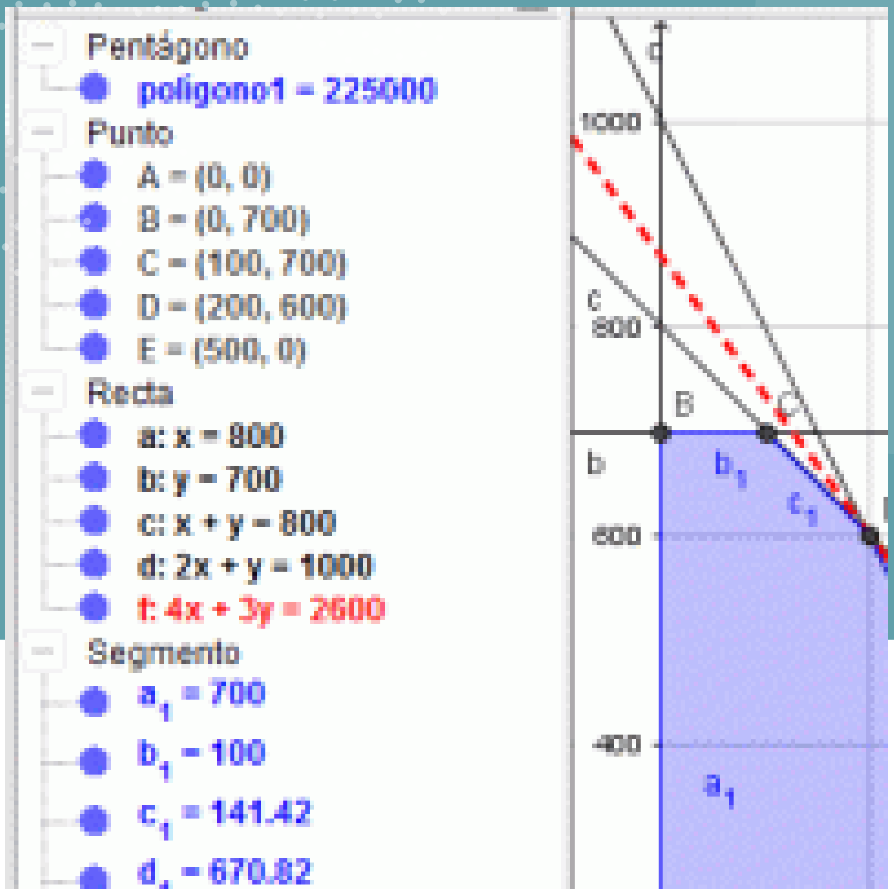
Análisis de post-optimalidad: El dual y el análisis de sensibilidad, un enfoque práctico y casos de ejemplo en QM



El Método Simplex

- Desarrollado en 1947 por George Dantzig como parte de un proyecto para el Departamento de Defensa
- Se basa en la propiedad de la solución esquina de P. L.
- Complejidad O(n)
- No se ha desarrollado método más confiable para problemas grandes (n, m > 10,000)

El Método Simplex …

- Es un proceso iterativo
  - Solución inicial en el origen lo que obliga a crea un problema con condiciones iniciales
  - Busca una solución en cada esquina del sistema $\Re^n$, partiendo del origen
  - Prueba de optimalidad

Descripción general

Para la formulación estándar:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Max (o Min)} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\
\text{s.t.} & & & \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
& \vdots & = & \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \\
& x_i & \geq & 0 \quad \forall\, i = 1 \ldots n
\end{array}
$$

Matricial:

$$
[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \qquad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_0 = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{subject to} & \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases}
\end{array}
$$

En la forma canónica $[A]\{x\} = \{b\}$

Expresión aumentada: Convertir todas las restricciones en igualdad

- El caso de ≤
  - Es necesario añadir una variable de holgura

    $x_1 \leq 4;\ x_1 = 4 - S_1;\ x_1 + S_1 = 4$
- El caso de ≥
  - Es necesario añadir una variable de holgura

    $x_1 \geq 5;\ x_1 = 5 + S_1;\ x_1 - S_1 = 5$
  - Es necesario añadir una variable artificial x_5 tal que, $x_1 - S_1 + A_1 = 5$ y no viole la condición de $x_j > 0$ en la solución inicial donde su coeficiente en la solución será M>>0 tal que x_5 tenga que ser cero para que no la variable artificial no aparezca en la solución
- Es caso de =
  - Se añade una variable artificial con coeficiente M en la solución

    $x_1 = 5;\ x_1 + A_1 = 5$

La solución aumentada

- Es la solución a un problema de programación lineal expresado originalmente de manera estándar y que ha sido aumentado introduciendo las variables de holgura y artificiales correspondientes.
- Una solución básica es una solución esquina aumentada
- Una solución básica factible es una solución esquina aumentada factible.

La solución inicial

- El Simplex asume una solución inicial en el origen, por lo que todas las variables iniciales son cero.
- Para poder que exista una solución inicial factible, Simplex se ve obligado a crear una forma aumentada.
- Es la solución a un problema de programación lineal expresado originalmente de manera estándar y que ha sido aumentado introduciendo las variables de holgura y artificiales correspondientes.
- Una solución básica es una solución esquina aumentada
- Una solución básica factible es una solución esquina aumentada factible.

Propiedades de la solución

- Grados de libertad del modelo: es la diferencia entre el número de variables en la forma aumentada y el número de restricciones (no considerando la no negatividad)
- A fin de poder resolver un sistema de ecuaciones, habrá que dar valores arbitrarios a las variables que exceden. Simplex asume 0
- Los grados de libertad indican la cantidad de variables que no aparecen en la solución, por tener un valor de 0.
- A las variables que aparecen en la solución se les conoce como variables básicas.
- Existe un caso especial, en el cual una variable básica es 0, se conoce como una Solución Degenerada.

Objetivo del análisis de sensibilidad o de post-optimalidad para los modelos de Programación Lineal

- Identificar el impacto que resulta en los resultados del problema original luego de determinadas variaciones en los parámetros, variables o restricciones del modelo, sin que esto pase por resolver el problema nuevamente.
- Estudia las posibles variaciones del problema una vez esta ha sido resuelto.
- Se utiliza para determinar la variación de un coeficiente o de una restricción sin variar la validez de una solución.
- Se hace debido a:
  - El alto costo de desarrollar otro modelo de P. L.
  - Ver la variación de datos aproximados
  - Estudiar diferentes escenarios

Método Simplex

- Resuelve un problema de PL en iteraciones que desplazan la solución hasta un mejor punto esquina.
- El proceso termina cuando no se puede mejorar la Función Objetivo

Análisis de Post optimalidad

Análisis de sensibilidad

Permite hacer

Permite determinar cuales son los parámetros para los que la solución es sensible a cambios y que requieren exactitud al momento de calcularlos y monitoreo constante durante la implementación de la solución

Reoptimización

Permite recalcular el valor de la Función Objetivo si el problema requiere pocas iteraciones en su solución

Precios sombra

Permite conocer el nuevo valor de la función objetivo como consecuencia del aumento o disminución de los recursos, o de manera general, del lado derecho de las restricciones.

Dualidad

Permite calcular

- Es una propiedad de la PL. Se genera un problema aprovechando la ortogonalidad de la PL.
- Si el problema de de Maximizar, el Dual es Minimizar o viceversa.
- El óptimo del primal será igual al óptimo del dual.
- En el dual, aparece una restricción por cada variable y una variable por cada restricción

Pr imal

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s. a. :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \le b_i \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \ge 0$$

Dual :

$$\text{Min } Y = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

s. a. :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \ge cj \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$y_i \ge 0$$

		Problema primal		
Problema Dual	Coeficientes de y_i	Coeficientes de $x_1 \; x_2 \ldots x_n$	$\le b_i$	Coeficientes de la F. O. (Minimizar)
	Y_1	$a_{1,1} \; a_{1,2} \ldots a_{1,n}$	b_1	
	y_2	$a_{2,1} \; a_{2,2} \ldots a_{2,n}$	b_2	
	. . .	. . .	. . .	
	y_m	$a_{m,1} \; a_{m,2} \ldots a_{m,n}$	b_m	
	$\ge c_j$	$c_1 \quad c_2 \; \ldots \; c_n$		

La solución del dual

La solución de las variables y_i representa la contribución a la utilidad por unidad de recurso i que se obtiene cuando el conjunto actual de variables básicas es utilizado para resolver el primal. En otros palabras **LOS PRECIOS SOMBRA**

- El precio sombra del recurso i mide el valor marginal de dicho recurso, es decir, la tasa en que Z puede cambiar si varia el recurso b_i
- El valor en que se puede "vender" cada unidad de recurso i de tal manera que se indiferente utilizarlo o venderlo.

Costo reducido

- En las soluciones no degeneradas, el costo reducido de cualquier variable de decisión se define como cuánto tendría que cambiar el coeficiente de dicha variable, en la función objetivo, para tener un valor óptimo positivo. O sea, convertirse en básica.
- Si una variable ya es positiva en la solución óptima (es básica), su costo reducido es cero.
- Por el contrario, si el valor óptimo de una variable es cero (no básica), entonces, según la definición de costo reducido, dicho costo es el incremento o el decremento permisible que corresponde a dicha variable para aparecer en la solución.

Análisis de sensibilidad

- Es una de las partes más importantes en la programación lineal.
- Permite determinar cuando una solución sigue siendo óptima dados algunos cambios en el problema.
- Consiste en determinar que tan sensible es la respuesta óptima al cambio de algunos datos como los coeficientes de la función objetivo) o los términos independientes de las restricciones.

Objetivo

- Establecer un intervalo de números reales en el cual el dato que se analiza puede estar contenido, de tal manera que la solución sigue siendo óptima siempre que el dato pertenezca a dicho intervalo
- Los análisis más importantes son;
  - Los coeficientes de la función objetivo; y
  - Los términos independientes de las restricciones

Cambios paramétricos

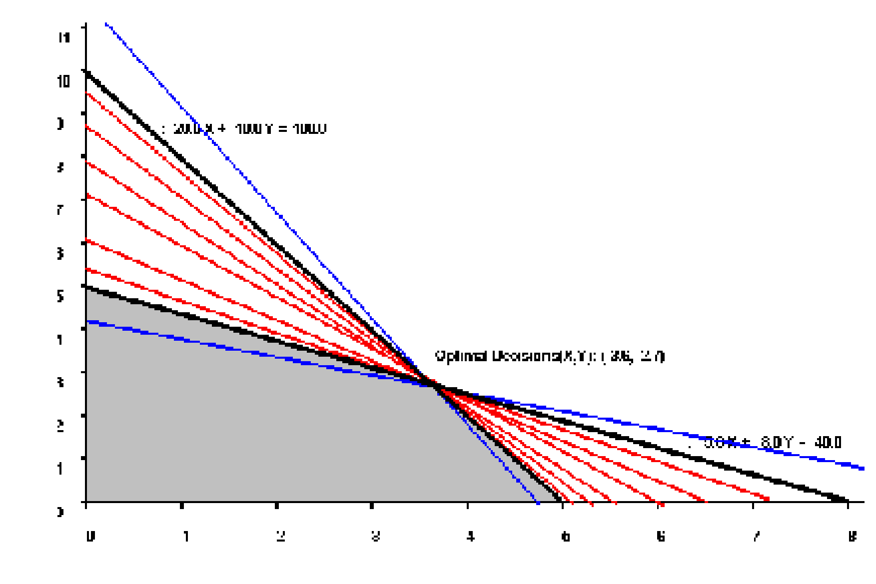
- **Cambios en el coeficiente de una variable no básica**: siempre y cuando no sea el costo reducido, no afectan la solución ya que estas no aparecen en la solución del modelo.
- **Introducción de una nueva variable**: habrá que ver si la nueva restricción afecta la solución del dual
- **Cambios en b_i**: pueden cambiar el problema y los precios sombra
- **Cambios en los coeficientes de la variable básica**: afecta el valor de la función objetivo.

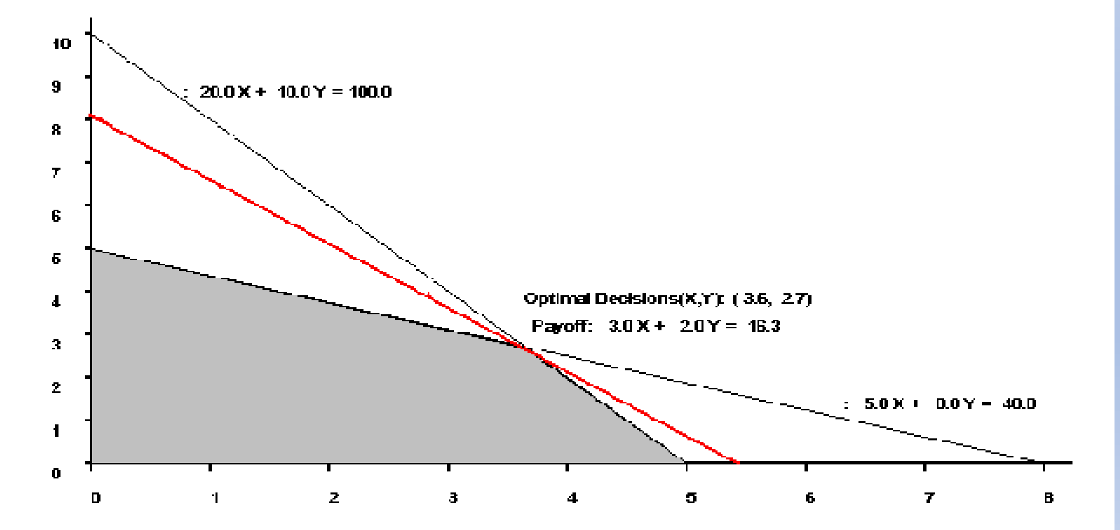
Análisis para los coeficientes de la función objetivo

- El objetivo es encontrar el rango de los coeficientes para que la solución original se mantenga óptima

$$
\begin{aligned}
&Máx \quad Z = 3x + 2y \\
&s/a \quad 5x + 8y \leq 40 \\
&\quad\quad 20x + 10y \leq 100 \\
&\quad\quad x \geq 0;\ y \geq 0
\end{aligned}
$$

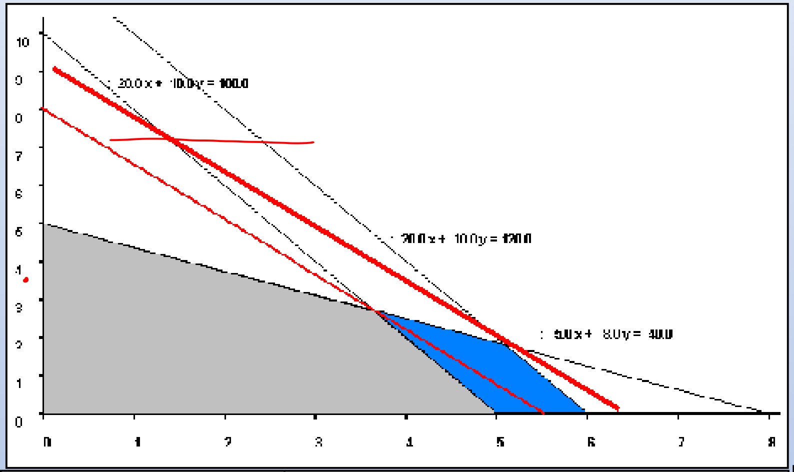
Todas las líneas rojas mantienen la solución óptima. Las líneas azules generan una nueva solución óptima pues existe un área de la región factible sobre ellas

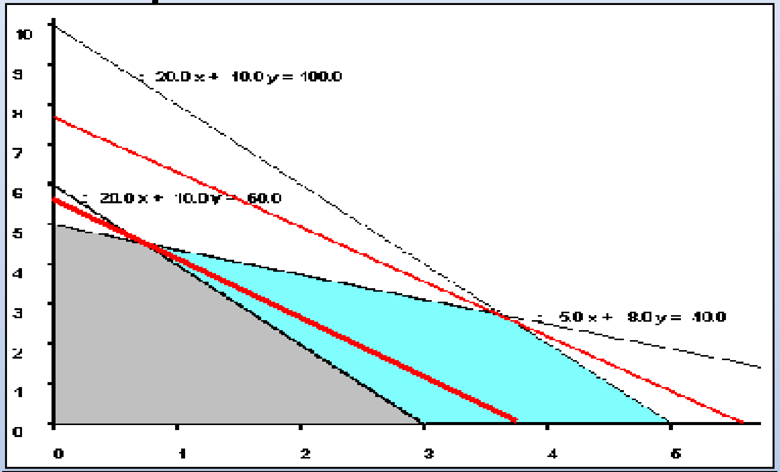


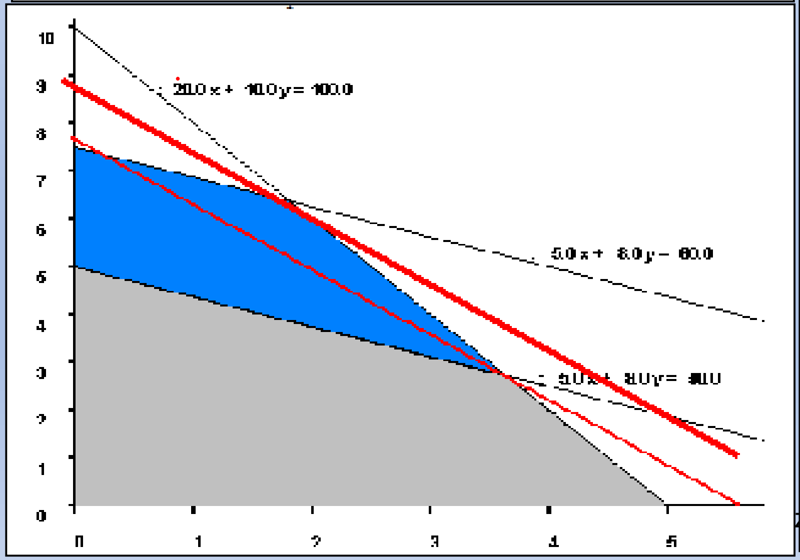


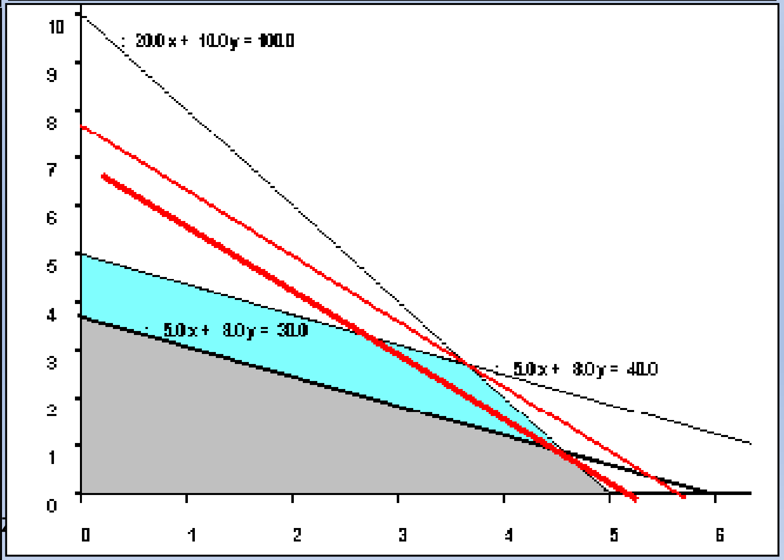
Análisis para los términos independientes de las restricciones

- El objetivo será que las restricciones que le daban solución al problema original, le den también solución al nuevo problema









Algunos ejemplos sencillos

Otra vez el ejemplo Wyndor

Una fábrica de ventanas produce artículos de vidrio de alta calidad, incluyendo ventanas y puertas. Tiene tres plantas. Los marcos de aluminio se producen en la planta A, los de madera se producen en la planta B y en la C se corta el vidrio y se ensamblan los productos.

Se ha decidido ampliar la producción en dos artículos adicionales: un tipo especial de puerta y una ventana de seguridad. Se ha determinado que la empresa tiene capacidad suficiente para producir estos artículos sin sacrificar la producción de los otros que tiene, aunque tendrán que competir con la capacidad excedente de la planta C. Adicionalmente se conoce que se podrá vender todo lo que se produce.

La empresa está interesada en encontrar una mezcla óptima de puertas especiales y ventanas de seguridad a fin de tener la mayor cantidad de ingresos posible.

Planta	Capacidad utilizada por unidad producida		Capacidad disponible
	Producto		
	Puertas	Ventanas	
A	1	0	4
B	0	2	12
C	3	2	18
Utilidad por unidad vendida	3	5	

Formulación general

Maximizar:

$Z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad & \leq 4 \\
2x_2 & \leq 12 \\
3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\
x_1, \qquad x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

Formulación aumentada del ejemplo

Maximizar Z tal que:

$$Z - 3x_1 - 5x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 0$$

$$x_1 + \quad + s_1 = 4$$

$$2x_2 + s_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$$

En el ejemplo son 2 variables originales, 3 variables de holgura y tres restricciones, por lo tanto el modelo tiene 2 grados de libertad

La solución inicial

- Las variables que se fijan en cero se conocen como variables no básicas
- Las variables que aparecen en la solución se conocen como básicas
- La solución básica factible inicial se hace tal que

  $x_1 = x_2 = 0$ y

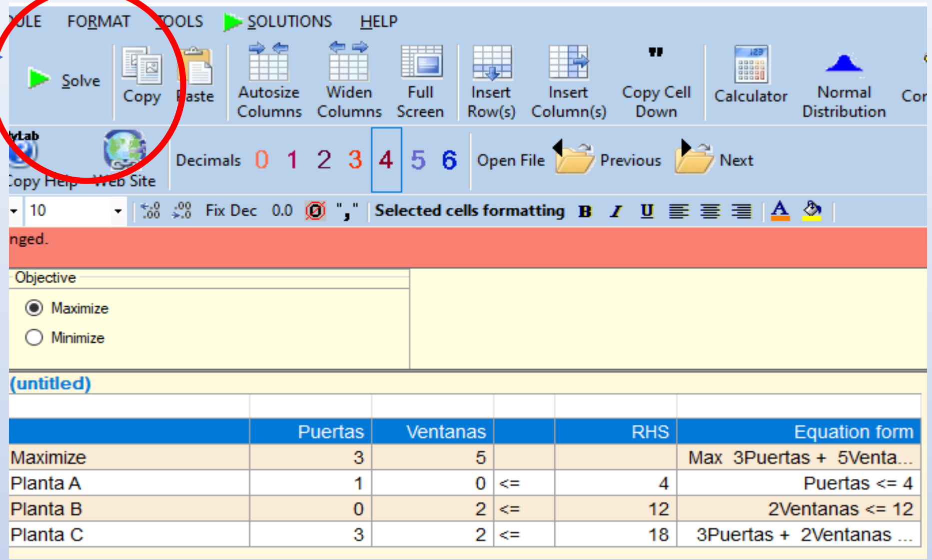
  $s_1 = 4$

  $s_2 = 12$

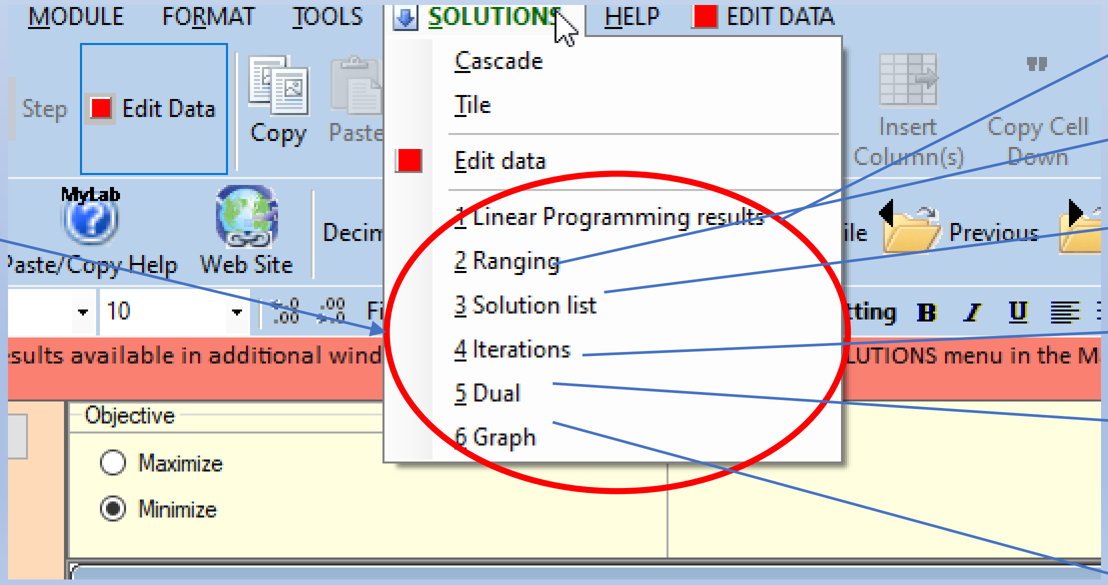
  $s_3 = 18$
- La solución es no óptima porque se puede encontrar otra solución adyacente mejor.

Para resolver y tener las soluciones

Resolver



Listado de soluciones



Resultados generales

Rango de valores

Lista detallada de la solución

Tableau Simplex e iteraciones

Formulación y solución del dual

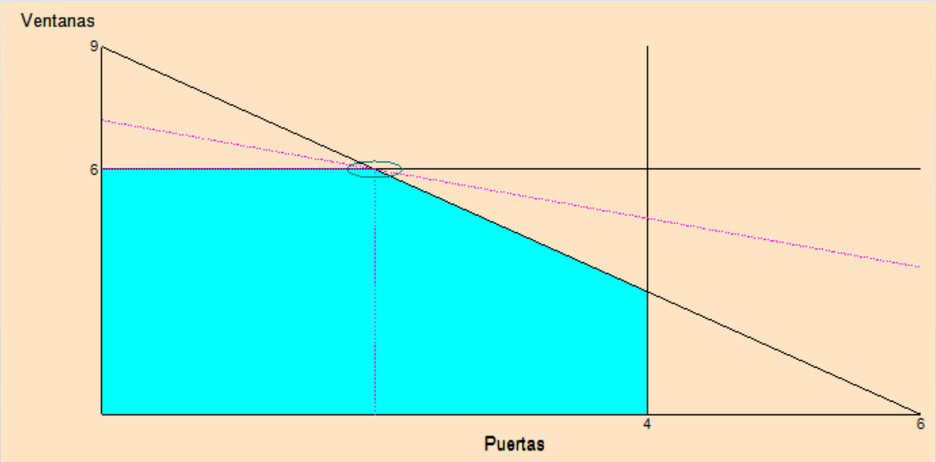
Solución gráfica, solamente para dos variables

(untitled)

	Puertas	Ventanas		RHS	Equation form
Maximize	3	5			Max 3Puertas + 5Venta...
Planta A	1	0	<=	4	Puertas <= 4
Planta B	0	2	<=	12	2Ventanas <= 12
Planta C	3	2	<=	18	3Puertas + 2Ventanas ...

(untitled) Solution

	Puertas	Ventanas		RHS	Dual
Maximize	3	5			
Planta A	1	0	<=	4	0
Planta B	0	2	<=	12	1.5
Planta C	3	2	<=	18	1
Solution	2	6		36	



(untitled) Solution

Variable	Status	Value
Puertas	Basic	2
Ventanas	Basic	6
slack 1	Basic	2
slack 2	NONBasic	0
slack 3	NONBasic	0
Optimal Value (Z)		36

Variable	Value	Reduced ...	Original Val	Lower Bou...	Upper Bou...
Puertas	2	0	3	0	7.5
Ventanas	6	0	5	2	Infinity
	Dual Value	Slack/Surp...	Original Val	Lower Bou...	Upper Bou...
Planta A	0	2	4	2	Infinity
Planta B	1.5	0	12	6	18
Planta C	1	0	18	12	24

El caso del alquiler de buses

- Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 buses de 40 asientos y 10 buses de 50 asientos, pero solo dispone de 9 conductores. El alquiler de un bus grande cuesta 80 balboas diarios y el de uno pequeño, 60 balboas diarios. Calcular cuántos de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela.

Formulación

	BP	BG		RHS	Equation form
Minimize	60	80			Min 60BP + 80BG
Buses peque•os	1	0	<=	8	BP <= 8
Buses grandes	0	1	<=	10	BG <= 10
Conductores	1	1	<=	9	BP + BG <= 9
Pasajeros	40	50	>=	400	40BP + 50BG >= 400

El tableau Simplex y las variables que se generan en la formulación estándar

Equation form
Min 60BP + 80BG
BP <= 8
BG <= 10
BP + BG <= 9
40BP + 50BG >= 400

(untitled) Solution

Cj	Basic Variables	Quantity	60 BP	80 BG	0 slack 1	0 slack 2	0 slack 3	0 artfcl 4	0 surplus 4
Phase 1 - Iteration 1									
0	slack 1	8	1	0	1	0	0	0	0
0	slack 2	10	0	1	0	1	0	0	0
0	slack 3	9	1	1	0	0	1	0	0
1	artfcl 4	400	40	50	0	0	0	1	-1
	zj	400	-40	-50	0	0	0	1	1
	cj-zj		40	50	0	0	0	0	-1

Solución

	BP	BG		RHS	Dual
Minimize	60	80			
Buses peque•os	1	0	<=	8	0
Buses grandes	0	1	<=	10	0
Conductores	1	1	<=	9	20
Pasajeros	40	50	>=	400	-2
Solution	5	4		620	

Variable	Status	Value
BP	Basic	5
BG	Basic	4
slack 1	Basic	3
slack 2	Basic	6
slack 3	NONBasic	0
surplus 4	NONBasic	0
Optimal Value (Z)		620

Restricciones críticas

El significado del dual

	Equation form
	Min 60BP + 80BG
Buses peque•os	BP <= 8
Buses grandes	BG <= 10
Conductores	BP + BG <= 9
Pasajeros	BP + 50BG >= 400

	BP	BG		RHS	Dual
Minimize	60	80			
Buses peque•os	1	0	<=	8	0
Buses grandes	0	1	<=	10	0
Conductores	1	1	<=	9	20
Pasajeros	40	50	>=	400	-2
Solution	5	4		620	

Variable	Status	Value
BP	Basic	5
BG	Basic	4
slack 1	Basic	3
slack 2	Basic	6
slack 3	NONBasic	0
surplus 4	NONBasic	0
Optimal Value (Z)		620

	Equation form
	Min 60BP + 80BG
Buses peque•os	BP <= 8
Buses grandes	BG <= 10
Conductores	BP + BG <= 8
Pasajeros	40BP + 50BG >= 400

	BP	BG		RHS	Dual
Minimize	60	80			
Buses peque•os	1	0	<=	8	0
Buses grandes	0	1	<=	10	0
Conductores	1	1	<=	8	20
Pasajeros	40	50	>=	400	-2
Solution	0	8		640	

Variable	Status	Value
BP	Basic	0
BG	Basic	8
slack 1	Basic	8
slack 2	Basic	2
slack 3	NONBasic	0
surplus 4	NONBasic	0
Optimal Value (Z)		640

Solución degenerada

	Equation form
	Min 60BP + 80BG
Buses peque•os	BP <= 8
Buses grandes	BG <= 10
Conductores	BP + BG <= 9
Pasajeros	40BP + 50BG >= 401

	BP	BG		RHS	Dual
Minimize	60	80			
Buses peque•os	1	0	<=	8	0
Buses grandes	0	1	<=	10	0
Conductores	1	1	<=	9	20
Pasajeros	40	50	>=	401	-2
Solution	4.9	4.1		622	

Variable	Status	Value
BP	Basic	4.9
BG	Basic	4.1
slack 1	Basic	3.1
slack 2	Basic	5.9
slack 3	NONBasic	0
surplus 4	NONBasic	0
Optimal Value (Z)		622

	Equation form
	Min 60BP + 80BG
Buses peque•os	BP <= 8
Buses grandes	BG <= 10
Conductores	BP + BG <= 8
Pasajeros	40BP + 50BG >= 399

	BP	BG		RHS	Dual
Minimize	60	80			
Buses peque•os	1	0	<=	8	0
Buses grandes	0	1	<=	10	0
Conductores	1	1	<=	8	20
Pasajeros	40	50	>=	399	-2
Solution	.1	7.9		638	

Análisis de sensibilidad: Rango de soluciones

En el caso anterior, ¿por qué no aumentamos los conductores a 10?

Variable	Value	Reduced ...	Original Val	Lower Bou...	Upper Bou...
BP	5	0	60	-Infinity	64
BG	4	0	80	75	Infinity
	Dual Value	Slack/Surp...	Original Val	Lower Bou...	Upper Bou...
Buses peque•os	0	3	8	5	Infinity
Buses grandes	0	6	10	4	Infinity
Conductores	20	0	9	8	9.6
Pasajeros	-2	0	400	370	450

La tabla muestra el rango de valores en los que pueden cambiar tanto los coeficientes de la Función Objetivo, como el lado derecho de las restricciones, sin que cambie la solución en el caso de la F. O. o los duales y la solución, en el caso de las restricciones, cambiando el problema.

Cambio en los coeficientes y lado derecho de las restricciones:

	Equation form
	Min 60BP + 80BG
Buses peque•os	BP <= 8
Buses grandes	BG <= 10
Conductores	BP + BG <= 9
Pasajeros	BP + 50BG >= 400

Variable	Value	Reduced ...	Original Val	Lower Bou...	Upper Bou...
BP	5	0	60	-Infinity	64
BG	4	0	80	75	Infinity
	Dual Value	Slack/Surp...	Original Val	Lower Bou...	Upper Bou...
Buses peque•os	0	3	8	5	Infinity
Buses grandes	0	6	10	4	Infinity
Conductores	20	0	9	8	9.6
Pasajeros	-2	0	400	370	450

	Equation form
	Min - 10BP + 76BG
Buses peque•os	BP <= 8
Buses grandes	BG <= 10
Conductores	BP + BG <= 9
Pasajeros	40BP + 50BG >= 400

	BP	BG		RHS	Dual
Minimize	-10	76			
Buses peque•os	1	0	<=	8	0
Buses grandes	0	1	<=	10	0
Conductores	1	1	<=	9	354
Pasajeros	40	50	>=	400	-8.6
Solution	5	4		254	

	Equation form
	Min 60BP + 80BG
Buses peque•os	BP <= 8
Buses grandes	BG <= 10
Conductores	BP + BG <= 10
Pasajeros	40BP + 50BG >= 400

	BP	BG		RHS	Dual
Minimize	60	80			
Buses peque•os	1	0	<=	8	4
Buses grandes	0	1	<=	10	0
Conductores	1	1	<=	10	0
Pasajeros	40	50	>=	400	-1.6
Solution	8	1.6		608	

El problema de las minas

Una compañía posee dos minas: la mina A produce cada día 1 tonelada de hierro de alta calidad, 3 toneladas de calidad media y 5 de baja calidad. La mina B produce cada día 2 toneladas de cada una de las tres calidades. La compañía necesita al menos 80 toneladas de mineral de alta calidad, 160 toneladas de calidad media y 200 de baja calidad.

Sabiendo que el costo diario de la operación es de 2000 unidades monetarias en cada mina ¿cuántos días debe trabajar cada mina para que el costo sea mínimo?

Formulación

	A	B		RHS	Equation form
Minimize	2,000	2,000			Min 2000A + 2000B
Alta calidad	1	2	>=	80	A + 2B >= 80
Media calidad	3	2	>=	160	3A + 2B >= 160
Baja calidad	5	2	>=	200	5A + 2B >= 200

Tableau simplex y variables generadas

Cj	Basic Variable	Quantity	2000 A	2000 B	0 artfcl 1	0 surplus 1	0 artfcl 2	0 surplus 2	0 artfcl 3	0 surplus 3
Phase 1 - Iteration 1										
1	artfcl 1	80	1	2	1	-1	0	0	0	0
1	artfcl 2	160	3	2	0	0	1	-1	0	0
1	artfcl 3	200	5	2	0	0	0	0	1	-1
	zj	440	-9	-6	1	1	1	1	1	1
	cj-zj		9	6	0	-1	0	-1	0	-1

Solución

(untitled) Solution

Variable	Status	Value
A	Basic	40
B	Basic	20
surplus 1	NONB...	0
surplus 2	NONB...	0
surplus 3	Basic	40
Optimal Value (Z)		120,0...

	A	B		RHS	Dual
Minimize	2,000	2,000			
Alta calidad	1	2	>=	80	-500
Media calidad	3	2	>=	160	-500
Baja calidad	5	2	>=	200	0
Solution	40	20		120,000	

Rangos

Variable	Value	Reduced ...	Original Val	Lower Bou...	Upper Bou...
A	40	0	2,000	1,000	3,000
B	20	0	2,000	1,333.33	4,000
	Dual Value	Slack/Surp...	Original Val	Lower Bou...	Upper Bou...
Alta calidad	-500	0	80	53.33	120
Media calidad	-500	0	160	140	240
Baja calidad	0	40	200	-Infinity	240

El caso de una campaña publicitaria

Una compañía publicitaria quiere planificar una campaña de publicidad en tres diferentes medios: televisión, radio y medios escritos. El propósito es alcanzar la mayor cantidad de clientes posibles por número de anuncios, los cuales son comprados en paquetes en los diferentes medios.

La empresa no quiere gastar más de $800 mil en la campaña. Además se quiere que al menos 2 millones de mujeres tengan acceso a los paquetes publicitarios. Además, la publicidad en televisión se vería limitada a $500 mil.

Adicionalmente, se quiere que en la televisión al menos 3 paquetes de publicidad sean en televisión de día y 2 en la "prime time".

Finalmente, el número de paquetes publicitarios en radio y en medios escritos no podrá ser menor de 5 ni mayor de 10 en cada uno.

Formule y resuelva cuantos comerciales podrán pasarse en cada medio de tal manera que se logren los objetivos de la campaña.

	Medio			
	TV – día	**TV- "prime time"**	**Radio**	**Escrito**
Costo de cada paquete de publicidad en miles de $	$40	$75	$30	$15
Número de clientes potenciales alcanzados por paquete en miles	400	900	500	200
Número de mujeres por paquete en miles	**300**	**400**	**200**	**100**

Formulación

	TV dia	TV Prime	Radio	Medio Escrito		RHS	Equation form
Maximize	400	900	500	200			Max 400TV dia + 900TV Prime + 500Radio + 200Medio Escrito
Presupuesto	40	75	30	15	<=	800	40TV dia + 75TV Prime + 30Radio + 15Medio Escrito <= 800
Presupuesto TV	40	75	0	0	<=	500	40TV dia + 75TV Prime <= 500
Cant. Mujeres	300	400	200	100	>=	2,000	300TV dia + 400TV Prime + 200Radio + 100Medio Escrito >= 2...
M•nimo de TV dia	1	0	0	0	>=	3	TV dia >= 3
M•nimo de TV Prime Time	0	1	0	0	>=	2	TV Prime >= 2
M•nimo de Radio	0	0	1	0	>=	5	Radio >= 5
Maximo Radio	0	0	1	0	<=	10	Radio <= 10
M•nimo de Medio Escrito	0	0	0	1	>=	5	Medio Escrito >= 5
M•ximo de Medio Escrito	0	0	0	1	<=	10	Medio Escrito <= 10

Tableau y variables

Cj	Basic Variable	Quantity	400 TV dia	900 TV Prime	500 Radio	200 Medio Escrito	0 slack 1	0 slack 2	0 artfcl 3	0 surplus 3	0 artfcl 4	0 surplus 4	0 artfcl 5	0 surplus 5	0 artfcl 6	0 surplus 6	0 slack 7	0 artfcl 8	0 surplus 8	0 slack 9
Phase 1 - Iter...																				
0	slack 1	800	40	75	30	15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	slack 2	500	40	75	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	artfcl 3	2,000	300	400	200	100	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	artfcl 4	3	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	artfcl 5	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
1	artfcl 6	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
0	slack 7	10	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	artfcl 8	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
0	slack 9	10	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	zj	2,015	-301	-401	-201	-101	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
	cj-zj		301	401	201	101	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	-1	0

Solución

(untitled) Solution

	TV dia	TV Prime	Radio	Medio Escrito		RHS	Dual
Maximize	400	900	500	200			
Presupuesto	40	75	30	15	<=	800	12
Presupuesto TV	40	75	0	0	<=	500	0
Cant. Mujeres	300	400	200	100	>=	2,000	0
M♦nimo de TV dia	1	0	0	0	>=	3	-80
M♦nimo de TV Prime Time	0	1	0	0	>=	2	0
M♦nimo de Radio	0	0	1	0	>=	5	0
Maximo Radio	0	0	1	0	<=	10	140
M♦nimo de Medio Escrito	0	0	0	1	>=	5	0
M♦ximo de Medio Escrito	0	0	0	1	<=	10	20
Solution	3	3.0667	10	10		10,960	

(untitled) Solution

Variable	Status	Value
TV dia	Basic	3
TV Prime	Basic	3.0667
Radio	Basic	10
Medio Escrito	Basic	10
slack 1	NONB...	0
slack 2	Basic	150
surplus 3	Basic	3,126...
surplus 4	NONB...	0
surplus 5	Basic	1.0667
surplus 6	Basic	5
slack 7	NONB...	0
surplus 8	Basic	5
slack 9	NONB...	0
Optimal Value (Z)		10,960

El balance de carga

Un avión tiene tres compartimientos para llevar carga, frente, medio y trasero. Su capacidad de carga está restringida tanto por el volumen como por el peso de la carga. Estas capacidades se muestran a continuación:

Compartimiento	Capacidad máxima de carga (ton)	Volumen máximo (p^3)
Frente	12	7,000
Centro	18	9,000
Atrás	10	5,000

Adicionalmente, debido al balance del avión, el peso de la carga en los diferentes compartimientos debe estar en la misma proporción de su capacidad.

En la actualidad hay cuatro tipos de carga a ser transportada y se necesita conocer la cantidad óptima de carga a ser aceptada a fin de maximizar el ingreso. A continuación, información necesaria:

Carga	Peso (tons)	Volumen por tonelada (p^3/ton)	Utilidad ($/ton)
1	20	500	320
2	16	700	400
3	25	600	360
4	13	400	290

Formule un modelo de programación lineal que permita encontrar la mezcla óptima de carga.

Formulación

	x11	x12	x13	x21	x22	x23	x31	x32	x33	x41	x42	x43		RHS	Equation form
Maximize	320	320	320	400	400	400	360	360	360	290	290	290			Max 320x11 + ...
Cap. carga frente	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	<=	12	x11 + x21 + x31...
Cap. carga centro	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	<=	18	x12 + x22 + x32...
Cap. carga atrás	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	<=	10	x13 + x23 + x33...
Vol. adelante	500	0	0	700	0	0	600	0	0	400	0	0	<=	7,000	500x11 + 700x...
Vol. centro	0	500	0	0	700	0	0	600	0	0	400	0	<=	9,000	500x12 + 700...
Vol. atrás	0	0	500	0	0	700	0	0	600	0	0	400	<=	5,000	500x13 + 700...
Disp. carga 1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	20	x11 + x12 + x13...
Disp. carga 2	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	<=	16	x21 + x22 + x23...
Disp. carga 3	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	<=	25	x31 + x32 + x33...
Disp. carga 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	<=	13	x41 + x42 + x43...
% de carga 1-2	18	-12	0	18	-12	0	18	-12	0	18	-12	0	=	0	18x11 - 12x12 ...
% de carga 2-3	10	0	-12	10	0	-12	10	0	-12	10	0	-12	=	0	10x11 - 12x13 ...

	x11	x12	x13	x21	x22	x23	x31	x32	x33	x41	x42	x43		RHS	Dual
Maximize	320	320	320	400	400	400	360	360	360	290	290	290			
Cap. carga frente	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	<=	12	400
Cap. carga centro	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	<=	18	0
Cap. carga atrás	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	<=	10	0
Vol. adelante	500	0	0	700	0	0	600	0	0	400	0	0	<=	7,000	.4
Vol. centro	0	500	0	0	700	0	0	600	0	0	400	0	<=	9,000	.4
Vol. atrás	0	0	500	0	0	700	0	0	600	0	0	400	<=	5,000	.4
Disp. carga 1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	20	0
Disp. carga 2	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	<=	16	0
Disp. carga 3	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	<=	25	0
Disp. carga 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	<=	13	10
% de carga 1-2	18	-12	0	18	-12	0	18	-12	0	18	-12	0	=	0	-10
% de carga 2-3	10	0	-12	10	0	-12	10	0	-12	10	0	-12	=	0	-10
Solution	0	15.5	0	7.3333	.8333	3.3333	0	0	0	4.6667	1.6667	6.6667		13,330	

Solución

x13	NONBasic	0
x21	Basic	7.3333
x22	Basic	.8333
x23	Basic	3.3333
x31	NONBasic	0
x32	NONBasic	0
x33	NONBasic	0
x41	Basic	4.6667
x42	Basic	1.6667
x43	Basic	6.6667
slack 1	NONBasic	0
slack 2	Basic	0
slack 3	Basic	0
slack 4	NONBasic	0
slack 5	NONBasic	0
slack 6	NONBasic	0
slack 7	Basic	4.5
slack 8	Basic	4.5

Variable	Value	Reduced C...	Original Val	Lower Bou...	Upper Bou...
x11	0	0	320	-Infinity	320
x12	15.5	0	320	320	326.6667
x13	0	0	320	-Infinity	320
x21	7.3333	0	400	400	700
x22	.8333	0	400	400	400
x23	3.3333	0	400	400	760
x31	0	0	360	-Infinity	360
x32	0	0	360	-Infinity	360
x33	0	0	360	-Infinity	360
x41	4.6667	0	290	290	410
x42	1.6667	0	290	280	290
x43	6.6667	0	290	290	410
	Dual Value	Slack/Surpl...	Original Val	Lower Bou...	Upper Bou...
Cap. carga frente	400	0	12	11.46	12
Cap. carga centro	0	0	18	18	Infinity
Cap. carga atrás	0	0	10	10	Infinity
Vol. adelante	.4	0	7,000	6,500	7,900
Vol. centro	.4	0	9,000	8,833.333	9,900
Vol. atrás	.4	0	5,000	4,500	5,900
Disp. carga 1	0	4.5	20	15.5	Infinity
Disp. carga 2	0	4.5	16	11.5	Infinity
Disp. carga 3	0	25	25	0	Infinity
Disp. carga 4	10	0	13	11.3333	22
% de carga 1-2	-10	0	0	0	21.6
% de carga 2-3	-10	0	0	0	21.6

Un caso de rutas aéreas

- Una empresa de transporte aéreo deberá asignar tres tipos diferentes tipos de aviones a cuatro rutas de acuerdo a la siguiente tabla:

Tipo de avión	Capacidad (pasajeros)	Cantidad de aviones	Cantidad de viajes diarios en cada ruta			
			1	2	3	4
1	50	5	3	2	2	1
2	30	8	4	3	3	2
3	20	10	5	5	4	2
Cantidad diaria de clientes			1,000	2,000	900	1,200

- Los costos asociados, incluyendo las penalizaciones por perder clientes por falta de espacio se muestran a continuación:

Tipo de Avión	**Costo de operación ($) por viaje en ruta**			
	1	2	3	4
1	1,000	1,100	1,200	1,500
2	800	900	1,000	1,000
3	600	800	800	900
Penalización por cliente perdido	40	50	45	70

- Determine:
- El modelo que optimice la cantidad de aviones asociados a cada ruta, así como el costo de clientes perdidos por ruta.
- El número y tipo de aviones por ruta y las cantidades y costos asociados al movimiento de pasajeros en cada ruta.
- ¿Hay alguna ventaja en aumentar la cantidad de cualquiera de los tres tipos de aviones, por qué?
- Interprete los precios sombra asociados con las restricciones que representan los límites de clientes atendidos en cada ruta.

Sean

- X_{ij}: Los aviones tipo i en la ruta j
- Y_j: los clientes perdidos en la ruta j

Equation form
Min 1000X11 + 1100X12 + 1200X13 + 1500X14 + 800X21 + 900X22 + 1000X23 + 1000X24 + 600X31 + 800X32 + 800X33 + 900X34 + 40Y1 + 50Y2 + 45Y3 + 70Y4
X11 + X12 + X13 + X14 <= 5
X21 + X22 + X23 + X24 <= 8
X31 + X32 + X33 + X34 <= 10
150X11 + 120X21 + 100X31 + Y1 >= 1000
100X12 + 90X22 + 100X32 + Y2 >= 2000
100X13 + 90X23 + 80X33 + Y3 >= 900
50X14 + 60X24 + 400X34 + Y4 >= 1200

	X11	X12	X13	X14	X21	X22	X23	X24	X31	X32	X33	X34	Y1	Y2	Y3	Y4		RHS
Minimize	1,000	1,100	1,200	1,500	800	900	1,000	1,000	600	800	800	900	40	50	45	70		
Aviones tipo 1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	5
Aviones tipo 2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	8
Aviones tipo 3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	<=	10
Pasajeros ruta 1	150	0	0	0	120	0	0	0	100	0	0	0	1	0	0	0	>=	1,000
Pasajeros ruta 2	0	100	0	0	0	90	0	0	0	100	0	0	0	1	0	0	>=	2,000
Pasajeros ruta 3	0	0	100	0	0	0	90	0	0	0	80	0	0	0	1	0	>=	900
Pasajeros ruta 4	0	0	0	50	0	0	0	60	0	0	0	400	0	0	0	1	>=	1,200

	X11	X12	X13	X14	X21	X22	X23	X24	X31	X32	X33	X34	Y1	Y2	Y3	Y4		RHS	Dual
Minimize	1,000	1,100	1,200	1,500	800	900	1,000	1,000	600	800	800	900	40	50	45	70			
Aviones tipo 1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	5	4,500
Aviones tipo 2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	<=	8	3,600
Aviones tipo 3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	<=	10	4,200
Pasajeros ruta 1	150	0	0	0	120	0	0	0	100	0	0	0	1	0	0	0	>=	1,000	-36.6667
Pasajeros ruta 2	0	100	0	0	0	90	0	0	0	100	0	0	0	1	0	0	>=	2,000	-50
Pasajeros ruta 3	0	0	100	0	0	0	90	0	0	0	80	0	0	0	1	0	>=	900	-45
Pasajeros ruta 4	0	0	0	50	0	0	0	60	0	0	0	400	0	0	0	1	>=	1,200	-12.75
Solution	5	0	0	0	2.0833	5.9167	0	0	0	7	0	3	0	767.5	900	0		99,166.66	

Problema 1 FInal Solution

Variable	Status	Value
X11	Basic	5
X12	NONBasic	0
X13	NONBasic	0
X14	NONBasic	0
X21	Basic	2.0833
X22	Basic	5.9167
X23	NONBasic	0
X24	NONBasic	0
X31	NONBasic	0
X32	Basic	7
X33	NONBasic	0
X34	Basic	3

Problema 1 FInal Solution

Variable	Status	Value
Y1	NONBasic	0
Y2	Basic	767.5
Y3	Basic	900
Y4	NONBasic	0
slack 1	NONBasic	0
slack 2	NONBasic	0
slack 3	NONBasic	0
surplus 4	NONBasic	0
surplus 5	NONBasic	0
surplus 6	NONBasic	0
surplus 7	NONBasic	0
Optimal Value (Z)		99,166.66

Variable	Value	Reduced ...	Original Val	Lower Bou...	Upper Bou...
X11	5	0	1,000	-Infinity	1,600
X12	0	600	1,100	500	Infinity
X13	0	1,200	1,200	0	Infinity
X14	0	5,362.5	1,500	-3,862.5	Infinity
X21	2.0833	0	800	320	1,200
X22	5.9167	0	900	500.0	1,380
X23	0	550	1,000	450	Infinity
X24	0	3,835	1,000	-2,835	Infinity
X31	0	1,133.333	600	-533.3334	Infinity
X32	7	0	800	-22,100	1,933.333
X33	0	1,400	800	-600	Infinity
X34	3	0	900	-4,200	23,800
Y1	0	3.3333	40	36.6667	Infinity
Y2	767.5	0	50	43.8889	54.4444
Y3	900	0	45	0	51.1111
Y4	0	57.25	70	12.75	Infinity
	Dual Value	Slack/Surp...	Original Val	Lower Bou...	Upper Bou...
Aviones tipo 1	4,500	0	5	.2667	6.6667
Aviones tipo 2	3,600	0	8	2.0833	16.5278
Aviones tipo 3	4,200	0	10	3	17.675
Pasajeros ruta 1	-36.6667	0	1,000	750	1,710
Pasajeros ruta 2	-50	0	2,000	1,232.5	Infinity
Pasajeros ruta 3	-45	0	900	0	Infinity
Pasajeros ruta 4	-12.75	0	1,200	0	4,000