular en la universidad
- Los autos en un lava-autos

Las colas causan ciertas frustraciones debido a que nadie le gusta esperar. Cuando la paciencia llega a su límite, la gente se va a otro lugar. Sin embargo, un servicio muy rápido tendría un costo muy elevado. Esto hace necesario encontrar un balance adecuado.

Adicionalmente existen ciertos elementos psicológicos en las colas, que hacen que la espera tenga efectos no previsibles:

- El tiempo desocupado parece más largo que el ocupado
- Las esperas previas y posteriores al proceso parecen más largas que las que se producen dentro del mismo
- La ansiedad hace que las esperas parezcan más largas
- Las esperas inciertas son más largas que las conocidas
- Las esperas no explicadas parecen más largas que las explicadas
- Las esperas injustas son más largas que las equitativas
- Cuanto más valioso sea el servicio, más espera la gente
- Las esperas en solitario parecen más largas que acompañado
- Las esperas incómodas parecen más largas que las cómodas
- Las esperas no familiares parecen más largas que las familiares

Existen ciertos costos asociados con los procesos de colas:

- **Costo de espera:** Es el costo para el cliente al esperar. Representa el costo de oportunidad del tiempo perdido. Un sistema con un bajo costo de espera es una fuente importante de competitividad.
- **Costo de servicio:** Es el costo de operación del servicio brindado. Es más fácil de estimar que los costos de espera porque son costos tangibles ya que implican costo de personal y la tecnología del servicio.

El objetivo de los procesos de colas es el de encontrar el costo mínimo combinado de ambos de tal manera que se pueda encontrar el balance óptimo entre el servicio y la espera. La figura 1 presenta el comportamiento de ambos costos. A medida que aumentan los recursos que permitan atender las diferentes transacciones, el costo de espera disminuye, pero el costo de los recursos aumenta, donde C^* es el costo mínimo resultante de combinar ambos costos

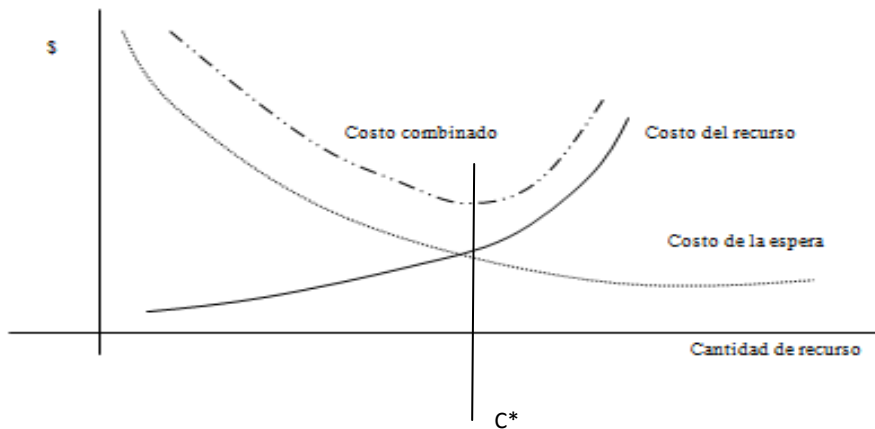


Fig. 1 Análisis del costo mínimo de una cola

4.3 Teoría de Colas

Existen muchos sistemas de colas distintos. Algunos modelos son muy especiales, otros se ajustan a modelos más generales y otros se pueden tratar a través de la simulación

La teoría de colas incluye un conjunto de modelos matemáticos que describen sistemas de líneas de espera particulares. El objetivo es encontrar el estado estable del sistema y determinar una capacidad de servicio apropiada.

Una cola es una línea de “clientes” que esperan por un servicio o recurso proveído por un servidor. Estos servidores se pueden considerar estaciones individuales donde cada cliente recibe un servicio específico. Si cuando el cliente llega no hay nadie en la cola, pasa de una vez a recibir el servicio, si no, se une a la cola. Es importante señalar que la cola no incluye a quien está recibiendo el servicio.

Las llegadas van a la instalación del servicio de acuerdo con la disciplina de la cola. Dentro de las disciplinas consideradas están PEPS, UEPS, prioridades, tiempo de procesamiento, fecha de entrega, etc., pero pueden haber otras reglas o colas con prioridades. La figura 2 muestra el modelo básico de las colas, con sus diferentes elementos

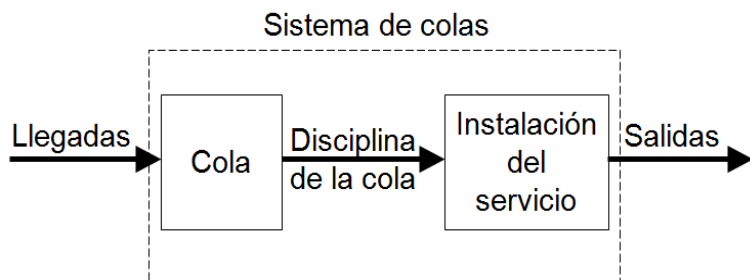


Fig. 2 Configuración de una cola

Configuración

Modelo

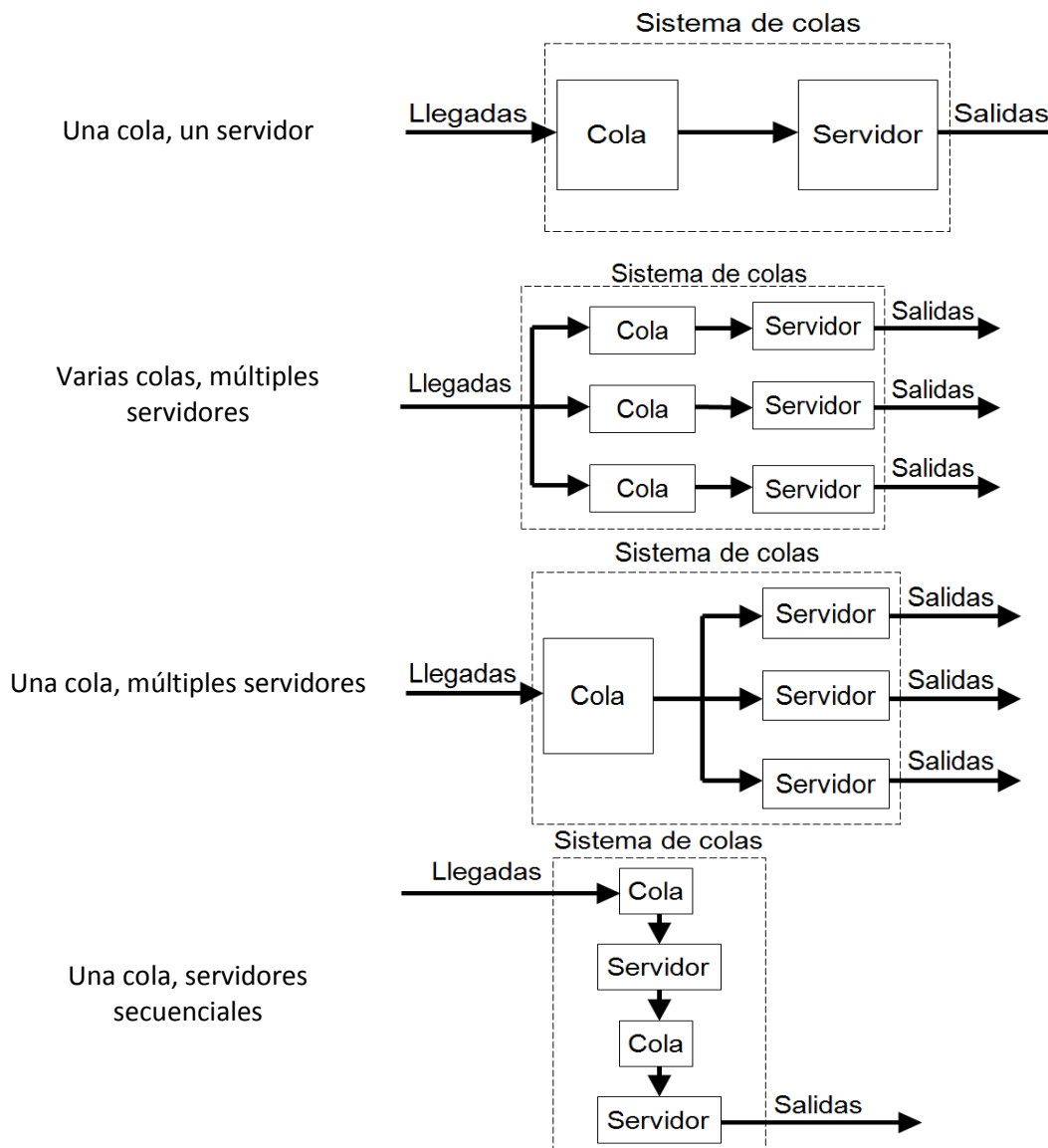


Fig. 3 Configuraciones de cola

Existen diferentes configuraciones de colas, las que tienen que ver con el número de colas, su ubicación, sus requerimientos espaciales y el comportamiento del cliente. La figura 3 muestra estas configuraciones, que pueden ser de una cola un servidor, varias colas varios servidores, varios servidores una cola y secuencia de servidores.

El tiempo que transcurre entre dos llegadas sucesivas en el sistema de colas se llama tiempo entre llegadas. El número esperado de llegadas por unidad de tiempo se llama tasa media de llegadas (λ). Este tiempo entre llegadas tiende a ser muy variable, dependiendo del tipo de distribución que rige este proceso. Generalmente se supone una distribución de Poisson. Por otro lado, el tiempo esperado entre llegadas es $1/\lambda$. Por ejemplo, si la tasa media de llegadas es $\lambda = 20$ clientes por hora. Entonces el tiempo esperado entre llegadas es $1/\lambda = 1/20 = 0.05$ horas o 3 minutos

El número de clientes en la cola es el número de clientes que esperan el servicio. El número de clientes en el sistema es el número de clientes que esperan en la cola más el número de



clientes que actualmente reciben el servicio. La capacidad de la cola es el número máximo de clientes que pueden estar en la cola. Generalmente se supone que la cola es infinita. Aunque también la cola puede ser finita.

El servicio puede ser brindado por un servidor o por servidores múltiples. El tiempo de servicio varía de cliente a cliente. El tiempo esperado de servicio depende de la tasa media de servicio (μ). El tiempo esperado de servicio equivale a $1/\mu$. Por ejemplo, si la tasa media de servicio es de 25 clientes por hora. Entonces el tiempo esperado de servicio es $1/\mu = 1/25 = 0.04$ horas, o 2.4 minutos.

Para sistemas de colas estables, es importante que se cumpla el hecho de que $\lambda/c\mu < 1$, donde c es el número de servidores. Igualmente, se debe cumplir la Ley de Little que dice que la longitud de una cola es proporcional al tiempo de espera y la tasa de llegada de transacciones.

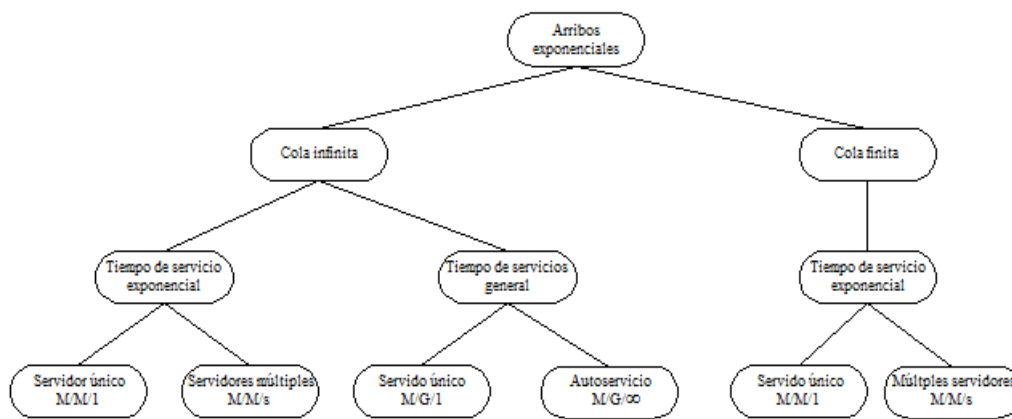


Fig. 4. Taxonomía de las colas

De manera general, se pueden definir las colas de acuerdo a la taxonomía que se presenta en la figura 4. Aunque dicha taxonomía no es única, pero en base a esta se pueden ver las diferentes características de ellas. A fin de poder analizar los diferentes modelos de colas presentados en la figura 4, existe cierta nomenclatura con la cual el lector debe estar familiarizado. Antes que nada, se ha definido una nomenclatura que permite distinguir el tipo de configuración. Esta nomenclatura conocida como la notación de Kendall, tal que $A/B/c$, donde:

- A: Naturaleza de las llegadas – M, D
- B: Naturaleza de los procesos – M, D, G, E_k
- c: Número de servidores
 - M: distribución exponencial
 - D: distribución degenerada
 - G: distribución general
 - E_k : distribución Erlang

Por otro lado, hay otros términos los cuales deben considerarse. La figura 5 muestra esta terminología con sus símbolos correspondientes.



- λ : Tasa promedio de arribos
- μ : Tasa promedio de servicio o capacidad del servidor
- ρ : Factor de intensidad o utilización de un servidor $\frac{\lambda}{\mu}$, $0 < \rho < 1$
- U : Intensidad de tráfico del sistema $\frac{\lambda}{s\mu}$, también llamado factor de utilización
mide el porcentaje de tiempo que el sistema, con s servidores está ocupado.
- N : Número máximo de clientes o transacciones permitidas en el sistema
- P_0 : Probabilidad de que no exista ninguna transacción en el sistema
- P_n : Probabilidad de que el siguiente arribo tenga que esperar
- P_n : Probabilidad de que existan exactamente n transacciones en el sistema
- L_q : Número promedio de clientes esperando en la cola
- L : Número promedio de transacciones en el sistema
- L_b : Número promedio de transacciones en la cola para un sistema ocupado
- W : Tiempo promedio total en el sistema
- W_q : Tiempo promedio de espera en la cola
- W_b : Tiempo de espera promedio en cola para un sistema ocupado

Fig. 5 Terminología de las colas

Bajo las consideraciones anteriores, figura 6 presenta los modelos de colas más comunes.

Finalmente, a fin de analizar las colas, algunos supuestos son necesarios:

- Los sistemas están en estado estable.
- La información es conocida.
- Los sistemas son estáticos.
- En el estado estable, la Ley de Little se cumple: $L = \lambda W$
- En el caso de un servidor, debe cumplirse que $0 < \lambda/\mu < 1$
- Para c servidores, debe cumplirse que $0 < \lambda/c\mu < 1$

Modelo M/M/1

- El tamaño de la cola es infinitamente grande
- Todos los arribos puedan ser admitidos al sistema y esperar a ser atendidos

$$P_0 = 1 - \lambda/\mu$$

$$P(n \geq k) = (\lambda/\mu)^k$$

$$P_n = P_0(\lambda/\mu)^n$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda W$$

$$L_q = \lambda W_q$$



<p>Modelo M/M/1 con capacidad finita</p> <ul style="list-style-type: none"> - El tamaño de la cola es finito y conocido - Todos los arribos no puedan ser admitidos al sistema y se descartan 	$P_0 = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} & \text{para } \lambda \neq \mu \\ \frac{1}{N+1} & \text{para } \lambda = \mu \end{cases}$ $L = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} & \text{para } \lambda \neq \mu \\ \frac{N}{2} & \text{para } \lambda = \mu \end{cases}$ $P(n > 0) = 1 - P_0$ $L_q = L - (1 - P_0)$ $P(n \leq N) = P_0 \rho^n$ $L_b = \frac{L_q}{1 - P_0}$ $W = \frac{L_q}{\lambda(1 - P_0)} + \frac{1}{\mu} \quad W_q = W - \frac{1}{\mu} \quad W_b = \frac{W_q}{1 - P_0}$
<p>Modelo M/G/1</p> <ul style="list-style-type: none"> - El tamaño de la cola es infinito - Servidor no está exponencialmente distribuido 	$P_0 = 1 - \rho$ $L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1 - \rho)}$ $P_w = \rho$ $L = L_q + \rho$ $W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad W_b = \frac{L_q}{\lambda}$
<p>Modelo M/G/∞</p> <ul style="list-style-type: none"> - Modelo de un sistema de autoservicio - Servidor no está exponencialmente distribuido 	<p>Donde σ^2 es la varianza del tiempo de servicio</p> $P_n = \frac{e^{-\rho}}{n!} \rho^n \quad \text{para } n \geq 0$ $L = \rho$ $W = \frac{1}{\mu}$

Fig. 6 Modelos típicos de Colas

A continuación se presentan algunos ejemplos típicos en el análisis de colas estáticas:

4.4 Ejemplos

Ejemplo 1

Un centro de servicio al cliente tiene solamente un técnico que atiende llamadas. Las llamadas llegan de manera aleatoria con una media de de cinco llamadas por hora y siguen una distribución de Poisson. El técnico puede atender y servir las solicitudes a una tasa de siete llamadas por hora, distribuidas de manera exponencial.

Existen quejas de que los clientes son puestos en espera antes que atiendan las llamadas por lo que se quiere conocer tanto el comportamiento del sistema, como la cantidad óptima de técnicos necesarios a fin de disminuir las quejas de los clientes.

A fin de poder analizar el modelo, es necesario definir el mismo como un modelo M/M/1 con los siguientes parámetros:

Parámetro	Valor
-----------	-------



Servidores	1
μ	7 por hora
λ	5 por hora

La figura 7 muestra el análisis de este sistema de colas utilizando el software WinQSB

De acuerdo a este análisis, el sistema está utilizado un 71.4% del tiempo, con 2.5 clientes en el sistema, y un número promedio de 1.8 clientes esperando 0.36 horas (21 minutos).

A fin de ampliar el análisis se proporciona la siguiente información::

- Costo de un técnico B/.3.50/hora
- Costo estimado de espera de un cliente B/.4.00/hora
- Costo de cliente perdido B/.7.00/por hora

La figura 8 muestra los resultados del análisis correspondiente, donde se puede concluir que que la cantidad óptima de servidores es de 2, lo que genera un costo mínimo de B/. 9.32 por hora.

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hour)	7
Customer arrival rate (per hour)	5
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hour	
Idle server cost per hour	
Customer waiting cost per hour	
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

03-21-2008	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hour =	5.0000
3	Service rate per server (mu) per hour =	7.0000
4	Overall system effective arrival rate per hour =	5.0000
5	Overall system effective service rate per hour =	5.0000
6	Overall system utilization =	71.4286 %
7	Average number of customers in the system (L) =	2.5000
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	1.7857
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	2.5000
10	Average time customer spends in the system (W) =	0.5000 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0.3571 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0.5000 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	28.5714 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	71.4286 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	\$0
17	Total cost of idle server per hour =	\$0
18	Total cost of customer waiting per hour =	\$0
19	Total cost of customer being served per hour =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	\$0
21	Total queue space cost per hour =	\$0
22	Total system cost per hour =	\$0



Figura 7 Análisis del ejemplo 1 utilizando WinQSB

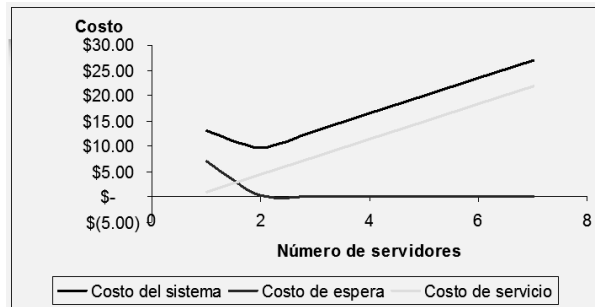
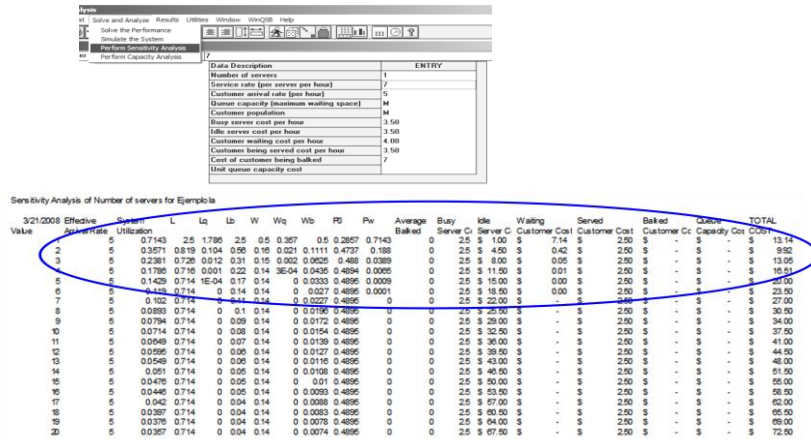


Fig. 8 Análisis de sensibilidad del ejemplo 1

Ejemplo 2

La División Industrial de la ACP tiene 10 máquinas idénticas que utiliza en sus talleres. Las máquinas se dañan con un MTBF de 1 daño cada 100 horas. La ACP a estimado un costo de B/.100 por cada hora que una máquina no trabaja.

La división tiene un mecánico asignado para reparar las máquinas cada vez que se dañan, siendo el MTBR de 8 horas cada vez. Si al técnico se le pagan B/.20 por hora, analizar la factibilidad del sistema.

Para este ejemplo, se conoce el MTBF ($1/\lambda$) que es el tiempo medio entre fallas y el MTBR ($1/\mu$) o tiempo medio entre reparaciones.

Los parámetros del modelo se pueden resumir como un M/M/1 con población finita de 10 máquinas:



Parámetro	Valor
MTBF	100 horas
λ	0.01 por hora
MTBR	8 horas
μ	0.125 horas
Servidores	1
Máquinas	10

La figura 9 en la siguiente página presenta los resultados del análisis utilizando el software WinQSB. De acuerdo a dicho análisis el mecánico está siendo utilizado un 68% de las veces, hay aproximadamente una máquina siempre esperando a ser reparada y espera alrededor de 10 horas para su reparación. La política actual tiene un costo aproximado de B/.172 la hora. De acuerdo al análisis de sensibilidad, se recomiendan 2 mecánicos, lo que hará que las máquinas esperen cerca de 50 minutos y la política de mantenimiento tenga un costo de aproximadamente B/.121 la hora.



Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hour)	0.125
Customer arrival rate (per hour)	0.01
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	10
Busy server cost per hour	20
Idle server cost per hour	20
Customer waiting cost per hour	100
Customer being served cost per hour	100
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

08	Performance Measure	Result
	System: M/M/1//10	From Formula
	Customer arrival rate (λ) per hour =	0.0100
	Service rate per server (μ) per hour =	0.1250
	Overall system effective arrival rate per hour =	0.0848
	Overall system effective service rate per hour =	0.0848
	Overall system utilization =	67.8048 %
	Average number of customers in the system (L) =	1.5244
	Average number of customers in the queue (Lq) =	0.8463
	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	1.2482
10	Average time customer spends in the system (W) =	17.9856 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	9.9856 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	14.7270 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	32.1951 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	67.8049 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	\$13.5610
17	Total cost of idle server per hour =	\$6.4390
18	Total cost of customer waiting per hour =	\$84.6344
19	Total cost of customer being served per hour =	\$67.8049
20	Total cost of customer being balked per hour =	\$0
21	Total queue space cost per hour =	\$0
22	Total system cost per hour =	\$172.4393

Sensitivity Analysis of Number of servers for Ejemplo 2

3/21/2008	Effective Arrival Rate	System Utilization	L	Lq	Lb	W	Wq	Wb	P0	Pw	Average Busy Balking	Idle Server Cost	Waiting Customer Co	Served Customer Co	Balked Customer Co	Queue Capacity Cost	TOTAL COST
1	0.0848	0.678	1.5244	0.8463	1.2482	17.986	9.9856	14.727	0.322	0.678	0	13.561	6.439	84.6344	67.8049	0	172.4393
2	0.0919	0.3678	0.8112	0.0781	0.4073	8.8282	0.8282	4.4321	0.4517	0.1869	0	14.7021	25.2979	7.8098	73.5104	0	121.1201
3	0.0925	0.2487	0.7476	0.0674	0.2131	8.0798	0.0798	2.3035	0.4823	0.0347	0	14.8038	45.1961	0.7362	74.9193	0	134.7585
4	0.0926	0.1852	0.7413	0.0006	0.1299	8.0083	0.0083	1.4025	0.4831	0.0045	0	14.8139	85.1881	0.0588	74.0897	0	164.1283
5	0.0926	0.1481	0.7408	0	0.0839	8.0004	0.0004	0.9058	0.4832	0.0004	0	14.8148	85.1852	0.0035	74.0738	0	174.0773

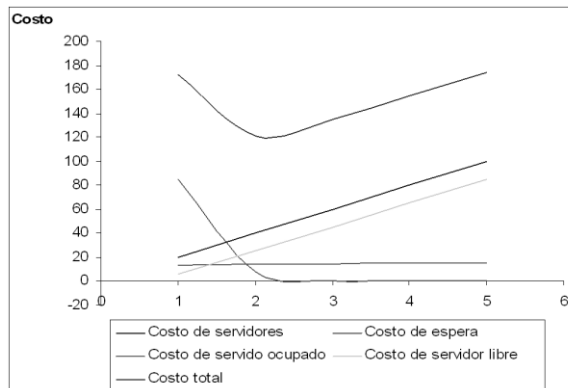


Fig. 9 Solución del ejemplo 2



Capítulo 5

Simulación de Eventos Discretos

5.1 Principios y conceptos básicos

Shapiro (2001) afirma que la simulación es el método más común de construir modelos que incluyan comportamientos aleatorios de un gran número y variedad de componentes de tal manera que se pueda evaluar el comportamiento de la dinámica temporal del sistema. A diferencia de los modelos analíticos, los modelos de simulación requieren un diseño experimental apropiado ya que son estimados estadísticos de los comportamientos aleatorios de los diferentes componentes de un sistema a través del tiempo así como los resultados de la operación del mismo.

Los modelos de simulación incluyen diferentes tipos de entidades, tales como recursos, atributos, transacciones y colas. Un **recurso** es un componente del sistema que desarrolla presente, como por ejemplo, activo, o asisten en una actividad. Los **atributos** de un recurso definen su estado pasado o inactivo, dañado, etc. Una **transacción** representa una parte, información o unidad sobre la cual se efectúa alguna actividad utilizando un recurso. Los **atributos de una transacción**, son valores que distinguen estas de otras transacciones, como por ejemplo número de parte, código, nombre, color, fecha de terminación, etc. Una **cola** es un lugar donde las transacciones esperan por un recurso. El número de transacciones en espera es una medida típica de un atributo de cola. Finalmente, el modelo de simulación, por sí mismo, es una transacción cuyo atributo es el tiempo de simulación.

El estado del modelo de simulación está definido por las condiciones dadas del modelo en un instante dado. El estado se modifica cada vez que un evento ocurre en un instante de tiempo particular. Así, el cambio de estado del modelo ocurre en puntos discreto de tiempo. La simulación por eventos discretos es una técnica que permite el modelado de sistemas a través del tiempo.

La simulación de eventos discretos se caracteriza por un control en la variable del tiempo que permite avanzar a éste a intervalos variables, en función de la planificación de ocurrencia de tales eventos a un tiempo futuro. El estado del sistema solo cambia mediante la ejecución de eventos, avanzando el tiempo de simulación a medida que se van ejecutando y eliminando los eventos pendientes para el valor de tiempo actual. La ejecución de un evento puede desencadenar la generación de nuevos eventos futuros. Cada uno está marcado por su tiempo, por lo que el orden de generación puede no coincidir con el orden de ejecución. Finalmente, las variables que definen el sistema no cambien su comportamiento durante el intervalo simulado.

Así, un evento se caracteriza por el instante de tiempo en que éste ocurre y las entidades que son procesadas. Los eventos futuros están programados a ocurrir por los eventos anteriores. Los tiempos entre eventos pueden ser constantes, variables de entrada del modelo o pueden ocurrir en intervalos aleatorios definidos por una función de probabilidad dada.

El conjunto de eventos programados, ordenados por tiempo de ocurrencia, forman la lista de eventos. Las métricas de funcionamiento del sistema son de dos tipos:



- Aquellas que definen un valor en cada intervalo de tiempo y son medidas **persistentes en el tiempo**. Ejemplos de estas medidas son tamaño de una cola o el estado de un recurso.
- Aquellas que solamente se pueden medir al ocurrir un evento. Se conocen como **observaciones**. Algunos ejemplos son el tiempo entre eventos, tiempo de servicio, etc.

5.2 El modelo de simulación

La representación del modelo de simulación se da especificando los eventos que cambian el estado de los sistemas a modelar. Cada cambio de estado es modelado por un evento instantáneo. Puede haber uno o más cambios de estado por evento. Los eventos pueden generar otros eventos, incluyéndose a sí mismo, a ocurrir en el futuro. El ordenamiento de dichos eventos puede ser función del estado del sistema o en condiciones futuras del mismo.

Además de la representación de las variables de estado del sistema y de la lógica de funcionamiento del modelo, la simulación de eventos discretos incluye:

- **El Reloj:** la simulación debe controlar el tiempo de simulación a fin de poder generar la siguiente transacción. Contrario a la simulación en tiempo real, la simulación de eventos discretos supone que el tiempo salta porque los eventos son instantáneos. El reloj avanza hacia el inicio del siguiente evento mientras la simulación se desarrolla.
- **Lista de eventos:** la simulación mantiene al menos una lista de eventos, conocidas a menudo con el conjunto de eventos pendientes porque lista los eventos pendientes de ocurrir como resultado de los eventos previamente simulados. Un evento se describe por el tipo de evento y el tiempo en el que ocurre. El tipo de evento es descrito por una serie de parámetros que lo describen de manera individual.
- El conjunto de eventos pendientes se organizan de acuerdo a una cola de prioridades, ordenadas por el tiempo de ocurrencia. En otras palabras, no importa el orden en que los eventos se van incluyendo en la lista de eventos, ellos se simulan en estricto orden cronológico.
- **Generador de números aleatorios:** La simulación necesita generar variables aleatorias de diferente tipo, dependiendo del modelo. Esto se logra por uno o más generadores de números pseudo aleatorios. Estos presentan la ventaja que se pueden repetir si se necesita verificar el comportamiento exacto del modelo bajo las mismas condiciones.
- Una de los problemas con las distribuciones aleatorias es que las mismas tal vez no se conozcan antes de generar la simulación. Esto se resuelve generando datos lo más parecidos a los reales y probando los mismos hasta que se pueda validar dicha distribución.
- **Estadísticas:** El conjunto de estadísticas del sistema, las que cuantifican los aspectos de interés de la simulación.
- **Condiciones de parada:** En teoría la simulación de eventos discretos pueden correr por tiempo indefinido. Así, el diseñador del modelo debe decidir cuando la simulación termine. Esta decisión puede estar dada en función del tiempo, número de transacciones o el alcance de algún parámetro.



Una manera de identificar eventos e identificar sus relaciones entre ellos es a través de los gráficos de eventos (Schruben en Askin y Standridge, 1993). En estos gráficos, los nodos representan los eventos y los arcos representan las relaciones entre ellos, así como la secuencia de ocurrencia. Los parámetros de los arcos son el intervalo de tiempo y las condiciones de ocurrencia. La tabla 1 muestra los diferentes eventos que generan un cambio de estado en una simulación de un modelo de un servidor y la figura 1 muestra el caso general de estos gráficos.

Tabla 1. Cambios de estado en el modelo de un servidor

Cambio de estado	Evento
Número de transacciones en la cola aumenta	La transacción <i>i</i> llega
El número de transacciones en la cola disminuye	El evento inicia
El recurso se ocupa	El evento inicia
El recurso se desocupa	El evento termina

Fig. 1 Gráfico de eventos para un modelo de un servidor (Askin y Standridge, 1993)

Una actividad importante dentro de la simulación de eventos discretos es la evaluación del proceso computacional de evaluar el comportamiento representado por el modelo. Iniciando en tiempo *t*, el reloj de simulación se avanza cronológicamente al siguiente evento. Cada evento tiene su propia lógica para el cambio de estado. La evaluación consiste en hacer la trazabilidad de los diferentes procesos ejecutados en la simulación, así como la evaluación de las estadísticas y estados del sistema en cada cambio de estado.

Otra manera de analizar el modelo de simulación es a través de los modelos de procesos. Mientras que los modelos de eventos se desarrollan con la definición de los cambios de estado en el sistema en hitos de tiempo específicos, los modelos de proceso analizan la secuencia de de pasos que necesita una transacción para ser procesada. Un proceso puede contener ciertas condiciones lógicas que condicionen las actividades que ejecutadas por cada centro de recursos, dependiendo de los atributos de cada transacción y el estado del sistema. Un proceso implica una secuencia ordenada de eventos. Así, el enfoque de eventos es la base para el análisis de los procesos. Por ejemplo, la secuencia de eventos para proporcionar cierto servicio se puede resumir como sigue:

- La transacción llega
- La transacción entra a la cola
- La transacción deja la cola y entra al punto de servicio

- La transacción completa el servicio después de un tiempo dado

En el caso de procesos, puede que el servidor esté libre, ocupado, bloqueado o caído. En este caso, se necesitarán condicionantes lógicos que indiquen el estado del sistema y definan el proceso: espera, procesar, devolver, etc., los cuales no son parte de la secuencia de eventos pero si son acciones de los procesos.

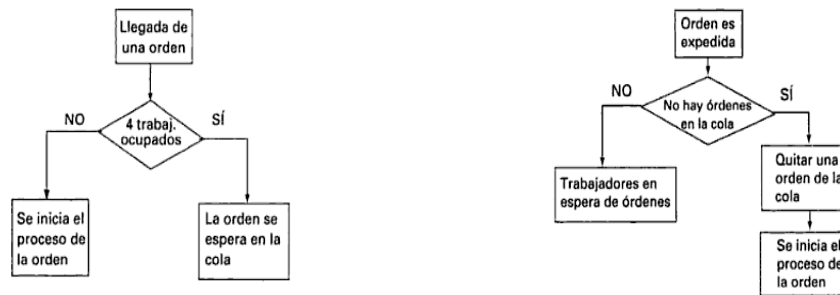


Fig. 2 Eventos y procesos de llegadas y servicios de transacciones (Barceló, 1996)

5.3 Sistemas de Simulación

Diferentes autores (en Askin y Standridge, 1993) definen un sistema de simulación como un sistema que integra lenguajes de simulación con variada selección de sistemas informáticos de apoyo como modeladores gráficos, software de análisis estadístico, rutinas de animación y generadores de reportes. Por su parte los lenguajes de simulación son lenguajes de propósito especial que incluyen la posibilidad de construir bloques de simulación y de integrar éstos entre sí. Existe una gran variedad de lenguajes y sistemas integrados de simulación: FLEXSIM, ARENA, ANYLOGIC, GPSS, etc., los cuales han sido desarrollado por diferentes casas comercializadoras de estas herramientas, pero todas con la misma finalidad, la de construir de manera eficiente modelos de simulación.

Al momento de elegir el sistema que convenga al analista, deben tomarse en cuenta ciertos elementos, como se muestran en la figura 3.

Fig. 3 Criterio para evaluar las herramientas de simulación (Barceló, 1996)





La flexibilidad de las técnicas y herramientas de simulación permiten generar métricas de las respuestas del sistema, existen algunas típicas de los sistemas de producción o sistemas homólogos:

- **Rendimiento o tasa de transferencia (“throughput”)**: el número de transacciones que completan el servicio en un tiempo dado.
- **Tiempo de producción (“makespan”)**: intervalo de tiempo para servir un número dado de transacciones.
- **Calidad**: porcentaje de eventos que cumplen con los parámetros de calidad definidos.
- **Tiempo en el sistema**: tiempo total que un evento permanece en el sistema (o subsistema).
- **Inventario de Trabajo en Proceso**: el número de eventos parcialmente servidos en un tiempo dado.
- **Congestión**: la razón del tiempo de espera al tiempo de proceso.
- **Utilización**: el número de recursos utilizados, el porcentaje de tiempo que el recurso está ocupado. En el caso de colas estáticas, el factor de utilización se determina por la expresión $\lambda/c\mu$, donde c es el número de servidores. La utilización deberá ser menor del 100%, de lo contrario el sistema “explota” y hay que simular la misma.
- **Flexibilidad**: el número de recursos libres en el tiempo.

Dada la estructura de la simulación de eventos discretos es posible obtener todo tipo de estadísticas e indicadores relevantes a la operación modelada, inclusive se puede obtener información que muchas veces en los sistemas reales sería inimaginable tener, como por ejemplo: diagramas de Gantt de las piezas en proceso, utilización de los recursos humanos, diagrama de Gantt de los recursos utilizados, tiempos de ciclo de piezas en proceso).

Un aspecto a considerar en el análisis estadístico de los datos generados por la simulación es la correlación entre ellos. Por ejemplo, una transacción espera en la cola mientras se libera el siguiente recurso. La primera transacción llegó al recurso a tiempo t_0 mientras la segunda llegó a $t_1 > t_0$. El tiempo esperado por la segunda transacción w_1 es: $w_0 + s_0 - (t_1 - t_0)$, donde w_0 y s_0 son el tiempo de espera y de servicio de la transacción anterior. En otras palabras, el tiempo de espera w_1 está correlacionado con el tiempo w_0 . Esto viola el hecho de la independencia de las transacciones, supuesto básico en las distribuciones estadísticas.

Otro elemento a considerar es la posibilidad de replicar un evento. En el mundo real, los eventos ocurren solamente una vez. En la simulación es posible replicar o repetir un evento o corrida de simulación tantas veces sea necesario. Ahora bien, debido al comportamiento estocástico del muestreo aleatorio de las diferentes distribuciones que definen las diferentes acciones (Simulación Montecarlo), las replicas no serán iguales y podrán traer nueva información sobre la simulación. Es por esto que se recomienda replicar varias veces cada experimento a fin de eliminar situaciones extremas poco probables y ver comportamientos promedios, independientes entre sí y en el estado estable del modelo.



5.4 Determinando la función de probabilidades.

Como se mencionó anteriormente, los eventos que se generan en la simulación son función de las características estocásticas de las funciones de las cuales se hacen los muestreos aleatorios. Es por lo anterior que se hace necesario el poder determinar, en un momento dado, la función de probabilidad que rige un evento dado.

Para tal efecto, hay que aplicar pruebas estadísticas que permitan determinar que tan aproximada es la distribución de los datos reales que se van a utilizar como parámetros de la simulación. Una de estas pruebas es la prueba de bondad de ajuste χ^2 .

La Prueba de Bondad de Ajuste consiste en determinar si los datos de cierta muestra corresponden a cierta distribución poblacional. Se está interesado en determinar si los datos disponibles de una muestra aleatoria simple de tamaño n corresponden a cierta distribución teórica.

El primer paso a realizar consiste en descomponer el recorrido de la distribución teórica en un número finito de subconjuntos: A_1, A_2, \dots, A_k . Después, clasificar las observaciones muestrales, según el subconjunto a que pertenezcan. Y, por último, comparar las frecuencias observadas de cada A_i con las probabilidades que les corresponderían con la distribución teórica a contrastar.

En este caso es necesario que los valores de la variable en la muestra y sobre la cual se desea realizar la inferencia estén divididas en clases de ocurrencia, o equivalentemente, sea cual sea la variable de estudio, habrá que categorizar los datos asignando sus valores a diferentes clases o grupos.

Supóngase que se tiene un número k de clases en las cuales se han ido registrado un total de n observaciones (n será pues el tamaño muestral). Se denotarán las **frecuencias observadas** en cada clase por O_1, O_2, \dots, O_k (O_i es el número de valores en la clase A_i tal que:

$$O_1 + O_2 + \dots + O_k = n$$

Se quieren comparar las frecuencias observadas con las **frecuencias esperadas** (teóricas), las que se denotarán como E_1, E_2, \dots, E_k . tal que:

$$E_1 + E_2 + \dots + E_k = n$$

Se tratará ahora de decidir si las frecuencias observadas están o no en concordancia con las frecuencias esperadas (es decir, si el número de resultados observados en cada clase corresponde aproximadamente al número esperado). Para comprobarlo, se hará uso de un contraste de hipótesis usando la distribución Chi-cuadrado:

El estadístico de contraste será:



$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (1)$$

Este valor será la suma de k números no negativos. El numerador de cada término es la diferencia entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada. Por tanto, cuanto más cerca estén entre sí ambos valores más pequeño será el numerador, y viceversa. El denominador permite relativizar el tamaño del numerador.

Las ideas anteriores sugieren que, cuanto menor sean el valor del estadístico χ^2 , más coherentes serán las observaciones obtenidas con los valores esperados. Por el contrario, valores grandes de este estadístico indicarán falta de concordancia entre las observaciones y lo esperado. En este tipo de contraste se suele rechazar la hipótesis nula (los valores observados son coherentes con los esperados) cuando el estadístico es mayor que un determinado valor crítico.

Un **experimento multinomial** es la generalización de un experimento binomial y tiene las siguientes características:

- Consiste en n pruebas idénticas e independientes.
- Para cada prueba, hay un número k de resultados posibles.
- Cada uno de los k posibles resultados tiene una probabilidad de ocurrencia p_i asociada ($p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$), la cual permanece constante durante el desarrollo del experimento.
- El experimento dará lugar a un conjunto de frecuencias observadas (O_1, O_2, \dots, O_k) para cada resultado. Obviamente, $O_1 + O_2 + \dots + O_k = n$.

En ocasiones se estará interesados en comparar los resultados obtenidos al realizar un experimento multinomial con los resultados esperados (teóricos). Ello permitirá saber si el modelo teórico se ajusta bien o no a las observaciones. Para ello se recurrirá a la distribución Chi-cuadrado, la cual permitirá realizar un contraste sobre la bondad del ajuste. Se podrá calcular cada frecuencia esperada (teórica) multiplicando el número total de pruebas n por la probabilidad de ocurrencia asociada, es decir: $E_i = n * p_i, i = 1, \dots, k$

Se utilizará el estadístico χ^2 , mostrado anteriormente, con $k - 1$ grados de libertad.

5.5 Puntos a tener en cuenta en el desarrollo de un proyecto de simulación de eventos discretos

En el desarrollo de un proyecto de simulación es importante tener una metodología de desarrollo y entendimiento del proyecto, a continuación evidencio de forma resumida la metodología que le recomiendo seguir para este tipo de proyectos.

- **Definición de objetivos, alcance y de medidas de desempeño a evaluar:** Antes de iniciar la construcción del modelo se debe definir cuál es el objetivo y alcance último del proyecto que debería ser de la forma: ¿cuál es el diseño más adecuado de bodega?, ¿cuál es la mejor configuración de la línea?, ¿cuál es el impacto de realizar los cambios que propone la junta o comité? Una vez definido el objetivo se debe



determinar qué indicadores son los adecuados para cuantificar los efectos de mejoras potenciales, estos podrían ser: nivel de servicio, tiempo de ciclo promedio, entidades en proceso máximas y “throughput” entre otros.

Definición del nivel de detalle adecuado: Una vez definido el objetivo e indicadores a evaluar, se procede a establecer el nivel de detalle que se debe trabajar, esto depende principalmente de que los indicadores que se hayan definido sean relevantes para la operación. Según estos las entidades podrían ser definidas como, camiones, pallets, cajas, unidades sueltas, unidades sueltas de fresa, etc. Este paso es de los más críticos y determinantes de éxito dentro del proyecto, pues por ejemplo si se quisiera evaluar el número de montacargas y de muelles en una bodega de productos de consumo masivo y se definió que el indicador base del proyecto es el número de estibas despachadas en un turno, carecería de sentido simular al nivel de detalle de las unidades sueltas por referencia, sabor y color.

- **Construcción del modelo base:** El objetivo en este punto es construir un modelo pivote robusto y válido sobre el cual se harán los cambios en los escenarios. En la construcción del modelo base existen cuatro etapas asociadas:
- **Construcción:** Consiste en desarrollar la lógica del modelo de forma que represente el sistema real.
- **Calibración:** en esta etapa se incluyen los valores de variables de entrada al modelo, tales como, tiempos de proceso, demanda, fallos de máquinas, etc.
- **Verificación:** en esta fase se compara las salidas del modelo con las salidas esperadas, por ejemplo en “throughput”, inventarios, etc. Para esta etapa es recomendable someter el modelo a situaciones extremas para verificar que la lógica o comportamiento sean los esperados.
- **Validación:** aquí se comparan las salidas del modelo con resultados históricos del sistema real, se recomienda hacer uso de estadísticas como intervalos de confianza y pruebas de hipótesis.

5.6 Verificación y validación de la simulación

Cuando se construye un modelo de un sistema real, se atraviesan una serie de etapas o niveles de modelización. Se comienza estudiando el sistema real y a continuación se construye un modelo conceptual que contiene todos los elementos que se consideran relevantes del sistema. Desde este se pasa a un modelo lógico que contiene las relaciones lógicas entre los elementos. Por último se construye el modelo de simulación que ejecuta la lógica recogida en la fase anterior.

Dado que el modelo es una abstracción del sistema real hay que determinar si existe una correspondencia entre el sistema real y el modelo. Un modelo es desarrollado siempre para un conjunto particular de propósitos. Un modelo de un determinado sistema puede ser válido para un propósito y no ser válido para otro. A fin de lograr este importante objetivo hay que recurrir a la verificación y validación del modelo.



La verificación se refiere a la construcción correcta de un modelo. Se puede definir como el proceso de determinar si la lógica operacional del modelo se corresponde con la lógica del diseño. En términos más simples, consiste en determinar si hay errores en el programa.

La validación, por otro lado, se refiere a la construcción de un modelo correcto. La validación es el proceso de determinar si el modelo, como abstracción, es una buena representación del sistema. Usualmente la validación se consigue a través de la calibración del modelo, en un proceso iterativo de comparación del comportamiento del modelo con el del sistema y usar las diferencias entre ambos para mejorar el modelo. Este proceso se repite hasta que el modelo se considera aceptable.

Cuando se valida un modelo se establece que el modelo es una representación creíble del sistema real, cuando se verifica un modelo se determina si la lógica del modelo ha sido correctamente implementada. Dado que los objetivos de la verificación y de la validación son diferentes también lo son las técnicas para realizarlos.

Se han de establecer una serie de criterios que sirvan para decidir si el modelo supera o no los procesos de verificación y validación. Se ha de tener presente que en un modelo se pueden excluir aspectos del sistema real que se cree que no son importantes para responder a las preguntas o hipótesis planteadas sobre el sistema y que el modelo debe responder, de forma que en fases tempranas se ha de fijar también cuáles son dichas preguntas.

La figura 4 muestra los diferentes aspectos considerados dentro de los procesos de verificación y validación dentro de las diferentes etapas del modelado. Así, se puede observar que en la etapa del modelado conceptual es importante poder definir los diferentes elementos que deban ser incluidos en el modelo.

Nivel de Modelización	Verificación	Validación
Modelo Conceptual		¿Contiene el modelo todos los elementos, sucesos, y relaciones relevantes? ¿Podrá el modelo responder a las cuestiones planteadas?
Modelo Lógico	¿Están los eventos representados correctamente? ¿Son las fórmulas matemáticas y las relaciones correctas? ¿Están las medidas estadísticas formuladas correctamente?	¿Incluye el modelo todos los elementos considerados en el modelo conceptual? ¿Contiene todas las relaciones del modelo conceptual?
Modelo de ordenador/Modelo de Simulación	¿Contiene el código todos los aspectos del modelo lógico? ¿Están las estadísticas y las fórmulas calculadas correctamente? ¿Contiene el modelo errores de codificación?	¿Es el modelo una representación válida del sistema real? ¿Puede el modelo duplicar el comportamiento del sistema real? ¿Es creíble el modelo para los expertos del sistema?

Fig. 4 Verificación y Validación

<http://www.di.ujaen.es/asignaturas/computacionestadistica/pdfs/tema6.pdf>



Aunque en la mayoría de los casos, el modelo no puede contener cada detalle del sistema real, éste deberá incluir aquellos elementos que sean relevantes para responder a las preguntas planteadas. Es necesario identificar todos los sucesos, facilidades, equipamiento, reglas de operación, variables de estado, variables de decisión y medidas de ejecución que van a formar parte del modelo de simulación.

Existen tres filosofías para decidir qué elementos del sistema real incluir en el modelo:

- Incluir todos los aspectos del sistema real que parecen influir en su comportamiento y luego simplificar el modelo para quedarse sólo aquellos elementos que son más relevantes.
- Empezar con un modelo simple del sistema real e ir añadiendo complejidad a éste hasta llegar a tener elementos suficientes para responder a las cuestiones planteadas.
- Hacer un gasto inicial de esfuerzo y tiempo tratando de identificar los elementos del sistema que tienen mayor importancia para responder a las cuestiones planteadas.

Antes de pasar a construir el modelo lógico se ha de estar seguro que el modelo conceptual es una buena abstracción del sistema real.

El modelo lógico consiste en un diagrama de flujo de los procesos a simular y sirve como puente entre el modelo conceptual y el modelo de simulación. Si el modelo conceptual se ha construido bien, la verificación del modelo lógico no es un proceso complejo.

Una aproximación para la verificación del modelo lógico se centra en responder a las siguientes preguntas:

- ¿Están procesados correctamente los sucesos del modelo?
- ¿Son válidas las fórmulas matemáticas y las relaciones incluidas en el modelo?
- ¿Están calculadas correctamente las estadísticas y medidas de ejecución?

El modelo lógico, para ser válido, ha de contener todos los sucesos incluidos en el modelo conceptual, así como la lógica para una correcta planificación de los sucesos futuros. Se debe validar que el modelo lógico contiene todos los sucesos del modelo conceptual, así como verificar las conexiones entre ellos. Por último se ha de verificar que todas las variables de estado cambian correctamente ante la ocurrencia del suceso que las afectan.

Un método que se puede utilizar para la verificación y validación del procesamiento de los sucesos dentro del modelo lógico es una revisión en la que el desarrollador del modelo lógico debe explicar con detalle la lógica del modelo a los otros miembros del proyecto de simulación.

Dentro de un modelo de simulación existen un conjunto implícito o explícito de relaciones y funciones matemáticas: la generación de números y variables aleatorias están basados en métodos matemáticos y la mayoría de los modelos tienen leyes de conservación que deben cumplirse.

Por otro lado, cuando se construye el modelo lógico, se ha de tener cuidado en que estén bien calculados los elementos matemáticos y que las relaciones de conservación han de



preservarse. Algunos de estos errores lógicos se pueden detectar cuando el modelo se implementa como un programa de computador, pero incluso en esta etapa se ha de tener cuidado con que las funciones y las relaciones matemáticas sean correctas.

Un error que puede darse en los modelos de simulación es que ante la ocurrencia de un suceso no haya un cambio adecuado en las medidas de ejecución. Un método para verificar que las estadísticas y las medidas de ejecución se modifican adecuadamente, consiste en asociar con cada suceso una lista completa de todas las estadísticas y medidas que se ven afectadas por la ocurrencia de dicho suceso.

En algunos lenguajes de simulación, algunos tipos de medidas se recogen automáticamente cuando se ejecuta la simulación, de forma que al ser esto transparente al analista, se reduce la probabilidad de errores estadísticos.

Una vez verificada la estructura lógica del modelo, es importante que este se pruebe bajo condiciones conocidas y extremas, todas ellas controladas, a ver si el mismo tiene resultados que puedan ser lógicos.

Dentro de las pruebas a realizar están la verificación del modelo de manera analítica, verificar las relaciones lógicas y verificar las salidas controladas del modelo. Finalmente, en el proceso de validación del modelo han de intervenir el analista y las personas relacionadas con el sistema.

Una prueba para validar el sistema es ver si las personas relacionadas con el sistema confían en el modelo y están dispuestos a utilizarlo. La importancia de la credibilidad en el modelo es la mayor razón del interés tan difundido en realizar una animación de la salida de la simulación.

La animación es una forma efectiva para que los analistas comuniquen la esencia del modelo al administrador.

5.7 Métodos de Validación

La validación no es algo que se ha de hacer cuando el modelo ha sido desarrollado, sino que ha de hacerse desde el principio. Algunos métodos de validación utilizados son:

- **Comparación de los resultados de salida del modelo con los del sistema real:** Este método se podrá aplicar en aquellos casos en los que el sistema exista y se pueda experimentar con él de forma que se obtengan datos de salida del mismo.

Este método consiste en ejecutar el modelo y obtener una serie de datos de salida y comparar éstos, mediante algún método estadístico, con resultados que se tengan del sistema. Habrá que comparar dos conjuntos de datos, de alguna forma, para determinar si el modelo es una representación adecuada del sistema real.

Una primera aproximación sería utilizar uno de los test estadísticos clásicos (como la prueba χ^2 , que se estudió anteriormente) para determinar si las distribuciones



subyacentes a los dos conjuntos de datos se pueden ver como la misma. Sin embargo, los procesos de salida de la mayoría de los sistemas reales y simulaciones no son estacionarios y son autocorrelacionados, de forma que ninguno de estas pruebas estadísticas es directamente aplicable.

En estos casos es posible aplicar una aproximación basada en intervalos de confianza. Este método se puede aplicar suponiendo que es posible recoger un conjunto numeroso de salidas para ambos.

Supóngase que se recogen m conjuntos independientes de datos del sistema y n del modelo. Sean x_j e y_j la media de las observaciones en el j -ésimo conjunto de datos del sistema y del modelo respectivamente. Los x_j 's son variables IID con media $\mu_x = E(x_j)$ y también los y_j 's son variables IID con media $\mu_y = E(y_j)$. Se intenta comparar el modelo con el sistema construyendo un intervalo de confianza $\xi = \mu_x - \mu_y$. Construir dicho intervalo de confianza es preferible a comprobar la hipótesis nula $H_0 : \mu_x = \mu_y$, por varias razones:

- El modelo es una aproximación del sistema real por lo que H_0 es claramente falsa en la mayoría de los casos.
- Un intervalo de confianza da más información que el test de hipótesis correspondiente. Si el test de hipótesis indica que $\mu_x \neq \mu_y$, el intervalo de confianza además indica la magnitud en la que difieren.

Construir un intervalo de confianza para ξ es un caso especial del problema de comparar dos sistemas. En este caso se puede probar el intervalo de confianza utilizando la aproximación *t-Pareada*. Se construye un intervalo de confianza del $100(1-a)\%$ para ξ y se obtiene un límite superior $s(a)$ y un límite inferior $i(a)$ del intervalo correspondiente. Si $\xi \in [i(a), s(a)]$, entonces la diferencia observada entre μ_x y μ_y se dice que es estadísticamente significativa. Esto equivale a rechazar la hipótesis nula $H_0 : \mu_x = \mu_y$ a favor de la hipótesis alternativa $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$.

- **Método Delphi:** Este método se utiliza cuando no se tienen datos o se dispone de muy pocos, acerca del sistema que se está considerando. En este método, se selecciona un grupo de expertos los cuales deben llegar a un consenso en las respuestas que den acerca de una serie de preguntas que se les plantean. En un entorno de simulación los expertos pueden ser los administradores y usuarios del sistema y las preguntas son acerca del comportamiento del sistema bajo ciertas condiciones de operación. El método Delphi excluye las discusiones cara a cara entre los miembros del grupo.

En este método se les plantea al grupo una serie de preguntas:

- Se envía un cuestionario a cada miembro del grupo. Para la validación de un modelo de simulación, las cuestiones podrían tratar sobre las respuestas del sistema real ante ciertas entradas o cambios en su estructura.



- Basándose en las respuestas dadas a las cuestiones planteadas, se elaboran nuevos cuestionarios que van centrándose en temas más específicos.
- Los nuevos cuestionarios se envían al grupo junto con las respuestas obtenidas a las cuestiones en rondas anteriores.
- Estos tres pasos se repiten hasta que el analista consiga de los expertos una predicción de la respuesta de sistema.

Una crítica de este método es que consume mucho tiempo. No necesariamente debe suponer un tiempo adicional en el proyecto de simulación, ya que se puede ir realizando paralelamente al desarrollo del modelo. Su costo puede resultar caro, pero no mucho más que otros métodos de validación. En general, aunque se critique que los métodos de validación son caros y consumen tiempo, más costoso es construir un modelo que no sea válido.

Otra crítica que se hace al método es que si el grupo de expertos lo que va a hacer es predecir el comportamiento del sistema ¿por qué no usar el método en lugar del modelo de simulación? En algunas situaciones este método puede ser utilizado, sin embargo, normalmente no es práctico mantener el grupo de expertos para predecir el comportamiento del sistema ante los posibles cambios que se planteen. Incluso si se pudiera mantener el tiempo de respuesta podría ser muy largo.

- **Test de Turing:** Alan Turing sugirió este método como un test de inteligencia artificial. En este test, a un experto, o grupo de expertos, se le presentan resúmenes o informes de resultados de ejecución del sistema y del modelo, a los que se les ha dado el mismo formato. Estos informes se reparten aleatoriamente a los ingenieros y administradores del sistema, para ver si son capaces de discernir cuáles son los reales del sistema y cuales la imitación resultado de la simulación. Si los expertos no son capaces de distinguir entre ambos, se puede concluir que no hay evidencias para considerar inadecuado al modelo. Si descubren diferencias las respuestas sobre lo que encuentran inconsistente se puede utilizar para realizar mejoras en el modelo.

Se puede considerar que este método es el inverso al método de Delphi. En el test de Turing se consulta a los expertos para ver si son capaces de identificar las respuestas del sistema, mientras que en el de Delphi se pregunta a los expertos para que predigan las respuestas del sistema.

Aunque este test parece muy intuitivo, hay muy pocos informes de su uso, ya que requiere un esfuerzo considerable para formatear las medidas de ejecución del sistema a la hora de crear el informe que se da a los expertos. Otra dificultad está en ajustar las medias del sistema real ya que en ellas intervienen elementos que no se han considerado en el modelo. Por último este test requiere un análisis estadístico por parte del grupo de expertos para determinar si hay diferencias significativas entre el informe real y el simulado.



- **Comportamiento en casos extremos:** Ocasionalmente se puede observar el comportamiento del sistema bajo condiciones extremas. Esta es una situación ideal para recoger datos de las medidas de ejecución del sistema real de forma que luego se puedan comparar con los resultados de la simulación, una vez que se ejecute el modelo bajo situaciones similares. También es posible que los expertos del sistema puedan predecir el comportamiento del sistema bajo condiciones extremas y utilizar estas predicciones para validar el modelo.

5.8 Calibración del Modelo

La calibración es un proceso iterativo en el que se compara el modelo con el sistema real, se realizan cambios y ajustes en el modelo, se vuelve a comparar el modelo revisado con el sistema real, se hacen ajustes adicionales, y así hasta que el modelo resulta una buena aproximación al sistema real. Este proceso iterativo se muestra en la figura 5.

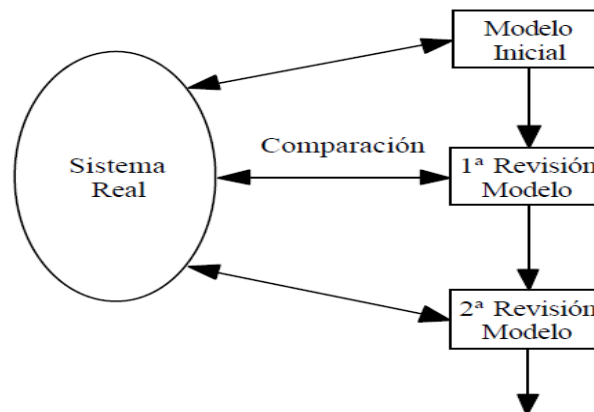


Fig. 5 Proceso iterativo de calibración del modelo

Esta comparación del modelo con el sistema real, se puede realizar a través de conjuntos de pruebas, que pueden ser subjetivas u objetivas. Las primeras implican a personas que conocen aspectos del sistema y pueden hacer juicios sobre el modelo. Las pruebas objetivas necesitan datos sobre el comportamiento del sistema para poder compararlos con los datos sobre el comportamiento del modelo. Una posible crítica en este proceso de calibración es que se llegue a validar el modelo con el mismo conjunto de datos con el que se ha ido calibrando, lo cual puede significar que el modelo se ajusta bien a ese conjunto de datos en particular.

Para evitar este problema se puede recolectar un nuevo conjunto de datos para ser usado en la etapa final de validación. Si se descubren discrepancias inaceptables entre el modelo y el sistema en la etapa de validación, el modelador debe volver a la fase de calibración hasta que el modelo sea aceptable.



5.9 Ejemplos

Ejemplo 1: una cola básica

Supóngase un sistema M/M/1 con λ de 7 clientes por hora y μ de 5 clientes por hora. En este caso el factor de utilización $\lambda/c\mu$, para $c=1$ es mayor que 1, por lo que la cola no se puede analizar de manera analítica, por lo que hay que simularla.

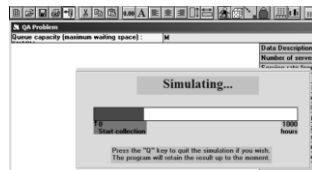
La figura 2 muestra las especificaciones de simulación y la figura 3 muestra la simulación ejecutada con WinQSB. De acuerdo a la figura 2 se simulará una cola con capacidad infinita, con disciplina PEPS, un servidor, parámetros de $\lambda = 7$ y $\mu=5$ y un tiempo de simulación de 1,000 unidades de tiempo de máquina.

De acuerdo a los resultados mostrados en la figura 5, es posible ver que en 5,049 observaciones recolectadas durante un tiempo simulado de 1,000 horas, el servidor está ocupado un 100% del tiempo, hay un estimado de 975 clientes en cola en promedio, con una espera en cola de 141 horas y un máximo de 1927 clientes en la fila.

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hour)	5
Customer arrival rate (per hour)	7
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M

Random Seed	
<input checked="" type="radio"/> Use default random seed	
<input type="radio"/> Enter a seed number	
<input type="radio"/> Use system clock	
Random seed number:	27437
Simulation time:	1000 hours
Start collection time:	0 hours
Queue capacity:	M
Max. number of data collections:	M
<input type="button" value="OK"/> <input type="button" value="Cancel"/> <input type="button" value="Help"/>	

Fig. 6 Especificaciones de la simulación



04-22-2011	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1	From Simulation
2	Customer arrival rate (λ) per hour =	7.0000
3	Service rate per server (μ) per hour =	5.0000
4	Overall system effective arrival rate per hour =	6.9768
5	Overall system effective service rate per hour =	5.0488
6	Overall system utilization =	99.9907 %
7	Average number of customers in the system (L) =	975.1276
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	974.1248
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	974.2157
10	Average time customer spends in the system (W) =	141.9993 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	141.8012 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	141.8145 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	0.0093 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	99.9907 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	\$0
17	Total cost of idle server per hour =	\$0
18	Total cost of customer waiting per hour =	\$0
19	Total cost of customer being served per hour =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	\$0
21	Total queue space cost per hour =	\$0
22	Total system cost per hour =	\$0
23	Simulation time in hour =	1000.0000
24	Starting data collection time in hour =	0
25	Number of observations collected =	5049
26	Maximum number of customers in the queue =	1927
27	Total simulation CPU time in second =	0.9510

Fig.7 Resultados de la simulación

Ejemplo 2:

A fin de simular cierta máquina expendedora de refrescos, será necesario analizar si la elección de un refresco en cualquiera de los canales de la misma es aleatoria y sin preferencias, o por el contrario, existe alguna preferencia en la selección de alguno de ellos. La máquina tiene cuatro canales. La siguiente tabla muestra el número de bebidas vendidas en cada uno de los 4 canales durante una semana. Se quiere contrastar la hipótesis de que los canales son seleccionados al azar a un nivel de significación del 5%.

Canal	Bebidas vendidas
1	13
2	22
3	18
4	17

Para realizar el contraste de Bondad de Ajuste debemos calcular las frecuencias esperadas de cada suceso bajo la hipótesis de uniformidad entre los valores. Si la selección del canal fuera aleatoria, todos los canales tendrían la misma probabilidad de selección y por lo tanto la frecuencia esperada de bebidas vendidas en cada uno de ellos debería ser aproximadamente la misma.

Como se han vendido en total 70 refrescos, la frecuencia esperada en cada canal es



$$E_i = n * p_i = 70 * \frac{1}{4} = 17.5 \quad i = 1, \dots, k$$

O _i	E _i
13	17.5
22	17.5
18	17.5
17	17.5

Resolviendo para la ecuación (1), $\chi^2 = 2.3428$

El valor crítico de la distribución χ^2 con (4-1)=3 grados de libertad es: $\chi^2_{0.95}(3) = 7.81$

Puesto que $\chi^2 < \chi^2_{0.95}(3)$, no se puede rechazar la hipótesis de que la selección de refrescos ha sido hecha de manera aleatoria, esto es, la probabilidad de elegir de cualquier canal es la misma.

Ejemplo 3

Supóngase que se quiere conocer la distribución de una serie de tiempos de servicio, en horas, de camiones de reparto. Se tienen 200 tiempos tomados en el último año.

Se quiere saber qué tipo de distribución reflejan estos datos. A fin de hacer esto, se utilizará el software SimuAr, el cual tiene una opción para el ajuste de distribuciones. La figura 6 muestra diferentes iteraciones para el problema.

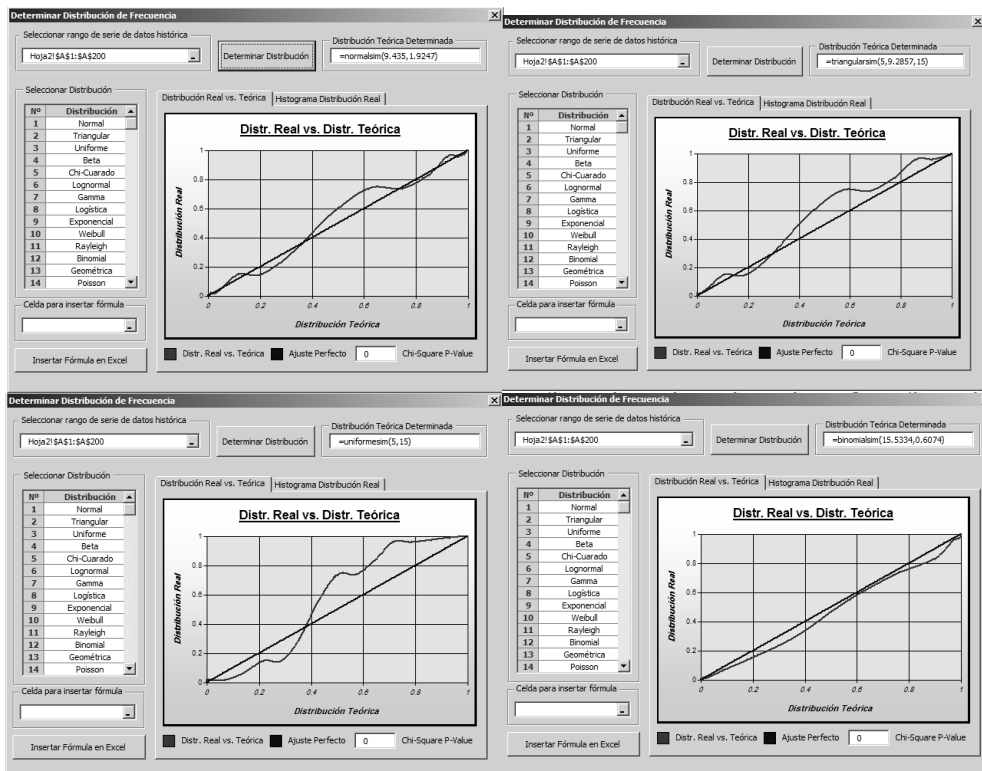


Fig. 8 Resultados de la prueba de bondad de ajuste en SimuAr



SimulAr hará la prueba de χ^2 cuando sea posible. En todo caso habrá que utilizar la gráfica donde haya una mejor aproximación entre la recta de ajuste perfecto (línea recta a 45°) con los datos reales. Aquí se escogieron las distribuciones Normal con parámetros [$\mu = 9.4$, $\sigma = 1.9$], Triangular con parámetros [$a = 5$, $b = 9.2857$, $c = 15$], Uniforme con parámetros [$\text{min.} = 5$, $\text{máx.} = 15$] y Binomial con parámetros [$n = 15.5334$, $p = 0.6074$]



Referencias

1. Askin, Ronald G., y Charles R. Standridge (1993) *Modeling and Analysis of Manufacturing Systems*, John Wiley & Sons, Estados Unidos.
2. Azarang, Mohammmd R. y Eduardo García Dunna (1996) *Simulación y análisis de Modelos Estocásticos*, McGraw Hill, México.
3. Ballou, R. (2004) *Logística, Administración de la Cadena de Suministros*, Prentice-Hall, México.
4. Barceló, Jaime (1996) *Simulación de Sistemas Discretos*, Isdefe, España
http://www.isdefe.es/publicaciones_monografias.php?id=12#mon
5. Eppen, G. D., y otros (2000) *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa*, Prentice-Hall, México.
6. Fishman, George (1978) *Conceptos y Métodos en la Simulación Digital de Eventos Discretos*, Limusa: México.
7. Gilbert, Nigel y Klaus G. Troitzsch (2006) *Simulación para las Ciencias Sociales*, McGraw-Hill, México
8. Insua Ríos David, y otros (2000) *Simulación. Métodos y Aplicaciones*. Alfaomega – Colombia.
9. Kelton, W. David y otros (2008) *Simulación con Software ARENA®*. McGraw-Hill – México.
10. Pike, R. (1986), *Optimization for Engineering Systems*, Van Nostrand Reinhold Co., Nueva York.
11. Pinilla, Vicente (2004) *Simulación. Introducción teórica y aplicaciones en administración*. Ediciones Uniandes – Colombia.
12. Pike, R. (1986), *Optimization for Engineering Systems*, Van Nostrand Reinhold Co., Nueva York.
13. Shapiro, Jeremy F. (2001) *Modelling the Supply Chain*, Duxbury, Estados Unidos.
14. Sterman, John D. (2000), *Business Dynamics. Systems Thinking and Modeling for a Complex World*, McGraw-Hill, Estados Unidos.
15. Turban, Efraim y otros (2002) *Introduction to Information Technology*, John Wiley & Sons, Estados Unidos.
16. Wu, Bin (2002) *Handbook of Manufacturing and Supply Systems Design: From Strategy Formulation to System Operation*, Taylor and Francis, Estados Unidos.

Artículos

- Faulín, Javier y Juan, Ángel, *Simulación Montecarlo con Excell*,
http://www.uoc.edu/in3/emath/docs/Simulacion_MC.pdf
- Mancilla, Manuel A. (2000), *Números Aleatorios, Historia, Teoría y Aplicaciones*, Ingeniería y Desarrollo, Diciembre, N. 08, pp. 49 – 60, Uninorte-Colombia, tomado de
<http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=85200804>, 8 de marzo de 2011.