Otros títulos publicados:

1. Ingeniería de Sistemas. *Benjamin S. Blanchard.*
2. La Teoría General de Sistemas. *Ángel A. Sarabia.*
3. Dinámica de Sistemas. *Javier Aracil.*
4. Dinámica de Sistemas Aplicada. *Donald R. Drew.*
5. Ingeniería de Sistemas Aplicada. Isdefe.
6. CALS (Adquisición y apoyo continuado durante el ciclo de vida). *Rowland G. Freeman III.*
7. Ingeniería Logística. *Benjamin S. Blanchard.*
8. Fiabilidad. *Joel A. Nachlas.*
9. Mantenibilidad. *Jezdimir Knezevic.*
10. Mantenimiento. *Jezdimir Knezevic.*
11. Ingeniería de Sistemas de Software. *Gonzalo León Serrano.*
12. Simulación de Sistemas Discretos. *Jaime Barceló.*
13. La Ergonomía en la Ingenieria de Sistemas. *Pedro R. Mondelo y Enrique Gregori Torada.*

Isdefe
Ingeniería de Sistemas

c/ Edison, 4
28006 Madrid
Teléfono (34-1) 411 50 11
Fax (34-1) 411 47 03
E-mail: monografias@isdefe.es

P.V.P.: 1.000 Ptas.
(IVA incluido)

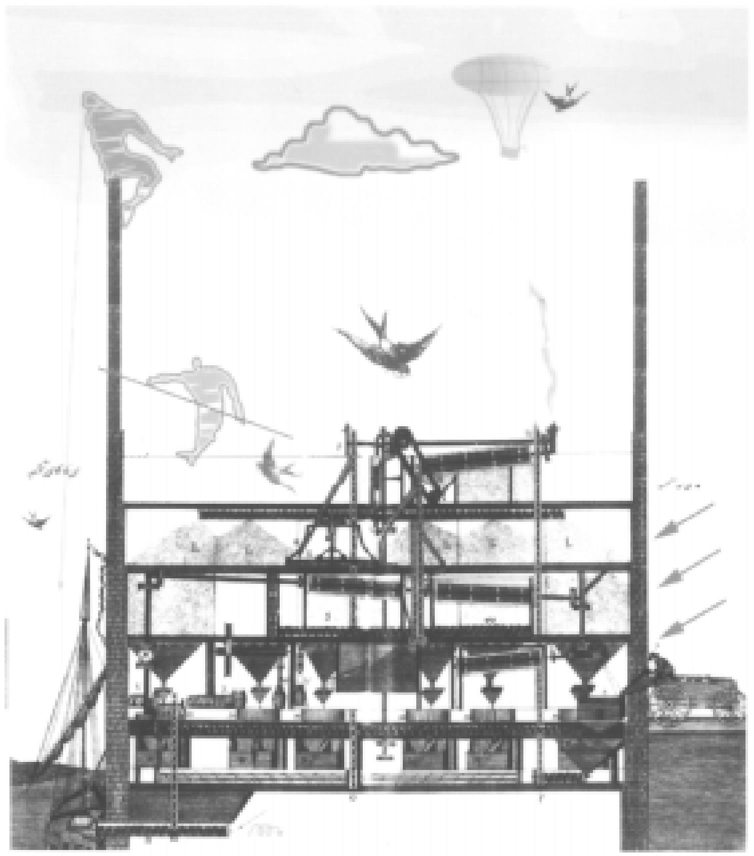
14 ANÁLISIS DE LAS DECISIONES MULTICRITERIO. *Carlos Romero*

Publicaciones de Ingeniería de Sistemas

ANÁLISIS DE LAS DECISIONES MULTICRITERIO

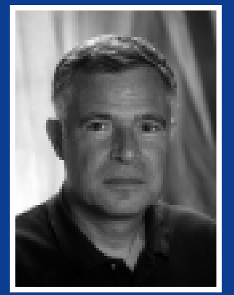
por

Carlos Romero



Isdefe

14



Carlos Romero

En la actualidad es Catedrático de Economía en la Universidad Politécnica de Madrid. Con anterioridad fue Catedrático en la Universidad de Córdoba y Profesor Visitante en la Universidad de Reading. Ha impartido Seminarios y Conferencias sobre diferentes aspectos de Análisis de la Decisiones en más de 30 universidades y centros de investigación de diferentes países (Alemania, Chile, Gran Bretaña, Italia, Túnez, etc.).

Sus trabajos sobre Economía, Investigación Operativa y Teoría de la Decisión han sido publicados en revistas como: *Agricultural Systems, American Journal of Agricultural Economics, Engineering Optimization, European Journal of Operational Research, Journal of Optimization Theory and Applications, Journal of the Operational Research Society, Omega, Operations Research Letters, Theory and Decision*, etc.

Es autor de once libros, de ellos sus textos más relacionados con esta monografía son: *Multiple Criteria Analysis for Agricultural Decisions* (Elsevier, 1989), *Handbook of Critical Issues in Goal Programming* (Pergamon, 1991), *Teoría de la Decisión Multicriterio* (Alianza, 1993) y *Economía de los Recursos Ambientales y Naturales* (Alianza, 1994). En 1994 recibió el Premio de Investigación de la Universidad Politécnica de Madrid y en 1995 fue miembro del Jurado que concede la Medalla de Oro de la Federación Europea de Asociaciones de Investigación Operativa.

ILUSTRACIÓN DE PORTADA
Molino hidráulico para cereales de Thomas Ellykott en 1797.

Primera Edición: Noviembre - 1996
1.250 ejemplares

c/ Edison, 4
28006 Madrid.

Diseño y fotomecánica:
HB&h Dirección de Arte y Edición

Infografía de portada:
Salvador Vivas

Impresión:
Gráficas Algorán, S.A.

ISBN: 84-89338-14-0
Depósito legal: M- 42127-1996
Printed in Spain - Impreso en España.

Para María Inés, por supuesto.

PRÓLOGO

La ingeniería de sistemas aborda problemas de naturaleza muy diversa que sin embargo tienen un denominador común: la necesidad de elegir entre diferentes alternativas que han de evaluarse en base a varios criterios. Así, en todas las fases del ciclo de vida de los sistemas es necesario elegir entre diferentes alternativas de diseño, de apoyo, de fabricación, etc. Por tanto, parece razonable que una colección de monografías que pretende cubrir los diferentes aspectos de la ingeniería de sistemas incluya una obra dedicada al análisis de las decisiones multicriterio.

La necesidad de imbricar el análisis de las decisiones con la ingeniería de sistemas ha supuesto algunos cambios de enfoque con respecto a otros trabajos míos sobre metodología de las decisiones. Así, en vez de apoyar mi exposición, como ha sido habitual en mis trabajos anteriores, en una teoría de la decisión de carácter descriptivo o normativo, en este libro he sustentado mis explicaciones en una teoría de la decisión fundamentalmente de carácter prescriptivo. Es decir, en vez de intentar explicar como se comportan los centros decisores (*enfoque positivo*) o como deberían de comportarse bajo ciertas condiciones (*enfoque normativo*), en este libro presento una serie de instrumentos analíticos que pretenden servir de ayuda (*enfoque prescriptivo*) a centros decisores que tienen que abordar problemas decisionales en el campo de la ingeniería de sistemas.

Coherentemente con estos planteamientos he pretendido en todo momento que la presentación sea clara e introductoria. Por ello, en la mayor parte de los casos he primado la argumentación intuitiva frente a formalizaciones más rigurosas. Dicho en pocas palabras, he pretendido no solo que el lector entienda con facilidad todos mis planteamientos sino que además se sienta capaz de aplicar las ideas expuestas a problemas decisionales concretos. Por esta razón, la exposición teórica la he apoyado en continuos ejemplos que pretenden por una parte facilitar la comprensión del texto y por otra hacer ver al lector las enormes posibilidades que presenta el análisis decisional multicriterio en el campo de la ingeniería de sistemas.

Los lectores interesados en una visión más general, más completa y tal vez algo más académica del análisis de las decisiones multicriterio pueden consultar mi libro *Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, Técnicas y Aplicaciones*.

Deseo agradecer al Teniente General Martín Aleñar y a Alberto Sols su invitación a que escribiera la presente monografía. Los comentarios de Comité de Redacción de la Serie de Monografías de ISDEFE a mi primer borrador de este texto resultaron especialmente útiles para mí. Finalmente, agradezco a María Jesús Rejas su esmerado trabajo de procesamiento de textos.

Carlos Romero
Madrid, septiembre de 1996

ÍNDICE GENERAL

1

Introducción

1.1. Estructura de un proceso de decisión

En su dimensión más básica un proceso de toma de decisión puede concebirse como la elección por parte de un centro decisor (un individuo o un grupo de individuos) de «lo mejor» entre «lo posible». Los problemas analíticos surgen a la hora de definir «lo mejor» y «lo posible» en un determinado contexto decisional.

El enfoque tradicional para abordar este tipo de cuestiones puede resumirse de la siguiente manera. La existencia de recursos limitados –entendiendo el término recurso en un sentido amplio– generan las restricciones del problema. El valor de las variables de decisión que satisfacen las restricciones constituyen lo que se denomina el conjunto factible o alcanzable que estructura y formaliza lo que se entiende por lo posible. Este conjunto puede ser continuo (esto es, existen infinitas soluciones factibles) o discreto (esto es, existe un número finito de soluciones factibles).

Una vez determinado lo posible (conjunto factible) se aborda la determinación de lo mejor. Para ello, se define una función de criterio que refleja adecuadamente las preferencias o deseos del centro decisor. Esta función de criterio, usualmente llamada función de utilidad o función de valor, asocia de una manera monótona un número real a cada solución factible. Recurriendo a técnicas matemáticas más o menos sofisticadas se optimiza la función de utilidad sobre el subconjunto alcanzable, obteniendo de esta manera la solución óptima (esto es, la mejor solución dentro del conjunto de soluciones posibles).

Resulta interesante observar que la primera fase del proceso decisional que acabamos de describir requiere una información exclusivamente de tipo técnico. Dicho con otras palabras, para determinar el conjunto factible sólo se necesita información no preferencial. Las preferencias reales del centro decisor aparecen en la segunda fase cuando se establece la función de criterio o de utilidad. Dicho brevemente, en la primera fase a partir de una información técnica se define lo que es posible mientras que en la segunda fase los juicios preferenciales del centro decisor definen lo mejor. La intersección de ambas fases determinan la mejor de entre las elecciones posibles; esto es, la «solución óptima».

Este sencillo marco de análisis es el que subyace a cualquier problema de decisión investigado dentro del paradigma tradicional de la optimización. Así, por ejemplo, en el campo de la teoría microeconómica para establecer el punto de equilibrio o decisión óptima del consumidor se comienza por establecer el conjunto de cestas de mercancías posibles, entendiendo por tales las que satisfacen las condiciones impuestas por la llamada restricción presupuestaria. A continuación, fundándose en un criterio de satisfacción o utilidad se procede a la ordenación de las cestas de mercancías posibles. Seguidamente, recurriendo a las técnicas de optimización condicionada de Lagrange se encuentra la cesta posible que proporciona la máxima utilidad al consumidor y que constituye la «solución óptima».

Los problemas de decisión abordados por medio de la programación matemática se ajustan, asimismo, a este tipo de estructura teórica. Así, en esta clase de problemas, las soluciones posibles son aquellas que satisfacen las restricciones del problema. Estas decisiones posibles se ordenan con arreglo a un cierto criterio que representa las preferencias del centro decisor. Esta función de criterio recibe el nombre de función objetivo. Recurriendo a técnicas matemáticas relativamente sofisticadas (p.ej. el «Simplex» cuando la estructura definida por las restricciones, así como la función de criterio son lineales) se establece la «solución óptima», como aquella solución factible para la que la función objetivo alcanza un valor óptimo.

La estructura paradigmática que acabamos de comentar posee una gran solidez desde un punto de vista lógico. Dicho con otras palabras, su coherencia interna es perfecta. Ahora bien, desde un punto de vista de contenido empírico, el marco teórico anterior presenta importantes debilidades que lo desvía considerablemente de los procesos reales de toma de decisiones. En efecto, en muchos casos de la vida ordinaria, los centros decisores no desean ordenar las soluciones factibles con arreglo a un único criterio, sino que desean efectuar esta tarea con arreglo a diferentes criterios que reflejen sus particulares preferencias.

Así, cuando el lector de esta monografía decida cambiar de coche o de apartamento, el conjunto factible que define lo posible (todos los modelos de coches y apartamentos que caen dentro de su restricción presupuestaria), se evalúa en base a varios criterios. Así, en el caso de la compra de un nuevo coche consideraremos como criterios: la potencia, el consumo, el confort, etc. En el caso del apartamento los centros decisores (compradores potenciales) consideran criterios como: número de habitaciones, barrio, antigüedad del edificio, etc. Es decir, los centros decisores eligen lo mejor entre lo posible, sin embargo la definición de lo mejor es ambigua, implicando en muchas situaciones reales la consideración simultánea de más de un criterios de elección. Con objeto de enfatizar el amplio rango de problemas decisionales que pueden formularse fructíferamente con una óptica de criterio múltiples se ha elaborado la Tabla 1 en la que figuran recogidos una serie de problemas que ya han sido analizados con la ayuda de un marco decisional multicriterio.

Otro problema empírico relacionado con el paradigma decisional anteriormente expuesto se debe a la definición y formalización de lo posible.

Formulación de raciones ganaderas. - Coste de la ración. - Desequilibrios nutritivos. - Volumen de la ración.	**Planificación financiera.** - Expansión de la empresa. - Dividendos. - Solvencia.	**Diseño de un anillo octagonal.** - Sensibilidad. - Rigidez.
Gestión de pesquerías. - Coste de las capturas. - Nivel de empleo. - Rendimiento sostenible.	**Diseño de embalses.** - Riesgo de inundaciones. - Producción de energía. - Suministro de agua.	**Planificación de la cuenca de un río.** - Incremento de renta. - Equidad distributiva.
Planificación forestal. - Producción de madera. - Actividades recreativas. - Diversidad de fauna. - Secuestro de carbono.	**Planificación de fincas.** - Margen bruto. - Riesgo. - Impacto ambiental (nitratos, pesticidas, etc.).	**Comportamiento de las grandes empresas.** - Beneficios. - Ventas. - Precio de las acciones.
Selección de carteras. - Esperanza de los rendimientos. - Varianza de los rendimientos.	**Funciones de oferta de trabajo.** - Renta. - Ocio.	**Racionamiento de capital.** - Valor actual neto. - Tasa interna de rendimiento. - Gastos anuales de explotación.

Tabla 1 - ALGUNOS EJEMPLOS ILUSTRATIVOS DE PROBLEMAS MULTICRITERIO EN ECONOMÍA, FINANZAS E INGENIERÍA -

En efecto, la consideración de las restricciones que definen el conjunto factible como ataduras rígidas que no pueden violarse no es en muchos casos realista. En efecto en muchos contextos decionales es más realista aceptar que una cierta relajación en el cumplimiento de las restricciones no afecta seriamente al marco real en el que hemos definido el problema decisional, pudiendo obtenerse gracias a esta relajación, mejores significativas en los resultados alcanzados por algunos criterios.

Estos ejemplos y consideraciones ponen de manifiesto que los centros decisores reales toman sus decisiones en base a varios objetivos y no en base a un único criterio u objetivo, como supone el paradigma decisional tradicional anteriormente comentado. En definitiva, los centros decisores cuya racionalidad queda adecuadamente reflejada por el paradigma tradicional son entes abstractos cuyo comportamiento queda considerablemente alejado del que realmente siguen los centros decisores de carne y hueso que pueblan el mundo en el que vivimos. Por todo ello, investigadores de diferentes áreas, principalmente del campo de la investigación operativa, han desarrollado en los últimos treinta años un paradigma alternativo al tradicional, que permiten acomodar con mayor precisión los procesos reales de decisión. El propósito de esta monografía consiste en exponer los aspectos básicos del paradigma decisional multicriterio, poniendo especial énfasis en aquellos métodos específicos especialmente relevantes en el campo de la ingeniería de sistemas.

1.2. El papel del análisis multicriterio en la ingeniería de sistemas

El análisis multicriterio se puede visualizar como una herramienta analítica de una gran potencialidad en los procesos de ingeniería de sistemas. Esta imbricación de los enfoques multicriterio y sistémico puede plantearse tanto a un nivel conceptual como a un nivel operativo o de actuaciones concretas.

A un nivel conceptual puede decirse que el hombre desarrolla los sistemas con el propósito de alcanzar una amplia gama de objetivos de diferente naturaleza. En bastantes casos estos objetivos entran en conflicto entre sí, por lo que se hace necesario encontrar un compromiso o equilibrio entre los mismos.

A un nivel operativo la ingeniería de sistemas puede concebirse como una secuencia de pasos o actividades en las que en todo momento es necesario elegir entre diferentes alternativas. Normalmente estas alternativas deben de evaluarse con arreglo a diferentes criterios. Así, en todas las fases del ciclo de vida de los sistemas es necesario elegir entre diferentes alternativas de diseño, de fabricación, de mantenimiento, etc. Conforme la complejidad del sistema es mayor, el análisis decisional subyacente se hace más difícil, implicando un número mayor de objetivos. Dicho en pocas palabras, el análisis multicriterio constituye un instrumento racional y objetivo tanto para mejorar la comprensión de los procesos de decisión que subyacen a los procesos sistémicos, como para ayudar a los centros decisores a abordar la necesaria comparación entre alternativas.

Esta monografía pretende estimular al ingeniero de sistemas a incorporar las técnicas decisionales multicriterio a su conjunto de herramientas analíticas. Por esta razón, se expondrán a lo largo del texto aquellos enfoques multicriterio que, en principio, parecen mostrar una mayor potencialidad en el campo sistémico. Asimismo, los ejemplos elegidos para exponer las técnicas (p.ej. selección de ofertas, alternativas de fabricación, etc), pretenden aclarar el importante papel del análisis multicriterio en la ingeniería de sistemas.

1.3. Algunos conceptos básicos

Para poder entender tanto el significado como el alcance del análisis decisional multicriterio es necesario introducir una serie de conceptos y definiciones. Comencemos con el concepto de **atributo**. Este concepto se refiere a los valores con los que el centro decisor se enfrenta a un determinado problema decisional. Para que estos valores se conceptualicen como atributos es necesario que puedan medirse independientemente de los deseos del centro decisor y a su vez sean susceptibles de expresarse como una función de las correspondientes variables de decisión. Así como veremos en el ejemplo de la Sección 2.4 el coste y el peso son los valores con los que el centro decisor aborda el problema de encontrar el diseño óptimo de un contenedor. Estos valores se conceptualizan como atributos pues se pueden medir con independencia de los deseos del centro decisor, formulándose matemáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{COSTE} &= f_1(\mathbf{x}) = 1000\,x_1^2 + 2000\,x_1\,x_2 \\ \text{PESO} &= f_2(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 32\,x_1\,x_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde: x_1 = dimensión de los lados de la base del contenedor y x_2 = dimensión de la altura del contenedor.

El concepto de atributo se enlaza con el concepto de **objetivo**. Los objetivos representan direcciones de mejora de los atributos que estemos considerando. La mejora puede interpretarse en el sentido «más del atributo mejor» o bien «menos del atributo mejor». El primer caso corresponde a un proceso de maximización y el segundo a un proceso de minimización. Así, maximizar la fiabilidad de un sistema, minimizar el coste de un proceso de producción, etc., son ejemplos típicos de objetivos. En general, los objetivos toman la forma: Max f(**x**) o Min f (**x**). Por ejemplo, Min $(4\ x_1^2 + 32\ x_1\ x_2)$ representa el objetivo de minimizar el peso del contenedor.

El concepto de objetivo se enlaza con el concepto de **meta**, aunque para ello tenemos que introducir previamente el concepto de **nivel de aspiración**. Un nivel de aspiración representa un nivel aceptable de logro para el correspondiente atributo. La combinación de un atributo con un nivel de aspiración genera una meta. Así, si en el ejemplo anterior se desea fabricar un contenedor con un peso máximo de 150 Kg tendremos una meta. La expresión matemática de tal meta sería $4\,x_1^{\,2} + 32\,x_1\,x_2 \leq 150$. En algunos casos, el centro decisor puede desear alcanzar exactamente el nivel de aspiración -es decir, no desea desviaciones por arriba ni por abajo con respecto al nivel de aspiración- en tal caso, la expresión matemática de la meta será $f(x) = t$, siendo t el nivel de aspiración.

Las ideas y conceptos expuestos pueden clarificarse diciendo que, por ejemplo, la fiabilidad de un sistema es un atributo, maximizar dicha fiabilidad un objetivo y, finalmente, alcanzar una fiabilidad al menos igual a un determinado nivel de aspiración es una meta. Por último, introducimos el concepto de **criterio** como un término general que engloba los tres conceptos precedentes. Así, los criterios son los atributos, objetivos o metas que se consideran relevantes en un cierto problema decisional. Por consiguiente el análisis de la decisión multicriterio constituye un marco general o paradigma en el que se investigan problemas decisionales con diferentes atributos, objetivos o metas.

Para concluir este apartado puede resultar oportuno tratar de aclarar una aparente anomalía que surge de la diferenciación conceptual que acabamos de realizar. En efecto, cabe preguntarse ¿cuál es la diferencia real que existe entre las metas y las restricciones tradicionales? Aparentemente, no existe ningún tipo de diferencia entre ambos conceptos, pues las metas y las restricciones se representan como desigualdades. La diferencia existente entre ambos conceptos reside en el significado que dé al término de la derecha de la correspondiente desigualdad. Si se trata de una meta, el término de la derecha es un nivel de aspiración deseado por el centro decisor que puede o no ser alcanzado. Sin embargo, si la desigualdad se refiere a una restricción, el término de la derecha debe de alcanzarse o nos encontraremos con una solución no factible o inalcanzable. Dicho con otras palabras, las metas permiten ciertas violaciones de las inecuaciones, cuestión que, sin embargo, no es posible en el dominio de las restricciones.

Por ejemplo, la desigualdad $4\,x_1^{\,2} + 32\,x_1\,x_2 \leq 150$ referente al peso del contenedor, puede interpretarse como una meta o como una restricción, según cual sea la interpretación que se dé al término de la derecha de la desigualdad. Así, se tratará de una meta si los 150 kilogramos de peso representan un simple nivel de aspiración para el centro decisor. Puede decirse que las metas constituyen una especie de restricciones «blandas» que pueden violarse sin que por ello se generen soluciones imposibles. La cantidad de violación puede medirse introduciendo dos variables de desviación, una negativa n y otra positiva p. Así la meta consistente en fabricar un contenedor con un peso que no supere los 150 kilogramos, puede representarse por medio de siguiente igualdad

$$4x_1^2 + 32x_1x_2 + n - p = 150 \qquad (1.2)$$

Por consiguiente, una meta puede representarse de la siguiente manera:

ATRIBUTO + VARIABLES DE DESVIACIÓN = NIVEL DE ASPIRACIÓN

o en términos matemáticos como:

$$f(\mathbf{x}) + n - p = t \qquad (1.3)$$

El análisis multicriterio basado en metas múltiples será objeto de detallado estudio en el Capítulo 3 de esta monografía.

1.4. El criterio de optimalidad paretiana

En 1896, el economista italiano Vilfredro Pareto introdujo un criterio de optimalidad que ha recibido su nombre y que puede considerarse crucial en teoría económica. En su formulación inicial, Pareto considera que una colectividad se encuentra en un estado óptimo si ninguna persona de esa colectividad puede mejorar su situación sin que empeore la situación de alguna otra persona de la misma. Esta clase de optimalidad se denomina también eficiencia paretiana. El atractivo del criterio de Pareto es que, aún tratándose indiscutiblemente de un juicio de valor, es muy poco fuerte, por lo que la mayoría de las personas lo aceptarían razonablemente.

Este criterio de optimalidad paretiana puede transferirse de una manera directa de la economía al análisis decisional multicriterio. Para ello, basta sustituir el concepto original de Pareto de «sociedad» o «colectivo» de personas por el de conjunto de criterios. Así, cada criterio individual representa a una persona en esta nueva interpretación. Esta traslación del concepto de optimalidad paretiana juega un papel esencial en los diferentes enfoques desarrollados dentro del paradigma multicriterio. Puede decirse que la eficiencia paretiana es una condición exigida como necesaria para poder garantizar la racionalidad de las soluciones generadas por los diferentes enfoques multicriterio.

El concepto de optimalidad paretiana dentro del campo multicriterio puede definirse formalmente de la siguiente manera. Un conjunto de soluciones es eficiente (o Pareto óptimas) cuando está formado por soluciones factibles (esto es, que cumplen las restricciones), tales que no existe otra solución factible que proporcione una mejora en un atributo sin producir un empeoramiento en al menos otro de los atributos. A título de ejemplo, supongamos que en un problema de selección de un modelo de caza-bombardero el centro decisor considera como relevantes los siguientes atributos: velocidad, carga máxima, coste y maniobrabilidad. Las seis ofertas posibles vienen representadas en la Tabla 2.

Todos los atributos considerados son del tipo «más mejor» excepto el atributo coste que, obviamente, es del tipo «menos mejor». De acuerdo con la definición de eficiencia paretiana el modelo F es no eficiente o inferior y nunca será elegido por un centro decisor racional, pues está dominado por la alternativa o modelo D. En efecto, aunque la velocidad y el coste en los dos modelos coinciden, sin embargo, tanto la carga máxima como la maniobrabilidad proporcionada por el modelo D es mayor que el proporcionado por el

	ATRIBUTOS			
ALTERNATIVA	VELOCIDAD (Km/hora)	CARGA (Toneladas)	COSTE (Millones ptas.)	MANIOBRABILIDAD (Escala 1-10)
A	1400	10	500	9
B	1700	8	600	7
C	1400	12	500	8
D	1800	7	700	7
E	1500	9	600	9
F	1800	6	700	6

Tabla 2 - SELECCIÓN DE UN MODELO DE CAZA-BOMBARDERO -

modelo F. Por el contrario, los modelos A, B, C y E son eficientes en términos paretianos, pues ninguno de los modelos iguala o supera a los otros tres en los cuatro criterios considerados.

Todos los enfoques multicriterio *pretenden* obtener soluciones que sean eficientes en el sentido paretiano que acabamos de definir. Incluso dentro de la programación multiobjetivo –que presentaremos en el próximo Capítulo– el primer paso consiste en obtener el conjunto de soluciones factible y eficientes. Esto es, el conjunto de soluciones posibles se particiona en dos subconjuntos disjuntos. El subconjunto de soluciones factibles no eficientes y el subconjunto de soluciones factibles y eficientes. Una vez realizada tal partición, se introducen de diferentes maneras las preferencias del centro decisor con objeto de obtener un compromiso entre las soluciones factibles y eficientes.

1.5. La normalización de los criterios

Aunque no siempre es necesario en muchos métodos multicriterio, resulta esencial proceder a la normalización de los diferentes criterios en consideración. La normalización es necesaria, al menos por los tres tipos de razones que exponemos seguidamente.

En primer lugar debe de tenerse en cuenta que en la mayor parte de los contextos decisionales las unidades en que están medidos los diferentes criterios suelen ser muy diferentes. Así, en el ejemplo del apartado anterior los criterios están medidos en kilómetros/hora, toneladas, pesetas, etc. En este tipo de situación, una comparación o agregación de los diferentes criterios carece de significado.

En segundo lugar debe asimismo tenerse en cuenta que en muchos problemas multicriterio, los valores alcanzables por los diferentes criterios pueden ser muy diferentes. En tales casos, sin una normalización previa de los criterios los métodos multicriterio pueden conducirnos a soluciones sesgadas hacia los criterios con valores alcanzables mayores (p.ej. la velocidad con respecto a la maniobrabilidad en nuestro ejemplo del caza-bombardero).

Finalmente, cuando en la Sección siguiente analicemos diferentes procedimientos para interaccionar con el centro decisor con el propósito de obtener indicadores de sus preferencias, la normalización previa de los criterios facilita este tipo de tarea. En efecto, en bastantes casos los centros decisores realizan con más facilidad las tareas comparativas entre criterios cuando trabajan con valores normalizados de los mismos en vez de con sus correspondientes valores originales.

Seguidamente pasamos a exponer brevemente los procedimientos de normalización de criterios más utilizados en la práctica. Uno de los métodos más simples consiste en dividir los valores que alcanza el criterio por su valor «mejor». El valor mejor es el máximo cuando el criterio consiste en un atributo del tipo «más mejor» o el mínimo cuando se trata de un atributo del tipo «menos mejor». Así, según se desprende de los datos de la Tabla 2 los valores normalizados para los criterios, por ejemplo, velocidad y coste (columnas 1 y 3 de la Tabla 1) son:

$$\begin{aligned} &\text{Velocidad} = \left(\frac{1400}{1800} = 0{,}77; \quad \frac{1700}{1800} = 0{,}94; \quad \cdots\cdots \quad \frac{1800}{1800} = 1 \right) \\ &\text{Coste} = \left(\frac{500}{500} = 1; \quad \frac{600}{500} = 1{,}20; \quad \cdots\cdots \quad \frac{700}{500} = 1{,}4 \right) \end{aligned} \qquad (1.4)$$

También pueden normalizarse los criterios, dividiendo los valores que alcanza el criterio por su recorrido. Se entiende por recorrido la diferencia entre el valor «mejor» y el valor «peor» alcanzado por cada criterio. Con este procedimiento los valores normalizados de los criterios velocidad y coste pasan a ser:

$$\begin{aligned} &\text{Velocidad} = \left(\frac{1400}{1800-1400} = 3{,}5; \quad \frac{1700}{1800-1400} = 4{,}25; \quad \cdots\cdots \quad \frac{1800}{1800-1400} = 4{,}5 \right) \\ &\text{Coste} = \left(\frac{500}{700-500} = 2{,}5; \quad \frac{600}{700-500} = 3; \quad \cdots\cdots \quad \frac{700}{700-500} = 3{,}5 \right) \end{aligned} \qquad (1.5)$$

En algunos métodos multicriterio (véase la programación compromiso en el Capítulo siguiente) resulta conveniente que los valores normalizados de los criterios queden acotados en el intervalo [0,1]. Este tipo de normalización puede conseguirse con facilidad restando al «mejor» valor el que realmente alcanza el criterio, dividiendo seguidamente dicha diferencia por el correspondiente rango. Operando de esta forma los valores normalizados de los criterios velocidad y coste son:

$$\text{Velocidad} = \left(\frac{1800-1400}{1800-1400} = 1; \quad \frac{1800-1700}{1800-1400} = 0{,}25; \quad \cdots\cdots \quad \frac{1800-1800}{1800-1400} = 0 \right)$$

$$\text{Coste} = \left(\frac{500-500}{700-500} = 0; \quad \frac{600-500}{700-500} = 0{,}50; \quad \cdots\cdots \quad \frac{700-500}{700-500} = 1 \right) \qquad (1.6)$$

Conviene indicar que con este sistema de normalización el valor normalizado del criterio es 0 cuando el criterio alcanza su «mejor» valor y por el contrario es 1 cuando el criterio alcanza su «peor» valor. Finalmente, conviene indicar que en un contexto de programación por metas (Capítulo 3) la manera más eficaz de normalizar los criterios veremos que consiste en dividir las variables de desviación por los correspondientes niveles de aspiración. De esta forma pasamos de trabajar con desviaciones absolutas que están medidas en las unidades que caracterizan a la correspondiente meta a operar con desviaciones porcentuales que carecen de dimensión.

1.6. La ponderación preferencial de los criterios

Los criterios relevantes en un problema decisional pueden tener diferente importancia para el centro decisor. Así, la velocidad del caza-bombardero puede tratarse de un criterio que el centro decisor considere más importante que la carga máxima del mismo o viceversa. Este hecho hace que en muchos problemas decisionales resulte necesario obtener unos pesos o indicadores de las preferencias relativas del centro decisor por unos criterios con respecto a otros. Conviene indicar que así como la tarea de normalizar criterios requiere exclusivamente una información de tipo técnico, la estimación de las preferencias relativas conlleva una fuerte carga subjetiva lo que hace necesario que para estimar dichos pesos preferenciales tengamos que interaccionar de una manera u otra con el centro decisor.

Seguidamente pasamos a exponer alguno de los procedimientos utilizados para poder estimar pesos preferenciales. La forma más sencilla de abordar esta tarea consiste en pedir al centro decisor que clasifique los criterios por orden de importancia. Es decir, si tenemos n criterios se solicita al centro decisor que asigne el número 1 al criterio que considere más importante, el número 2 al criterio siguiente en importancia hasta asignar el número n al criterio que considera menos importante. Los pesos compatibles con dicha información pueden obtenerse a partir de alguna de estas dos expresiones [1]:

$$W_j = \frac{1/r_j}{\sum_{i=1}^{n} 1/r_i} \qquad (1.7)$$

$$W_j = \frac{(n - r_j + 1)}{\sum_{i=1}^{n} (n - r_i + 1)} \qquad (1.8)$$

donde r_j es el lugar o posición que ocupa el criterio j- ésimo en la clasificación establecida por el centro decisor. Supongamos que el responsable de la selección de un caza-bombardero ordena la importancia de los criterios de la siguiente manera:

Maniobrabilidad ← Velocidad ← Coste ← Carga

La aplicación de la fórmula (1.7) conduce a los siguientes pasos o indicadores cardinales de preferencias para los cuatro criterios considerados:

$$W_1(\text{velocidad}) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 0{,}24; \quad W_2(\text{carga}) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 0{,}12$$
$$W_3(\text{coste}) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 0{,}16; \quad W_4(\text{maniobrabilidad}) = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 0{,}48 \tag{1.9}$$

La aplicación de la fórmula (1.8) conduce a los siguientes nuevos pesos o indicadores cardinales de preferencias para los cuatro criterios considerados:

$$W_1(\text{velocidad}) = \frac{(4-2+1)}{4+3+2+1} = 0{,}30; \quad W_2(\text{carga}) = \frac{(4-4+1)}{4+3+2+1} = 0{,}10$$
$$W_3(\text{coste}) = \frac{(4-3+1)}{4+3+2+1} = 0{,}20; \quad W_4(\text{maniobrabilidad}) = \frac{(4-1+1)}{4+3+2+1} = 0{,}40 \tag{1.10}$$

Es interesante observar que con el procedimiento expuesto la suma de los pesos preferenciales obtenidos es igual a uno. Esta propiedad es bastante útil tanto para interpretar el significado de los pesos como para facilitar su uso por parte del centro decisor.

El procedimiento de estimar pesos preferenciales que acabamos de expresar, aunque tiene un claro interés práctico no está exento de dificultades. Así, con este enfoque tenemos en cuenta que el criterio i-ésimo es preferido al criterio j-ésimo, pero no tenemos en absoluto en cuenta la intensidad con la que el criterio i-ésimo es preferido al j-ésimo. Por otra parte, ordenar simultáneamente los n criterios es una tarea complicada para cualquier centro decisor, muy especialmente cuando el número n de criterios es elevado.

Este tipo de dificultades pueden superarse recurriendo a un procedimiento sugerido por Saaty [2] que constituye la base de la metodología multicriterio conocida por procesos analíticos jerarquizados (véase Capítulo 4). Este procedimiento requiere del centro decisor la comparación simultánea de sólo dos objetivos. Es decir, el centro decisor ha de realizar una comparación de valores subjetivos por «parejas».

Los valores numéricos que propone aplicar Saaty son los siguientes: (1) cuando los criterios son de la misma importancia; (3) moderada importancia de un criterio con respecto a otro; (5) fuerte importancia; (7) demostrada importancia; y (9) extrema importancia. Asimismo, Saaty sugiere valores intermedios para juicios de valor contiguos. Supongamos que con la aplicación de esta escala el centro decisor nos proporciona los valores subjetivos que figuran recogidos en la matriz de la Tabla 3.

La interpretación de los elementos de dicha matriz es inmediata. Así, tenemos que el centro decisor considera que la velocidad es demostradamente mas importante que la carga, que la velocidad se puede considerar que tiene la misma o una moderada mayor importancia que el coste, etc. Es interesante observar que, por su propia construcción, este tipo de matrices a lo «Saaty» poseen propiedades recíprocas (esto es, $a_{ij} = 1/a_{ji}$). A partir de la matriz anterior se pretende encontrar un vector de pesos (W_1, W_2, W_3, W_4) que resulte consistente con las preferencias subjetivas mostradas por el centro decisor y reflejadas en la comentada matriz. Es decir, tenemos que encontrar una solución al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{W_i}{W_j} = a_{ij} \quad i = 1, \cdots n \quad j = 1, \cdots n \quad j > i \tag{1.11}$$

Dadas las normales inconsistencias en los juicios de valor emitidos por el centro decisor el sistema de ecuaciones homogéneas dado por (1.11) tiene como única solución la trivial (i.e. $W_1 = ... = W_4 = 0$). Ante tal situación el paso lógico consiste en encontrar el vector de pesos W que más se aproxime a los pesos verdaderos. Esta tarea puede abordarse recurriendo a diferentes procedimientos matemáticos. Uno de los más sencillos consiste en calcular la media geométrica de los elementos de cada fila de la matriz de comparación por «parejas». Operando de esta manera obtenemos:

	VELOCIDAD (Km/hora)	CARGA (Toneladas)	COSTE (Millones ptas.)	MANIOBRABILIDAD (Escala 1-10)
Velocidad (Km/hora)	1	7	2	1/2
Carga (Toneladas)	1/7	1	1/5	1/9
Coste (Millones ptas.)	1/2	5	1	1
Maniobrabilidad (Escala 1-10)	2	9	1	1

Tabla 3 - MATRIZ DE COMPARACIÓN POR "PAREJAS" (SELECCIÓN DE UN CAZA-BOMBARDERO) -

$$\begin{aligned}
W_1 &= \left(1 \times 7 \times 2 \times \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = 1{,}627 \\
W_2 &= \left(\frac{1}{7} \times 1 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{4}} = 0{,}237 \\
W_3 &= \left(\frac{1}{2} \times 5 \times 1 \times 1\right)^{\frac{1}{4}} = 1{,}257 \\
W_4 &= \left(2 \times 9 \times 1 \times 1\right)^{\frac{1}{4}} = 2{,}060
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Tal como hemos indicado anteriormente, es conveniente trabajar con pesos que sumen la unidad. Para ello, nos basta con dividir cada uno de los pesos anteriormente hallados por la suma de todos ellos. Operando, de tal manera obtenemos los siguientes pesos:

$$W_1 = 0{,}314 \quad W_2 = 0{,}046 \quad W_3 = 0{,}243 \quad W_4 = 0{,}398 \tag{1.13}$$

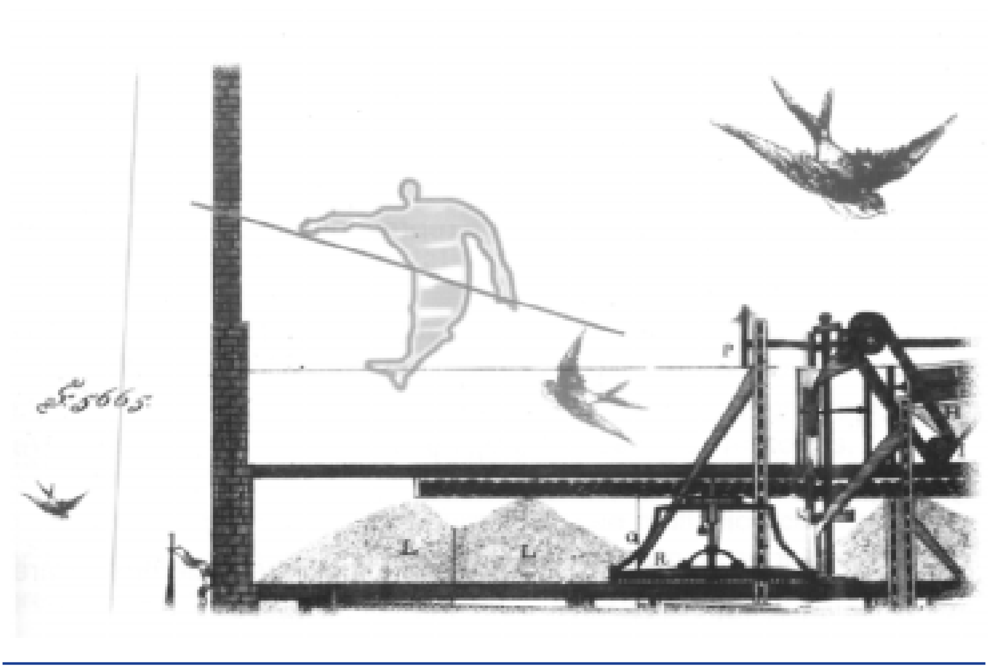
Es interesante observar que el procedimiento de la media geométrica hace mínima la suma de los cuadrados de las desviaciones entre W_i/W_j y a_{ij}, midiendo dichas desviaciones en sus logaritmos neperianos. Es decir el resultado obtenido hace mínima la siguiente expresión [3]:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>1} \left[\left(l_n W_i - l_n W_j\right) - l_n a_{ij}\right]^2 \tag{1.14}$$

Aunque no puede hablarse del mejor método para estimar pesos preferenciales, sin embargo, siempre que las características del centro decisor permitan efectuar una interacción estructurada los métodos tipo Saaty basados en comparaciones por «parejas» parecen ofrecer una mayor solidez con respecto a otros métodos alternativos.

2

Métodos de optimización multiobjetivo



2.1. Aspectos básicos

La programación multiobjetivo -también llamada optimización vectorial- constituye un enfoque multicriterio de gran potencialidad cuando el contexto decisional está definido por una serie de objetivos a optimizar que deben de satisfacer un determinado conjunto de restricciones. Como la optimización simultánea de todos los objetivos es usualmente imposible -pues en la vida real entre los objetivos que pretende optimizar un centro decisor suele existir un cierto grado de conflicto- el enfoque multiobjetivo en vez de intentar determinar un no existente óptimo pretende establecer el conjunto de soluciones eficientes o Pareto óptimas, según el sentido que se dio a este concepto en la Sección 1.4.

Planteado el problema en estos términos, la estructura general de un programa multiobjetivo puede representarse esquemáticamente de la siguiente manera:

$$E\mathit{ff}\ f(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \ldots f_i(\mathbf{x}), \ldots f_n(\mathbf{x})] \qquad (2.1)$$

sujeto a:

$$\mathbf{x} \in \mathbf{F} \qquad (2.2)$$

donde:

$E\mathit{ff}$ significa la búsqueda de soluciones eficientes o Pareto óptimas.

$f_i(\mathbf{x})$ = Expresión matemática del atributo i-ésimo.
x = Vector de variables de decisión.
F = Conjunto de restricciones -usualmente lineales- que definen el conjunto de soluciones posibles.

Debe de indicarse que la búsqueda de soluciones eficientes puede establecerse en un sentido maximizador cuando «más del atributo mejor» o en su sentido minimizador cuando «menos del atributo mejor».

El propósito del enfoque multiobjetivo consiste en segregar del conjunto de soluciones posibles un subconjunto propio del mismo cuyos elementos gocen de la condición de optimalidad paretiana en el sentido que se dio a este concepto en el capítulo anterior. Debe de indicarse que la programación multiobjetivo aborda tal tarea utilizando una información estrictamente técnica (restricciones, expresiones matemáticas de los atributos, etc) sin incorporar al análisis ninguna información sobre las preferencias del centro decisor. Planteado el problema en estos términos, la operatividad de la programación multiobjetivo consistirá en desarrollar una serie de técnicas que permitan a partir de la estructura (2.1)-(2.2) generar el conjunto de soluciones eficientes o Pareto óptimas. En el apartado siguiente se realiza una exposición introductoria de dichas técnicas.

2.2. Técnicas generadoras del conjunto eficiente

Los métodos más utilizados para generar, o al menos aproximar, el conjunto eficiente son: el método de las ponderaciones, el método de las restricciones y el simplex multicriterio. Seguidamente pasamos a exponer los rasgos básicos de cada uno de estos métodos.

En el método de las ponderaciones se multiplica cada objetivo por un peso o factor no negativo, procediéndose seguidamente a agregar todos los objetivos ponderados en una única función objetivo.

La optimización de dicha función ponderada y agregada genera un elemento del conjunto eficiente. Por medio de la parametrización de los pesos asociados a los objetivos se va aproximando el conjunto eficiente o conjunto de soluciones Pareto óptimas. Así, en un problema multiobjetivo con n objetivos a maximizar la aplicación del método de las ponderaciones conduce al siguiente programa lineal paramétrico:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(\mathbf{x}) \tag{2.3}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\in \mathbf{F} \\ \lambda &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Para cada vector de pesos λ se obtiene un elemento del conjunto eficiente. Debe de apuntarse que el método de las ponderaciones garantiza soluciones eficientes sólo cuando los pesos son estrictamente positivos (p.ej. $\lambda > 0$). Pasamos seguidamente a exponer los rasgos básicos del llamado método de las restricciones. Con este método se optimiza uno de los n objetivos esto es, se trata como función objetivo propiamente dicha mientras que los demás objetivos se incorporan al conjunto de restricciones como restricciones paramétricas. Para cada conjunto de valores que se de al vector de términos independientes, o término de la derecha, se genera un elemento del conjunto eficiente. Así, en un problema multiobjetivo con n objetivos a maximizar, la aplicación del método de las restricciones conduce al siguiente nuevo programa lineal paramétrico:

$$\text{Max } f_j(\mathbf{x}) \tag{2.5}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} & f_j(\mathbf{x}) \geq H_i \quad i = 1, 2, \cdots \ j-1, j+1, \cdots \ n \\ & \mathbf{x} \in \mathbf{F} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Variando paramétricamente los términos de la derecha H_i iremos generando los elementos del conjunto eficiente. Debe de apuntarse que el método de las restricciones garantiza soluciones eficientes sólo cuando las restricciones paramétricas de (2.6) son activas en el óptimo.

El Simplex muticriterio genera todos los puntos de esquina (*corner points*) eficientes de un problema multiobjetivo desplazándose para ello de un punto esquina al punto esquina contiguo. El algoritmo del Simplex tradicional constituye el mecanismo adecuado para efectuar este tipo de desplazamiento de un punto de esquina a un punto adyacente, por medio de una operación de pivotado. En combinación con esta operación de salto de un punto de esquina a otro, el Simplex multicriterio recurre a una subrutina que permite comprobar la eficiencia o no de cada punto obtenido. El Simplex multicriterio trabaja eficientemente sólo con problemas de un tamaño reducido. Entendiendo por tamaño reducido, problemas con un número de objetivos inferior a cinco, así como un número de variables y restricciones no superior a cien [4].

La programación multiobjetivo, tal como la hemos presentado en los apartados anteriores, puede considerarse como la primera etapa de un proceso decisional. En efecto, con la aplicación de este enfoque conseguimos particionar el conjunto factible en dos subconjuntos: el subconjunto de soluciones paretianamente eficientes y el subconjunto de soluciones dominadas, o inferiores. La partición del conjunto factible se ha realizado de una manera mecánica, sin tener en cuenta las preferencias del centro decisor. En todo caso, una vez que las soluciones inferiores han sido eliminadas, puede decirse que comienza el proceso decisional propiamente dicho. Para abordar tal tipo de tarea, tendremos que introducir de una manera u otra las preferencias del centro decisor. Una de las formas más fructíferas de abordar esta tarea es por medio de la programación compromiso cuyos rasgos básicos se exponen en la siguiente Sección.

2.3. Programación compromiso

El primer paso dentro del enfoque compromiso consiste en establecer lo que Zeleny llama el punto o la alternativa ideal [5]. Las coordenadas de la alternativa ideal vienen dadas por los valores óptimos de los correspondientes objetivos, forzando el proceso de optimización al cumplimiento de las restricciones del problema. El punto o alternativa ideal se puede representar por medio del siguiente vector:

$$\mathbf{f}^* = \left(f_1^*, \quad \cdots \quad f_i^*, \quad \cdots \quad f_n^* \right) \tag{2.7}$$

siendo:

$$f_i^* = \text{Max } f_i(\mathbf{x}) \tag{2.8}$$

sujeto a :

$$\mathbf{x} \in \mathbf{F} \tag{2.9}$$

cuando se pretende maximizar los n objetivos. Cada elemento del vector **f*** se denomina «punto ancla». La alternativa ideal es usualmente inalcanzable. Obviamente, si dicha alternativa fuera alcanzable, ello implicaría que no existe conflicto alguno entre los n objetivos, por lo que de hecho no existiría ningún problema de elección multicriterio, pues la alternativa ideal **f*** sería la elección óptima.

Cuando el punto o alternativa ideal es inalcanzable, la elección óptima o mejor solución compromiso viene dada por la solución eficiente más próxima al punto ideal. Esta regla de comportamiento suele denominarse axioma de Zeleny, pues fue este investigador quien lo propuso en 1973. De acuerdo con este postulado, dadas las soluciones f_1 y f_2, la solución preferida será aquella que se encuentre más próxima al punto ideal. Dependiendo de la métrica que se elija tendremos diferentes funciones de distancia, lo que nos permitirá establecer diferentes conjuntos compromiso. Para abordar tal tarea, comenzaremos por definir el grado de proximidad existente entre el objetivo i-ésimo y su ideal o valor ancla:

$$d_j = \left[f_j^* - f_j(\mathbf{x}) \right] \tag{2.10}$$

Una vez definido el grado de proximidad d_j el paso siguiente consistirá en agregar los grados de proximidad para todos los objetivos de nuestro problema. Ahora bien, hay que tener en cuenta que usualmente los objetivos están medidos en unidades distintas, por lo que la suma de los grados de proximidad no tiene sentido o significado, al carecer de homogeneidad dimensional. Por tanto, habrá que proceder a la normalización de los objetivos. Por otra parte, los valores absolutos de los niveles de logro de los diferentes objetivos pueden ser muy diferentes, lo que refuerza la necesidad de una normalización, si queremos evitar soluciones sesgadas hacia los objetivos que pueden alcanzar valores mayores. Una posible forma de normalizar los objetivos (véase Sección 1.5), es la siguiente:

$$d_j = \frac{\left[f_j^* - f_j(\mathbf{x})\right]}{\left[f_j^* - f_{*j}\right]} \tag{2.11}$$

donde d_j representa el grado de proximidad del objetivo j-ésimo normalizado y f_{*j} es el anti-ideal de dicho objetivo, i.e. el peor valor posible para el objetivo j-ésimo sobre el conjunto eficiente. El grado de proximidad normalizado está acotado entre 0 y 1. Así, cuando un objetivo alcanza su valor ideal, su grado de proximidad es cero; por el contrario, dicho grado se hace igual a uno cuando el objetivo en cuestión alcanza un valor igual al anti-ideal. Si representamos ahora por W_j las preferencias que el centro decisor asocia a la discrepancia existente entre la realización del objetivo j-ésimo y su ideal, la programación compromiso -consistente en la búsqueda de las soluciones eficientes más próximas el ideal- se convierte en el siguiente problema de optimización:

$$\text{Min } L_\pi = \left[\sum_{j=1}^{n} W_j^\pi \left[\frac{f_j^* - f_j(\mathbf{x})}{f_j^* - f_{*j}} \right]^\pi \right]^{1/\pi} \tag{2.12}$$

sujeto a: $\mathbf{x} \in \mathbf{F}$

El parámetro π representa la métrica que define la familia de funciones de distancia. Es decir, para cada valor del parámetro π tendremos una distancia en concreto. Así, la distancia tradicional o euclidiana es un caso particular de la expresión (2.12); esto es, el que corresponde a π = 2. Para π = 1, la mejor solución compromiso, o punto más próximo al ideal se puede obtener resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\operatorname{Min} L_1 = \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{f_j^* - f_j(\mathbf{x})}{f_j^* - f_{*j}} \tag{2.13}$$

sujeto a: $\mathbf{x} \in \mathbf{F}$

Es fácil comprobar que la maximización de la función objetivo (2.13) es equivalente a la siguiente maximización:

$$\operatorname{Max} \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{f_j(\mathbf{x})}{f_j^* - f_{*j}} = \operatorname{Max} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(\mathbf{x}) \tag{2.14}$$

donde: $$\alpha_j = W_j \Big/ \left(f_j^* - f_{*j}\right) \tag{2.15}$$

Para la métrica $\pi = \infty$, se minimiza la máxima desviación de entre todas las desviaciones individuales; esto es, para $\pi = \infty$ sólo la desviación mayor influye en el proceso de minimización. Para esta métrica, la mejor solución compromiso o punto más próximo al ideal se puede obtener resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\operatorname{Min} L_\infty = D \tag{2.16}$$

sujeto a:

$$\begin{gathered} \alpha_1\left[f_1^* - f_1(\mathbf{x})\right] \le D \\ \vdots \\ \alpha_n\left[f_n^* - f_n(\mathbf{x})\right] \le D \end{gathered} \tag{2.17}$$

donde las α fueron definidas anteriormente.

Para obtener la mejor solución compromiso para métricas distintas de $\pi = 1$ y $\pi = \infty$, se hace necesario recurrir a algoritmos de programación matemática no lineal, lo que constituye indudablemente una dificultad operativa. No obstante, esta dificultad queda considerablemente reducida si tenemos en cuenta un importante resultado introducido en la literatura por Yu [5]. Así, este autor demostró que, para problemas con dos objetivos, los puntos L_1 y L_∞ definen un subconjunto de la frontera eficiente denominado por Zeleny [6] *conjunto compromiso*. Las otras mejores soluciones compromiso pertenecen al conjunto acotado por dichos puntos L_1 y L_∞. Posteriormente, Freimer & Yu [7] demostraron que, para problemas con más de dos objetivos, los puntos L_1 y L_∞ no tienen que definir necesariamente un conjunto compromiso. Dicho con otras palabras, en contextos de más de dos objetivos, para métricas distintas de $\pi = 1$ y $\pi = \infty$, pueden existir soluciones compromiso que no pertenezcan al intervalo cerrado $[L_1, L_\infty]$. Aunque la posibilidad apuntada por Freimer & Yu es cierta, sin embargo es poco probable que se presente en la práctica, por lo que la potencialidad de la programación compromiso se mantiene al no ser necesario *usualmente* computar complicados modelos de programación matemática no lineal.

Es asimismo interesante comentar que en el punto L_∞ se satisfacen las siguientes relaciones entre objetivos [8]:

$$\alpha_1\left[f_1^* - f_1(\mathbf{x})\right] = \cdots \quad \alpha_i\left[f_i^* - f_i(\mathbf{x})\right] = \cdots \quad \alpha_n\left[f_n^* - f_n(\mathbf{x})\right] \qquad (2.18)$$

es decir, la solución asociada al punto L_∞ es una solución *bien equilibrada*, pues las discrepancias ponderadas y normalizadas entre el valor alcanzado por cada objetivo y sus respectivos ideales son iguales. El carácter equilibrado de la solución -- dota a este punto de un especial atractivo desde un punto de vista de elección. En efecto, muchos centros decisores pueden centrar su atención en la elección de soluciones equilibradas en el siguiente sentido; no a unos excesivos gastos en alimentación en detrimento de los gastos en vestidos, demasiados gastos para vacaciones en detrimento de los gastos en educación, etcétera.

Puede decirse que la solución L_1 corresponde a una situación en la que se maximiza la suma ponderada de los logros de cada objetivo, traduciéndose en algo así como en un punto de máxima eficiencia, pero que puede estar fuertemente desequilibrado. Por el contrario, en la solución L_∞ subyace una lógica de equilibrio en vez de una lógica de eficiencia.

2.4. Diseño óptimo de un contenedor

El problema consiste en fabricar contenedores de base cuadrada, abiertos por la parte de arriba con una capacidad o volumen de 10 m^3. El fabricante desea minimizar el coste de los contenedores, así como minimizar su peso. Ahora bien, como los materiales más ligeros son los más caros nos encontramos ante un claro conflicto entre objetivos. En concreto el material con el que se va a construir el fondo del contenedor cuesta 1000 ptas/m^2 y pesa 4 Kg/m^2, mientras que el material con el que se van a construir las caras del contenedor cuestan 500 ptas/m^2 y pesa 8 Kg/m^2. Si representamos por x_1 la dimensión de los lados de la base del contenedor y por x_2 la dimensión de su altura, tenemos la estructura del siguiente problema multiobjetivo, bi-objetivo, para ser más preciso:

$$\text{Eff } f(x) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})] \tag{2.19}$$

donde:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1000\, x_1^2 + 2000\, x_1\, x_2 \\ f_2(x) &= 4\, x_1^2 + 32\, x_1\, x_2 \end{aligned} \tag{2.20}$$

sujeto a:

$$x_1^2\, x_2 = 10 \tag{2.21}$$

donde f_1 (**x**) y f_2 (**x**) representan las expresiones matemáticas de los atributos coste y peso del contenedor. En este ejemplo, la eficiencia de los dos objetivos queda establecida en un sentido minimizador (i.e. menos del atributo mejor). El siguiente problema de optimización nos permite obtener el ideal o ancla del objetivo coste, así como el anti-ideal del objetivo peso del contenedor

$$\text{Min } f_1 = 1000\, x_1^2 + 2000\, x_1\, x_2 \tag{2.22}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} & x_1^2\, x_2 = 10 \\ & f_2 = 4\, x_1^2 + 32\, x_1\, x_2 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Recurriendo a un optimizador no lineal como el GINO [9] obtenemos la siguiente solución tanto en el espacio de las variables de decisión como en el espacio de los objetivos:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 2{,}15 & x_2 = 2{,}15 \\ f_1^* = 13.925 \text{ ptas} & f_{2*} = 167 \text{ Kg} \end{array} \qquad (2.24)$$

El siguiente problema de optimización nos permite obtener el ideal o ancla del peso del contenedor, así como el anti-ideal del coste:

$$\text{Min } f_2 = 4\, x_1^2 + 32\, x_1\, x_2 \qquad (2.25)$$

sujeto a:

$$\begin{array}{l} x_1^2\, x_2 = 10 \\ f_1 = 1000\, x_1^2 + 2000\, x_1\, x_2 \end{array} \qquad (2.26)$$

Recurriendo nuevamente al GINO obtenemos la siguiente solución:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 3{,}42 & x_2 = 0{,}85 \\ f_{1*} = 17752 \text{ ptas} & f_2^* = 140 \text{ Kg} \end{array} \qquad (2.27)$$

Para generar el conjunto de diseños eficientes operativizamos el método de las restricciones por medio del siguiente programa no lineal paramétrico.

$$\text{Min } 4\, x_1^2 + 32\, x_1\, x_2 \qquad (2.28)$$

sujeto a:

$$\begin{array}{l} x_1^2\, x_2 = 10 \\ 1000\, x_1^2 + 2000\, x_1 x_2 \le H_1 \end{array} \qquad (2.29)$$

Los valores ideales f_1^* y anti-ideales f_{1*} del coste del contenedor que habíamos acabado de obtener nos determinan el límite inferior y superior respectivamente del intervalo dentro del cual el parámetro H_1 puede variar; esto es, el parámetro H_1 puede variar entre las 17752 y las 13925 pesetas. Fijando un incremento de variación de, por ejemplo, 500 pesetas deberemos de realizar siete «pasadas» de ordenador o computaciones del programa no lineal paramétrico dado por (2.29). La Tabla 4 muestra los puntos (diseños) eficientes obtenidos por la aplicación de este procedimiento.

Seguidamente vamos a investigar el mejor diseño compromiso. Para ello, a título de ejemplo, suponemos que el centro decisor da la misma importancia a los dos criterios considerados (esto es, $W_1 = W_2 = 1$). En tal caso el punto L_1 del conjunto compromiso lo obtendremos por medio del siguiente problema de optimización (véase (2.13) o (2.14)).

$$\text{Min}\ \frac{f_1 - 13295}{3827} + \frac{f_2 - 140}{27} \tag{2.30}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} & x_1^2\ x_2 = 10 \\ & f_1 = 1000\ x_1^2 + 2000\ x_1 x_2 \\ & f_2 = 4\ x_1^2 + 32\ x_1 x_2 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Resolviendo (2.30)-(2.31) obtenemos la siguiente solución o mejor diseño compromiso para la métrica 1:

$$\begin{aligned} & x_1 = 2{,}75 && x_2 = 1{,}32 \\ & f_1 = 14843\ \text{ptas} && f_2 = 147\ \text{Kg} \end{aligned} \tag{2.32}$$

El punto L_∞ del conjunto compromiso lo obtendremos por medio del siguiente problema de optimización (véase (2.16)-(2.17)):

$$\text{Min}\ L_\infty = D$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} & x_1^2\ x_2 = 10 \\ & f_1 - 3827\ D \le 13925 \\ & f_2 - 27\ D \le 140 \\ & f_1 = 1000\ x_1^2 + 2000\ x_1\ x_2 \\ & f_2 = 4\ x_1^2 + 32\ x_1\ x_2 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Resolviendo (2.33) obtenemos el mejor diseño-compromiso correspondiente a la métrica ∞. En este ejemplo concreto se obtiene el mismo límite que había generado la métrica 1. Es decir, para nuestro ejemplo el conjunto compromiso $[L_1, L_\infty]$ queda reducido a un sólo punto. Dicho con otras palabras, en este caso el diseño eficiente más próximo al diseño ideal es el mismo para las distancias definidas por las métricas $\pi = 1$ y $\pi = \infty$.

Base del contador - m - x_1	Altura del contenedor - m - x_2	Coste - ptas - f_1 (x)	Peso - Kg - f_1 (x)
3,42	0,85	17752	140
3,41	0,86	17500	140,35
3,31	0,91	17000	140,50
3,20	0,97	16500	140,94
3,08	1,05	16000	141,79
2,95	1,15	15500	143,21
2,81	1,27	15000	145,54
2,62	1,46	14500	149,57
2,31	1,86	14000	159,60
2,15	2,15	13925	167

Tabla 4 - PUNTOS (DISEÑOS) EFICIENTES GENERADOS POR EL MÉTODO DE LAS RESTRICCIONES -

2.5. Una aplicación a la selección de inversiones desde una óptica económica y ambiental

Tanto la lógica como la mecánica operativa de la programación compromiso son perfectamente aplicables a problemas multicriterio de tipo discreto. Vamos a ilustrar esta cuestión en este apartado por medio de un ejemplo ilustrativo. Así, supongamos el caso de un centro decisor que tiene que ordenar preferencialmente cinco inversiones que denominamos A, B, C, D y E, que se evalúan en base a cinco criterios: valor actual neto (VAN), tasa interna de rendimiento (TIR), nivel de empleo, volumen de ventas e impacto ambiental. Todos los criterios son del tipo «más del atributo mejor», excepto para el criterio impacto ambiental, en el que un valor más bajo del índice toneladas de SO_2 emitidas indica, obviamente, una situación ambientalmente mejor. Los datos de partida, esto es, la matriz decisional figura recogida en la Tabla 5.

De la Tabla 5 se deducen inmediatamente los siguientes vectores ideal y anti-ideal.

Ideal = [250, 30, 20, 100, 25]

Anti-ideal = [100, 15, 4, 25, 500]

Supongamos que el centro decisor proporciona el siguiente vector de pesos preferenciales:

$$W = \left[W_1 = 0{,}25, \quad W_2 = 0{,}25, \quad W_3 = 0{,}20, \quad W_4 = 0{,}10, \quad W_5 = 0{,}20 \right] \qquad (2.34)$$

es decir, el VAN y el TIR de la inversión son 2,5 veces más importantes que las ventas, este atributo es a la vez, la mitad de importante que los atributos impacto ambiental y nivel de empleo, etc.

El primer paso para aplicar la programación compromiso a nuestro problema de selección de inversiones consistirá en calcular la

ATRIBUTOS ALTERNATIVAS	VALOR ACTUAL NETO (VAN) - millones ptas -	TASA INTERNA DE RENDIMIENTO TIR - % -	EMPLEO - nº trabajadores -	VENTAS - millones ptas -	IMPACTO AMBIENTAL - Toneladas SO_2 -
A	100	15	7	40	50
B	200	25	7	60	200
C	100	20	4	25	25
D	200	30	20	70	350
	250	25	15	100	500

Tabla 5 - MATRIZ DECISIONAL INICIAL -

matriz de grados de proximidad normalizados. Los elementos de dicha matriz se obtienen por aplicación inmediata de la expresión (2.11) a la matriz decisional inicial recogida en la Tabla 5. Así, por ejemplo, el grado de proximidad al ideal de la alternativa A para el atributo 4 (volumen de ventas) vendrá dado por:

$$d\,A{,}4 = \frac{100-40}{100-25} = 0{,}80 \qquad (2.35)$$

Los 25 grados de proximidad para los datos de nuestro ejemplo quedan representados en la matriz de la Tabla 6. A partir de los datos de la Tabla 6 procedemos a calcular las distancias entre cada punto extremo eficiente o alternativa y el punto ideal. Dichos cálculos se han efectuado para las métricas $\pi = 1$, $\pi = 2$ y $\pi = \infty$. A título ilustrativo reproducimos los cálculos para el caso de la alternativa o elección A:

$$\begin{aligned}
L_1(A) &= 0{,}25\times 1 + 0{,}25\times 1 + 0{,}20\times 0{,}8125 + 0{,}10\times 0{,}80 + 0{,}20\times 0{,}053 = 0{,}753\\
L_2(A) &= 0{,}25^2\times 1 + 0{,}25^2\times 1 + 0{,}20^2\times 0{,}8125^2 + 0{,}10^2\times 0{,}80^2 + 0{,}20^2\times 0{,}053^2 = 0{,}397\\
L_\infty(A) &= \mathrm{Max}\left[0{,}25\times 1,\quad 0{,}25\times 1,\quad 0{,}20\times 0{,}8125,\quad 0{,}10\times 0{,}80,\quad 0{,}20\times 0{,}053\right] = 0{,}25
\end{aligned} \qquad (2.36)$$

En la Tabla 7 figuran recogidas las distancias obtenidas entre las cinco alternativas -para las tres métricas elegidas- y el punto ideal. Dichos resultados implican la ordenación de alternativas de la Figura 1. Puede resultar interesante observar que para las métricas $\pi = 1$ y $\pi = 2$ la ordenación de alternativas obtenida es la misma. Sin embargo, para la métrica $\pi = \infty$ se producen algunos cambios. Así, se intercambia el orden de las alternativas B y E; formando las alternativas A y C un conjunto de indiferencia en la parte inferior de la escala de ordenación.

ATRIBUTOS / ALTERNATIVAS	VALOR ACTUAL NETO (VAN)	TASA INTERNA DE RENDIMIENTO (TIR)	EMPLEO	VENTAS	IMPACTO AMBIENTAL
A	1	1	0,8125	0,800	0,053
B	0,333	0,333	0,8125	0,533	0,368
C	1	0,666	1	1	0
D	0,333	0	0	0,400	0,684
E	1	0,333	0,3125	0	1

Tabla 6 - MATRIZ DE GRADOS DE PROXIMIDAD NORMALIZADOS -

ATRIBUTOS ALTERNATIVAS	L_1	L_2	L_∞
A	0,753	0,397	0,250
B	0,456	0,276	0,163
C	0,716	0,374	0,250
D	0,260	0,165	0,137
E	0,346	0,225	0,200

Tabla 7 - MATRIZ DE DISTANCIAS -

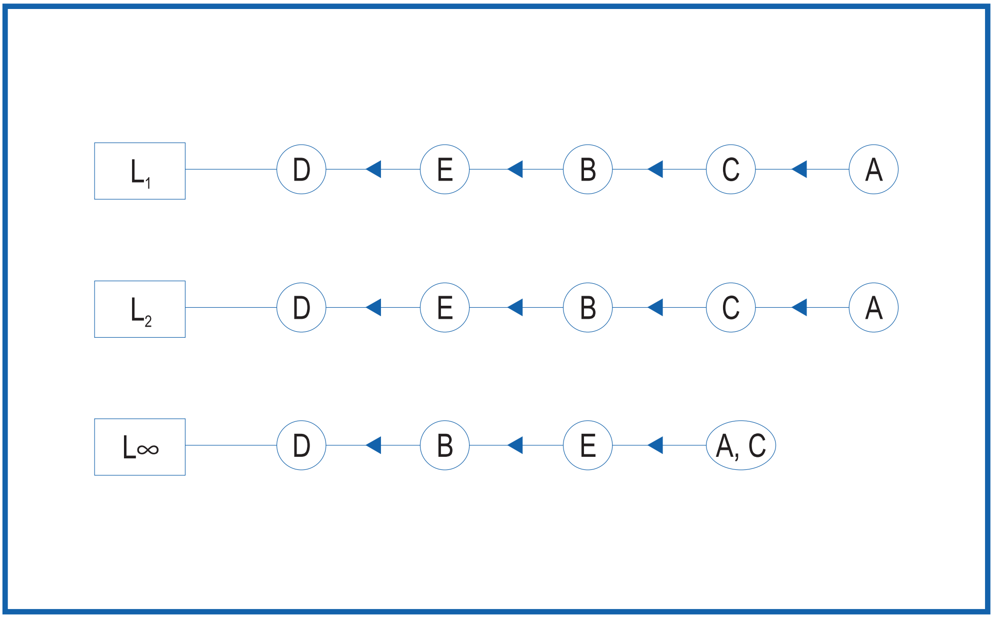
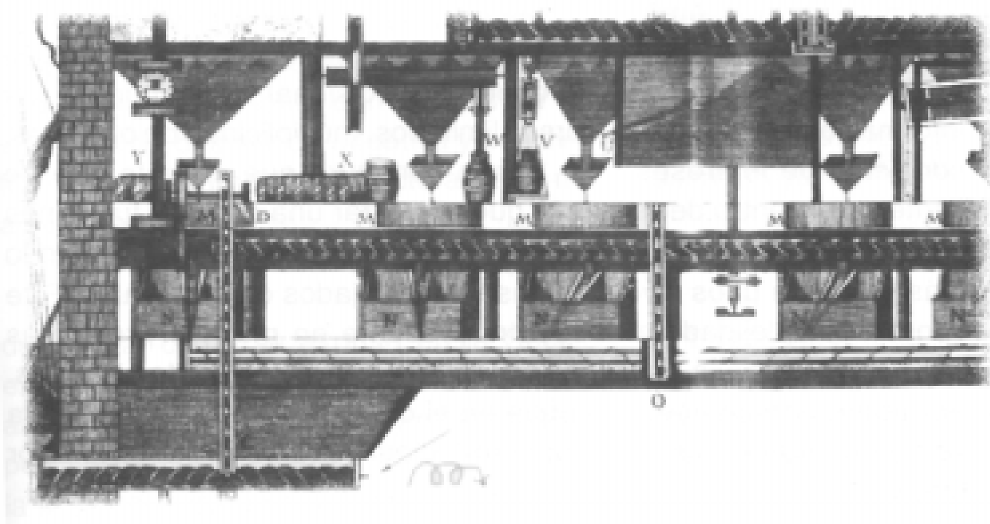


Figura 1 - ORDENACIÓN DE ALTERNATIVAS PARA DIFERENTES MÉTRICAS -

3

Métodos satisfacientes (programación por metas)



3.1. Aspectos básicos

La utilidad de los métodos expuestos en el Capítulo anterior se reduce considerablemente en problemas decisionales de un tamaño elevado. Así, un problema con seis atributos, varios cientos de variables de decisión y de restricciones, no es computacionalmente abordable a través de métodos de optimización multiobjetivo. Para enfrentarse a este tipo de problemas de gran dimensión hace falta recurrir a procedimientos más flexibles. Dentro de esta línea pragmática puede encuadrarse la programación por metas (goal programming) a cuya exposición vamos a dedicar este Capítulo.

La programación por metas se apoya en una lógica no optimizante sino en lo que Simon [10] ha acuñado como lógica satisfaciente. El premio Nobel Simon conjetura que en las complejas organizaciones actuales, el contexto decisional está definido por información incompleta, recursos limitados, multiplicidad de objetivos, conflictos de intereses, etc. Simon conjetura que en este tipo de contexto el centro decisor más que optimizar una o varias funciones objetivo intenta que una serie de metas relevantes se aproximen lo más posible a unos niveles de aspiración fijados de antemano. Este tipo de complejidad se encuentra presente en muchos problemas relacionados con la planificación, diseño o explotación de sistemas. Por tanto, parece adecuado que en el contexto de esta monografía se de una visión, aunque sea introductoria, de la programación por metas.

El embrión de la programación por metas surge en 1955 en un articulo de Charnes, Cooper y Ferguson [11], publicado en Management Science, en el que se aplica el concepto a un problema de regresión condicionada para analizar un problema de fijación de salarios para ejecutivos. No obstante, pese a la potencialidad del enfoque, hasta mediados de los años setenta las aplicaciones de la programación por metas son bastante escasas. Sin embargo, a partir de esa fecha y debido principalmente a los trabajos seminales de Lee [12] e Ignizio [13] se produce una enorme eclosión de trabajos en los que se desarrollan tanto aspectos teóricos de la programación por metas como aplicaciones de este enfoque a áreas muy diversas. Puede decirse que la programación por metas ha sido y todavía es el enfoque multicriterio más utilizado en la práctica [14].

3.2. Niveles de aspiración y variables de desviación

Para formular un modelo de programación por metas, igual que sucede con los demás enfoques multicriterio, comenzamos por fijar los atributos que consideremos relevantes para el problema que estemos analizando. Una vez establecidos los atributos, asignamos a cada uno de ellos un nivel de aspiración. Entendemos por nivel de aspiración t_i el nivel de logro que el centro decisor desea alcanzar para el atributo i-ésimo. A continuación, tal como se expuso en la Sección 1.3 conectamos el atributo con el nivel de aspiración por medio de las variables de desviación negativa y positiva, respectivamente. De esta forma completamos la estructura de la meta i-ésima cuya expresión algebraica es:

$$f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = t_i \tag{3.1}$$

donde, tal como se expuso en la Sección 1.3 f_i ($\mathbf{x}$) representa la expresión matemática del atributo i-ésimo, t_i, el nivel de aspiración asociado a dicho atributo, n_i y p_i las variables de desviación negativa y positiva respectivamente. La variable de desviación negativa cuantifica la falta de logro de una meta con respecto a su nivel de aspiración, mientras que la variable de desviación positiva juega el papel opuesto; es decir, la cuantificación del exceso de logro de una meta con respecto a su nivel de aspiración. Así, en el ejemplo del diseño de un contenedor, desarrollado en el capítulo anterior, podemos expresar el volumen del mismo por medio de la siguiente meta:

$$x_1^2 \, x_2 + n_1 - p_1 = 10 \tag{3.2}$$

Por ejemplo, si el diseño elegido fuera: x_1 = 2; x_2 = 2,25, ello implicaría:

$$9 + n_1 - p_1 = 10 \quad \rightarrow \quad n_1 = 1; \quad p_1 = 0 \tag{3.3}$$

es decir, el volumen del contenedor ha quedado un metro cúbico por debajo del nivel de aspiración. Supongamos ahora el diseño elegido fuera: x_1 = 2, x_2 = 3, ello implicaría:

$$12 + n_1 - p_1 = 10 \quad \rightarrow \quad n_1 = 0; \quad p_1 = 2 \tag{3.4}$$

es decir el volumen del contenedor ha quedado dos metros cúbicos por encima del nivel de aspiración. Supongamos finalmente que el diseño elegido fuera: x_1 = 2, x_2 = 2.50, ello implicaría:

$$10 + n_1 - P_1 = 10 \quad \rightarrow \quad n_1 = p_1 = 0 \tag{3.5}$$

es decir, el volumen del contenedor coincide exactamente con los diez metros cúbicos en que se había fijado el nivel de aspiración.

Una vez definidas las metas y aclarado el significado de las variables de desviación pasamos a introducir un concepto esencial en programación por metas: variables de desviación no deseadas. Una variable de desviación se dice que es no deseada cuando al centro decisor le conviene que la variable en cuestión alcance su valor más pequeño (esto es, cero). A un nivel expositivo elemental podemos considerar los siguientes tres casos:

a) La meta deriva de un atributo del tipo más del atributo mejor (equivalente a un objetivo a maximizar). Ejemplos de este tipo de metas pueden ser: el beneficio de un plan de producción, la fiabilidad de un sistema, etc. En estos casos la variable no deseada (a minimizar), será la variable de desviación negativa (cuantificación de la falta de logro).

b) La meta deriva de un atributo del tipo menos del atributo mejor (equivalente a un objetivo a minimizar). Ejemplos de este tipo de metas pueden ser: el coste de un proceso de producción, el consumo de un motor, etc. En estos casos la variable no deseada (a minimizar), será la variable de desviación positiva (cuantificación del exceso de logro).

c) La meta deriva de un atributo del que se quiere alcanzar exactamente su nivel de aspiración. Ejemplos de este tipo pueden ser: volumen de un contenedor, nivel de capturas en un problema de gestión pesquera, etc. En estos casos tanto la variable de desviación negativa como la positiva son variables no deseadas y por tanto variables a minimizar.

3.3. Variantes de la programación por metas

El propósito general de la programación por metas consiste en minimizar las variables de desviación no deseadas. El proceso de minimización puede acometerse de diferentes maneras. Cada método o manera conduce a una variante diferente de la programación por metas. Seguidamente pasamos a exponer los rasgos fundamentales de las variantes más utilizadas.

Comenzaremos con la variante denominada programación por metas ponderadas. Con este enfoque se engloba en una función objetivo agregada todas las variables de desviación no deseadas convenientemente ponderadas. La estructura algebraica de un modelo de programación por metas ponderadas es la siguiente:

$$\mathrm{Min} \sum_{i=1}^{m} \left(\alpha_i \, n_i + \beta_i \, p_i \right) \tag{3.6}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} & f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = t_i \qquad i = 1, \ \cdots, \ m \\ & \mathbf{x} \ \in \ \mathbf{F} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{n} \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{P} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde α_i y β_i representan los pesos o factores de ponderación asociados a las variables de desviación negativa y positiva para la meta i-ésima y **F** el conjunto alcanzable o conjunto de restricciones. Obviamente, los pesos β tomarán el valor cero cuando se desea que el logro de la meta sea mayor que el nivel de aspiración establecido. De igual manera, los pesos α tomarán el valor cero cuando se desea que el logro de la meta sea menor que el nivel de aspiración establecido. Los pesos α y/o β distintos de cero, jugarán el papel normalizador y preferencial que se analizó en las Secciones 1.5 y 1.6.

La segunda variante corresponde a la programación por metas lexicográficas. Este enfoque utiliza el concepto de prioridad o peso excluyente (pre-emptive priorities). Este tipo de peso excluyente implica que el logro de las metas situadas en una cierta prioridad es inconmesurablemente preferido al logro de cualquier otro conjunto de metas situadas en una prioridad mas baja. En la programación por metas lexicográficas, las metas situadas en prioridad más alta se satisfacen en la medida de lo posible, sólo entonces se considera la posible satisfacción de metas situadas en prioridades más bajas. Es decir, las preferencias se ordenan igual que las palabras en un léxico o diccionario, de ahí la denominación de programación por metas lexicográficas.

Para completar la conceptualización de los modelos basados en metas lexicográficas debemos de introducir el concepto de función de logro (achievement function). La función de logro está formada por un vector ordenado cuya dimensión coincide con el numero de niveles de prioridad que se hallan establecido. Cada componente de este vector representa las variables de desviación que hay que minimizar, con objeto de conseguir la máxima realización posible de las metas situadas en la correspondiente prioridad. La estructura general de la función de logro es la siguiente:

$$\text{Lex min } \mathbf{a} = \left[h_1(\mathbf{n}, \mathbf{p}), \quad h_2(\mathbf{n}, \mathbf{p}), \quad \cdots \quad h_q(\mathbf{n}, \mathbf{p}) \right] \tag{3.8}$$

o de una manera mas simple:

$$\text{Lex min } \mathbf{a} = \left[\mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}_2, \quad \cdots \quad \mathbf{a}_q \right] \tag{3.9}$$

La minimización lexicográfica de los vectores (3.8) o (3.9) implica la minimización ordenada de sus componentes; esto es, se minimiza la primera componente $\mathbf{a}_1$ de la función de logro, seguidamente se minimiza la segunda componente $\mathbf{a}_2$ respetando el valor de $\mathbf{a}_1$ previamente obtenido, y así sucesivamente. La estructura algebraica de un modelo de programación por metas lexicográficas es la siguiente:

$$\text{Lex min } \mathbf{a} = \left[\mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}_2, \quad \cdots \quad \mathbf{a}_q \right]$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} & i = 1, \ldots, m \\ & f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = t_i \\ & \mathbf{x} \in \mathbf{F} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{n} \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{P} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Los modelos basados en metas lexicográficas no pueden resolverse por una aplicación directa del Simplex. En efecto, en un contexto lexicográfico lo que se busca es el mínimo valor de un vector ordenado y no el valor mínimo del producto escalar de dos vectores. Para abordar un proceso de minimización lexicográfica existen diferentes enfoques algorítmicos, de ellos tal vez el más intuitivo y operativo sea el método secuencial. Este método consiste en resolver una secuencia de programas lineales. El primer programa de la secuencia minimiza la primera componente del vector de logro, sujeta esta minimización a las restricciones (igualdades) correspondientes a la primera prioridad. El segundo programa lineal minimiza la segunda componente de la función de logro sujeta esta nueva minimización a las restricciones (igualdades) correspondientes a las dos primeras prioridades, así como a no degradar los valores de las variables de desviación de la prioridad primera que se obtuvieron en la solución precedente. El procedimiento secuencial continua hasta resolver el último programa lineal. Una excelente exposición tanto de la fundamentación teórica como de la mecánica operativa de este método secuencial puede verse en un articulo de Ignizio & Perlis [15].

La tercera variante corresponde a la programación por metas MINIMAX denominada también programación por metas Chebysev. Esta variante busca la minimización de la máxima desviación de entre todas las posibles desviaciones. La estructura algebraica de un modelo de programación por metas MINIMAX es la siguiente:

$$\text{Min } D$$

sujeto a:

$$\begin{aligned}
&\alpha_i n_i + \beta_i p_i \leq D \\
&f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = t_i \\
&\mathbf{x} \in \mathbf{F} \\
&\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{n} \geq \mathbf{0} \quad \mathbf{P} \geq \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

donde D representa la máxima desviación. Desde un punto de vista computacional, un modelo de metas MINIMAX es un programa lineal que puede resolverse por aplicación directa del Simplex. Resulta obvio intuir la existencia de una cierta relación entre el enfoque metas MINIMAX que acabamos de exponer y la programación compromiso para la métrica $\pi = \infty$ que expusimos en el capitulo anterior. El análisis de este tipo de relaciones excede el propósito introductorio de esta monografía

[16]. En todo caso tal como se apunta en la Sección 2.3 al subyacer la métrica $\pi = \infty$ en este tipo de variante las soluciones obtenidas presentan un mayor equilibrio o balanceo que las soluciones generadas a partir de cualquier otra variante de la programación por metas. Este punto se ilustrara en la siguiente Sección con la ayuda de una aplicación numérica.

3.4. Una aplicación a un problema de ingeniería de diseño

Vamos a aplicar la programación por metas a un problema de elección de alternativas de diseño. Para ello, vamos a adaptar a nuestro contexto un problema formulado por Singh y Agrawal [17] que consiste en encontrar el diseño óptimo de un anillo octagonal alargado; pieza que se utiliza en la fabricación de dinamómetros. Las variables de decisión o diseño son el grueso t, el radio r y el ancho b del anillo. Los atributos a considerar son la sensibilidad S medida en unidades de esfuerzo por kilogramo y la rigidez R medida en kilogramos por centímetro. La expresión matemática de dichos atributos es la siguiente:

$$S = \frac{0{,}7r}{Ebt^2} \tag{3.12}$$

$$R = \frac{Ebt^3}{r^3} \tag{3.13}$$

donde E es la constante de Young ($2{,}1 \times 10^6$ Kg/cm^2) viniendo medidas las variables de diseño t, r y b en centímetros. Ambos atributos son del tipo «más mejor», es decir, cuanto más alta sea la sensibilidad y la rigidez mejor es el anillo desde un punto de vista mecánico. De la observación de las expresiones (3.12) y (3.13) se deduce inmediatamente el conflicto que existe entre ambos criterios de diseño. Así, a mayor radio r mayor sensibilidad pero a la vez menor rigidez. De igual manera valores altos del grueso t y del ancho b del anillo generan valores altos para la rigidez pero valores bajos para la sensibilidad. Supongamos que se establecen las siguientes restricciones de diseño:

$$
\begin{aligned}
&S = \frac{0{,}7r}{2{,}1 \times 10^{6}\ bt^{2}} \geq 10^{-6} \\
&R = \frac{2{,}1 \times 10^{6}\, bt^{3}}{r^{3}} \geq 10^{6} \\
&r \geq 1{,}25 \\
&b \geq 5
\end{aligned}
\qquad (3.14)
$$

Es fácil comprobar que no existe ningún diseño (p.ej. conjunto de valores t, r y b) factible. Dicho con otras palabras, el sistema de inecuaciones dado por (3.14) carece de solución. Vamos a tratar de encontrar un diseño satisfaciente, reformulando el sistema (3.14) como un modelo de programación por metas. Para ello, tras simples manipulaciones algebraicas en (3.14) formulamos el siguiente modelo basado en metas ponderadas (véase expresión (3.7)).

$$
\text{Min } \frac{n_1}{3} + \frac{n_2}{0{,}476} + \frac{n_3}{1{,}25} + \frac{n_4}{5} \qquad (3.15)
$$

sujeto a:

$$
\begin{aligned}
&\frac{r}{b\,t^{2}} + n_1 - p_1 = 3 \\
&\frac{b\,t^{3}}{r^{2}} + n_2 - p_2 = 0{,}476 \\
&r + n_3 - p_3 = 1{,}25 \\
&b + n_4 - p_4 = 5
\end{aligned}
\qquad (3.16)
$$

Es interesante observar que la normalización del modelo (3.16) se ha efectuado dividiendo las variables de desviación no deseadas (en nuestro caso las negativas, por tratarse de un caso más mejor) por los correspondientes niveles de aspiración. De esta forma, tal como habíamos indicado al final de la Sección 1.5, trabajamos con desviaciones porcentuales con lo que evitamos cualquier posible problema de homogeneidad dimensional. Los pesos $W_1, ..., W_4$ reflejan la importancia que el centro decisor asigna a unos criterios de diseño con respecto a otros. Así, si hacemos $W_1, ..., W_4 = 1$, esto es, si el centro decisor asigna la misma importancia al logro de las diferentes metas, la aplicación de un optimizador no lineal como el GINO a (3.16) conduce a la siguiente solución:

$$\begin{gathered} S = 10^{-6} \qquad R = 10^{6} \\ t = 0{,}146 \qquad r = 0{,}319 \qquad b = 5 \\ n_1 = p_1 = n_2 = p_2 = 0; \quad n_3 = 0{,}931; \quad p_3 = n_4 = p_4 = 0 \end{gathered} \tag{3.17}$$

La solución obtenida permite la completa realización de las metas sensibilidad, rigidez y ancho del anillo. Por el contrario, el radio del anillo queda 0.93 cm por debajo de la cifra deseada. Es decir, como suele ser habitual en los modelos basados en metas ponderadas el resultado obtenido es muy satisfactorio desde un punto de vista global o agregado, pero generando desviaciones importantes en alguna de las metas (radio del anillo en nuestro caso). Si el centro decisor desea un resultado globalmente inferior, pero más equilibrado podemos recurrir a la siguiente formulación basada en metas MINIMAX (véase expresión (3.11):

$$\text{MIN } D$$

sujeto a:

$$\begin{gathered} \frac{n_1}{3} \leq D \\ \frac{n_2}{0{,}476} \leq D \\ \frac{n_3}{1{,}25} \leq D \\ \frac{n_4}{5} \leq D \end{gathered} \tag{3.18}$$

[conjunto de metas del modelo (3.15)-(3.16)].

Recurriendo nuevamente al optimizador no lineal GINO se obtiene la siguiente solución:

$$\begin{gathered} S = 0{,}63 \times 10^{-6} \qquad R = 0{,}63 \times 10^{6} \\ t = 0{,}362 \qquad r = 0{,}793 \qquad b = 3{,}174 \\ p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0; \quad n_1 = 1{,}1; \quad n_2 = 0{,}174; \quad n_3 = 0{,}457; \quad n_4 = 1{,}826 \end{gathered} \tag{3.19}$$

Esta solución es globalmente peor que la que habíamos obtenido con el modelo basado en metas ponderadas, pero sin embargo, presenta un mayor equilibrio entre los diferentes criterios de diseño. En efecto, en la solución MINIMAX todos los criterios de diseño están al 65% de los niveles de aspiración establecidos, mientras que en la solución anterior los criterios de sensibilidad, rigidez y anchura se satisfacen el ciento por ciento, pero el radio del anillo queda tan sólo al 25% del nivel de aspiración establecido.

3.5. Algunos comentarios finales

La programación por metas al combinar la lógica tradicional de la optimización con el deseo de los centros decisores de satisfacer diferentes metas se convierte en un instrumento analítico de gran potencialidad en el campo del análisis decisional. Pese a su fertilidad, flexibilidad e indudable éxito operativo el enfoque no está exento de dificultades. Así, en los últimos años, diferentes autores han apuntado posibles debilidades en los modelos de programación por metas.

Sin embargo, puede apuntarse que los problemas asociados a la programación por metas no son inherentes a la lógica que subyace a este enfoque, sino que se deben a un uso no satisfactorio del mismo. Es decir, muchos de los inconvenientes apuntados en la literatura sobre la programación por metas se deben a un uso mecanicista del enfoque, que no tiene en cuenta un conocimiento preciso de los supuestos subyacentes.

Estas consideraciones conducen a la idea de <u>temas críticos en programación por metas</u>, entendiendo como tal anomalías aparentemente causadas por debilidades lógicas de la programación por metas, pero que en realidad se deben a un uso insatisfactorio del enfoque. Un posible listado de este tipo de anomalías o temas críticos en programación por metas es el siguiente:

a) La solución generada por un modelo basado en metas puede ser ineficiente desde un punto de vista Paretiano. Esto obliga a comprobar la eficiencia de la solución y a utilizar algún procedimiento para restaurarla en caso de ineficiencia [18].

b) La posible equivalencia de soluciones entre los modelos de programación por metas y los modelos tradicionales basados en la optimización de un sólo criterio.

c) La falta de significado y las conclusiones equivocadas a las que se puede llegar cuando la función de logro de un modelo basado en metas lexicográficas se formula erróneamente como un escalar en vez de como un vector.

d) Los problemas que pueden surgir cuando se omite una variable de desviación en la formulación de una meta.

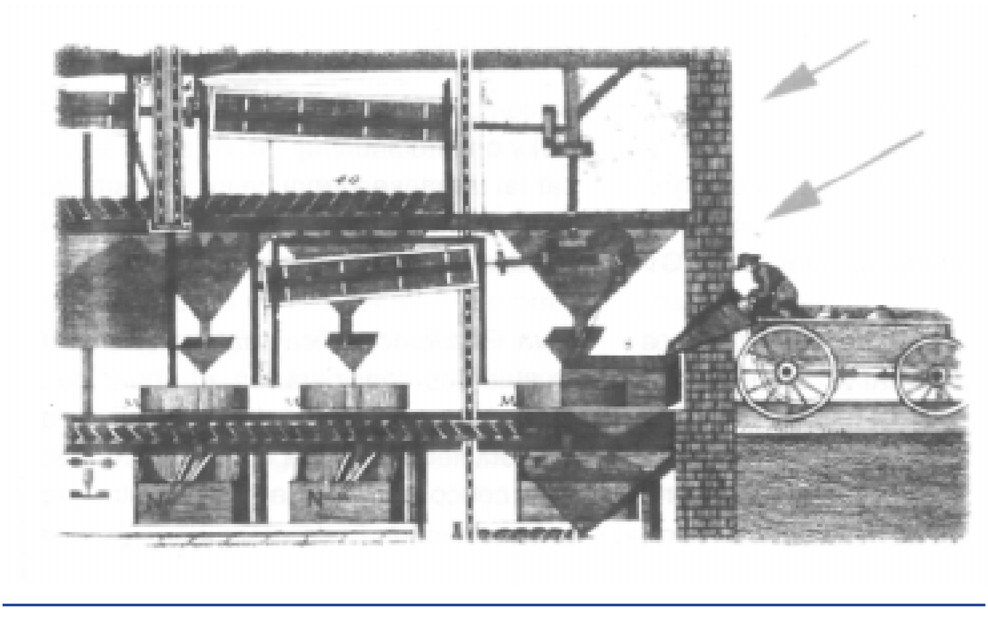
e) Los problemas que pueden surgir cuando innecesariamente se formulan metas con dos lados (esto es, se consideran automáticamente como variables de desviación no deseadas tanto la desviación positiva como la negativa).

f) Una excesiva priorización de las metas en un modelo lexicográfico puede generar metas redundantes; esto es, metas que no jueguen ningún papel en el correspondiente proceso de optimización lexicográfico.

El análisis detallado de los anteriores temas críticos, así como de las técnicas diseñadas para su eliminación exceden del propósito claramente introductorio con el que se ha redactado esta monografía [19].

4

Métodos multicriterio discretos



4.1. Fundamento de los métodos de sobreclasificación

Entre los métodos multicriterio concebidos específicamente para analizar problemas decisionales discretos, el ELECTRE (*elimination and (et) choice translating algorithm*) es, quizás, el método más conocido y a la vez más aplicado en la práctica, por lo que le dedicaremos una atención especial. El ELECTRE fue inicialmente sugerido por Benayoun, Roy y Sussman [20] y posteriormente mejorado por Roy [21]. Desde entonces, tanto las aplicaciones como los desarrollos teóricos de este método han sido muy intensos.

El método ELECTRE, básicamente, consiste en un procedimiento para reducir el tamaño del conjunto de soluciones eficientes. Tal reducción se realiza por medio de una partición del conjunto eficiente en un subconjunto de alternativas más favorables para el centro decisor (el núcleo) y en otro subconjunto de alternativas menos favorables. Para abordar tal tarea, se introduce el concepto de «relación de sobreclasificación» (*outranking relationship*) que es consustancial al ELECTRE en todas sus variantes.

Una elección o alternativa E_i sobreclasifica (*outranks*) a otra alternativa E_k cuando para los atributos considerados, el enunciado «la alternativa E_i es al menos tan buena como la alternativa E_k» es válido. La sobreclasificación se establece en base a dos conceptos: concordancia y discordancia. La concordancia cuantifica hasta qué punto para un elevado número de atributos E_i es preferida a E_k. Por otra parte, la discordancia cuantifica hasta qué punto no existe ningún atributo para el que E_k es mucho mejor que E_i.

Para que la alternativa E_i sobreclasifique a la alternativa E_k, y por tanto forme parte del núcleo o subconjunto de alternativas más favorables, es necesario que la concordancia entre E_i y E_k supere un umbral mínimo establecido y que asimismo, la discordancia entre E_i y E_k no supere otro umbral también establecido de antemano. Cuando esto sucede, puede decirse que la alternativa E_i es preferida a la alternativa E_k desde casi cualquier punto de vista, aunque ello no implique que E_i domine, desde un punto de vista paretiano, a E_k.

La principal ventaja de la relación de sobreclasificación es que en ella no subyace necesariamente el supuesto de transitividad de preferencias o de comparabilidad, que sí subyace a cualquier enfoque basado en funciones de utilidad. Así, si E_1 S E_2 y E_2 S E_3 (donde S representa la relación de sobreclasificación) esto no implica necesariamente que E_1 S E_3. Así el ELECTRE reconoce con acierto que las razones que llevan al centro decisor a preferir E_1 a E_2 y aquellas que le llevan a preferir E_2 a E_3 pueden ser muy diferentes y no conducir, por tanto, a que E_1 sea preferida a E_3. En cuanto a la comparabilidad en muchos contextos decisionales, frecuentemente como sucede en la ingeniería de sistemas, el centro decisor *no puede* o *no desea* comparar alternativas debido, entre otras posibles razones, a falta de información, insuficiente precisión en las mediciones, inconmensurabilidad de los criterios, etc.

La relación de sobreclasificación se utiliza para formar un grafo en el que cada vértice del mismo representa una de las alternativas o elecciones no dominadas. A partir de este grafo, se establece un subgrafo, que constituye el núcleo (*kernel*) del conjunto de alternativas favorables. Los vértices del núcleo representan las alternativas o elecciones que son preferidas según la relación de sobreclasificación establecida en base a los índices de concordancia y discordancia. Los vértices (alternativas) que no forman parte del núcleo se eliminan del análisis.

4.2. Estructura algorítmica del método ELECTRE

La mecánica operativa del ELECTRE no es complicada, pero si algo prolija. Consecuentemente, no se expondrá dicha mecánica de una manera general, sino que en este apartado nos limitaremos a exponer brevemente los diferentes pasos a seguir cuando se aplica el algoritmo ELECTRE. En el apartado siguiente recurriremos a un ejemplo tanto para aplicar como para exponer con más detalle la estructura algorítmica del ELECTRE. Dicha estructura puede resumirse en los pasos:

Paso 1. Se parte de una matriz decisional (E_i, A_j) tal como se definió en la Sección 1.4, así como de un vector de pesos W obtenido por la aplicación de alguno de los procedimientos descritos en la Sección 1.6.

Paso 2. A partir de la matriz decisional (E_i, A_j) y del vector de pesos W se calcula la matriz de índices de concordancia de la siguiente manera. El índice de concordancia c(i,k) entre las alternativas E_i y E_k se obtiene sumando los pesos asociados a los criterios en los que la alternativa i es mejor que la alternativa k; en caso de empate se asigna la mitad del peso a cada una de las alternativas.

Paso 3. Recurriendo a alguno de los procedimientos expuestos en la Sección 1.5, se procede a normalizar los elementos de la matriz decisional inicial.

Paso 4. A partir de la matriz decisional normalizada, multiplicando cada columna de la misma por el peso preferencial correspondiente se obtiene la matriz decisional normalizada y ponderada.

Paso 5. De la matriz decisional normalizada y ponderada se deducen los índices de discordancia de la siguiente manera. El índice de discordancia d(i,k) entre las alternativas E_i y E_k se calcula como la diferencia mayor entre los criterios para los que la alternativa i está dominada por la k, dividiendo seguidamente dicha cantidad por la mayor diferencia en valor absoluto entre los resultados alcanzados por la alternativa i y la k. A partir de los índices de discordancia se construye la matriz de índices de discordancia.

Paso 6. Se fija un umbral mínimo $\bar{c}$ para el índice de concordancia, así como un umbral máximo $\underline{d}$ para el índice de discordancia.

Paso 7. Se calcula la matriz de dominancia discordante de la siguiente manera. Cuando un elemento de la matriz de índices de concordancia (paso 2) es mayor que el valor umbral $\bar{c}$ (paso 6) en la matriz de dominancia concordante se escribe un uno, en caso contrario, se escribe un cero.

Paso 8. Se calcula la matriz de dominancia discordante de la siguiente manera. Cuando un elemento de la matriz de índices de discordancia (paso 5) es menos que el valor umbral $\underline{d}$ (paso 6) en la matriz de dominancia discordante se escribe un uno, en caso contrario, se escribe un cero.

Paso 9. Se calcula la matriz de dominancia agregada (concordante-discordante) multiplicando los términos homólogos de las matrices de dominancia concordante y de dominancia discordante calculados en los pasos 7 y 8 del algoritmo.

La interpretación analítica de los elementos de esta matriz es muy intuitiva. Así, si el elemento ik toma el valor uno, esto significa que la alternativa i-ésima es mejor que la k-ésima para un número importante de criterios (concordancia) y no es claramente peor para ningún criterio (discordancia). Consecuentemente la alternativa i-ésima sobreclasifica a la k-ésima. Por el contrario, si el elemento ik toma el valor cero, esto significa que la alternativa i-ésima no es mejor que la k-ésima para un número importante de criterio y/o es claramente peor para algún criterio. Consecuentemente la alternativa i-ésima no sobreclasifica a la k-ésima.

Paso 10. Se determina el grafo ELECTRE. Para ello operamos de la siguiente manera. Cada alternativa representa un vértice del grafo. Del vértice i al vértice k se traza un arco, si y sólo si el correspondiente elemento de la matriz de dominancia agregada es uno. Operando de tal forma obtenemos el grafo ELECTRE. Dicho grafo constituye una representación gráfica de la ordenación parcial de preferencias de las alternativas consideradas. El núcleo del grafo ELECTRE está formado por aquellas alternativas que no se dominan (sobreclasifican) entre sí (esto es, no existen arcos de llegada en los correspondientes vértices), quedando además las restantes alternativas dominadas (sobreclasificadas) por alguna alternativa del núcleo (esto es, existe al menos algún vértice del núcleo del que sale un arco a los vértices que no forman parte del núcleo). Consecuentemente con el análisis efectuado, las alternativas que no forman parte del núcleo se eliminan del proceso de elección.

4.3. Una aplicación del ELECTRE a la selección de un caza-bombardero

Vamos a aplicar el método ELECTRE al ejemplo de selección de un caza-bombardero que introdujimos en la Sección 1.4, eliminando la alternativa F por estar dominada por la alternativa E. Los pesos con los que vamos a trabajar son los que se obtuvieron del ejercicio de comparación «por parejas» que hicimos en la Sección 1.6 y cuyos valores redondeados son los siguientes:

$$W = [W_1 = 0{,}30; \quad W_2 = 0{,}05; \quad W_3 = 0{,}25; \quad W_4 = 0{,}40] \qquad (4.1)$$

A partir de la matriz decisional (véase Tabla 2) y del vector de pesos W se calcula la matriz de índices de concordancia tal como se expuso en el paso 2 del algoritmo. A título de ejemplo, presentamos los cálculos correspondientes a los índices de concordancia C(A,B) y C(B,E).

$$C(A,B) = 0 + 0{,}05 + 0{,}25 + 0{,}40 = 0{,}70$$
$$C(B,E) = 0{,}30 + 0 + 1/2 \cdot 0{,}25 + 0 = 0{,}425 \qquad (4.2)$$

Los 5 x 5 índices de concordancia constituyen la matriz de índices de concordancia representada en la Tabla 8. Es interesante observar que por la propia definición de índices de concordancia, la suma de los elementos de la matriz simétricas con respecto a la diagonal principal ha de ser igual a la unidad.

El paso siguiente consiste en la normalización de los elementos de la matriz decisional. De los diferentes procedimiento de normalización expuestos en la Sección 1.5, hemos elegido el sistema [0,1]. A título de ejemplo reproducimos los cálculos de los valores normalizados R(B,1) y R(C,4).

$$R(B,1) = \frac{1800-1700}{1800-1400} = 0{,}25 \quad R(C,4) = \frac{9-8}{9-7} = 0{,}50 \qquad (4.3)$$

	A	B	C	D	E
A	--	0,70	0,675	0,70	0,50
B	0,30	--	0,30	0,50	0,425
C	0,325	0,70	--	0,70	0,30
D	0,30	0,50	0,30	--	0,30
E	0,50	0,575	0,70	0,70	--

Tabla 8 - MATRIZ DE ÍNDICES DE CONCORDANCIA -

Es interesante observar que el sistema de normalización elegido no es consustancial a la lógica que subyace al ELECTRE. Recurriendo a otros procedimientos de normalización se llegan a soluciones finales similares. A continuación, se multiplica cada columna de la matriz decisional normalizada por el peso preferencial correspondiente obteniéndose de esta manera la matriz decisional normalizada y ponderada. Ambas matrices, para los datos de nuestro ejemplo, están recogidas en las Tablas 9 y 10.

A partir de la matriz decisional normalizada y ponderada, por aplicación inmediata de la mecánica operativa expuesta en el paso 5 del algoritmo se obtiene la matriz de índices de discordancia que viene representada en la Tabla 11.

Seguidamente entramos en el paso 6 del algoritmo en el que se fijan los umbrales de concordancia y de discordancia. Esta tarea representa una de las debilidades más importantes de los métodos de sobreclasificación por su fuerte carga subjetiva, así como por la repercusión que dichos valores umbrales tienen en la solución final. Por esta razón –como veremos más adelante– conviene someter dichos umbrales a un análisis de sensibilidad. Unos valores inicialmente aconsejables para dichos umbrales pueden venir dados por los valores medios de los elementos de las matrices de índices de concordancia y discordancia. Dichos valores, para los datos de nuestro ejemplo, son:

$$\begin{aligned} \bar{c} &= 0{,}51 \\ \bar{d} &= 0{,}79 \end{aligned} \tag{4.4}$$

A partir de los anteriores umbrales de concordancia y discordancia, aplicamos la mecánica operativa expuesta en los pasos 7 y 8 del algoritmo, obteniendo las matrices de dominancia concordante y discordante respectivamente. Dichas matrices están representadas en las Tablas 12 y 13.

Según se expuso en el paso 9 del algoritmo por medio de una multiplicación término a término de las dos matrices anteriores se

	ATRIBUTOS			
ALTERNATIVA	VELOCIDAD (Km/hora)	CARGA (Toneladas)	COSTE (Millones ptas.)	MANIOBRABILIDAD (Escala 1-10)
A	1	0,40	0	0
B	0,25	0,80	0,50	1
C	1	0	0	0,50
D	0	1	1	1
E	0,75	0,60	0,50	0

Tabla 9 - MATRIZ DECISIONAL NORMALIZADA -

ALTERNATIVA	ATRIBUTOS			
	VELOCIDAD (Km/hora)	CARGA (Toneladas)	COSTE (Millones ptas.)	MANIOBRABILIDAD (Escala 1-10)
A	0,30	0,02	0	0
B	0,075	0,04	0,125	0,40
C	0,30	0	0	0,20
D	0	0,05	0,250	0,40
E	0,225	0,03	0,125	0

Tabla 10 - MATRIZ DECISIONAL NORMALIZADA Y PONDERADA -

	A	B	C	D	E
A	--	0,5625	0,10	0,75	0,60
B	1	--	0,888	0,60	1
C	1	1	--	1	1
D	1	1	0,833	--	1
E	1	0,1875	0,625	0,5625	--

Tabla 11 - MATRIZ DE ÍNDICES DE DISCORDANCIA -

	A	B	C	D	E
A	--	1	1	1	0
B	0	--	0	0	0
C	0	1	--	1	0
D	0	0	0	--	0
E	0	1	1	1	--

Tabla 12 - MATRIZ DE DOMINANCIA CONCORDANTE -

	A	B	C	D	E
A	--	1	1	1	1
B	0	--	0	1	0
C	0	0	--	0	0
D	0	0	0	--	0
E	0	1	1	1	--

Tabla 13 - MATRIZ DE DOMINANCIA DISCORDANTE -

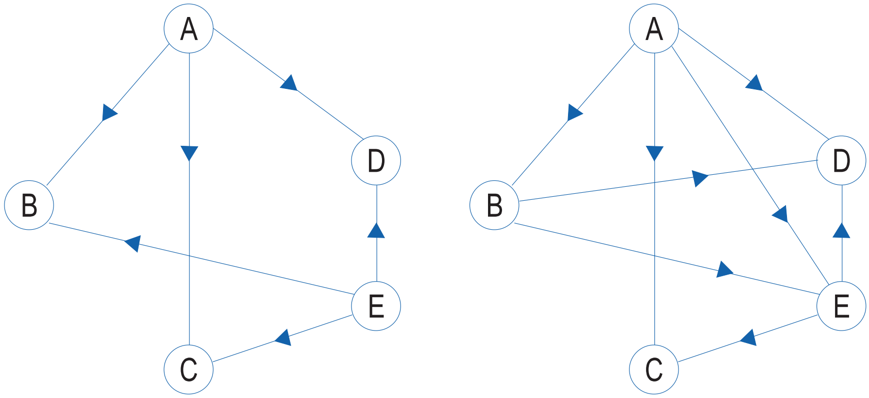
obtiene la matriz final de dominancia agregada (concordante-discordante) que queda recogida en la Tabla 14.

De la matriz de dominancia agregada por aplicación inmediata de la mecánica operativa expuesta en el paso 10 del algoritmo se obtiene el grafo ELECTRE o grafo de sobreclasificaciones representado en la Figura 2. De dicho grafo se deduce inmediatamente que para los valores umbrales elegidos ($\bar{c}$ = 0,51; $\bar{d}$ = 0,79) el núcleo está formado por los caza-bombarderos designados por las letras A y E. El método ELECTRE ha segregado del conjunto inicial de soluciones factibles y eficientes un subconjunto de soluciones más favorables (núcleo) sobre las que el centro decisión debería de concentrar su esfuerzo elector.

Tal como habíamos indicado anteriormente, una de las debilidades del ELECTRE reside en la enorme carga subjetiva que conlleva la elección de los umbrales de concordancia y discordancia. Para paliar este problema, es recomendable someter dichos umbrales a un análisis de sensibilidad

	A	B	C	D	E
A	--	1	1	1	0
B	0	--	0	0	0
C	0	0	--	0	0
D	0	0	0	--	0
E	0	1	1	1	--

Tabla 14 - MATRIZ DE DOMINANCIA AGREGADA (CONCORDANTE/DISCORDANTE) -



$\left(\bar{c}=0{,}51;\ \bar{d}=0{,}79\right) \rightarrow$ NUCLEO $=\{A,E\}$ $\left(\bar{c}=0{,}40;\ \bar{d}=0{,}79\right) \rightarrow$ NUCLEO $=\{A\}$

Figura 2 - GRAFOS ELECTRE Y NÚCLEOS ASOCIADOS -

con objeto de estudiar la influencia que tienen variaciones en los valores de dichos umbrales en la estructura del núcleo. Así, si en nuestro ejemplo bajamos el umbral de concordancia a 0,40, el grafo ELECTRE se modifica tal como queda representado en la Figura 2, pasando a estar formado el núcleo exclusivamente por el caza-bombardero designado por la letra A.

Para acabar la presentación del ELECTRE conviene remarcar que el método que hemos expuesto corresponde a lo que se denomina ELECTRE I y que constituye el primer método de sobreclasificación publicado. Aunque este método ha sido extensamente utilizado en la práctica con aparentes buenos resultados, existen desarrollos y extensiones de otros métodos de sobreclasificación más elaborados teóricamente. Entre ellos, cuando menos, hay que citar al ELECTRE II, que permite obtener una ordenación completa de las alternativas no dominadas, el ELECTRE III en el que la relación de sobreclasificación se basa en conjuntos borrosos y el ELECTRE IV, apropiado para casos en los que el centro decisor no desea especificar los pesos preferenciales [22]. Dentro de la familia de métodos multicriterio de sobreclasificación debe citarse el método PROMETHEE (*Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations*) propuesto por Brans et al, que permite obtener una ordenación total o parcial de las alternativas no dominadas [23].

4.4. Procesos analíticos jerarquizados (método AHP)

A finales de la década de los 70, Thomas L. Saaty [2] introdujo un método multicriterio discreto conocido por AHP (*analytic hierarchy process*) que ha tenido un gran impacto tanto a nivel teórico como aplicado. En este apartado expondremos, tanto los rasgos fundamentales, como la mecánica operativa del AHP o de los procesos analíticos jerarquizados apoyándonos para ello en un sencillo ejemplo ilustrativo.

Supongamos que el problema decisional consiste en elegir el trazado de un tramo de autopista. Existen tres trazados posibles (las elecciones o alternativas, que denominaremos A, B y C), que se evalúan en base a tres criterios relevantes: coste de ejecución, impacto ambiental y tiempo de ejecución. Es decir, nos enfrentamos a un método multicriterio discreto 3 X 3 (p.ej. 3 alternativas y 3 criterios). La estructura jerárquica del problema dentro del enfoque de Saaty queda representada en la Figura 3. El primer nivel o jerarquía de la estructura corresponde al propósito del problema, el segundo a los criterios y el tercero a las alternativas o elecciones posibles

Una vez conceptualizada la estructura jerárquica del problema, se establece una fuerte interacción con el centro decisor para que emita sus juicios de valor o preferencias en cada uno de los niveles jerárquicos establecidos. Esta tarea, tal como se expone en la Sección 1.5, consiste en una comparación de valores subjetivos «por parejas»; es decir, el centro decisor tiene que emitir n(n-1)/2 juicios de valor (3(3-1)/2 =3 en nuestro caso) sobre la importancia relativa de criterios y alternativas. Para el nivel jerárquico segundo, los valores

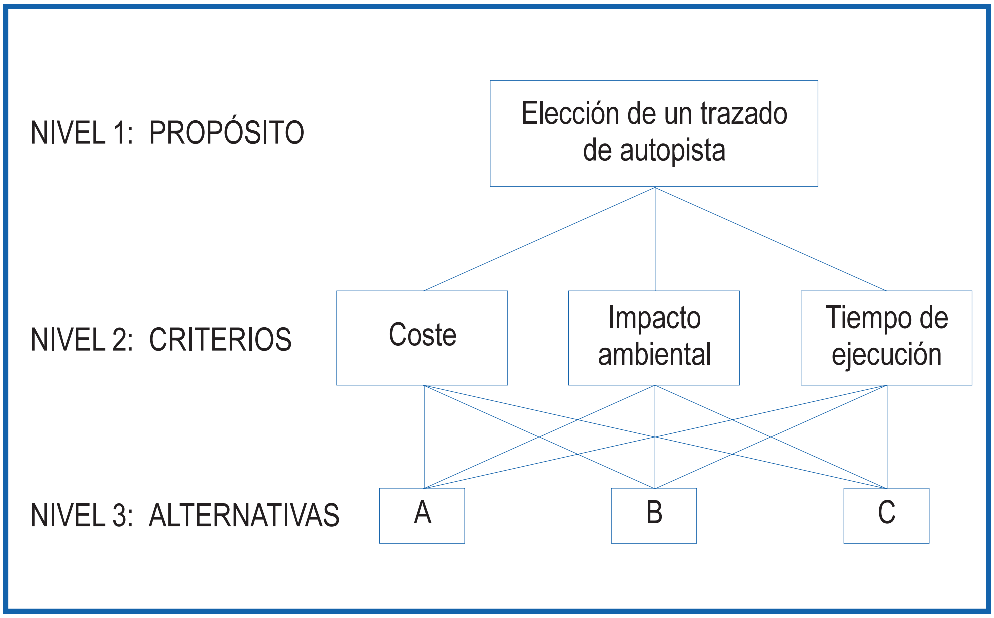


Figura 3 - TRAZADOS ALTERNATIVOS DE UNA AUTOPISTA: REPRESENTACIÓN JERÁRQUICA -

subjetivos que suponemos ha emitido el centro decisor para los datos de nuestro ejemplo quedan reflejados en la matriz de la Tabla 15.

Es interesante observar que para aplicar el método AHP no hace falta información cuantitativa acerca del resultado que alcanza cada alternativa en cada uno de los criterios considerados, sino tan solo los juicios de valor del centro decisor. El paso siguiente es la aplicación del método AHP consiste en obtener un sistema de pesos que resulte consistente con las preferencias subjetivas mostradas por el centro decisor y recogidas en la matriz de comparación «por parejas» de la Tabla 15. Para ello (véase Sección 1.6), tendríamos que encontrar un conjunto de valores W no negativos que satisfaciera las siguientes tres ecuaciones que derivan de nuestra matriz:

$$\begin{aligned} W_1 \quad -2W_2 \qquad\qquad &= 0 \\ W_1 \qquad\qquad -5W_3 &= 0 \\ W_2 \quad -3W_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

	Coste	Impacto ambiental	Tiempo de ejecución
Coste	1	2	5
Impacto ambiental	1/2	1	3
Tiempo de ejecución	1/5	1/3	1

Tabla 15 - MATRIZ DE COMPARACIÓN "POR PAREJAS" PARA EL NIVEL JERÁRQUICO 2 -

Las lógicas y comprensibles inconsistencias en los juicios de valor del centro decisor hacen, como es habitual, que la única solución que admite el anterior sistema de ecuaciones sea la trivial $W_1 = W_2 = W_3 = 0$. Por tanto, debemos de encontrar el conjunto de pesos W que más se aproxime a los verdaderos. Para abordar esta tarea podemos recurrir a diferentes procedimientos matemáticos como el cálculo de medias geométricas que se utilizó en la Sección 1.6, el método del autovalor máximo sugerido por Saaty, o recurrir a la formulación de un modelo de programación por metas ponderadas (véase apartado 3.3.) con la siguiente estructura:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } n_1 + p_1 + n_2 + p_2 + n_3 + p_3 \\
&W_1 - 2W_2 + n_1 - p_1 = 0 \\
&W_1 - 5W_3 + n_2 - p_2 = 0 \\
&W_2 - 3W_3 + n_3 - p_3 = 0 \\
&W_1 + W_2 + W_3 = 1
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

La última identidad de (4.6) -que no es esencial para al problema de estimar los pesos- garantiza simplemente la obtención de pesos normalizados que sumen la unidad. Obviamente, si existiera un conjunto de pesos W no negativos que satisfaciera perfectamente el sistema de ecuaciones (4.5), el valor en el óptimo de todas las variables de desviación sería cero. Normalmente -como sucede en nuestro ejemplo- no puede alcanzarse un resultado exacto. Resolviendo el programa lineal que subyace a (4.6) se obtiene la siguiente solución:

$$
\begin{aligned}
&W_1 = 0{,}588 \quad W_2 = 0{,}294 \quad W_3 = 0{,}118 \\
&n_1 = p_1 = p_2 = 0 \quad n_3 = 0{,}06 \quad p_3 = 0
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

El vector $[W_1 = 0{,}588 \ W_2 = 0{,}294 \ W_3 = 0{,}118]$ representa la estimación de pesos obtenida y el valor en el óptimo de la función objetivo (i.e. 0,06) el ratio de consistencia mostrado por el centro decisor al manifestar sus preferencias.

Una vez determinados los pesos para el nivel jerárquico 2, el paso siguiente en la aplicación del método AHP consiste en interaccionar nuevamente con el centro decisor, pero ahora en el nivel jerárquico 3. Para ello, el centro decisor tiene que mostrar sus juicios de valor cuando se confronta cada alternativa (trazado de la autopista) con cada criterio. Las tres matrices de comparación para el nivel jerárquico tres están recogidas en la Tabla 16.

Nuevamente la interpretación de los elementos de las matrices de comparación es obvia. Así, para la primera matriz de comparación (p.ej. la que se refiere al coste) tenemos que, para el centro decisor, el trazado A es seis veces preferido al B y tres veces preferido al C en términos del criterio coste, etc. Las tres matrices de comparación están ampliadas con una columna en la que figuran recogidas las estimaciones de los pesos que resultan consistentes con las preferencias mostradas por el centro decisor. Dichas estimaciones se han obtenido recurriendo nuevamente a un modelo de programación por metas ponderadas.

Una vez obtenidos los estimadores de los pesos para los niveles jerárquicos 2 y 3, el paso siguiente -y último- del método AHP consiste en obtener unos pesos globales para ambos niveles jerárquicos. Esta tarea se aborda por medio de una agregación multiplicativa entre niveles jerárquicos. Así, para el trazado A el peso global es: 0,667 x 0,588 + 0,069 x 0,294 + 0,143 x 0,118 = 0,429. En la Tabla 17 figuran recogidos tanto los pesos obtenidos en los niveles jerárquicos 2 y 3 como los pesos globales.

En conclusión, la instrumentalización de las preferencias del centro decisor por medio del método AHP conduce a considerar el trazado A del tramo de autopista como la mejor solución.

4.5. Algunos comentarios críticos

En este capítulo hemos analizado con cierta profundidad los dos enfoques multicriterio de tipo discreto más utilizados en la práctica el método ELECTRE y el método AHP. Aparte de estos dos enfoques

	A	B	C	Pesos W
A	1	6	3	0,667
B	1/6	1	1/2	0,111
C	1/3	2	1	0,222

A) Coste

	A	B	C	Pesos W
A	1	1/9	1/5	0,069
B	9	1	2	0,621
C	5	1/2	1	0,310

A) Impacto ambiental

	A	B	C	Pesos W
A	1	1/2	1/4	0,143
B	2	1	1/2	0,286
C	4	2	1	0,571

C) Tiempo de ejecución

Tabla 16 - MATRIZ DE COMPARACIÓN "POR PAREJAS" Y ESTIMACIONES DE PESOS RELATIVOS PARA EL NIVEL JERÁRQUICO 3 -

Criterios / Alternativas	Coste 0,588	Impacto ambiental 0,294	Tiempo de ejecución 0,118	Pesos globales
A	0,667	0,069	0,143	0,429
B	0,111	0,621	0,286	0,282
C	0,222	0,310	0,571	0,289

Tabla 17 - DETERMINACIÓN DE LOS PESOS GLOBALES -

existe una amplia gama de métodos multicriterio discretos [24]. Ante tal abundancia de métodos, parece normal que el lector se pregunte por la razón de tal proliferación. Asimismo, es fácil que se pregunte qué método o qué familia de métodos tiene más sentido y por tanto presumiblemente conducen a una mejor solución.

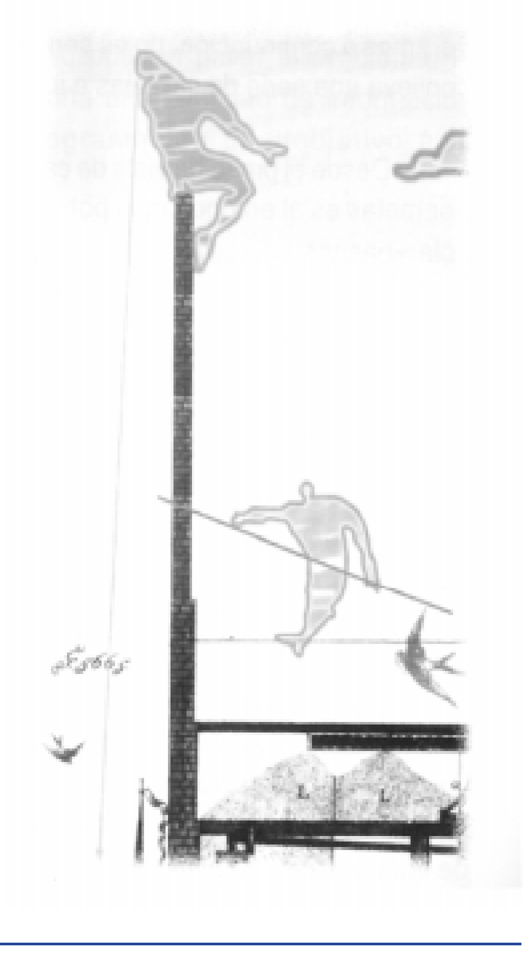
La respuesta a estos interrogantes dista mucho de ser fácil. La razón de esta dificultad de debe fundamentalmente a la carencia de estos métodos de una base axiomática sólida. Dicho con otras palabras, los métodos multicriterio discretos no satisfacen un sistema axiomático consistente y atractivo. Esta falta de base axiomática hace que las clasificaciones de alternativas proporcionadas por diferentes métodos resulten cuestionables, cuando no arbitrarias.

Por otra parte, algunos de estos métodos demandan un tipo de información que en muchas ocasiones resulta muy difícil de obtener. Así, por ejemplo, para la aplicación del ELECTRE hace falta conocer entre otras cosas, los umbrales de concordancia y de discordancia. Indudablemente, la fijación de estos parámetros conlleva una fuerte carga arbitraria, lo que reduce considerablemente la fiabilidad de los resultados obtenidos con estos métodos. Diversos autores han apuntado con razón, que en numerosas aplicaciones del ELECTRE para los valores fijados inicialmente a los umbrales de concordancia y discordancia el correspondiente núcleo esta vacío o está formado por todas las alternativas iniciales. Por lo que se van graduando los anteriores umbrales hasta obtener un núcleo con el tamaño deseado. Por tanto, la determinación del tamaño final del núcleo es en buena medida arbitraria. Además, a la filosofía del ELECTRE parece subyacer el supuesto de existencia de una función de utilidad lineal y aditiva. La compatibilidad que normalmente existe entre el núcleo del problema ELECTRE y la ordenación obtenida por un *modelo compromiso* para la métrica $\pi = 1$ parece corroborar esta conjetura. Como Arrow & Raynaud [25, p. 134] indican: «si se poseen los elementos necesarios para construir una función de utilidad lineal, ¿cuál sería el motivo para ensayar un método tan sofisticado como es ELECTRE?»

Estas observaciones no pretenden minar la aplicabilidad de los métodos multicriterio discretos. Tal vez este tipo de problemas, de indudable interés práctico muy especialmente en el campo de la ingeniería de sistemas, no han podido resolverse con la debida precisión, debido a su compleja naturaleza. Los métodos multicriterio discretos desarrollados hasta ahora –el ELECTRE y el AHP son ejemplos representativos– pueden considerarse ideas ingeniosas con un gran atractivo, pero que al no estar integradas en un esquema axiomático global pierden algo de solidez. Dicho con otras palabras, estos métodos hay que considerarlos como procedimientos heurísticos que permiten en la generalidad de los casos obtener resultados razonables de problemas decisionales multicriterio de gran complejidad e importancia.

5

Epílogo



Parece razonable que una vez discutida tanto la naturaleza como el funcionamiento de los principales métodos multicriterio nos planteemos la evaluación comparativa de las ventajas e inconvenientes que presentan dichos métodos. En pocas palabras, cabe preguntarse cuál es el método multicriterio más adecuado. La respuesta, como veremos a continuación, no es sencilla, pues cada método multicriterio conlleva una serie de ventajas e inconvenientes.

Desde el punto de vista de carga computacional, la programación por metas es el enfoque más potente, pues su aplicación requiere una sola «pasada de computador». Por el contrario, en el contexto de la programación multiobjetivo, cuando se aproxima el conjunto eficiente por medio del método de las restricciones o de las ponderaciones, el numero de «pasadas de computador» es una función casi exponencial del numero de objetivos implicados. En el caso de la programación compromiso, en rigor sólo hace falta resolver dos programas matemáticos (uno para la métrica $\pi = 1$ y otro para la métrica $\pi = \infty$) para obtener los limites del conjunto compromiso. Ahora bien, actuando de esta forma, ignoramos el resto del conjunto eficiente, lo que puede significar una pérdida importante de información.

Si realizamos la evaluación en base a la cantidad y precisión de la información que demandamos del centro decisor para poder implementar el correspondiente método multicritero, entonces la programación por metas resulta el método menos atractivo. Así, dentro de este enfoque, el centro decisor tiene que proporcionar una información muy precisa sobre niveles de aspiración, pesos a asociar a las variables de desviación, ordenaciones lexicográficas de preferencias, etc. En este aspecto, la programación multiobjetivo se encuentra en el polo opuesto de la escala, pues para construir un modelo mutiobjetivo no hace falta ningún tipo de información acerca de las preferencias del centro decisor. En el caso de la programación compromiso, sólo necesitamos información sobre los pesos asociados a las discrepancias entre objetivo y valores ideales para, de este manera, poder determinar el conjunto compromiso.

Finalmente, si realizamos la evaluación en base a la cantidad de información producida por el modelo, los enfoques basados en metas -al proporcionar una única solución- se encuentran en una situación de inferioridad con respecto a los otros dos enfoques. Aunque los análisis de sensibilidad pueden paliar el problema, la programación por metas proporciona una cantidad de información mucho más escasa que la programación multiobjetivo o la programación compromiso.

Este tipo de consideraciones no nos permiten establecer de una manera definitiva, la superioridad teórica y operativa de un método multicriterio con respecto a otros. Puede concluirse de una manera pragmática, indicando que en la elección del método multicriterio más adecuado influya de una manera decisiva las características situacionales del problema decisional en concreto.

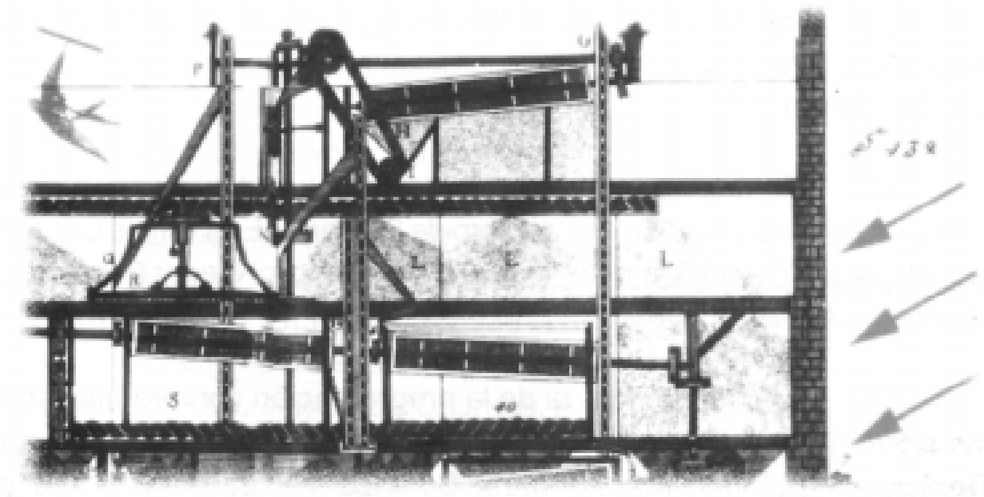
La influencia del contexto situacional en la elección del método multicriterio más adecuado es especialmente relevante en el campo de la ingeniería de sistemas. En efecto, en este dominio coexisten problemas con niveles de complejidad analítica muy diferentes. Así, podemos encontrarnos con un problema de diseño de un sistema de transmisión de datos en el que se hace necesario considerar varios criterios (coste, tiempo de respuesta, disponibilidad de datos, etc), además de un elevadísimo número de variables de decisión de tipo binario (p.ej. varios miles de variables 0/1). Tal tipo de problema sólo puede abordarse de una manera efectiva, recurriendo a la programación por metas [26].

Frente a este ejemplo de naturaleza compleja, existen otros problemas sistémicos formalmente más sencillos. Por ejemplo, consideremos el caso consistente en ordenar un número finito de sistemas factibles en base a varios criterios. Para resolver una problema de esta naturaleza basta recurrir a un sencillo método discreto como el ELECTRE.

En definitiva, puede decirse que en general y muy especialmente en el campo de la ingeniería de sistemas, no existe una superioridad de unos métodos con respecto a otros. El estudio cuidadoso de la naturaleza del problema a analizar nos conducirá a la elección del método multicriterio más adecuado.

Finalmente, puede ser interesante apuntar que, por razones expositivas, los diferentes métodos multicriterio se han presentado de una manera desconectada. Sin embargo, entre los diferentes métodos expuestos existen relaciones y conexiones importantes. Así, tal como se expuso en la Sección 3.3 la programación por metas MINIMAX y la programación compromiso para la métrica $\pi = \infty$ son análogas. Dichos enfoques se vuelven no sólo análogos sino equivalentes cuando los niveles de aspiración del modelo de metas MINIMAX se fijan en sus valores anclas. Una equivalencia semejante existe entre la programación por metas ponderadas y la programación compromiso para la métrica $\pi = 1$. El análisis exhaustivo de este tipo de conexiones, aunque posee un indudable atractivo teórico, excede del propósito de esta monografía: definir a un nivel introductorio las posibilidades aplicativas del análisis de las decisiones multicriterio en el campo de la ingeniería de sistemas.

Referencias



[1] Stillwell, W.G., D.A. Seaver, y W. Edwards , A Comparison of Weight Approximation Thechniques in Multialttribute Utility Decision Making Organization Behavior and Human Performance, 28: 62-77, 1981.

[2] El punto de partida de los procesos analíticos jerarquizados es el artículo de Saaty, T.L., A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, Journal of Mathematical Psychology, 15: 234-281, 1977. Una buena presentación desde un punto de vista pedagógico de esta metodología puede verse en los siguientes dos trabajos de Saaty: The Analytic Hierarchy Process, MacGraw Hill, Nueva York, 1980 y How to Make a Decision: The Analytic Hierarchy Process, Interfaces 24: 19-43, 1994.

[3] Crawford, G., y C. Williams, A Note on the Analysis of Subjective Judgement Matrices, Journal of Mathematical Psychology, 29: 387-405, 1985.

[4] Una exposición accesible del Simplex Multicriterio puede verse en los Capítulos 7, 8, y 9 del libro de Steuer, R.E., Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application, Krieger Publishing Company, Malabar, 1989.

[5] El punto de partida de la programación compromiso son los siguientes dos trabajos: Yu, P.L. A Class of Solutions for Group Decision Problems, Management Science 19: 688-693, 1973 y

Zeleny, M., Multiple Criteria Decision Making (Cochrane, J.L., Zeleny, M., editores), University of South Carolina Press, Columbia: 262-301, 1973.

[6] Zeleny, M., A Concept of Compromise Solutions and the Method of the Displaced Ideal, Computers and Operations Research 1: 479-496, 1974.

[7] Freimer, M., y P.L. Yu, Some New Results on Compromise Solutions for Group Decision Problems, Management Science 22: 688-693, 1976.

[8] En este sentido pueden consultarse los siguientes trabajos: Ballestero, E., y C. Romero, A Theorem Connecting Utility Function Optimization and Compromise Programming, Operations Research Letters 10: 421-427, 1991 y Ballestero, E., Romero, C., Utility Optimization when the Utility Function is Virtually Unknown, Theory and Decision 37: 233-243, 1994.

[9] Liebman, J., L. Lasdon, L. Schrage y A. Waren, Modeling and Optimizacion with GINO, The Scientific Press, San Francisco, 1986.

[10] Los trabajos pioneros de Simon, H.A. sobre la lógica satisfaciente son: A Behavioral Model of Rational Choice, Quaterly Journal of Economics 69: 99-118, 1955 y Models of Man, John Wiley and Sons, Nueva York, 1957.

[11] Charnes, A., W.W. Cooper y R. Ferguson, Optimal Estimation of Executive Compensation by Linear Programming, Management Science 1: 138-151, 1955. El concepto Goal Programming aparece por primera vez de forma explícita en el apéndice B del libro clásico de Charnes, A. y W.W. Cooper, Management Models and Industrial Applications of Linear Programming., John Wiley and Sons, Nueva York, 1961.

[12] Lee, S.M., Goal Programming for Decision Analysis, Auerbach Publishers, Filadelfia, 1972.

[13] Ignizio, J.P., Goal Programming and Extensions, Lexington Books, Massachusetts, 1976.

[14] En un reciente trabajo de Schniederjans, M.J., Goal Programming: Methodology and Applications. Kluwer, Boston, 1995, se referencian más de 900 trabajos teóricos y aplicados en los que se recurre a este tipo de enfoque multicriterio.

[15] Ignizio, J.P. y J.H. Perlis, Sequential Linear Goal Programming, Computers and Operations Research 6: 141-145, 1979.

[16] En este sentido puede consultarse, por ejemplo, Romero, C., Multiobjetive and Goal Programming Approaches as a Distance Function Model, Journal of the Operational Research Society 36: 249-251, 1985.

[17] Singh, N. y S.K. Agarwal, Optimun Design of an Extendend Octagonal Ring by Goal Programming, International Journal of Production Research 21: 891-898, 1983.

[18] Un buen tratamiento de los métodos de detección de soluciones ineficientes, así como de la restauración de la eficiencia en un contexto de programación por metas, puede verse en el trabajo de Tamiz, M. y D. Jones, Goal Programming and Pareto Efficiency, Journal of Information and Optimization Sciences 17: 1-17, 1996.

[19] Una exposición detallada de estas cuesiones puede verse en Romero, C., Handbook of Critical Issues in Goal Programming, Pergamon Press, Oxford, 1991.

[20] Benayoun, R., B. Roy y B. Sussman, Une Methode pour Guider le Choix en Presence de Vue Multiples, Sema (Metra International), Direction Scientifique, Note de Travail no. 49, París, 1966.

[21] Roy, B., Problems and Methods with Multiple Objective Functions, Mathematical Programming 1: 239-266, 1971.

[22] Una revisión actualizada de la metodología ELECTRE puede verse en Roy, B., The Outranking Approach and the Foundations of ELECTRE Methods, Theory and Decision 31: 49-73, 1991.

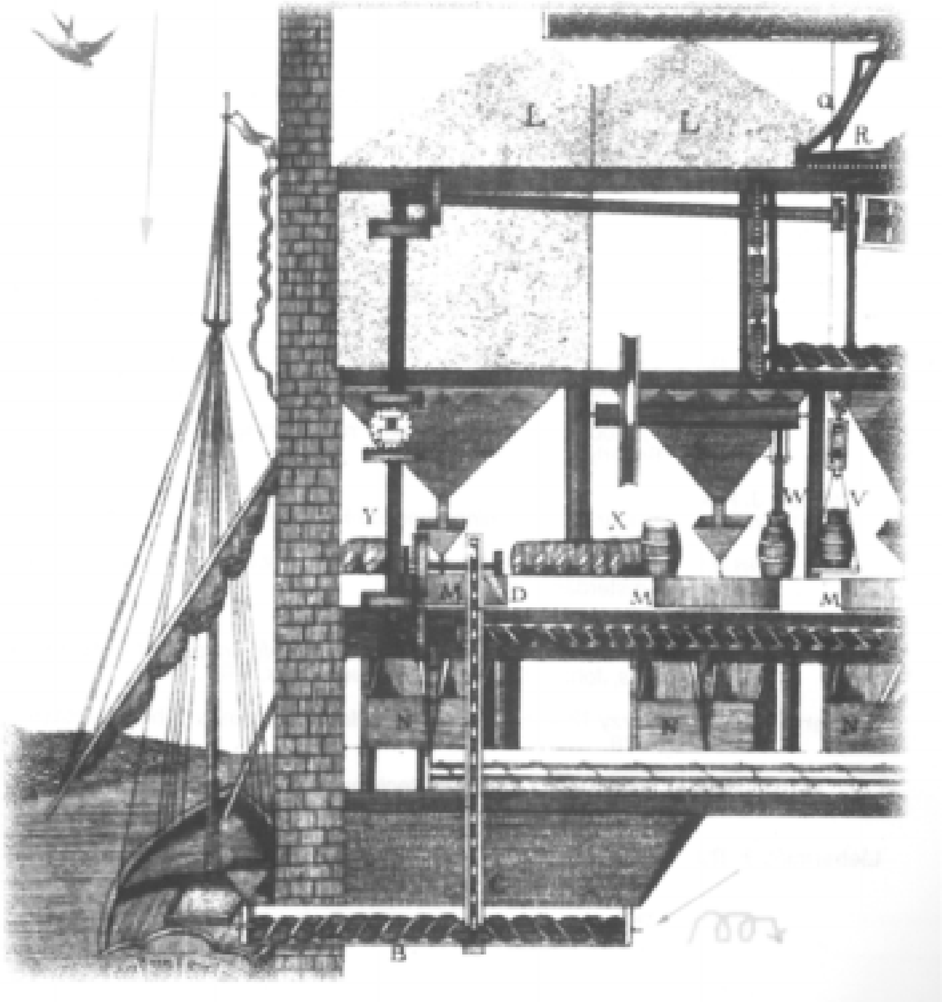
[23] Brans, J.P., Ph. Vincke y B. Mareschal, How to Select and How to Rank Projects: The PROMETHEE Methods, European Journal of Operational Research 24: 228-238, 1986.

[24] Para una revisión de este tipo de métodos puede consultarse, entre otros, Hwang, C.L. y K. Yoon, Multiple Atribute Decision Making. Methods and Applications, Springer-Verlag, Berlín, 1981.

[25] Arrow, K.J. y H. Raynaud, Opciones Sociales y Toma de Decisiones Mediante Criterios Múltiples, Alianza Editorial, Madrid, 1989.

[26] Una aplicación de la programación por metas al diseño de sistemas de transmisión de datos puede verse en el trabajo de Lee, H., Y. Shi y J. Stolen, Allocating Data Files Over a Wide Area Network: Goal Setting and Compromise Design, Information and Management 26: 85-93, 1994.

Bibliografía



Bogetoff, P. & P. Pruzan: *Planning with Multiple Criteria*, Elsevier, Amsterdam, 1991.

Chankong, V. & Y. Haimes: *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*, North-Holland, Nueva York, 1983.

Cohon, J. L.: *Multiobjective Programming and Planning*, Academic Press, Nueva York, 1978.

Goicoechea, A., D. R. Hansen & L. Duckstein: *Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications*, John Wiley and Sons, Nueva York, 1982.

Guerra, L. A.: *Gestión de Empresas y Programación Multicriterio*, ESIC, Madrid, 1989.

Haimes, Y., W. Hall & H. Freedman: *Multiobjective Optimization in Water Resources Systems: The Surrogate Worth Trade-Off Method*, Elsevier, Amsterdam, 1975.

Haimes, Y., K. Tarvainen, T. Shima & J. Thadathil: *Hierarchical Multiobjective Analysis of Large-Scale Systems,* Hemisphere Publishing, Nueva York, 1990.

Hwang, C. L. & M. J. Lin: *Group Decision Making under Multiple Criteria*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

Hwang, C. L., A. S. M. Massud, S. R. Paidy & K. Yoon: *Multiple Objective Decision Making Methods and Applications: A State-of-the-Art Survey*, Springer-Verlag, Berlín, 1979.

Ignizio, J. P.: - *Linear Programming in Single & Multiple Objective Systems,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.

- *Introduction to Linear Goal Programming,* SAGE Publications, Beverly Hills, 1985.

Ignizio, J. P. & T. M. Cavalier: *Linear Programming*, Prentice-Hall, Nueva Jersey, 1994.

Ijiri, Y.: *Management Goals and Accounting for Control*, North-Holland, Amsterdam, 1965.

Keeney, R. L. & H. Raiffa: *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-Offs*, John Wiley and Sons, Nueva York, 1976.

Kickert, W. J. M.: *Fuzzy Theories on Decision Making*, Martinus Nijhoff, La Haya, 1978.

Lee, S. M.: *Goal Programming for Decision Analysis*, Auerbach Publishers, Filadelfia, 1972.

Lieberman, E. R.: *Multi-Objective Programming in the USSR*, Academic Press, Boston, 1991.

Luc, D.: *Theory of Vector Optimization*, Springer-Verlag, Belín, 1989.

Nijkamp, P., P. Rietveld & H. Voogd: *Multicriteria Evaluation in Physical Planning*, Elsevier, Amsterdam, 1990.

Olson, D. L.: *Decision Aids for Selection Problems*, Springer-Verlag, Nueva York, 1996.

Osyczka, A.: *Multicriterion Optimization in Engineering with FORTRAN Programs*, Ellis Horwood Limited, 1984.

Pomerol, J. Ch. & S. Barba-Romero: *Choix Multicritere dans L'Entreprise*, Hermes, París, 1993.

Panos, M., Y. Siskos & D. Zopounidis: *Advances in Multicriteria Analysis*, Kluwer, Dordrecht, 1995.

Ríos, S., M. J. Ríos-Insua & S. Ríos-Insua: *Procesos de Decisión Multicriterio*, Eudema, Madrid, 1989.

Ríos-Insua, D.: *Sensitivity Analysis in Multiobjective Decision Making*, Springer-Verlag, Berlín, 1990.

Romero, C.: *Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, Técnicas y Aplicaciones*, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1993.

Romero, C. & T. Rehman: *Multiple Criteria Analysis for Agricultural Decision*, Elsevier, Amsterdam, 1989.

Saaty, T. L. & J. M. Alexander: *Conflict Resolutions: The Analytic Hierarchy Approach*, Praeger Plubishers, Nueva York, 1989.

Saaty, T. L. & K. P. Kearns: *Analytical Planning. The Organization of Systems*, Pergamon Press, Oxford, 1985.

Sakawa, M.: *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press, Nueva York, 1993.

Sawaragi, Y., H. Nakayama & T. Tanino: *Theory of Multiobjective Optimization*, Academic Press, Nueva York, 1985.

Shniederjans, M. J.: *Linear Goal Programming*, Petrocelli Books, Princeton, New Jersey, 1984.

Seo, F. & M. Sakawa: *Multiple Criteria Decision Analysis in Regional Planning. Concepts, Methods and Applications*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

Spronk, J.: *Interactive Multiple Goal Programming*, Martinus Nijhoff, La Haya, 1981.

Stancu-Minasian, I.M.: *Stochastic Programming with Multiple Objectives*, Reidel, Dordrecht, 1984.

Statnikov, R. B. & J. B. Matusov: *Multicriteria Optimization and Engineering*, Chapman and Hall, Nueva York, 1995.

Steuer, R. E.: *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*, Krieger Publishing Company, Malabar, 1989.

Szidarovszky, F., M. E. Gershon & L. Duckstein: *Techniques for Multiobjective Decision Making in Systems Management*, Elsevier, Amsterdam, 1986.

Tabucanon, M. T.: *Multiple Criteria Decision Making in Industry*, Elsevier, Amsterdam, 1988.

Vincke, Ph.: *Multicriteria Decision-Aid*, John Wiley and Sons, Chichester, 1992.

Yu, P. L.: *Multiple Criteria Decision Making: Concepts, Techniques and Extensions*, Plenum, Nueva York, 1985.

Zeleny, M.: *Linear Multiobjective Programming*, Springer-Verlag, Berlín, 1974.

Glosario

1. **A H P.** Siglas de *Analytic Hierarchy Process*. Método multicriterio discreto en el que se representan las preferencias del centro decisor por medio de un sistema de comparación «por parejas».

2. **ATRIBUTOS.** Valores con los que el centro decisor se enfrenta a un determinado problema decisional. Estos juicios de valor pueden medirse independientemente de los deseos del centro decisor y a su vez han de ser susceptibles de expresarse como una función de las variables de decisión.

3. **CONJUNTO EFICIENTE.** Conjunto de soluciones factibles que gozan de la condición de optimalidad paretiana.

4. **CRITERIO.** Término general que engloba los conceptos de atributos, objetivos o metas que se consideran relevantes en un cierto problema decisional.

5. **ELECTRE.** Siglas de elimination and (et) choice translating algorithm. Método multicriterio discreto que basándose en relaciones de sobreclasificación realiza una partición del conjunto eficiente en un subconjunto de alternativas más favorables para el centro decisor (el núcleo) y en otro subconjunto de alternativas menos favorables.

6. **META.** Combinación de un atributo con un nivel de aspiración.

7. **MÉTODO DE LAS PONDERACIONES.** Técnica generadora que permite la segregación del conjunto eficiente del resto del conjunto factible mediante la optimización paramétrica de la suma ponderada de los diferentes criterios.

8. MÉTODO DE LAS RESTRICCIONES. Técnica generadora que permite la segregación del conjunto eficiente del resto del conjunto factible mediante la optimización de uno de los criterios, mientras que los criterios restantes se incorporan al conjunto de restricciones como restricciones paramétricas.

9. NIVEL DE ASPIRACIÓN. Nivel aceptable de logro para un determinado atributo.

10. OBJETIVOS. Direcciones de mejora de los atributos. Cuando el objetivo deriva de un atributo del tipo «más mejor», tenemos un proceso de maximización. Cuando, por el contrario, el objetivo deriva de un atributo «menos mejor», tenemos un proceso de minimización.

11. OPTIMALIDAD PARETIANA (Contexto Económico). Estado en que se encuentra una colectividad, cuando ninguna persona de la misma puede mejorar su situación sin que empeore la situación de alguna otra persona de dicha colectividad.

12. OPTIMALIDAD PARETIANA (Contexto multicriterio). Propiedad que gozan algunas soluciones factibles y que consiste en que no existe otra solución factible que proporcione una mejora en un atributo sin producir un empeoramiento en al menos otro de los atributos.

13. PROGRAMACIÓN COMPROMISO. Enfoque multicriterio consistente en encontrar, para diferentes métricas, las soluciones eficientes que se encuentran más próximas al punto ideal.

14. PROGRAMACIÓN MULTIOBJETIVO (OPTIMIZACIÓN VECTORIAL). Optimización simultánea de una serie de objetivos que deben satisfacer un determinado conjunto de restricciones.

15. PROGRAMACIÓN POR METAS LEXICOGRÁFICA. Variante de la programación por metas en la que las metas situadas en la prioridad más alta se satisfacen en la medida de lo posible, solo entonces se considera se considera la posible satisfacción de las metas situadas en prioridades más bajas; esto es, se trata de un sistema de programación en el que las preferencias del centro decisor se ordenan igual que las palabras en un léxico o diccionario.

16. PROGRAMACIÓN POR METAS MINIMAX. Variante de la programación por metas en la que se busca la minimización de la máxima desviación de entre todas las desviaciones.

17. PROGRAMACIÓN POR METAS PONDERADAS. Variante de la programación por metas en la que se engloba en una función objetivo a minimizar a todas las variables de desviación no deseadas convenientemente ponderadas.

18. PUNTO ANTI-IDEAL. Solución normalmente no eficiente en la que los diferentes objetivos en consideración alcanzan su peor valor.

19. PUNTO IDEAL. Solución normalmente no factible en la que los diferentes objetivos en consideración alcanzan su valor óptimo.

20. RELACIÓN DE SOBRECLASIFICACIÓN. Una alternativa E_i sobreclasifica a otra alternativa E_k cuando para los atributos considerados, el enunciado «la alternativa E_i es al menos tan buena como la alternativa E_k» es válido. La sobreclasificación se establece en base a los conceptos de concordancia y discordancia.

21. SIMPLEX MULTICRITERIO. Generalización del Simplex tradicional. Permite generar todos los puntos de esquina de un problema multiobjetivo desplazándose para ello de un punto esquina al punto esquina contiguo. Este método trabaja eficientemente sólo con problemas de un tamaño reducido.

22. TÉCNICAS GENERADORAS. Conjunto de métodos utilizados en programación multiobjetivo con el propósito de segregar del conjunto de soluciones factibles un subconjunto propio del mismo cuyos elementos gocen de la condición de optimalidad paretiana (conjunto eficiente).

23. VARIABLE DE DESVIACIÓN NEGATIVA. Variable que mide la falta de logro de una meta con respecto a su nivel de aspiración.

24. VARIABLE DE DESVIACIÓN POSITIVA. Variable que mide el exceso de logro de una meta con respecto a su nivel de aspiración.

Esta primera edición de
ANÁLISIS DE LAS DECISIONES MULTICRITERIO
de la serie de
Monografías de Ingeniería de Sistemas
se terminó de imprimir el día
1 de noviembre de 1996.