Decisiones multicriterio

Recordando que el Proceso de toma de decisiones:

- Proceso cognitivo como resulta en la selección de un curso de acción entre varias posibilidades alternativas.
- Proceso de identificar y elegir alternativas basadas en los valores y preferencias del decisor.
- Cada proceso de toma de decisiones produce una elección final que puede o no puede inducir a la acción. La toma de decisiones

Introducción a MCDM

- Una parte importante del proceso de toma de decisiones implica el análisis de un conjunto finito de alternativas que se describen en términos de criterios de evaluación.
- El siguiente paso pudiera ser:
  - clasificar estas alternativas en términos de lo atractivo que son a la toma de decisiones cuando se consideran simultáneamente todos los criterios, o
  - encontrar la mejor alternativa o para determinar la prioridad total relativa de cada alternativa (por ejemplo, si las alternativas representan proyectos que compiten por los fondos) cuando todos los criterios se consideran simultáneamente.

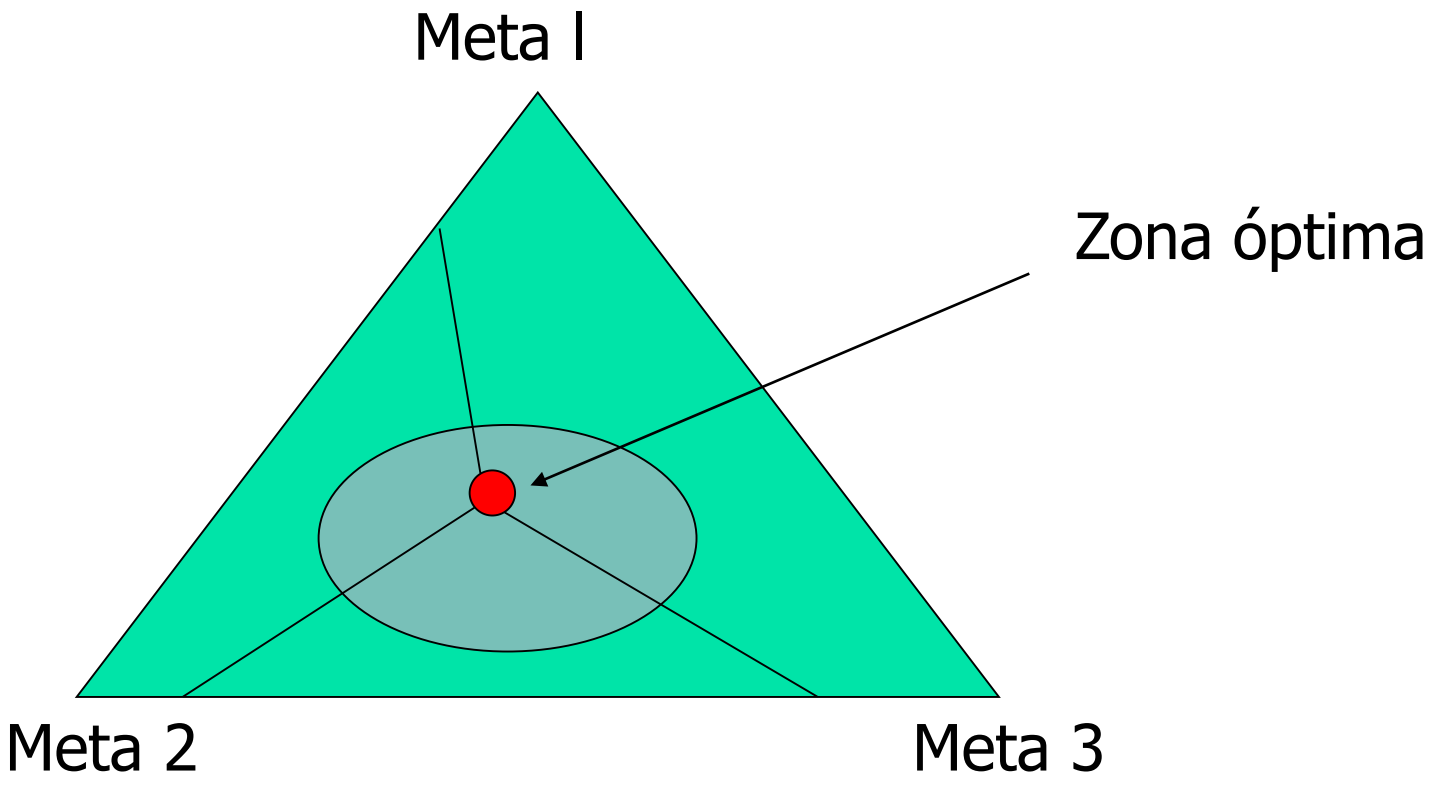
Introducción a MCDM…

- El problema consiste en la forma de obtener los pesos, las clasificaciones o importancia para un conjunto de actividades en función de su impacto sobre la situación y el objetivo de la toma de decisiones.
- La solución de estos problemas es el foco de la Análisis de Decisiones de Criterio Múltiples (MCDA).
- Esta área de la toma de decisiones es muy debatido, ya que hay muchos métodos que puede producir resultados muy diferentes cuando se aplican sobre exactamente los mismos datos.

La toma de decisiones multicriterio

- Como se mencionó, un problema puede considerarse como un problema multicriterio si y sólo si:
  - existen al menos dos criterios en conflicto
  - existen al menos dos alternativas de solución.

Metas conflictivas



Decisiones mono vs. multicriterio

Aspecto	Monocriterio	Multicriterio
Criterios	Únicos	Al menos 2
Solución	Óptima	Compromiso
Preferencias del decisor	Se tiene en cuenta en la función objetivo	Se considera en la solución del problema
Paradigma	Tradicional	Multicriterio
Problemas	Tecnológicos	Económicos y tecnológicos
Deseos del decisor	Un criterio	Criterios en conflicto
Debilidad	Se desvía considerablemente de los problemas reales de toma de decisiones	
Fortaleza		Mayor precisión en los problemas reales de toma de decisión.

Clasificación de los métodos

- Escuela normativa (desarrollada fundamentalmente por loa norteamericanos y los ingleses): Se basa en prescribir normas del modo en que el tomador de decisiones debe pensar sistemáticamente. Tiene una elegancia matemática dada por la modelación del problema, el conjunto de axiomas definidos, etc., utiliza como modelo la racionalidad.

- Escuela descriptiva (desarrollada por los europeos (franceses, holandeses y belgas): Renuncia a la idea de lo racional, trata de hacer un reflejo del modo en que se toman las decisiones, también posee una formulación matemática pero menos impresionante que la escuela normativa.

Vertientes

- Optimización multiobjetivo (MODM) que se relacionan con aquellos problemas en que el conjunto de alternativas es grande y no predeterminadas.
- Se utiliza para diseñar la mejor alternativa considerando la interacción con las restricciones, las mismas resuelven situaciones de diferente naturaleza y contenido.
- La solución de estos problemas se aborda mediante las técnicas clásicas de optimización

Vertientes

- Las decisiones multiatributos (MADM) las cuales se utilizan para seleccionar "la mejor alternativa" dentro de un conjunto explícito de ellas.
- Se utiliza para seleccionar "la mejor alternativa " dentro de un conjunto explícito de ellas, la decisión final se conforma con la ayuda de la comparación de los atributos.

Aspecto	MODM	MADM
Criterio definido por	Objetivos	Atributos
Objetivos	Explícitos	Implícitos
Atributos	Implícitos	Explícitos
Restricciones	Activas	Inactivas
Alternativas	Infinitas (continuo)	Número finito (discreto)
Uso	Diseño	Selección

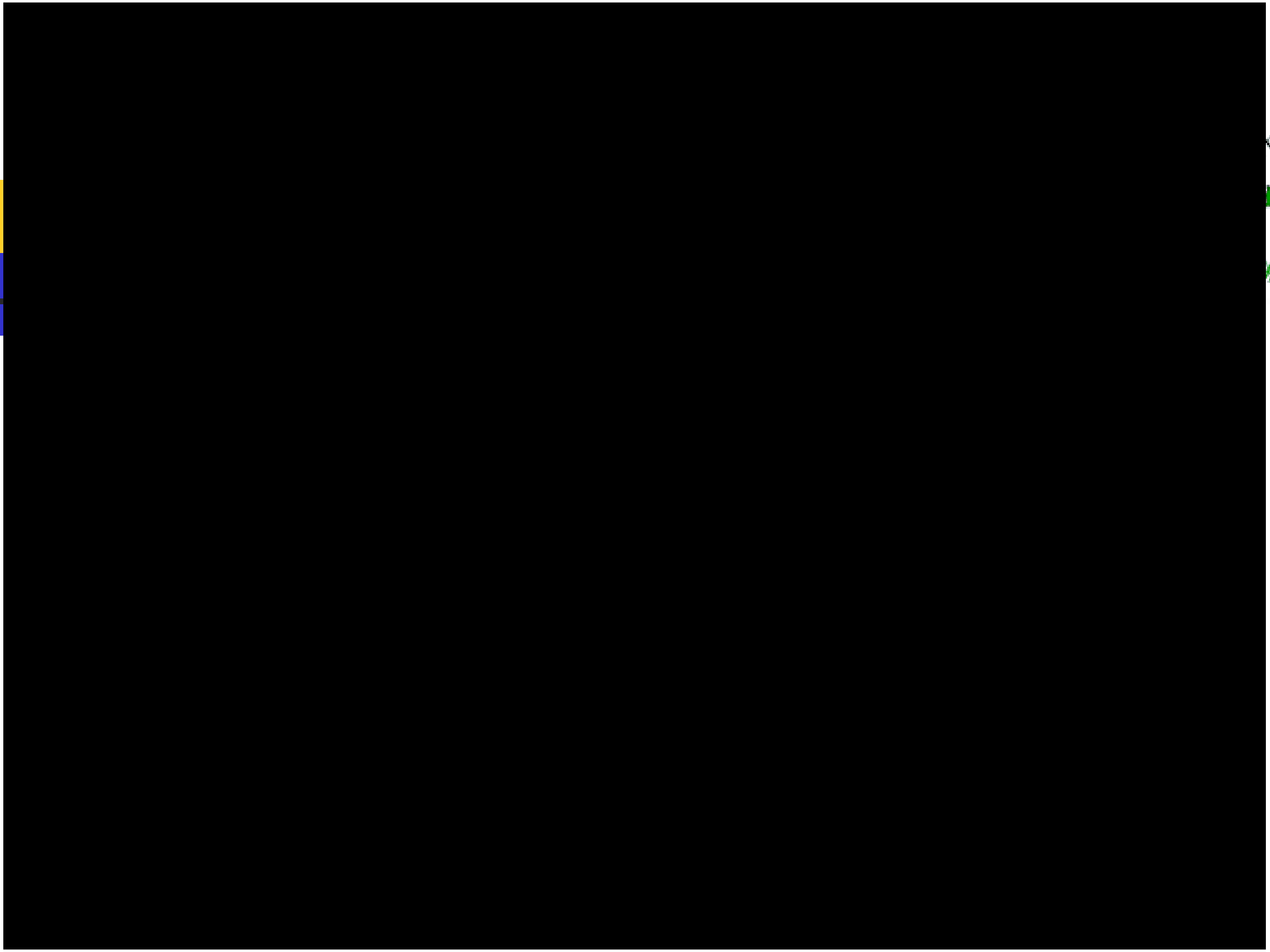
Modelos y Análisis de Decisión con un criterio

Metodologías

- Matriz de pagos
- Programación por objetivos
- Modelos de utilidad
- Dinámica de sistemas

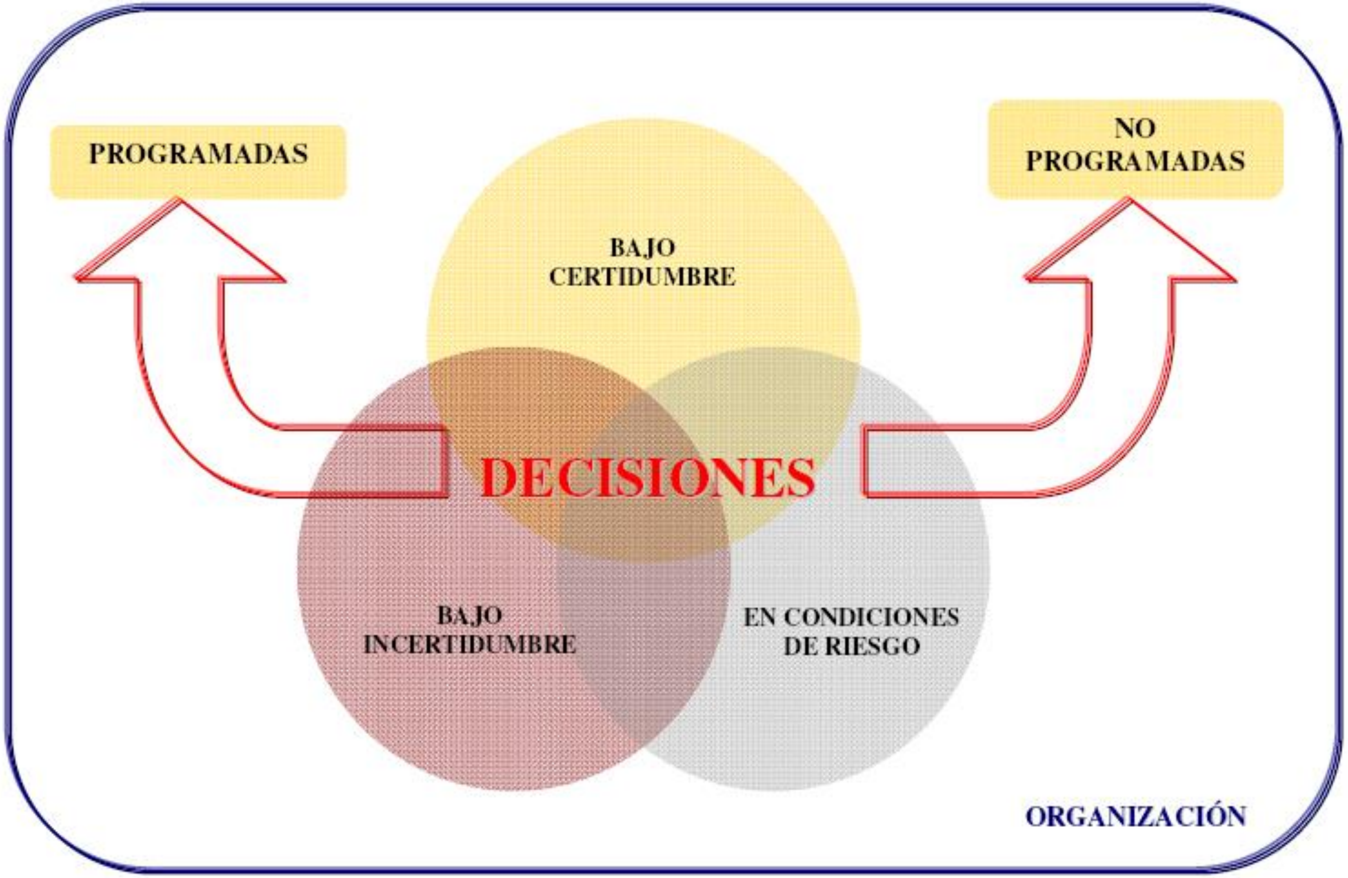
Decisiones e incertidumbre

- Se sabe que hay que tomar decisiones y en consecuencia, enfrentar aspectos desconocidos en el ambiente.
- La recompensa será la ganancia empresarial si la gestión ha sido la adecuada o pérdida empresarial si no lo ha sido o no se ha sabido realizar correctamente.
- Los parámetros de riesgos e incertidumbre, son los elementos con los que se va a enfrentar constantemente a la hora de la toma de decisiones, por tanto la gestión y estrategias empresariales son el medio más útil para afrontar dichos parámetros.
- Cuando se toma una decisión, sin conocer las probabilidades que tiene de que ésta, sea o no exitosa, se enfrenta a una situación de incertidumbre. Pero una vez que toma esa decisión, conociendo esas probabilidades, se enfrenta a una situación de riesgo.



https://www.youtube.com/watch?v=vkpf_jS63oY

Decisiones e incertidumbre



https://www.youtube.com/watch?v=ys6G_gsv_bI

Heurística

- Puede describirse como *el arte y la ciencia del descubrimiento y de la invención* o de resolver problemas mediante la creatividad. La etimología de *heurística* es la misma que la de la palabra *eureka*
- Trata de métodos o algoritmos exploratorios durante la resolución de problemas en los cuales las soluciones se descubren por la evaluación del progreso logrado en la búsqueda de un resultado final (ANSI/IEEE Std 100-1984).
- Caracterizado por técnicas por las cuales se mejora en promedio el resultado de una tarea resolutiva de problemas.

Definiciones

- **Alternativas**: es el conjunto de posibles situaciones de que dispone el decisor para conseguir sus objetivos.
- **Estados de la naturaleza**: aquel factor o factores que influyen en el problema de decisión y que no están bajo el control del decisor. Refleja el entorno del problema de decisión.
- **Probabilidades de ocurrencia**: son las probabilidades asociadas a la ocurrencia de los diferentes estados de naturaleza.
- **Criterio de estimación**: es la característica que permite valorar el conjunto de alternativas

Criterios de dominancia

- Criterio de dominancia estocástica:
  - Sean A_s y A_k dos alternativas de un problema de decisión y $r_{s,j}$ y $r_{k,j}$ sus resultados asociados para el j-ésimo estado de la naturaleza.
  - Se dice que A_s domina estocásticamente a A_k ($A_s > A_k$), para un valor de $C \in \Re$ si:
    - $P(r_{s,j} > C) \geq P(r_{k,j} > C)$: en el caso de resultados favorables
    - $P(r_{s,j} > C) \leq P(r_{k,j} > C)$: en el caso de resultados desfavorables

Criterios de dominancia

- Criterio de dominancia simple:
  - Sean A_s y A_k dos alternativas de un problema de decisión y $r_{s,j}$ y $r_{k,j}$ sus resultados asociados para el j-ésimo estado de la naturaleza.
  - Se dice que A_s domina a A_k ($A_s > A_k$), para todos los estados de naturaleza j si:
    - $r_{s,j} \geq r_{k,j}$: en el caso de resultados favorables
    - $r_{s,j} \leq r_{k,j}$: en el caso de resultados desfavorables

https://www.youtube.com/watch?v=74aF2MSc8T4

Toma de decisiones bajo condiciones de certidumbre

- Incluye aquellos en los cuales cada acto disponible para quien toma la decisión tiene consecuencias que pueden ser conocidas previamente con certeza.
- La certeza o certidumbre es la condición en que los individuos son plenamente informados sobre un problema, las soluciones alternativas son obvias, y son claros los posibles resultados de cada decisión.
- En condiciones de certidumbre, la gente puede al menos prever (si no es que controlar) los hechos y sus resultados.
- Esta condición significa el debido conocimiento y clara definición tanto del problema como de las soluciones alternativas.
- Una vez que un individuo identifica soluciones alternativas y sus resultados esperados, la toma de la decisión es relativamente fácil.
- Características:
  - Los parámetros son constantes conocidos y ciertos.
  - Solamente hay una consecuencia para cada alternativa.
  - Se tiene conocimiento total sobre el problema.
  - Información exacta, medible y confiable acerca del resultado de cada una de las alternativas que consideremos.

MODELOS DE OPTIMIZACIÓN

Modelos de decisiones

La calidad de la información será crítica para procesos donde se involucren decisiones complejas, tales cual:

A Global perspective for Global Business

Strategic Trade

Taha, H. A. (2004). Capítulo 14: Análisis de decisiones y juegos. En H. A. Taha, *Investigación de operaciones* (págs. 503-545). Naucalpan, México: Pearson Educación.

7

https://www.youtube.com/watch?v=SxxhO9aOXq0

Decisiones en ambiente de riesgo

- Son aquellos modelos heurísticos donde las diferentes **alternativas** de acción se conocen, así como los **estados de la naturaleza** o **resultados** de las mismas y las **probabilidades** de que cada una de estos resultados sea obtenido

Matriz de pago

	Estados de la Naturaleza y probabilidades asociadas						
Alternativas	**1, p_1**	**2, p_2**	**3, p_3**	**.**	**.**	**.**	**n, p_n**
A_1	r_{A1}	$r_{A1,1}$	$r_{A1,1}$	.	.	.	$r_{A1,1}$
A_2	$r_{A2,1}$	$r_{A2,1}$	$r_{A2,1}$	.	.	.	$r_{A2,1}$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
A_k	$r_{AK,1}$	$r_{AK,1}$	$r_{AK,1}$	.	.	.	$r_{AK,1}$

¿Qué indica la probabilidad?

http://youtube.com/watch?v=5wSnG3EhrAM

Probabilidades

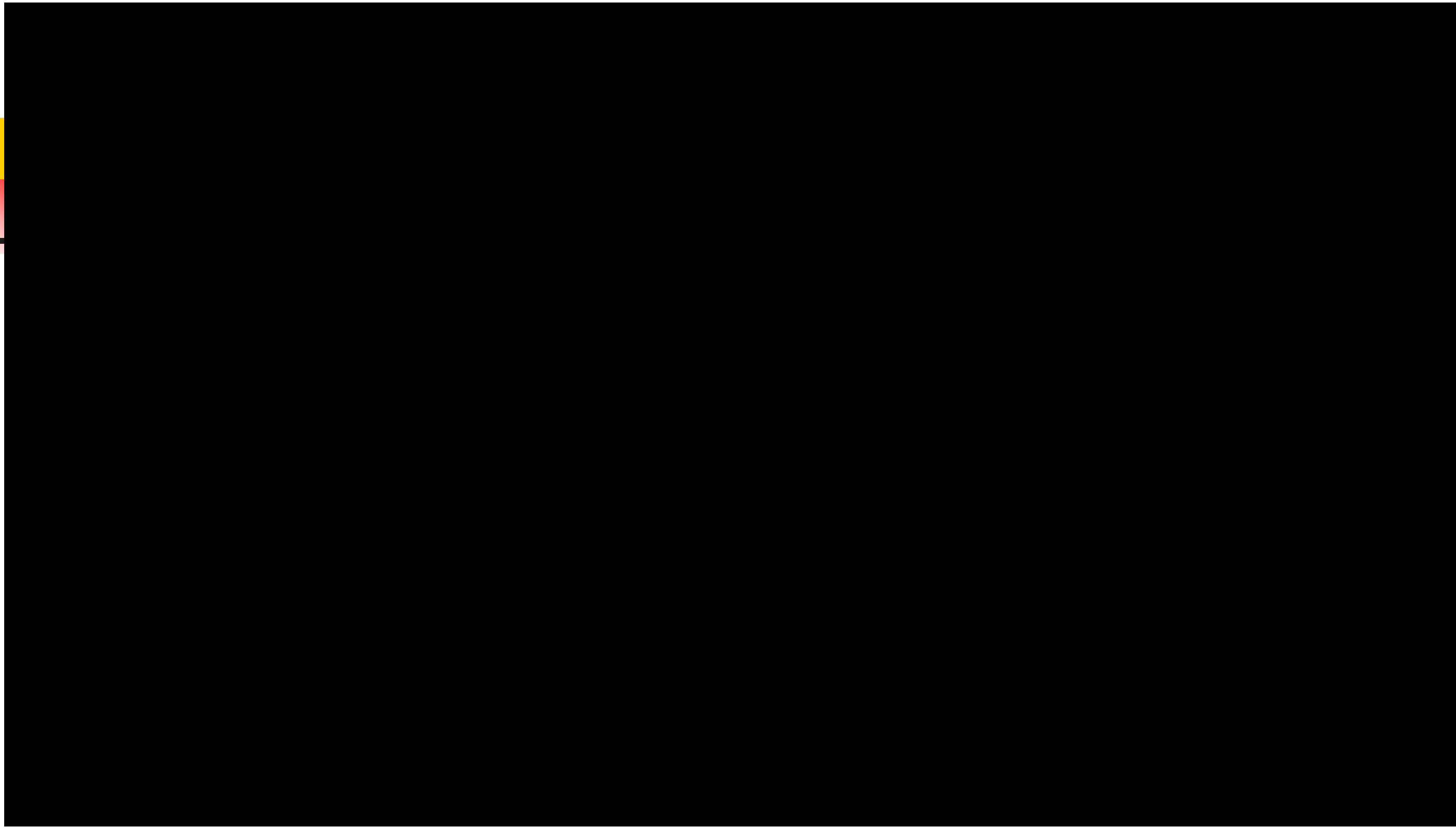
- ¿En qué consisten las probabilidades?
- Indican incertidumbre acerca de un evento que:
  - Ocurrió en el pasado
  - Ocurre en el presente
  - Ocurrirá en el futuro

Enfoques de probabilidad

- Clásico o escuela objetiva
- Frecuencias relativas
- Personalista o subjetivo

Fuentes de las probabilidades

- Historia del pasado
- Juicio subjetivo
- Distribuciones teóricas



https://www.youtube.com/watch?v=iDOAvpWA2Ac

https://www.youtube.com/watch?v=12RF_SZ5S0g

Valor esperado de una decisión

- Definiendo el valor esperado de las diferentes alternativas como $E(N_i)$, donde N_i es el resultado de la alternativa **i**, se tiene que:

$$E(A_i) = \sum_{j=1}^{n} r_{i,j} p(r_j) \qquad \mathrm{i} = \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2; \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{k}$$

- Se escoge la alternativa tal que:
  - Max $E(N_i)$ para el caso favorable
  - Min $E(N_i)$ para el caso desfavorable

Valor esperado de la información perfecta

- **Resultado esperado con información perfecta (REIP)**: es la cantidad que el decisor espera ganar si supiera con certeza qué estado de la naturaleza va a presentarse
- **Resultado esperado en riesgo (RER)**: es la cantidad que se espera ganar si no se tiene información adicional. Es el resultado óptimo sin información adicional.
- **Valor esperado de información perfecta (VIP)**: es el valor que la información perfecta tiene para el decisor porque supone la la mejora en los resultados esperados que obtendría con dicha información

Valor esperado de la información perfecta

- **Resultado esperado con información perfecta (REIP)**:
  - REIP = $E(r^*_j)$, donde r^*_j = mejor($r_{i,j}$) $\forall$ i, j
- **Resultado esperado en riesgo (RER)**:
  - RER = $E(A^*)$, esto es, el mejor valor esperado $E(A_j)$
- **Valor esperado de información perfecta (VIP)**:
  - VIP = REIP - RER

Ejemplo I

- La siguiente tabla muestra los estados de la naturaleza, alternativas y utilidad de tres alternativas de negocios.

	E1	E2	E3
	0.3	0.5	0.2
A1	8	2	0
A2	10	1	-5
A3	10	4	-4

Tabla Excel

	E_1	E_2	E_3	Valor Esperado
	0.3	0.5	0.2	E(A)
A_1	8	2	0	3.4
A_2	10	1	-5	2.5
A_3	10	4	-4	4.2*
REIP	10	4	0	5

Valor de Información Perfecta = REIP - RER
= 5 – 4.2 = 0.8

Ejemplo:

- Se juega una rifa con números del 00 a 99.
- Cada boleto cuesta 100 y puedes ganarte 5,000.
- ¿Vale la pena comprar la rifa?
- ¿Cuánto pagaría para información sobre el posible resultado de la rifa?

Efecto de la varianza

- La desventaja del valor medio es que no toma en cuenta la variabilidad
- Suponga que $A_i \rightarrow (\mu, \sigma^2)$
- Recordando que la varianza se estima como:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} r_{i,j}^2 - \mu_i^2$$

- Se escogerá la decisión donde $\sigma^2 \leq M$ ($\sqrt{\sigma^2} = N$) y además cumpla con los criterios favorables o desfavorables, según sea el caso.

Ejemplo

Ganga S. A., es una empresa que se dedica a la comercialización de bienes destinados a tiendas "¡TODO A BALBOA!". Esa empresa quiere ampliar su negocio entrando a nuevos mercados. Pos este motivo, realiza un estudio sobre la demanda de su productos en cuatro zonas distintas, I, II, III y IV, estimando una demanda (en miles de unidades) en cada zona de 11, 12, 15.5 y 17 respectivamente.

Para poder abastecer el nuevo mercado debe contar con un nuevo almacén; actualmente se alquilan tres, que tienen, cada uno, una capacidad (en miles de unidades) de 11, 15 y 17. La estructura de costos (en miles de balboas) para cada posible situación se muestra en la siguiente tabla:

Almacén/ Mercado	11,000	15,000	17,000
I	10	15	20
II	10	17.5	15
III	15	16	19
IV	30	35	18

Si la probabilidad de alquilar el primer almacén es de 30%, de conseguir el segundo es 40% y el tercero es 30%

-¿Cuál será la mejor decisión si se quiere reducir costos?

-¿Cuál será la decisión si no se aceptan varianzas de más de B/. 8 mil?

Análisis con la varianza

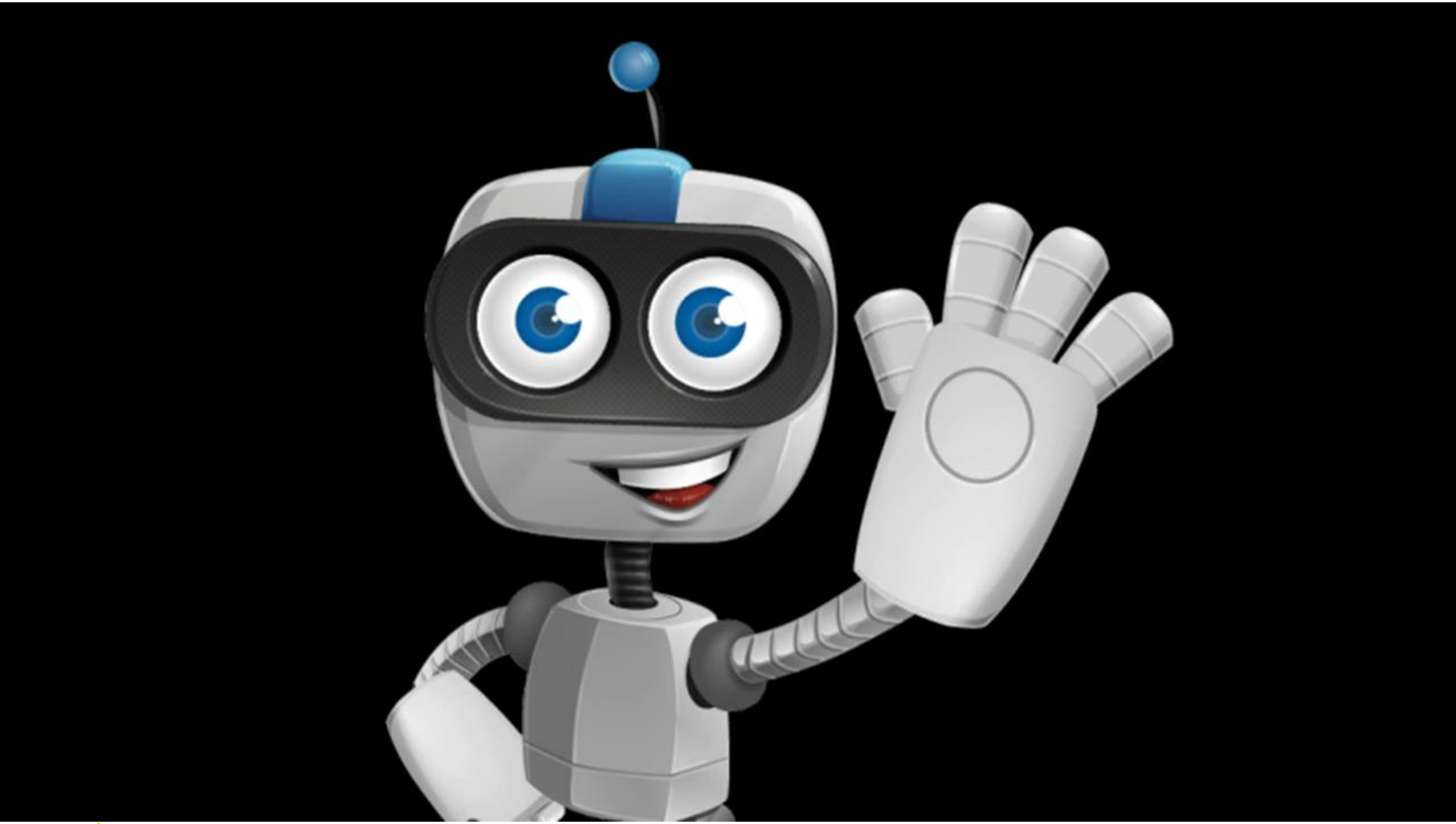
Almacén/ Mercado	11,000	15,000	17,000	Valor Esperado	Varianza
	0.3	0.4	0.3		
I	10	15	20	15.00	15.00
II	10	17.5	15	14.50	9.75
III	15	16	19	16.60	2.64
IV	30	35	18	28.40	50.64

Criterios de Decisión bajo Incertidumbre

- En este caso el decisor conoce los posibles estados de la naturaleza
- Pero no conoce las probabilidades asociadas con su ocurrencia
- En este caso la decisión tiene un factor subjetivo ya que no conoce de manera objetiva las probabilidades

Matriz de pago

	Estados de la Naturaleza y probabilidades asociadas						
Alternativas	**1**	**2**	**3**	**.**	**.**	**.**	**n**
A_1	r_{A1}	$r_{A1,1}$	$r_{A1,1}$	.	.	.	$r_{A1,1}$
A_2	$r_{A2,1}$	$r_{A2,1}$	$r_{A2,1}$	.	.	.	$r_{A2,1}$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
A_k	$r_{AK,1}$	$r_{AK,1}$	$r_{AK,1}$	.	.	.	$r_{AK,1}$



https://www.youtube.com/watch?v=b7wiPokiU84

Criterio Maximax (optimista)

- Calcular el máximo pago o resultado para cada alternativa
- Escoger la alternativa con el máximo de todos
- $A^* \rightarrow \max\{\max(r_{i,j})\}$

Criterio Minimax (conservador)

- Calcular el máximo de todos los pagos o resultados de cada alternativa
- Escoger el mínimo de ellos
- $A^* \rightarrow \min\{\max(r_{i,j})\}$

Criterio Maximin (conservador)

- Calcular el mínimo de todos los pagos o resultados de cada alternativa
- Escoger el máximo de ellos
- $A^* \rightarrow \max\{\min(r_{i,j})\}$

Criterio
Minimax del Costo de Oportunidad

- Sea $C(A_i^*) = \max(r_{i,j})$ el máximo de los alternativas
- Sea $C(A_i^*) - N_i \ \forall \ j$, el costo de oportunidad para cada alternativa **i** bajo cada resultado **j**
- Seleccionar el máximo de cada alternativa, escogiéndose la menor de todas ellas tal que
- $A^* \rightarrow \min[\max\{C(A_i^*) - r_{i,j}\}]$

Criterio Minimin (pesimista)

- Calcular el peor de todos los pagos o resultados de cada alternativa
- Escoger el peor de ellos
- $A^* \rightarrow \min\{\min(r_{i,j})\}$

Criterio
Mínimo costo de Oportunidad

- Sea $C(A_{i,j}^{*})$ el máximo de los costos asociados para cada alternativa **i** bajo cada estado de la naturaleza **j**
- Sea $C(A_{i,j}^{*}) - r_{i,j}\ \forall\ j$, el costo de oportunidad correspondiente para cada alternativa **i** bajo cada estado de la naturaleza **j**

Criterio
Mínimo costo de Oportunidad

- Sea $E(C(A_j^*) - r_j)\ \forall\ j$ el valor esperado de cada costo de oportunidad j
- Calcular el valor esperado del costo de oportunidad de cada alternativa
- Seleccionar el mínimo de ellos: $\mathrm{Min}\{E(C(A_i)\text{-}r_j)\ \forall\ j\}$

Criterio de Hurwicz

- Se trata de un criterio intermedio entre el criterio minimax o de Wald y el criterio maximax.
- Dado que muy pocas personas son tan extremadamente pesimistas u optimistas como sugieren dichos criterios, Hurwicz (1951) considera que el decisor debe ordenar las alternativas de acuerdo con una media ponderada de los niveles de seguridad y optimismo:

$$E(A_i) = \alpha Min_i + (1 - \alpha) Max_i$$

$$\text{Elegir la alternativa } A_k = Max(E(A_i)) \; \forall \; i$$

- Así, la regla de decisión de Hurwicz resulta ser: ... Los valores de α próximos a 0 corresponden a una pensamiento optimista, obteniéndose en el caso extremo α=0 el criterio maximax.

Criterio de La Place

- Este criterio, propuesto por Laplace en 1825, está basado en el principio de razón insuficiente:
- Como a priori no existe ninguna razón para suponer que un estado se puede presentar antes que los demás, todos los estados tienen la misma probabilidad de ocurrencia, es decir, la ausencia de conocimiento sobre el estado de la naturaleza equivale a afirmar que todos los estados son equiprobables.
- Así, para un problema de decisión con n posibles estados de la naturaleza, asignaríamos probabilidad 1/n a cada uno de ellos. El valor esperado entonces no es más que la media de los resultados para cada alternativa, tal que:

$$E(A_i) = \frac{\sum_j R_{i,j}}{n};$$

ALTERNATIVA	ESTADO DE NATURALEZA MERCADO FAVORABLE ($)	 MERCADO DESFAVORABLE ($)
Construir una planta grande	200,000	–180,000
Construir una planta pequeña	100,000	–20,000
No hacer nada	0	0

Ejemplo: La Ampliación del Canal

Escenarios Macroeconómicos					
Escenario	Panorama Internacional	Ambiente de Políticas Públicas	Integración Hemisférica	Tendencias de Actividades del Conglomerado	Probabilidad
Optimista	Crecimiento dinámico en las actividades comerciales y marítimas	Productividad óptima, competitividad, mejoras	TLC rápido con EUA, América Central, Andes, ALCA	Sobre el promedio	15%
Más Probable	Tendencias promedio	Tendencias y situación presentes, mejoras lentas	Proceso largo, gradual	Tendencias promedio	60%
Pesimista	Por debajo de las tendencias promedio, complicaciones internacionales	Políticas ineficientes, ambiente de costos más altos	Demorado, bajas inversiones y crecimiento lento	Por debajo de las tendencias promedio	25%

Tomado de los estudios macroeconómicos para la ampliación desarrollados por DRI•WEFA, 2002

Ejemplo: La Ampliación del Canal

	Escenarios de canal no ampliado		
	Pesimista	Más probable	Optimista
	0.25	0.60	0.15
Demanda del Canal (Millones Ton CPSUAB, 2025)	237	296	330
Necesidad de agua (esclusajes diarios) del canal	29	32	35
Ingresos estimados (millones de USD)	2,800	3,520	3,900
Costo estimado de modernización a máxima capacidad (millones USD)	1,690	1,690	1,690

ACP, Propuesta de ampliación y otros estudios financieros

Ejemplo: La Ampliación del Canal

	Escenarios canal ampliado		
	Pesimista	Más probable	Optimista
	0.25	0.60	0.15
Demanda del Canal (Millones Ton CPSUAB, 2025)	428	508	660
Necesidad de agua (esclusajes diarios)	32	40	46
Ingresos estimados (millones de U$D)	5,436	9,700	12,920
Costo estimado de la ampliación	5,800	5,250	4,200

ACP, Propuesta de ampliación y otros estudios financieros

Árboles de decisión

Árboles de decisión

- Están dentro del área de técnicas bayesianas
- Pueden usarse para desarrollar una estrategia óptima cuando el tomador de decisiones se enfrenta con:
  - Una serie de alternativas de decisión
  - Incertidumbre o eventos futuros con riesgo que pueden ser diferentes para cada alternativa
  - Una serie de decisiones consecutivas

*Un buen análisis de decisiones incluye un análisis de riesgo

Árboles de decisión: Componentes y estructura

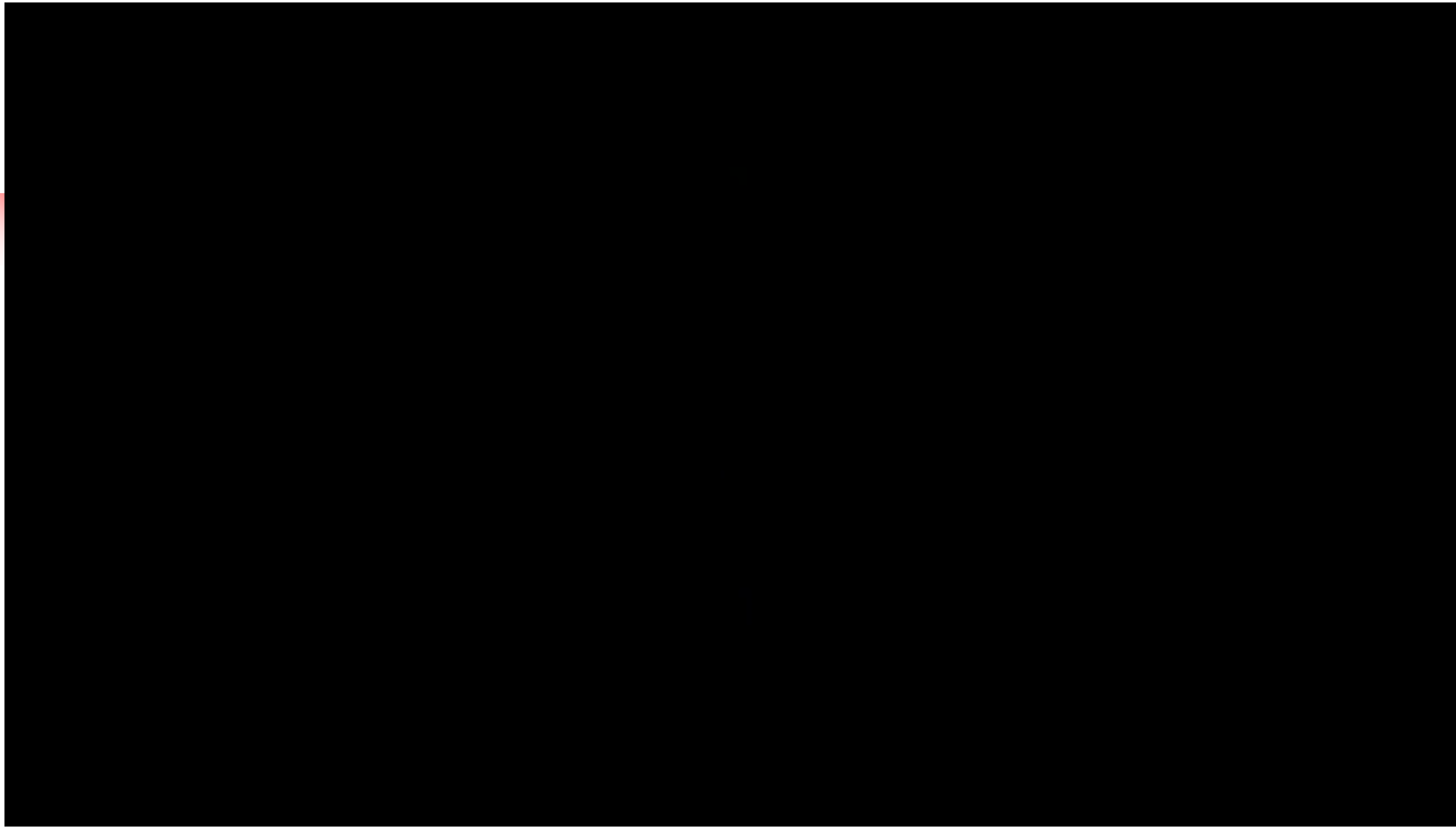
- ***Alternativas de decisión*** en cada punto de decisión
- ***Estados de la naturaleza o Eventos*** que pueden ocurrir como resultado de cada alternativa de decisión.

Árboles de decisión: Componentes y estructura

- ***Probabilidades*** de que ocurran los eventos posibles
- ***Resultados*** de las posibles interacciones entre las alternativas de decisión y los eventos. También se les conoce con el nombre de ***Pagos***

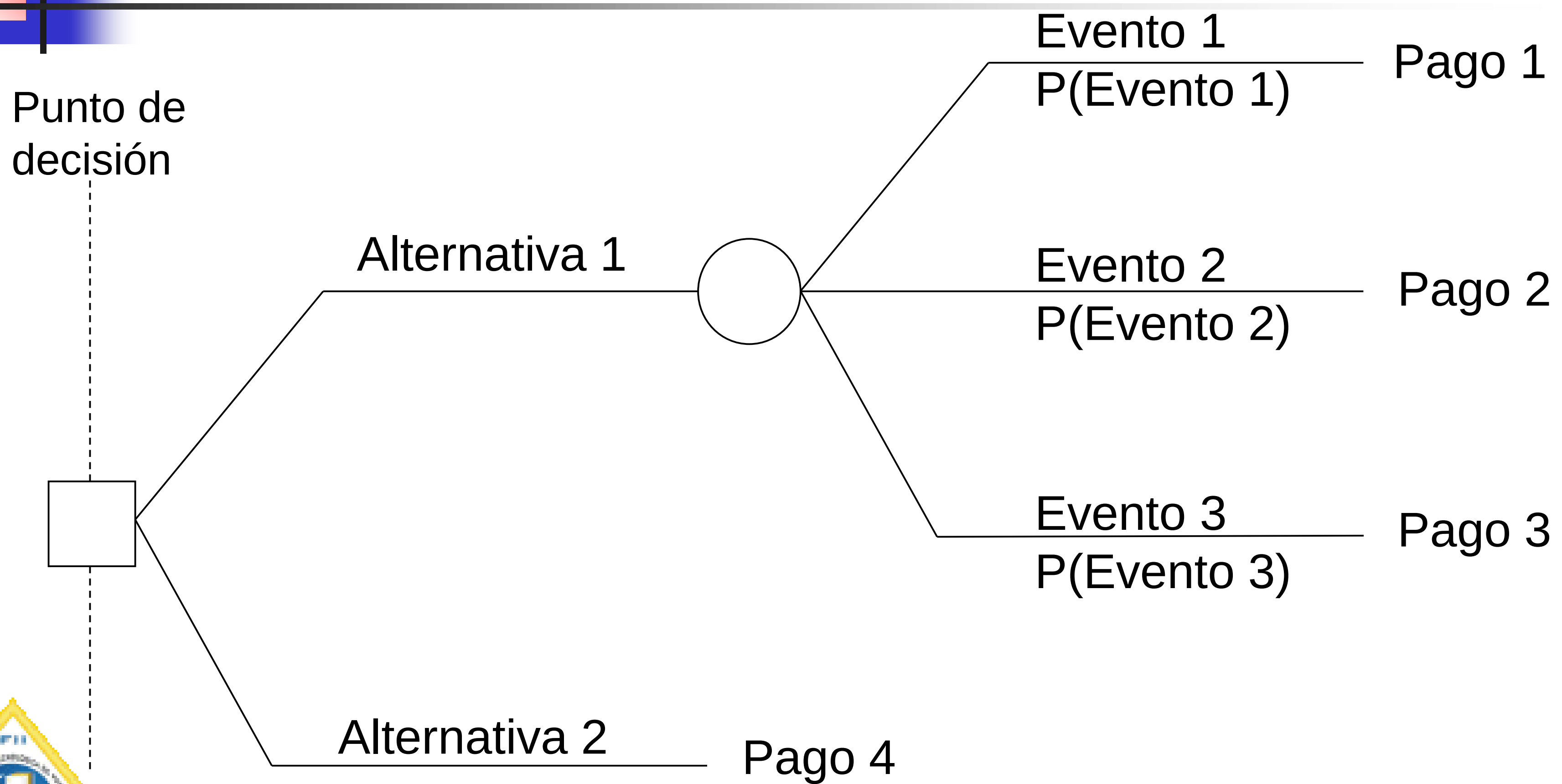
Árboles de decisión: Componentes y estructura

- Los árboles de decisión poseen:
- Ramas: se representan con líneas
- Nodos de decisión: de ellos salen las ramas de decisión y se representan con □
- Nodos de incertidumbre: de ellos salen las ramas de los eventos y se representan con ○



https://www.youtube.com/watch?v=rgAY3fczx1M

Árboles de decisión: Componentes y estructura: ejemplo



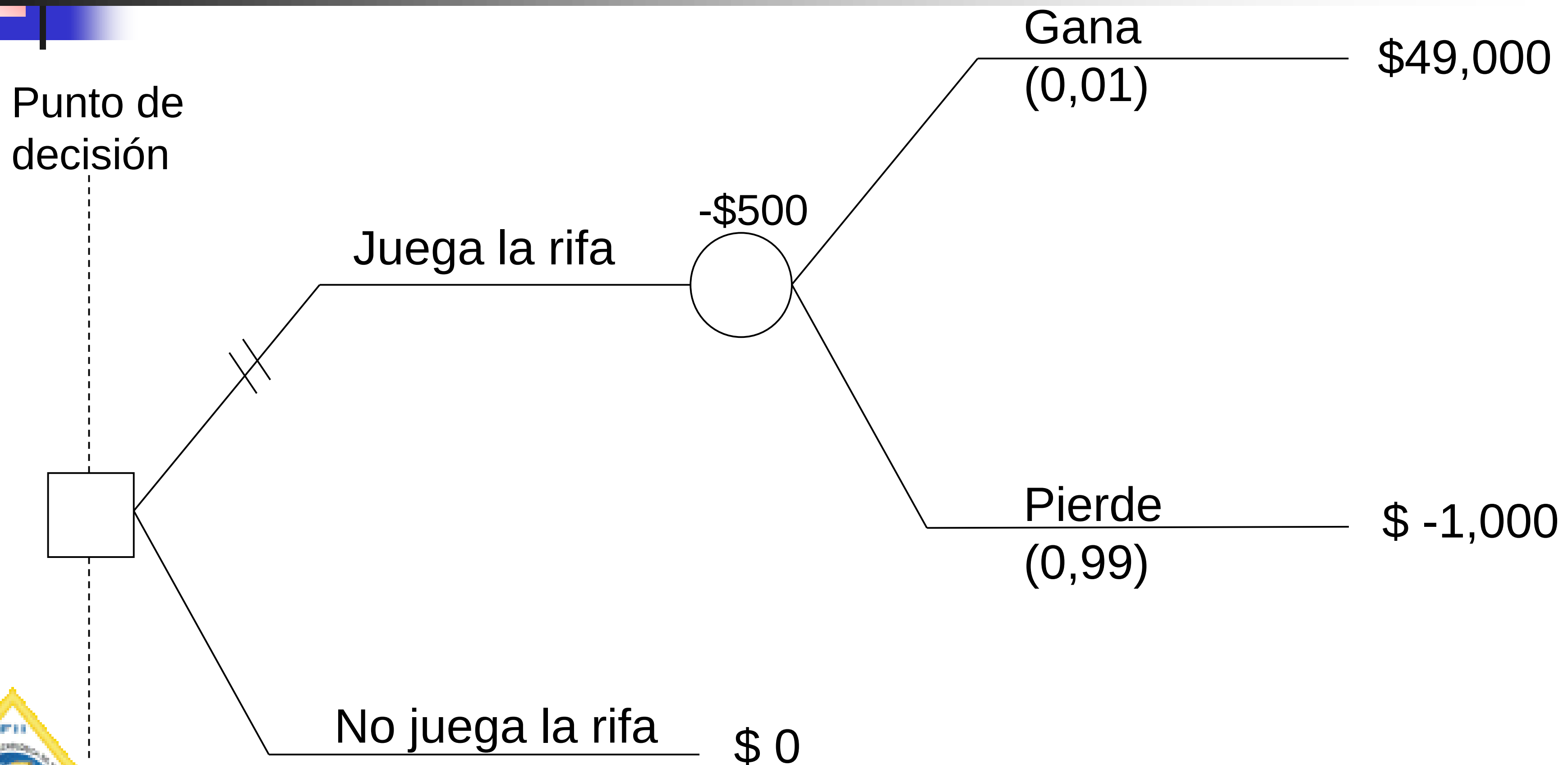
Árboles de decisión: Análisis: criterio del Valor Monetario Esperado

- Generalmente se inicia de derecha a izquierda, calculando cada pago al final de las ramas
- Luego en cada nodo de evento se calcula un valor esperado
- Después en cada punto de decisión se selecciona la alternativa con el valor esperado óptimo

Ejemplo de la rifa:

- Suponga que usted compra en $1,000 un número (de 00 a 99) de una rifa , la cual paga un premio de $50.000.
- Hay dos eventos posibles:
  - Usted gana la rifa, o
  - Pierde
- ¿Cuál es el valor esperado del juego?

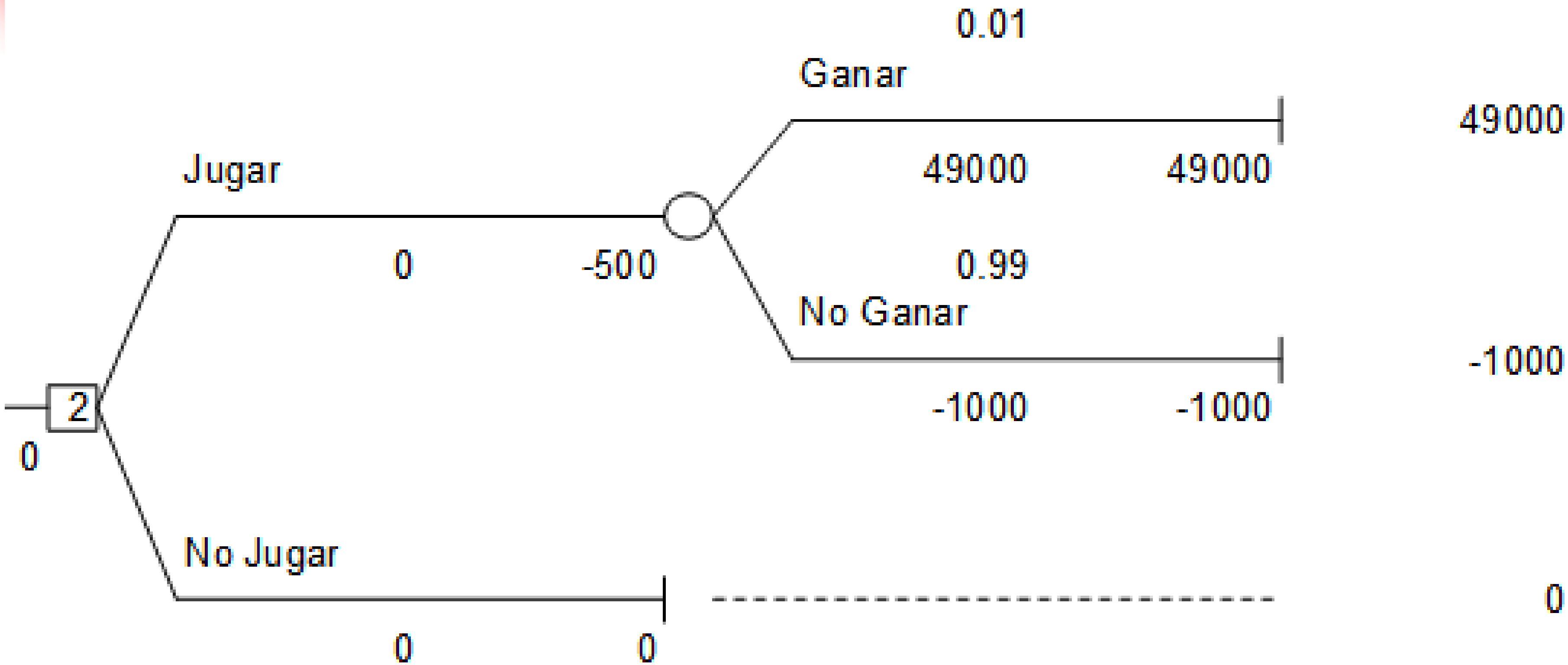
Árboles de decisión: Análisis: ejemplo de la rifa



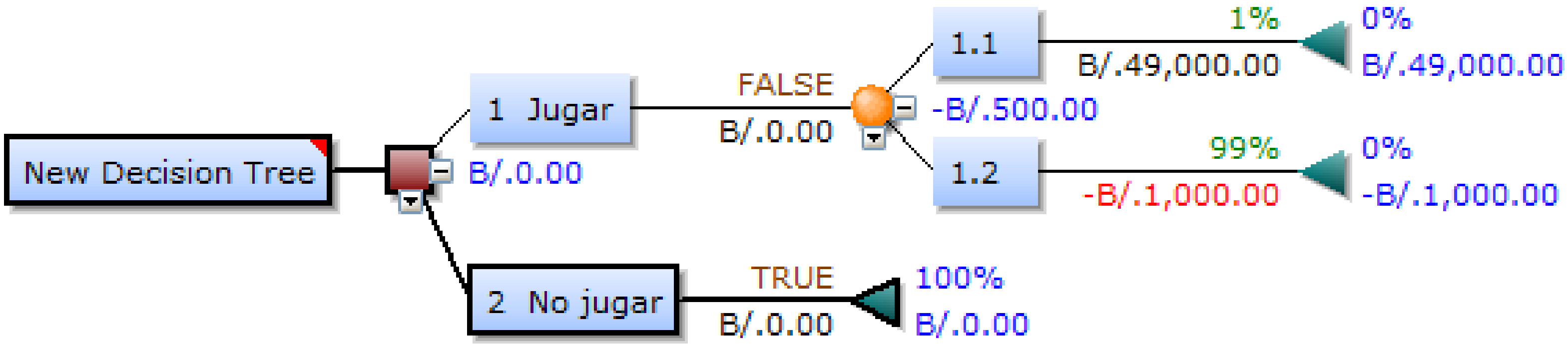
Árboles de decisión: Análisis: ejemplo de la rifa

- En el nodo de evento se calculó el valor esperado de jugar la rifa
- Luego se selecciona, en este caso el valor más alto (por ser ganancias)
- La decisión desechada se marca con \\
- En este caso la decisión es no jugar la rifa

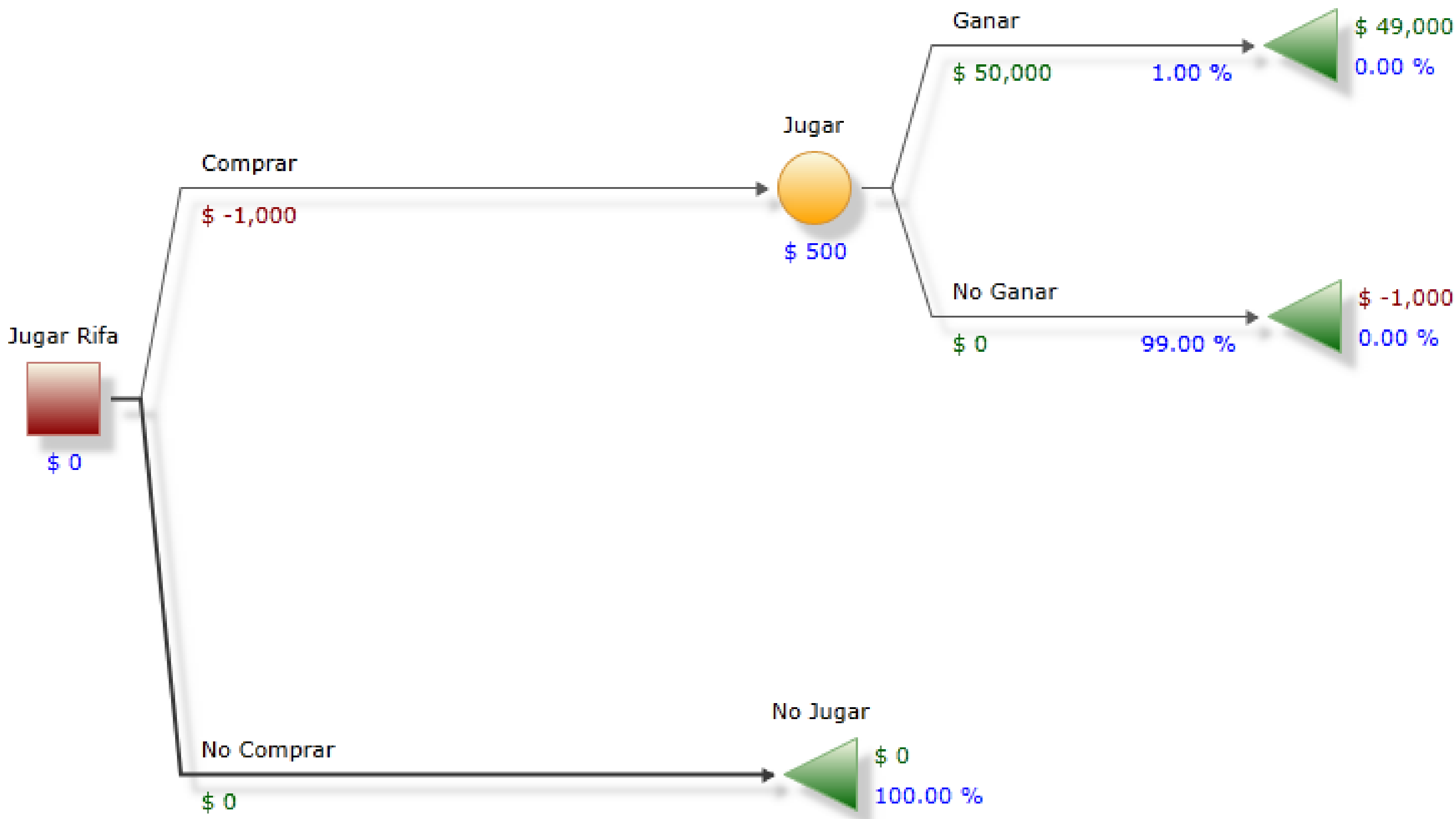
Árbol de decisión utilizando TreePlan



Solución utilizando Insight Tree



SilverDecision on line



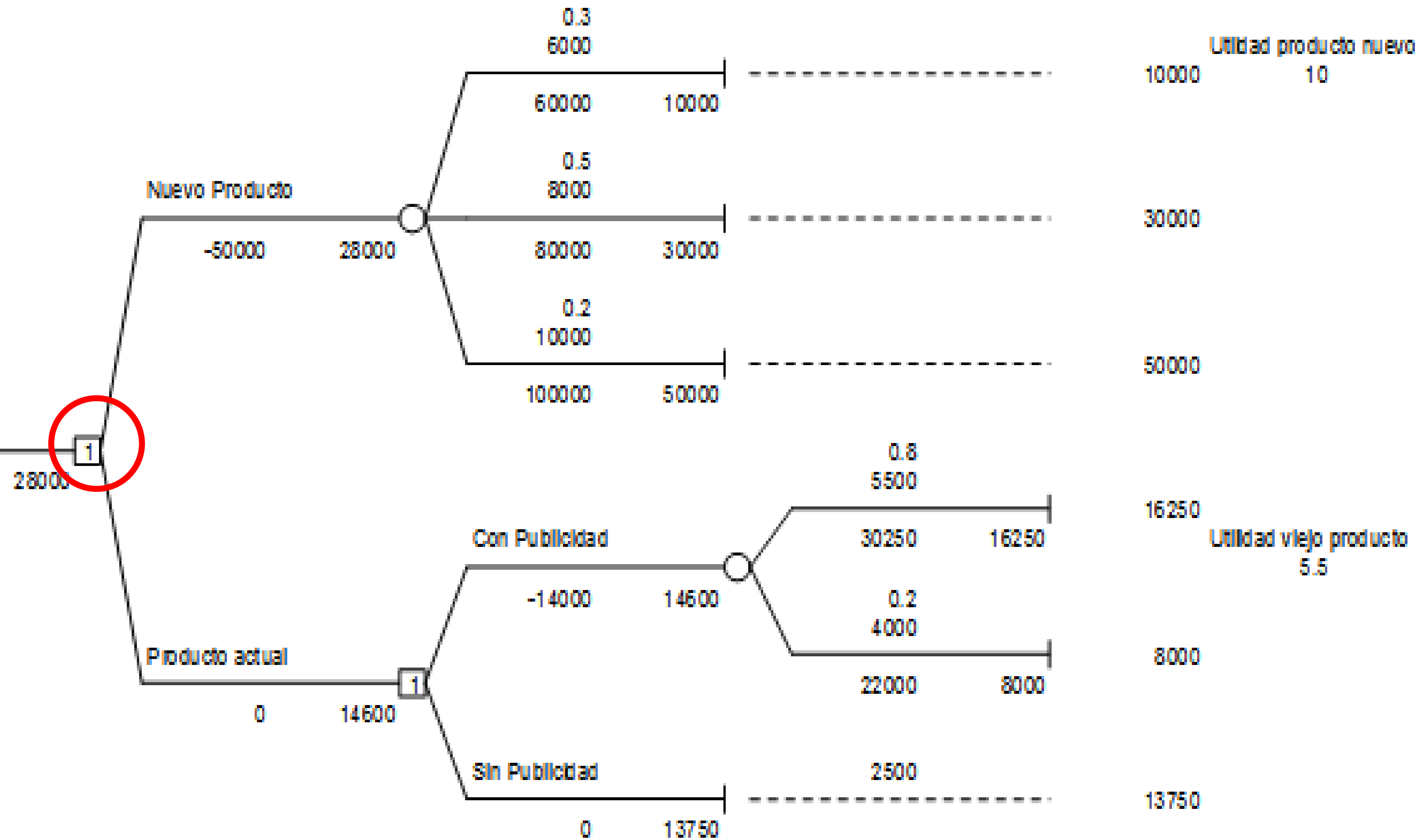
Árboles de decisión: ejemplo

- Un fabricante está considerando la producción de un nuevo producto. La utilidad incremental es de $10 por unidad y la inversión necesaria en equipo es de $50.000
- El estimado de la demanda es como sigue:

Unidades	Probabilidad
6000	0.30
8000	0.50
10000	0.20

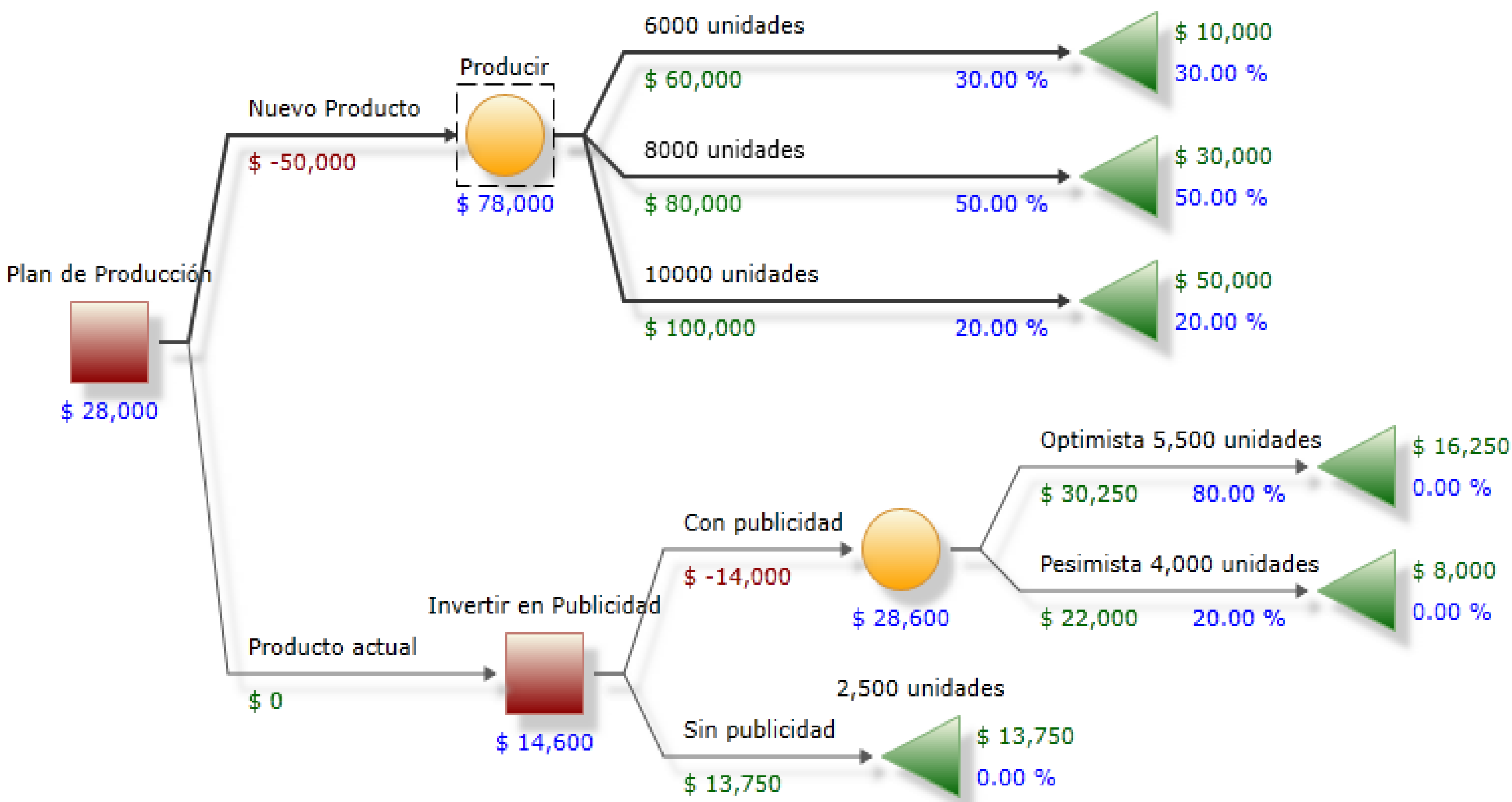
Árboles de decisión: ejemplo (continuación):

- Tiene la opción de seguir con el producto actual que tendría una utilidad incremental de \$5.5. De hacerlo y si no hace publicidad, tendría ventas de 2.500 unidades, pero con la opción de que si destina \$14.000 en publicidad podría, con una probabilidad de 80% conseguir ventas de 5.500 unidades y de un 20% de que éstas sean de 4.000 unidades
- Construya el árbol de decisión y determine la decisión óptima



0.3
6000
Utilidad producto nuevo
10000
10
60000
10000
0.5
8000
Nuevo Producto
30000
-50000
28000
80000
30000
0.2
10000
50000
100000
50000
0.8
5500
1
28000
16250
30250
16250
Con Publicidad
Utilidad viejo producto
5.5
-14000
14600
0.2
4000
Producto actual
8000
1
22000
8000
0
14600
Sin Publicidad
2500
13750
0
13750

SilverDecision



Árboles de decisión: ejemplo: La decisión de Larry

- Durante la última semana Larry ha recibido 3 propuestas matrimoniales de 3 mujeres distintas y debe escoger una. Ha determinado que sus atributos físicos y emocionales son más o menos los mismos, y entonces elegirá según sus recursos financieros
- La primera se llama Jenny. Tiene un padre rico que sufre de artritis crónica. Larry calcula una probabilidad de 0.3 de que muera pronto y les herede $100.000. Si el padre tiene una larga vida no recibirá nada de él

Árboles de decisión: ejemplo: La decisión de Larry

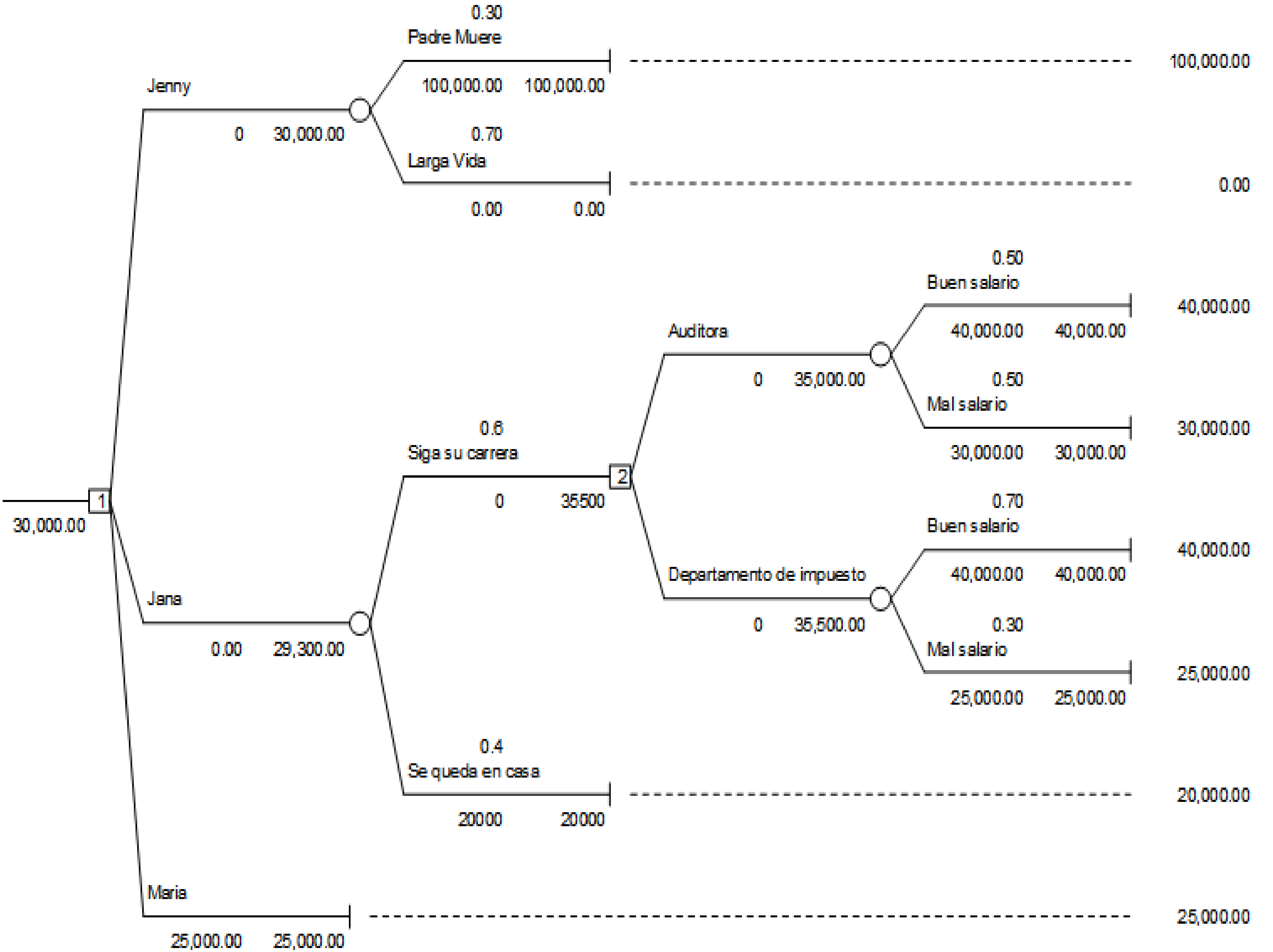
- La segunda pretendiente se llama Jana, que es contadora en una compañía.
- Larry estima una probabilidad de 0.6 de que Jana siga su carrera y una probabilidad de 0.4 de que la deje y se dedique a los hijos. Si se dedica a los hijos podría tener un trabajo de tiempo parcial por $20.000
- Si continúa con su trabajo puede decidir entre,
  - pasar a auditoría, donde hay una probabilidad de 0.5 de ganar $40.000 y de 0.5 de ganar $30.000, o bien
  - pasar al departamento de impuestos donde ganaría $40.000 con probabilidad de 0.7 o $25.000 (0.3).

Árboles de decisión: ejemplo: La decisión de Larry

- La tercer pretendiente es María, la cual sólo puede ofrecer a Larry su dote de $25.000.
- ¿Con quién debe casarse Larry? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el riesgo involucrado en la secuencia óptima de decisiones?

Tomado de:

Gallagher. Watson. METODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN ADMINISTRACIÓN. McGraw Hill, México, 1982



0.30
Padre Muere
100,000.00 100,000.00
100,000.00
Jenny
0 30,000.00
0.70
Larga Vida
0.00 0.00
0.00
0.50
Buen salario
40,000.00 40,000.00
40,000.00
Auditora
0 35,000.00
0.50
Mal salario
30,000.00 30,000.00
30,000.00
0.6
Siga su carrera
0 35500
2
1
30,000.00
0.70
Buen salario
40,000.00 40,000.00
40,000.00
Departamento de impuesto
0 35,500.00
0.30
Mal salario
25,000.00 25,000.00
25,000.00
Jana
0.00 29,300.00
0.4
Se queda en casa
20000 20000
20,000.00
Maria
25,000.00 25,000.00
25,000.00

Los Árboles de decisión y el riesgo

- El análisis del riesgo ayuda al tomador de decisiones a identificar la diferencia entre:
  - el valor esperado de una alternativa de decisión, y
  - el resultado que efectivamente podría ocurrir

Los Árboles de decisión y el riesgo

- El riesgo se refiere a la variación en los resultados posibles
- Mientras más varíen los resultados, entonces se dice que el riesgo es mayor
- Existen diferentes maneras de cuantificar el riesgo, y una de ellas es la variancia

Los Árboles de decisión y el riesgo

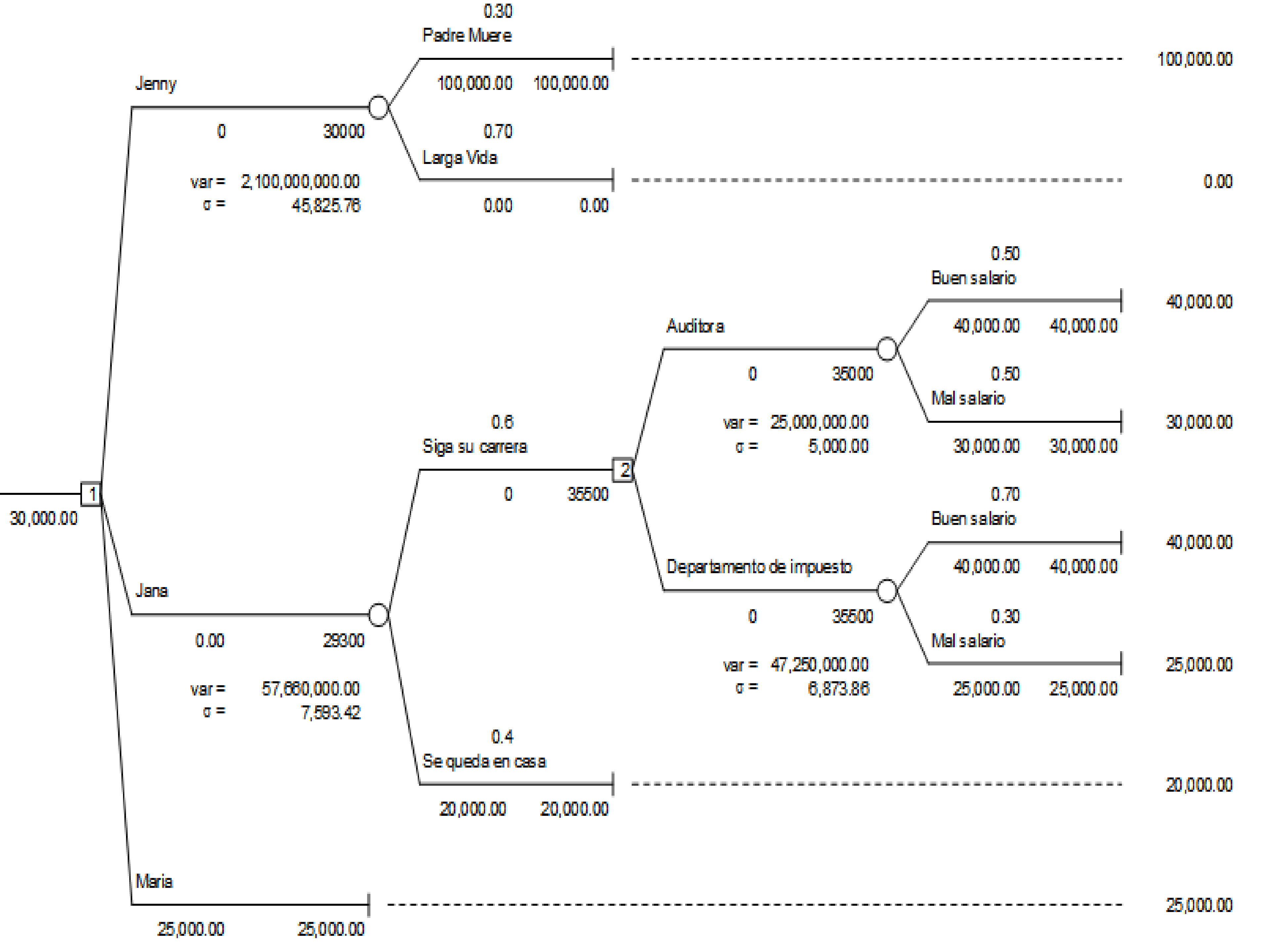
- La varianza se calcula como:

$$\mathrm{var}(X) = \sum_{j=1}^{m} p(X_j) \cdot X^2 - \mu^2$$

- Donde $P(X_j)$ es la probabilidad del evento X_j y $E(X)$ es el valor esperado de X

Los Árboles de decisión y el riesgo: ejemplo: el caso de Larry (datos en miles)

Decisión	X	$P(X)$	$E(X)$	var
Jenny	100 0	0.30 0.70	30	2,100
Jana	35.5 20	0.6 0.4	29.3	57.66
María	25	1.00	25	0



0.30
Padre Muere
100,000.00 100,000.00
100,000.00
Jenny
0 30000
0.70
Larga Vida
var = 2,100,000,000.00
σ = 45,825.76
0.00 0.00
0.00
0.50
Buen salario
40,000.00
Auditora
40,000.00 40,000.00
0 35000
0.50
Mal salario
var = 25,000,000.00
σ = 5,000.00
30,000.00
0.6
Siga su carrera
30,000.00 30,000.00
2
0 35500
1
30,000.00
0.70
Buen salario
40,000.00
Departamento de impuesto
40,000.00 40,000.00
Jana
0 35500
0.30
0.00 29300
Mal salario
var = 47,250,000.00
25,000.00
σ = 6,873.86
var = 57,660,000.00
25,000.00 25,000.00
σ = 7,593.42
0.4
Se queda en casa
20,000.00
20,000.00 20,000.00
Maria
25,000.00
25,000.00 25,000.00

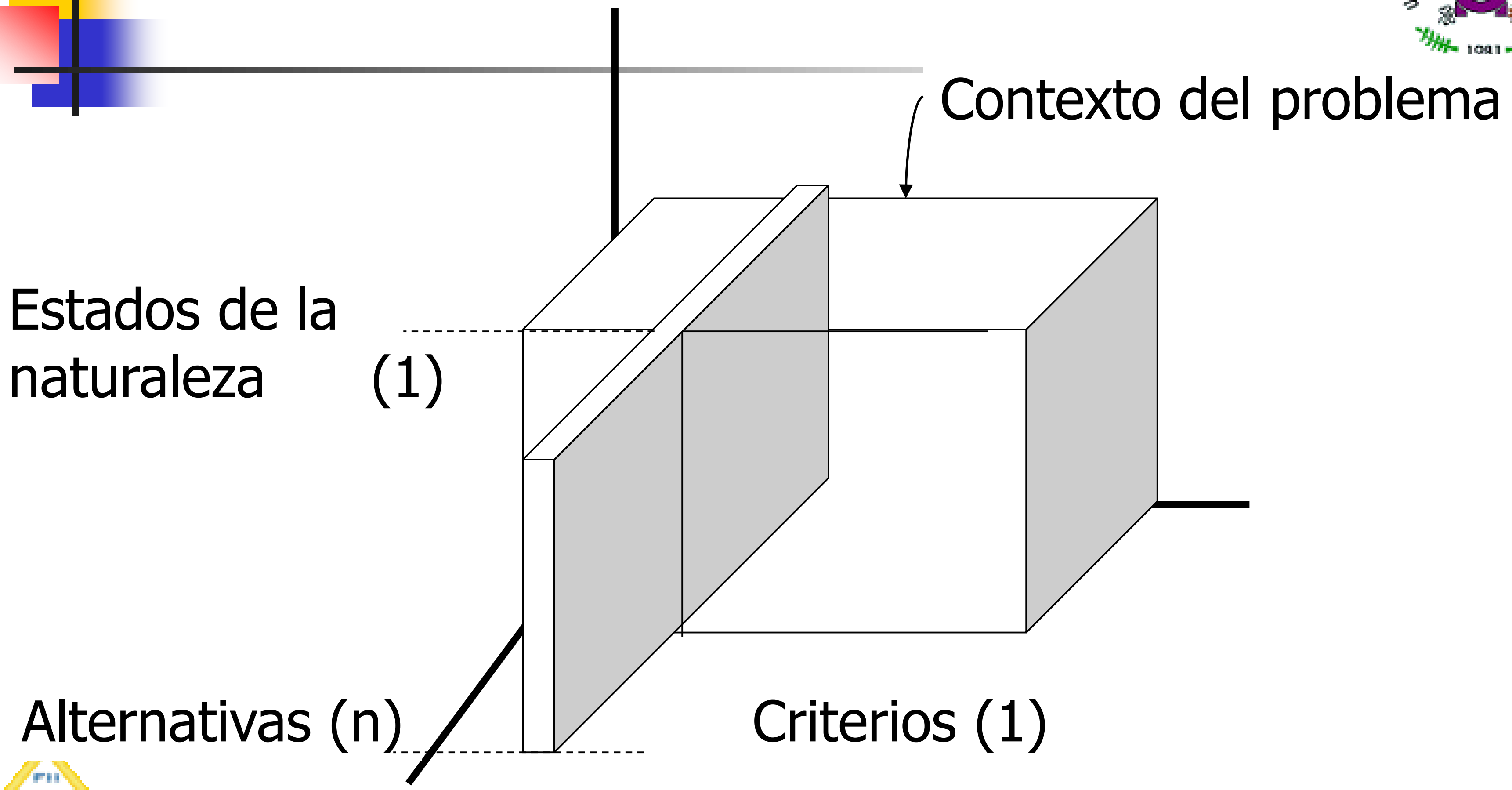
Los Árboles de decisión y el riesgo: ejemplo: el caso de Larry

- La decisión por Jenny es la del valor esperado más alto, pero también es la más riesgosa, pues los resultados varían entre $0 y $100.000
- La decisión por María es la menos riesgosa, pero la de menor rendimiento
- Tal vez la mejor decisión sea Jana, ya que el valor esperado es cercano al de Jenny pero con un riesgo menor

Análisis de Datos por Envolvente

Contexto del problema

- Medir eficiencia de múltiples alternativas
- Un solo estado de la naturaleza
- Un solo criterio: eficiencia
- Múltiples variables dentro del criterio


Contexto del problema
Estados de la naturaleza (1)
Alternativas (n)
Criterios (1)

Objetivo

- Comparar eficiencias productivas en Unidades de Decisión (DMU)
- La comparación se hace en función al uso de insumos de manera óptima creando una unidad eficiente ideal

Eficiencia de Paretto - Koopman

- Una unidad de decisión (DMU) no es eficiente al producir sus bienes o servicios (a partir de una cantidad de insumos) si se puede demostrar que una redistribución de sus recursos resultaría en una igual producción con una utilización menor de sus insumos y sin el uso de ningún recurso adicional. Por el contrario, la firma será eficiente si esto no es posible

La función de producción eficiente

De acuerdo a Farrell, la función de producción:

- $Y_o = Y(y_1, y_2, \ldots, y_m) = f(x_1, x_2. \ldots, x_k)$

Es eficiente, si cualquier otro vector Y_i produce los mismos elementos de tal manera que

- $Y_i \leq Y_o \; \forall \; y, x$

Y_i es factible si esto es posible

Características de la función eficiente

- **Convexidad**: Está compuesta de segmentos de línea que unen ciertos pares de puntos escogidos de un conjunto de puntos $(0, \infty)$; $(\infty, 0)$… que satisfaga dos condiciones:
  - Que su pendiente no sea positiva
  - Que ningún punto observado se encuentre entre la función y su origen
- **Retornos constantes a escala**: Un aumento (disminución) en insumos, genera un aumento (disminución) en la producción

Estas condiciones garantizan que si dos puntos son posibles en la práctica, entonces lo será cualquier punto obtenido del promedio ponderado de los anteriores.

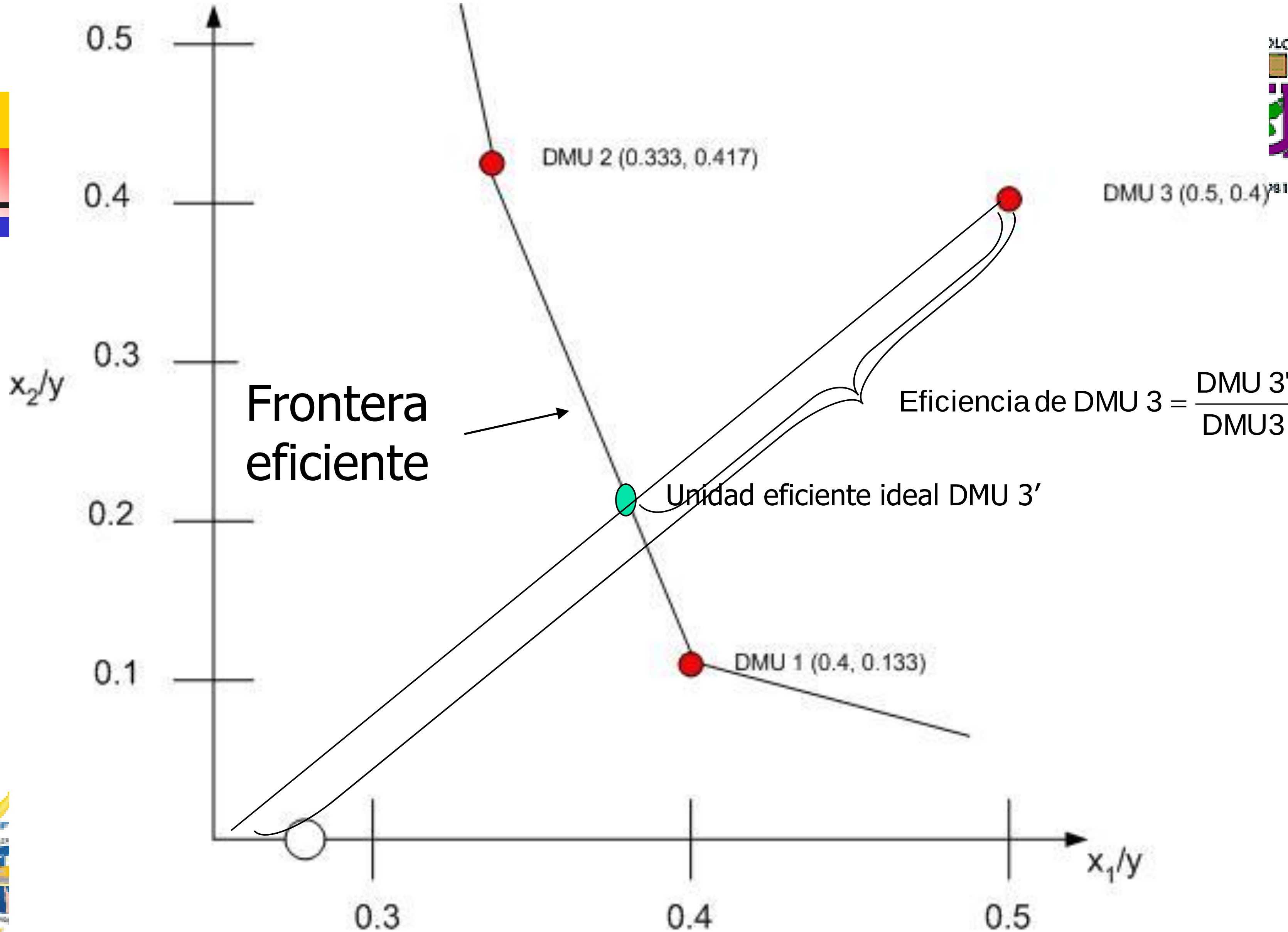
Ejemplo

- Tres unidades de decisión (DMUs) utilizan dos insumos x_1 y x_2 para producir un producto y tal que:

DMU	y	x_1	X_2
1	15	6	2
2	12	4	5
3	20	10	8

Niveles normalizados de Insumo

DMU	x_1/y	x_2/y
1	6/15 = 0.400	2/15 = 0.133
2	4/12 = 0.333	5/12 = 0.417
3	10/20 = 0.500	8/20 = 0.400



0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
x_2/y
DMU 2 (0.333, 0.417)
DMU 3 (0.5, 0.4)
Frontera eficiente
Eficiencia de DMU 3 = $\frac{\text{DMU 3'}}{\text{DMU3}}$
Unidad eficiente ideal DMU 3’
DMU 1 (0.4, 0.133)
0.3
0.4
0.5
x_1/y

Formulación del DEA

- Desarrollada por Charnes, Cooper y Rhodes (1984)
- Enfoque no paramétrico basado en programación fraccionada
- No requiere una función predefinida

$$\max h_o = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r,0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i,0}}$$

s.a. :

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r,j}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i,j}} \le 1 \; \forall \; j = 1, 2, \ldots, n; r = 1, 2, \ldots, s; i = 1, 2, \ldots, m$$

$$y_{r,j}, x_{i,j}, u_r, v_i \ge 0$$

En la formulación anterior

$y_{r,j}$	:	es la cantidad producida del r-ésimo producto por la j-ésima DMU
$x_{i,j}$	:	es la cantidad de i-ésimo insumo consumido por la j-ésima DMU
$u_{r,j}$	:	es el peso del r-ésimo producto en la función de producción de la j-ésima DMU
$v_{i,j}$	:	es el peso del i-ésimo insumo en la función de producción de la j-esima unidad
$j=0$	:	Unidad de referencia

En la formulación

- Los valores de $x_{i,j}$ y $y_{r,j}$ son observaciones del pasado
- Los valores de $u_{r,j}$ y $v_{i,j}$ son las variables de decisión.
- La formulación anterior es difícil de resolver

Formulación como P. L.

$$\max h_0 = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{r,0}$$

s.a. :

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i,0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r,j} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i,j} \le 0 \; \forall \; j = 1, 2, \ldots, n$$

$$u_r, v_i \ge 0 \; \forall \; r, j$$

Formulación dual

$$\min w_0 = q_0$$

s.a. :

$$\sum_{j=1}^{n} p_{0,j} y_{r,j} \geq y_{r,0}$$

$$q_0 x_{i,0} - \sum_{j=1}^{n} p_{0,j} x_{r,j} \geq 0$$

$$p_{0,j} \geq 0; q_0 \text{ no restringida en signo}$$

Orientación hacia los insumos

- Una DMU no es eficiente si es posible mantener el nivel de producción a un nivel constante, o aumentarlos, a la vez que se disminuye cualquier insumo, sin aumentar los otros.
- En el dual, el valor de $p_{0,j}$ será positivo si su correspondiente restricción en el primal define la DMU correspondiente como eficiente.
- El conjunto de DMUs que contengan positivo el $p_{0,j}$ será el conjunto de referencia para la DMU_0

Determinación de la nueva unidad eficiente

$$x_{E,i} = \sum_{j=1}^{n} p_{0,j} x_{i,j}; \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$y_{E,r} = \sum_{j=1}^{n} p_{0,j} y_{r,j}; \quad \text{para } r = 1, 2, \ldots, s$$

Ejemplo

- Tres unidades de decisión (DMUs) utilizan dos insumos x_1 y x_2 para producir un producto y tal que:

DMU	y	x_1	X_2
1	15	6	2
2	12	4	5
3	20	10	8

Formulación y solución en WinQSB

DMU1

Variable -->	u1	v1	v2	Direction	R. H. S.
Maximize	15				
Referencia 1		6	2	=	1
DMU1	15	-6	-2	<=	0
DMU2	12	-4	-5	<=	0
DMU3	20	-10	-8	<=	0
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

	18:46:41		Friday	March	03	2006		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	u1	0.0667	15.0000	1.0000	0	basic	0	M
2	v1	0.1545	0	0	0	basic	0	13.7500
3	v2	0.0364	0	0	0	basic	-4.5833	0
	Objective	Function	(Max.) =	1.0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	Referencia 1	1.0000	=	1.0000	0	1.0000	0	M
2	DMU1	0.0000	<=	0	0	1.0000	-0.1667	1.5962
3	DMU2	0.0000	<=	0	0	0	-1.7000	0.1333
4	DMU3	-0.5030	<=	0	0.5030	0	-0.5030	M

Eficiencia Relativa

$p_{o,j}$

DMU2

Variable -->	u1	v1	v2	Direction	R. H. S.
Maximize	12				
Referencia 1		4	5	=	1
DMU1	15	-6	-2	<=	0
DMU2	12	-4	-5	<=	0
DMU3	20	-10	-8	<=	0
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

	19:01:45		Friday	March	03	2006		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	u1	0.0833	12.0000	1.0000	0	basic	0	M
2	v1	0.1932	0	0	0	basic	-3.5200	0
3	v2	0.0455	0	0	0	basic	0	4.4000
	Objective	Function	(Max.) =	1.0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	Referencia 1	1.0000	=	1.0000	0	1.0000	0	M
2	DMU1	0.0000	<=	0	0	0	-0.2500	0.7685
3	DMU2	0.0000	<=	0	0	1.0000	-0.6800	0.2000
4	DMU3	-0.6288	<=	0	0.6288	0	-0.6288	M

Eficiencia Relativa

$p_{o,j}$

DMU3

Variable -->	u1	v1	v2	Direction	R. H. S.
Maximize	20				
Referencia 1		10	8	=	1
DMU1	15	-6	-2	<=	0
DMU2	12	-4	-5	<=	0
DMU3	20	-10	-8	<=	0
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

	19:06:09		Friday	March	03	2006		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	u1	0.0363	20.0000	0.7261	0	basic	0	M
2	v1	0.0842	0	0	0	basic	-4.6667	3.7500
3	v2	0.0198	0	0	0	basic	-3.0000	3.7333
	Objective	Function	(Max.) =	0.7261				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	Referencia 1	1.0000	=	1.0000	0	0.7261	0	M
2	DMU1	0.0000	<=	0	0	0.5941	-0.1000	0.4611
3	DMU2	0.0000	<=	0	0	0.9241	-0.4250	0.0800
4	DMU3	-0.2739	<=	0	0.2739	0	-0.2739	M

Eficiencia Relativa

$p_{o,j}$

Unidad eficiente

$X_{E,1} = 0.5941*6 + 0.9241*4 = 7.2610$

$X_{E,2} = 0.5941*2 + 0.9241*5 = 5.8087$

$y_{E,1} = 0.5941*15 + 0.9241*12=20.0007$

DMU eficiente

Variable -->	u1	v1	v2	Direction	R. H. S.
Maximize	20				
Referencia 1		7.261	5.8087	=	1
DMU1	15	-6	-2	<=	0
DMU2	12	-4	-5	<=	0
DMU3	20	-7.261	-5.8087	<=	0
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

	19:13:38		Friday	March	03	2006		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	u1	0.0500	20.0000	1.0000	0	basic	0	M
2	v1	0.1159	0	0	0	basic	-4.6666	3.7502
3	v2	0.0273	0	0	0	basic	-3.0001	3.7332
	Objective	Function	(Max.) =	1.0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	Referencia 1	1.0000	=	1.0000	0	1.0000	0	M
2	DMU1	0.0000	<=	0	0	0.5941	-0.1377	0.0001
3	DMU2	0.0000	<=	0	0	0.9241	-0.5853	0.0000
4	DMU3	0.0000	<=	0	0.0000	0	0.0000	M

Orientación hacia los productos

- Desarrollada por Bessent y Bessent (1988)
- Bajo este enfoque, una DMU no es eficiente si es posible aumentar el nivel de producción de algún producto sin aumentar ningún insumo y sin disminuir ningún otro producto
- Este enfoque considera las dificultades en asignar recursos
- Presenta una formulación similar al dual

Formulación general

$$\max z_0$$

$$y_{r,0} z_0 - \sum_{j=1}^{n} y_{r,j} \delta_j + S_r^+ = 0; \text{ para } r = 1, 2, \ldots, s$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \delta_j + S_r^- = x_{i,0}; \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_{i,j}, y_{r,j}, \delta_j, S_r^+, S_r^- \geq 0$$

Donde:

z_0	:	Ineficiencia de la unidad. En este caso $h_0=1/z_0$
δ_j	:	Es el peso para la DMU j. Es la variable de decisión del problema.
S_r^+, S_r^-	:	Variables de holgura de las restricciones

Determinando la unidad eficiente

$$y_{E,r} = z_0 y_{0,r} + S_r^{+}$$

$$x_{E,r} = x_{0,i} - S_r^{-}$$

DMU 1

Variable -->	z	d1	d2	d3	Direction	R. H. S.
Maximize	1					
y1	15	-15	-12	-20	<=	0
x1		6	4	10	<=	6
x2		2	5	8	<=	2
LowerBound	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

	21:13:30		Friday	March	03	2006		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	z	1.0000	1.0000	1.0000	0	basic	0	M
2	d1	1.0000	0	0	0	basic	-0.6148	0.2000
3	d2	0	0	0	0	basic	-0.1333	1.7000
4	d3	0	0	0	-0.5030	at bound	-M	0.5030
	Objective	Function	(Max.) =	1.0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	y1	0	<=	0	0	0.0667	-15.0000	M
2	x1	6.0000	<=	6.0000	0	0.1545	1.6000	6.0000
3	x2	2.0000	<=	2.0000	0	0.0364	2.0000	7.5000

DMU 2

Variable -->	z	d1	d2	d3	Direction	R. H. S.
Maximize	1					
y1	12	-15	-12	-20	<=	0
x1		6	4	10	<=	4
x2		2	5	8	<=	5
LowerBound	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

	21:15:58		Friday	March	03	2006		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	z	1.0000	1.0000	1.0000	0	basic	0	M
2	d1	0	0	0	-0.2500	at bound	-M	0.2500
3	d2	1.0000	0	0	0	basic	-0.1667	M
4	d3	0	0	0	-0.8333	at bound	-M	0.8333
	Objective	Function	(Max.) =	1.0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	y1	0	<=	0	0	0.0833	-12.0000	M
2	x1	4.0000	<=	4.0000	0	0.2500	0	4.0000
3	x2	5.0000	<=	5.0000	0	0	5.0000	M

DMU 3

Variable -->	z	d1	d2	d3	Direction	R. H. S.
Maximize	1					
y1	20	-15	-12	-20	<=	0
x1		6	4	10	<=	10
x2		2	5	8	<=	8
LowerBound	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

	21:21:01		Friday	March	03	2006		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	z	1.3773	1.0000	1.3773	0	basic	0	M
2	d1	0.8182	0	0	0	basic	-0.4611	0.1500
3	d2	1.2727	0	0	0	basic	-0.1000	1.2750
4	d3	0	0	0	-0.3773	at bound	-M	0.3773
	Objective	Function	(Max.) =	1.3773				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	y1	0	<=	0	0	0.0500	-27.5455	M
2	x1	10.0000	<=	10.0000	0	0.1159	6.4000	24.0000
3	x2	8.0000	<=	8.0000	0	0.0273	3.3333	12.5000

Unidad eficiente

Eficiencia de DMU 3 = 1/1.3773 = 0.7261

$y_{E,1} = 1.3773*20 + 0 = 27.546$

$x_{E,1} = 10 - 0 = 10$

$x_{E,2} = 8 - 0 = 8$

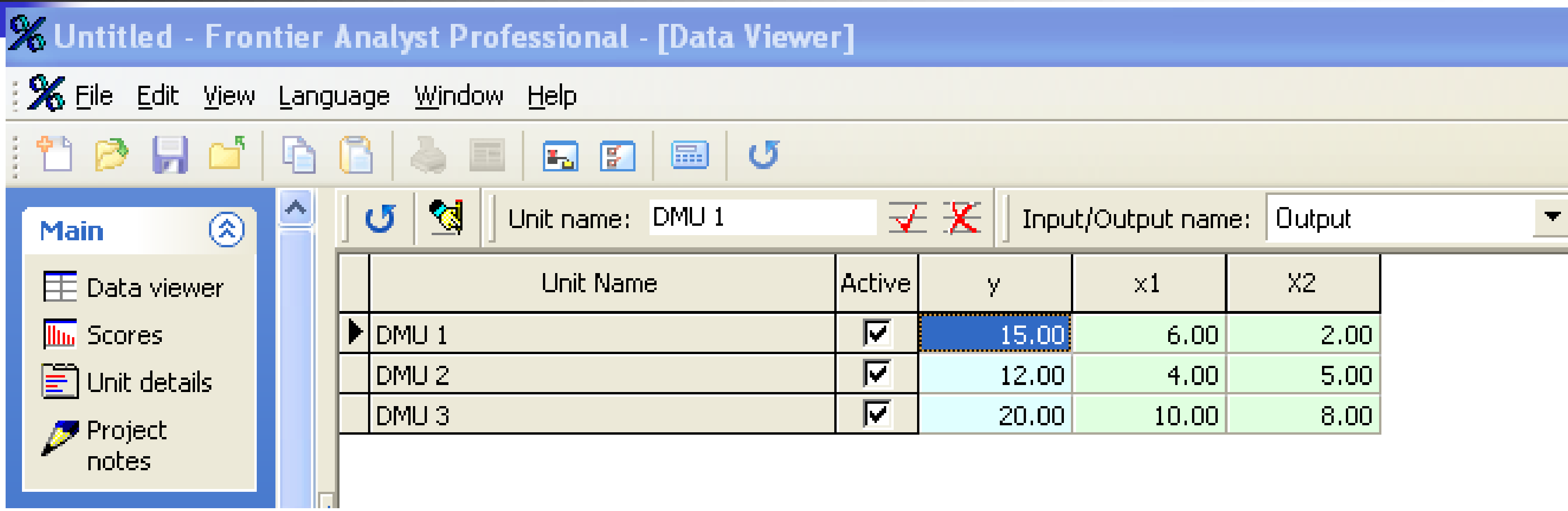
DMU 3 Eficiente

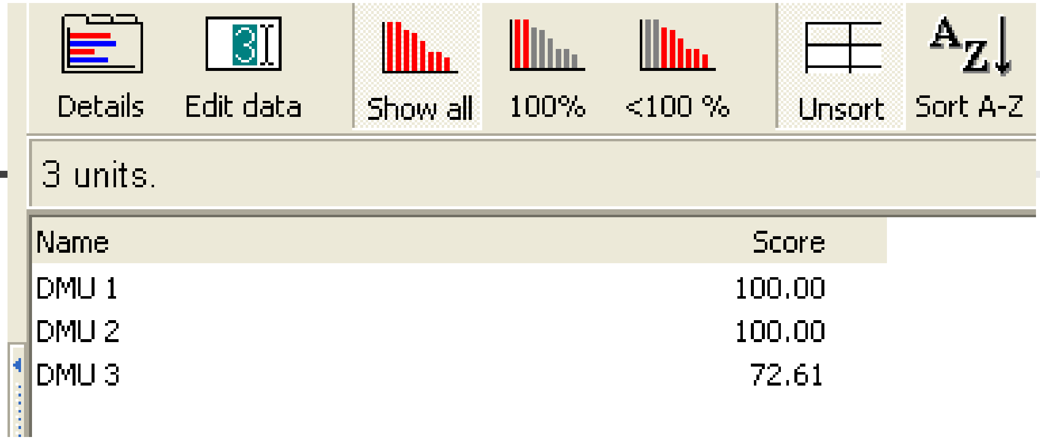
Variable -->	z	d1	d2	d3	Direction	R. H. S.
Maximize	1					
y1	27.546	-15	-12	-27.546	<=	0
x1		6	4	10	<=	10
x2		2	5	8	<=	8
LowerBound	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

roductos

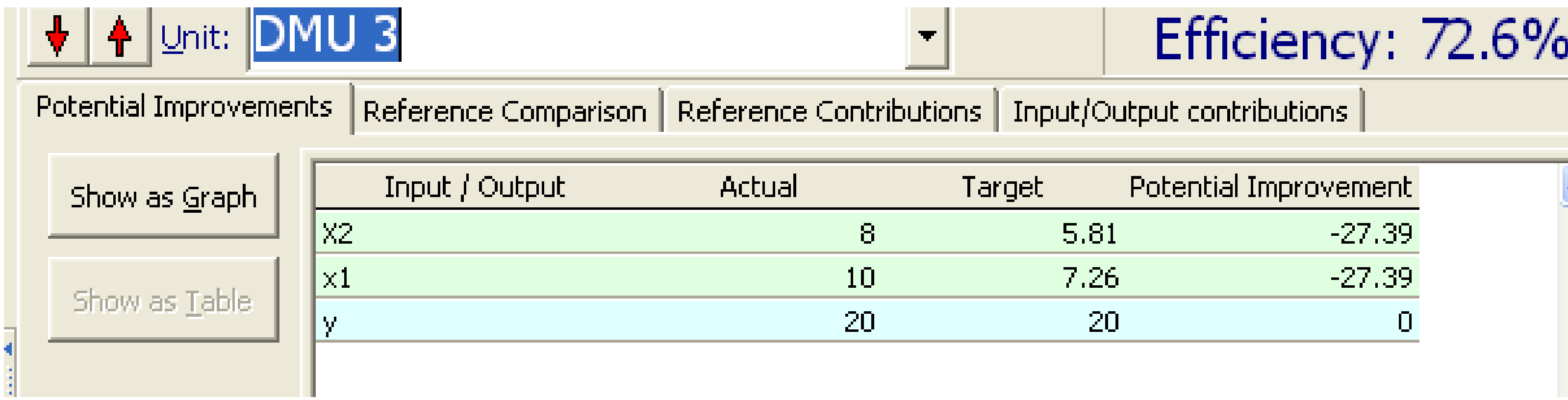
	21:28:49		Friday	March	03	2006		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	z	1.0000	1.0000	1.0000	0	basic	0	M
2	d1	0	0	0	0.0000	at bound	-M	0.0000
3	d2	0	0	0	0	basic	-0.0356	0.0000
4	d3	1.0000	0	0	0	basic	0.0000	0.0891
	Objective	Function	(Max.) =	1.0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	y1	0	<=	0	0	0.0363	-27.5460	M
2	x1	10.0000	<=	10.0000	0	0.0842	6.4000	10.0000
3	x2	8.0000	<=	8.0000	0	0.0198	8.0000	12.5000

El Efficient Analyst

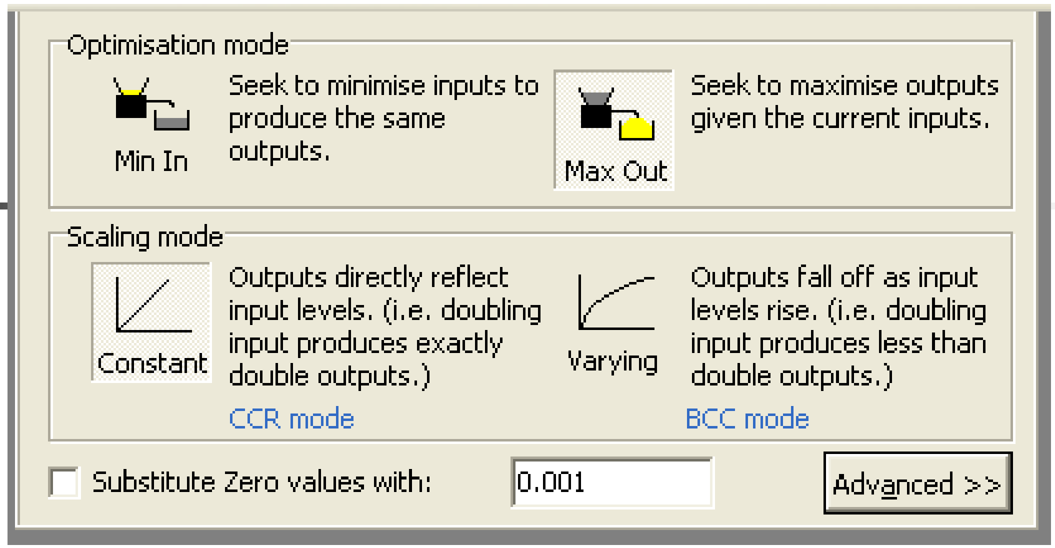

Untitled - Frontier Analyst Professional - [Data Viewer]
File Edit View Language Window Help
Main
Data viewer
Scores
Unit details
Project notes
Unit name: DMU 1
Input/Output name: Output
Unit Name
Active
y
x1
X2
DMU 1
15.00
6.00
2.00
DMU 2
12.00
4.00
5.00
DMU 3
20.00
10.00
8.00

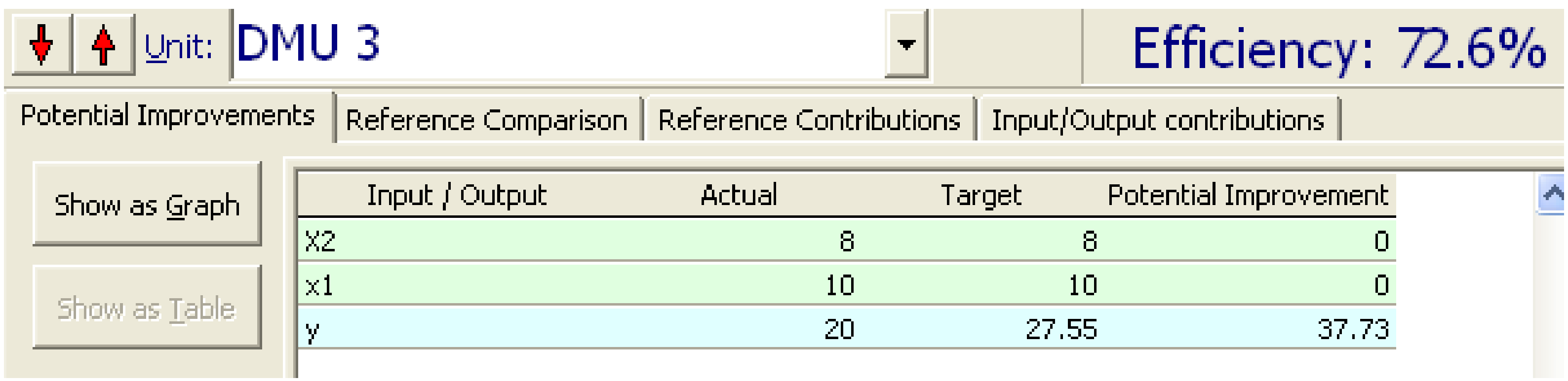


Name	Score
DMU 1	100.00
DMU 2	100.00
DMU 3	72.61



Input / Output	Actual	Target	Potential Improvement
X2	8	5.81	-27.39
x1	10	7.26	-27.39
y	20	20	0





Input / Output	Actual	Target	Potential Improvement
X2	8	8	0
x1	10	10	0
y	20	27.55	37.73

Ejemplo: La ampliación del canal

Combinaciones de Alternativas de Suministro y Ahorro de Agua Incluidas en el Analisis Final											
Criterio de Selección	Impacto Social y Ambiental (40%)						Suministro de Agua (40%)				Monto de Inversión (20%)
	Personas afectadas (número de personas)	Calidad de Agua (salinidad máxima, ppt)	Superficie de Áreas Afectadas (hectareas)	Pérdida o Afectación de Infraestructuras (Balboas)	Pérdida de Producción (Balboas)	Pérdida de Áreas Boscosas (hectáreas)	Rendimiendo Hídrico (Esclusajes equivalentes adicionales)	Confiabilidad de Calado (14m/46' ADT) AF 2015	AF 2020	AF 2025	VPN de la Inversión (millones de balboas)
Alternativa 1 - Subir Gatún AF 2015 - Profundizar AF 2015 - Río Indio AF 2015	1,750 personas	0.05 ppt	4,600 hectareas	B/. 27 millones	B/. 200,000	984 hectáreas	27 esclusajes	99%	99%	97%	B/. 309 M
Alternativa 2 - Subir Gatún AF 2015 - Profundizar AF 2015 - 2 Tinas AF 2015	N / S	0.29 ppt	400 hectáreas	B/. 25 millones	Ninguna pérdida	N / S	26 esclusajes	99%	98%	97%	B/. 305 M
Alternativa 3 - Profundizar AF 2015 - Subir Gatún AF 2015 - 3 Tinas AF 2015	N / S	0.34 ppt	400 hectáreas	B/. 25 millones	Ninguna pérdida	N / S	29 esclusajes	99%	98%	98%	B/. 407 M
N / S = No tiene impacto significativo											

Tomado del Plan Maestro del Canal, 2006 Capítulo 7

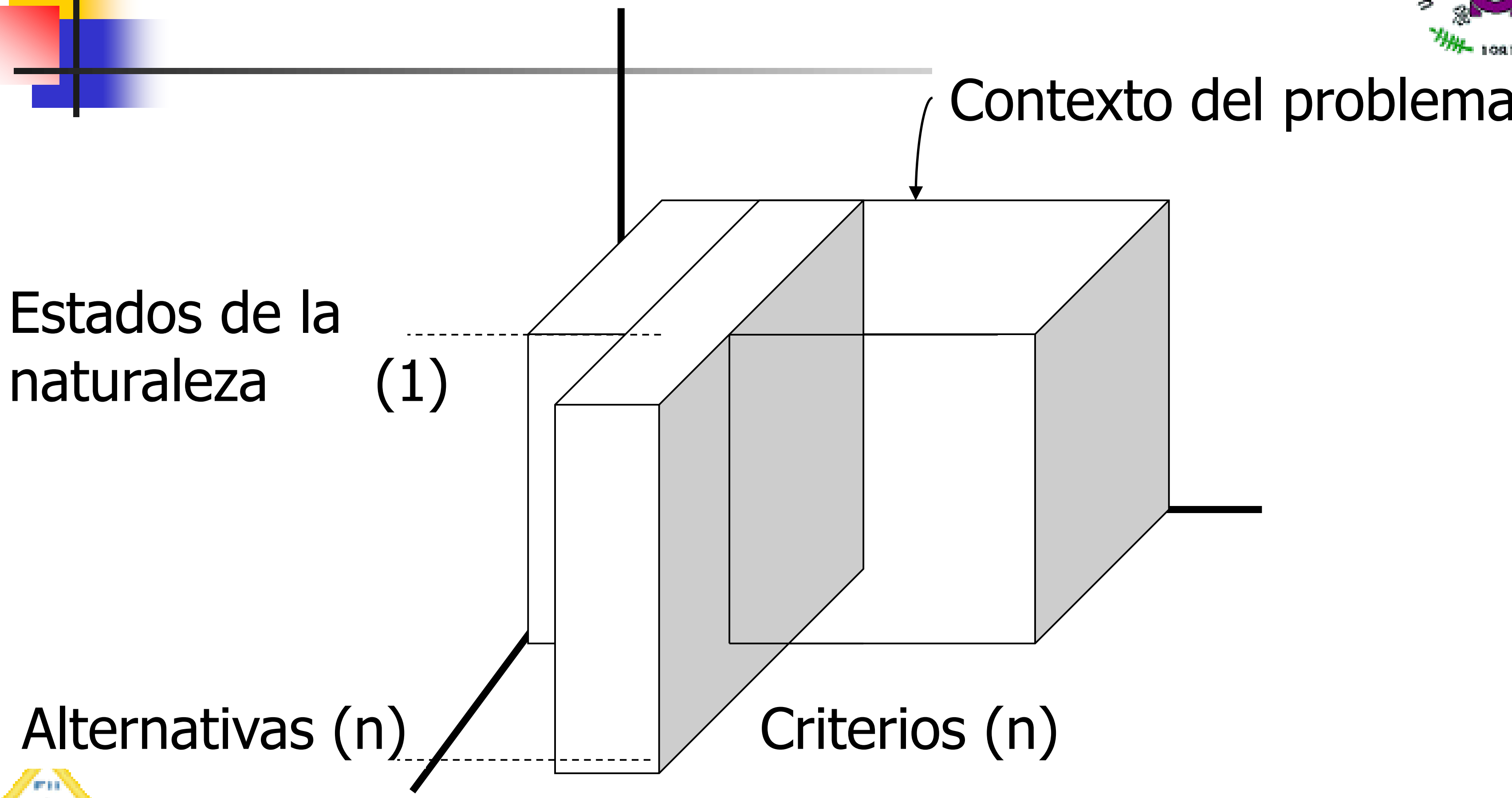
Programación por metas u objetivos

Introducción

- La mayor crítica a la PL es que sus restricciones son inviolables – solo se permite alcanzar un objetivo.
- A nivel administrativo se requiere alcanzar múltiples objetivos, normalmente conflictivos
- La programación por metas u objetivos permite alcanzar estas metas minimizando las variaciones entre objetivos.

Contexto del problema

- Múltiples criterios
- Un solo escenario
- Múltiples alternativas
- Problemas de optimización matemática


Contexto del problema
Estados de la naturaleza (1)
Alternativas (n)
Criterios (n)

Decisiones satisfacientes

- Se apoya en la lógica ***satisfaciente*** (satisfacción y complacencia) definidos por Herbert Simon
- Más que soluciones óptimas buscar soluciones "suficientemente buenas" o "aproximaciones aceptables".

Algo de historia

- Sus inicios son circa 1955 en un articulo de Charnes, Cooper y Ferguson publicado en Management Science
- Pese a su potencial, no es hasta mediados de los años setenta las aplicaciones de la programación por metas son bastante escasas.
- A partir de esa fecha y gracias a los trabajos de Lee e Ignizio aparece una gran cantidad de aplicaciones y estudios teóricos de la programación por metas
- Enfoque más utilizados de decisiones multicriterio

Definición

- Extensión de la PL
- Permite plantear decisiones para satisfacer diferentes metas y restricciones
- Permite incorporar el sistema propio de preferencias del decisor al enfrentarse a metas antagónicas
- Permite una manera de alcanzar varios objetivos simultáneamente

Niveles de aspiración

- Para formular un modelo de programación por metas, es necesario fijar los atributos que se consideren relevantes para el problema.
- Una vez establecidos los atributos, se asigna a cada uno de ellos un nivel de aspiración.
- Nivel de aspiración o meta t_i, es el nivel de logro que el decisor desea alcanzar para el atributo i-ésimo.

Formulación

- Las metas constituyen una especie de restricciones «blandas» que pueden violarse sin que por ello se generen soluciones imposibles.
- Una meta puede representarse de la siguiente manera:

ATRIBUTO + VARIABLES DE DESVIACIÓN = NIVEL DE ASPIRACIÓN

Formulación

- La cantidad de violación puede medirse introduciendo dos variables de desviación, una negativa n y otra positiva p (d^-, d+, u, v) ó:

$$fi(x) + n_i - p_i = t_i$$

  - fi (**x**) representa la expresión matemática del i-ésimo atributo,
  - t_i, el nivel de aspiración asociado a dicho atributo,
  - n_i y p_i las variables de desviación negativa y positiva respectivamente.
- La variable de desviación negativa cuantifica la falta de logro de una meta con respecto a su nivel de aspiración,
- La variable de desviación positiva cuantifica del exceso de logro de una meta con respecto a su nivel de aspiración.

Tipos de restricciones

- Se pueden definir dos tipos de restricciones:
- Restricciones del sistema o restricciones duras
- Restricciones de metas o restricciones blandas

Existen tres posibles metas

- Una meta unilateral inferior que establece un límite inferior que se puede exceder
- Una meta unilateral superior que no es necesario alcanzar
- Una meta bilateral el que se quiere alcanzar exactamente.

Tipos de programación por objetivos

- El propósito general de la programación por metas consiste en minimizar las variables de desviación no deseadas.
- El proceso de minimización puede llevarse a cabo de diferentes maneras.
- Cada método o manera conduce a una variante diferente de la programación por metas.

Programación por metas ponderadas.

- En una función objetivo agregada se incluyen todas las variables de desviación no deseadas convenientemente ponderadas.
- Donde α_i y β_i representan los pesos o factores de ponderación asociados a las variables de desviación negativa y positiva para la meta i-ésima y **F** el conjunto alcanzable o conjunto de restricciones.

Formulación

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i n_i + \beta_i p_i)$$

sujeto a:

$$f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = t_i \qquad i = 1, \quad \cdots, \quad m$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{F}$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad \mathbf{n} \geq 0 \quad \mathbf{P} \geq 0$$

Acerca de las ponderaciones

- Los pesos β tomarán el valor cero cuando se desea que el logro de la meta sea mayor que el nivel de aspiración establecido. Así su prioridad será la más baja.
- Los pesos α tomarán el valor cero cuando se desea que el logro de la meta sea menor que el nivel de aspiración establecido. Igual que el caso anterior, entonces su prioridad será la más baja.

Programación por metas lexicográficas

- Las preferencias se ordenan igual que las palabras en un léxico o diccionario, de ahí la denominación de programación por metas lexicográficas.
- Utiliza el concepto de prioridad o peso excluyente (pre-emptive priorities).
- Este tipo de peso excluyente implica que el logro de las metas situadas en una cierta prioridad es preferido al logro de cualquier otro conjunto de metas situadas en una prioridad mas baja.
- Las metas situadas en prioridad más alta se satisfacen en la medida de lo posible, sólo entonces se considera la posible satisfacción de metas situadas en prioridades más bajas.

Formulación

$$\text{Lex min } \mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_q]$$

Sujeto a:

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

$$f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = t_i$$

$$x \in \mathbf{F}$$

$$x, n, p \geq 0$$

Aspectos importantes

- La minimización lexicográfica del vector **a** implica la minimización ordenada de sus componentes;
- Se minimiza la primera componente $\mathbf{a}_1$ de la función de logro, seguidamente se minimiza la segunda componente $\mathbf{a}_2$ respetando el valor de $\mathbf{a}_1$ previamente obtenido, y así sucesivamente.
- Los modelos basados en metas lexicográficas no pueden resolverse por una aplicación directa del Simplex.

Aspectos importantes

- Existen diferentes enfoques algorítmicos
- El más intuitivo y operativo sea el método secuencial.
- Este método consiste en resolver una secuencia de programas lineales.
- El primer programa de la secuencia minimiza la primera componente del vector de logro, sujeta a las restricciones (igualdades) correspondientes ala primera prioridad.
- El segundo programa lineal minimiza la segunda componente de la función de logro sujeta a las restricciones (igualdades) correspondientes a las dos primeras prioridades, así como a no degradar los valores de las variables de desviación de la prioridad primera que se obtuvieron en la solución precedente.
- El procedimiento secuencial continua hasta resolver el último programa lineal.

Programación por metas MINIMAX o Chebysev.

- Busca la minimización de la máxima desviación de entre todas las posibles desviaciones.
- Desde un punto de vista computacional, un modelo de metas MINIMAX es un programa lineal que puede resolverse por aplicación directa del Simplex.

Formulación

$$\text{Min } D$$

Sujeto a:

$$\alpha_i n_i + \beta_i p_i \leq D$$

$$f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = t_i$$

$$x \in \mathbf{F}$$

$$x, n, p \geq 0$$

Donde D representa la máxima desviación

Posibles problemas

- La solución generada por un modelo basado en metas puede ser ineficiente desde un punto de vista Paretiano. Esto obliga a comprobar la eficiencia de la solución y a utilizar algún procedimiento para restaurarla en caso de ineficiencia
- La posible equivalencia de soluciones entre los modelos de programación por metas y los modelos tradicionales basados en la optimización de un sólo criterio.
- La falta de significado y las conclusiones equivocadas a las que se puede llegar cuando la función de logro de un modelo basado en metas lexicográficas se formula erróneamente como un escalar en vez de como un vector.

Posibles problemas

- Los problemas que pueden surgir cuando se omite una variable de desviación en la formulación de una meta.
- Los problemas que pueden surgir cuando innecesariamente se formulan metas con dos lados (esto es, se consideran automáticamente como variables de desviación no deseadas tanto la desviación positiva como la negativa).
- Una excesiva priorización de las metas en un modelo lexicográfico puede generar metas redundantes; esto es, metas que no jueguen ningún papel en el correspondiente proceso de optimización lexicográfico.

Ejemplo

Un fabricante de productos electrónicos produce dos tipos de calculadoras científicas: “tipo estudiante” y “tipo profesor”. Dichas calculadoras se fabrican en dos departamentos donde hay 60 horas en cada uno de ellos por semana para procesamiento.

Datos importantes

	Modelo	
	Estudiante	Profesor
Utilidades por unidad (B/.)	7.50	10.00
Tiempo de procesamiento por unidad, en horas, en el departamento A	1	2
Tiempo de procesamiento por unidad, en horas, en el departamento B	1.5	1.5

El problema como un problema típico de P. L.

$$\text{Max } Z = 7.5x_1 + 10x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 + 2.0x_2 \leq 60$$

$$1.5x_1 + 1.5x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Con una solución óptima:

$$x_1 = 20$$

$$x_2 = 20$$

Utilidad por semana B/.350.00

Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	7.5	10		
C1	1	2	<=	60
C2	1.5	1.5	<=	60
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

	17:55:12		Friday	April	14	2006		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	20.0000	7.5000	150.0000	0	basic	5.0000	10.0000
2	X2	20.0000	10.0000	200.0000	0	basic	7.5000	15.0000
	Objective	Function	(Max.) =	350.0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	60.0000	<=	60.0000	0	2.5000	40.0000	80.0000
2	C2	60.0000	<=	60.0000	0	3.3333	45.0000	90.0000

Introduciendo metas

La empresa quiere establecer una meta de alcanzar una utilidad de B/.1,000 por semana.

Sean:

n_1= faltante para la meta

p_1= cantidad que sobrepasa la meta

Se quiere minimizar la cantidad que falta para alcanzar el objetivo de B/.1,000 por semana.

Formulación

$$\text{Min } Z = n_1$$

Sujeto a:

$$7.5x_1 + 10x_2 + n_1 - p_1 = 1{,}000$$

$$x_1 + 2.0x_2 \leq 60$$

$$1.5x_1 + 1.5x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2, n_1, p_1 \geq 0$$

Solución en WinQSB

Variable -->	X1	X2	n1	p1	Direction	R. H. S.
Min:G1			1			
C1	7.5	10	1	-1	=	1000
C2	1	2.0			<=	60
C3	1.5	1.5			<=	60
LowerBound	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

	17:51:23		Friday	April	14	2006		
	Goal Level	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	G1	X1	20.00	0	0	0	-2.50	2.50
2	G1	X2	20.00	0	0	0	-5.00	2.50
3	G1	n1	650.00	1.00	650.00	0	0	M
4	G1	p1	0	0	0	1.00	-1.00	M
	G1	Goal	Value	(Min.) =	650.00			
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS	ShadowPrice Goal 1
1	C1	1,000.00	=	1,000.00	0	350.00	M	1.00
2	C2	60.00	<=	60.00	0	40.00	80.00	-2.50
3	C3	60.00	<=	60.00	0	45.00	90.00	-3.33

Otras metas

Suponga que además se quieren vender al menos 10 unidades a la semana de cada tipo de calculadora

Sean:

- n_1, p_2: cantidad que falta o sobrepasa el objetivo de B/.1,000 por semana
- n_2, p_2: cantidad que falta o sobrepasa el objetivo de 10 calculadoras tipo estudiante
- n_3, p_3: cantidad que falta o sobrepasa el objetivo de 10 calculadoras tipo profesor

Se requiere minimizar la variación en las metas

Variable -->	X1	X2	n1	p1	n2	p2	n3	p3	Direction	R. H. S.
Min:G1			1		1		1			
C1	7.5	10	1	-1					=	1000
C2	1	2.0							<=	60
C3	1.5	1.5							<=	60
C4	1				1	-1			=	10
C5		1					1	-1	=	10
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

	18:08:30		Friday	April	14	2006		
	Goal Level	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	G1	X1	20.00	0	0	0	-2.50	2.50
2	G1	X2	20.00	0	0	0	-5.00	2.50
3	G1	n1	650.00	1.00	650.00	0	0	M
4	G1	p1	0	0	0	1.00	-1.00	M
5	G1	n2	0	1.00	0	1.00	0	M
6	G1	p2	10.00	0	0	0	-1.00	2.50
7	G1	n3	0	1.00	0	1.00	0	M
8	G1	p3	10.00	0	0	0	-1.00	2.50
	G1	Goal	Value	(Min.) =	650.00			
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS	ShadowPrice Goal 1
1	C1	1,000.00	=	1,000.00	0	350.00	M	1.00
2	C2	60.00	<=	60.00	0	50.00	70.00	-2.50
3	C3	60.00	<=	60.00	0	52.50	75.00	-3.33
4	C4	10.00	=	10.00	0	-M	20.00	0
5	C5	10.00	=	10.00	0	-M	20.00	0