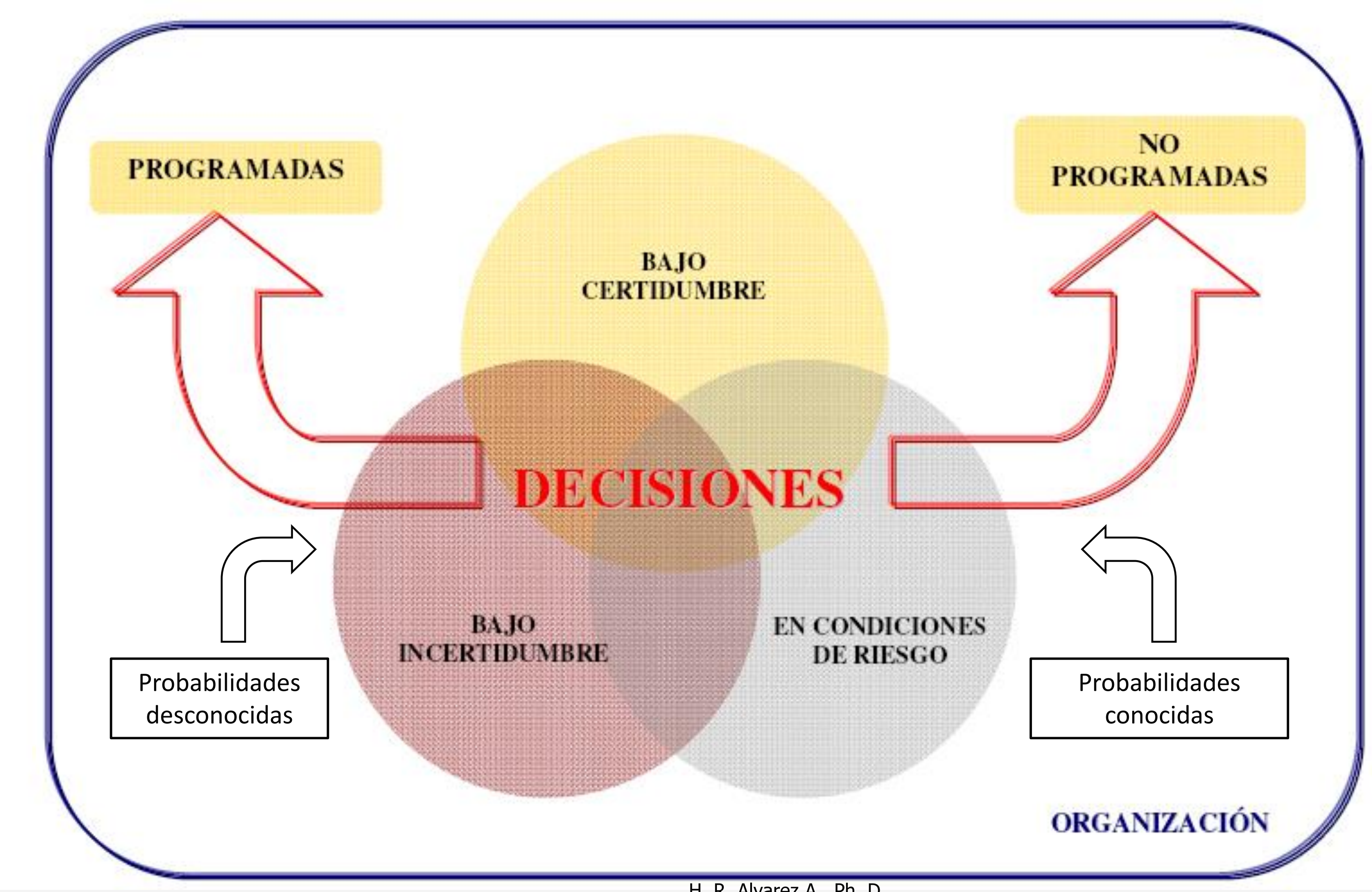
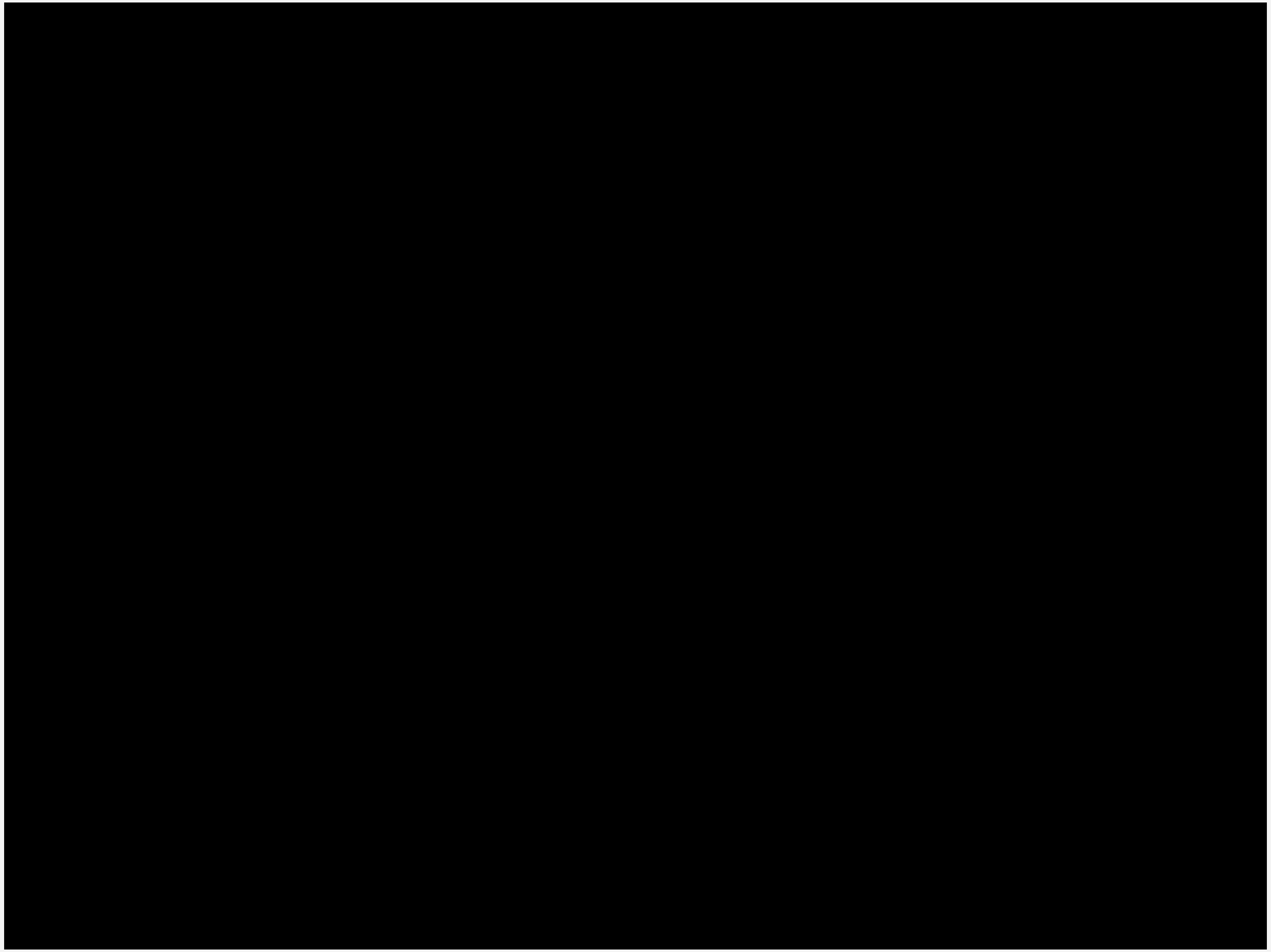
Analítica Prescriptiva

Recordando:

- Las decisiones se pueden definir como situaciones donde se reconoce que hay que hacer una selección a conciencia de un curso de acción.
- Aunque se puede decir que no se puede hablar de una decisión correcta o incorrecta
- El efecto de la incertidumbre puede afectar los resultados
- Hay que considerar Riesgo vs. Certeza
- Minimizar riesgo minimizando sus elementos:
  - Humano
  - Ambiental

Decisiones e incertidumbre

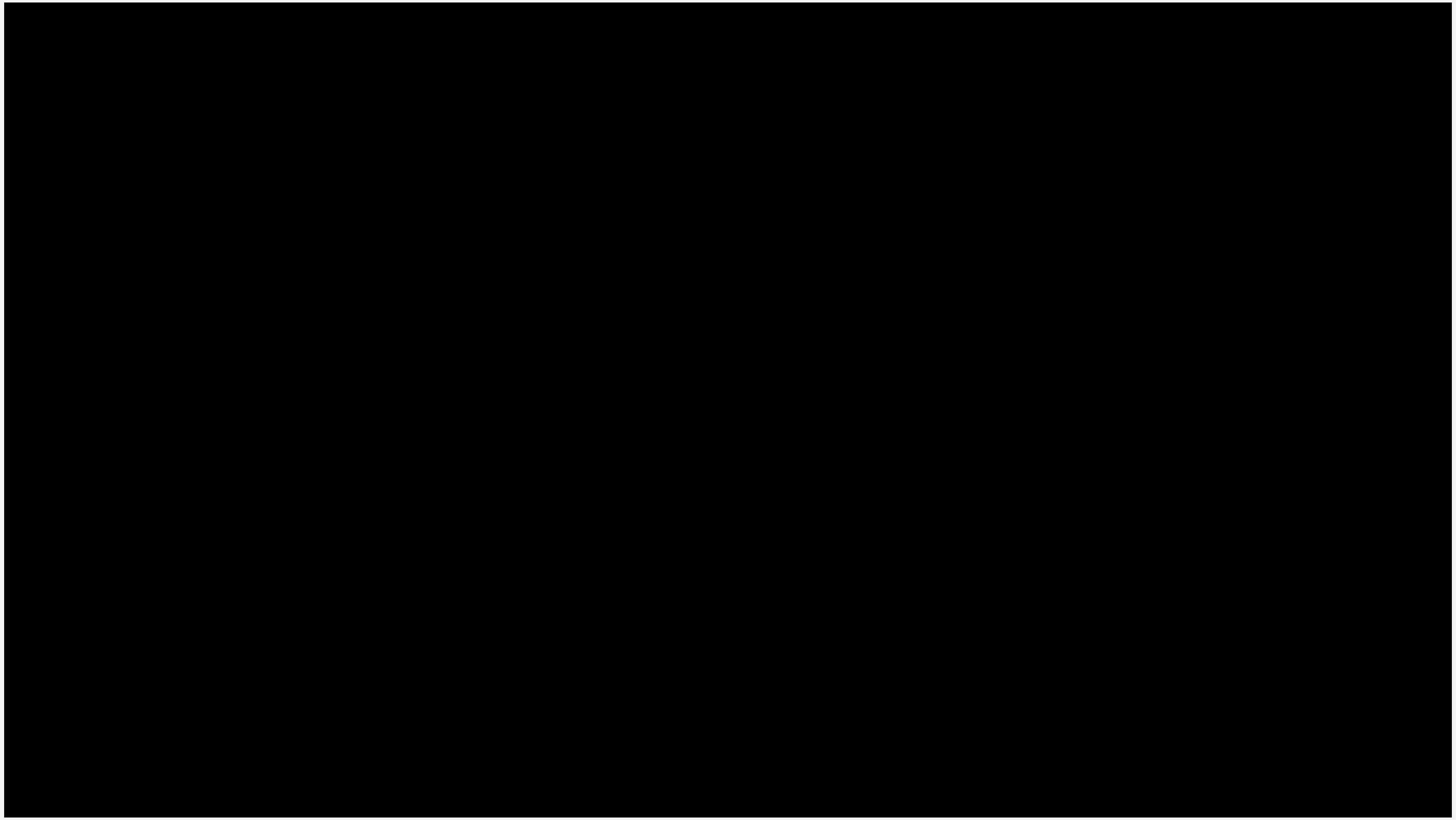




https://www.youtube.com/watch?v=vkpf_jS63oY

Tipo de entornos para la toma de decisiones

- Toma de decisiones con certidumbre: se conoce con certeza la consecuencia de cada alternativa u opción de decisión. Se elegirá la alternativa que maximice su bienestar o que dé el mejor resultado.
- Toma de decisiones con incertidumbre: existen varios resultados posibles para cada alternativa, pero no se conocen las probabilidades de los diferentes resultados.
- Toma de decisiones con riesgo: existen varios resultados posibles para cada alternativa, y se conocen las probabilidades de los diferentes resultados.



https://www.youtube.com/watch?v=iDOAvpWA2Ac

Probabilidades

- ¿En qué consisten las probabilidades?
- Mide la frecuencia con la que se obtiene un resultado (o conjunto de resultados) al llevar a cabo un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles.
- Se puede definir, de manera general como la relación existente entre los resultados esperados de un experimento en relación a todos los posibles resultados existentes del mismo.
- Es la medida matemática de la incertidumbre
- La teoría de la probabilidad tiene sus comienzos con los juegos de azar, pero hoy en día se usa extensamente en áreas como la estadística, la física, la matemática, la ciencia y la filosofía para llegar a conclusiones sobre la probabilidad de sucesos potenciales.
- Indican incertidumbre acerca de un evento que:
  - Ocurrió en el pasado
  - Ocurre en el presente
  - Ocurrirá en el futuro

Fuentes de las probabilidades

- Historia del pasado
- Juicio subjetivo
- Distribuciones teóricas

Conceptos generales

- **Observación**: cualquier registro de información
- **Experimento**: cualquier proceso que genere un conjunto de datos
- **Espacio muestral S**: el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento
- **Punto muestral**: cada posible elemento de S
- **Evento**: subconjunto de S
- **Complemento de un evento A con respecto a S**: los posibles resultados de S que no estén en A, o A’

Enfoques de probabilidad

- Clásico o escuela objetiva
- Frecuencias relativas
- Personalista o subjetivo

Probabilidad de un evento: Escuela Clásica

- Conocida también como Escuela Clásica de Laplace, “A Priori” o Teórica
- A partir de esta definición las probabilidades de los posibles resultados del experimento se pueden determinar a priori, es decir, sin realizar el experimento.
- Si un experimento puede tener como resultado cualquiera de N diferentes resultados, igualmente probables, y si exactamente n de estos resultados corresponden al evento A, entonces la probabilidad de que el evento A ocurra está dada por:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

- Esta definición es de uso limitado puesto que descansa sobre la base de las siguientes dos condiciones:
  - El espacio muestral (S) del experimento es finito (su número total de elementos es un número natural n = 1, 2, 3, …).
  - Los resultados del espacio muestral deben ser igualmente probables (tienen la misma posibilidad de ocurrir).

Enfoque empírico o de frecuencias relativas

- Conocido como definición Empírica, "A Posteriori" o Experimental
- La definición empírica se basa en la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento con respecto a un gran número de repeticiones del experimento.
- Recordando que la **frecuencia relativa (f_i)** de un valor X_i es la **proporción** de valores iguales a X_i en el conjunto de datos (X_1, X_2,…, X_N). Es decir, la frecuencia relativa es la frecuencia absoluta dividida por el número total de elementos *N*:

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

siendo $(X_1, X_2, ..., X_N)$ el conjunto de datos y n_i el total de valores igual a X_i

- La probabilidad de ocurrencia de un evento, bajo condiciones iguales a las observadas empíricamente, será igual a la frecuencia relativa de ocurrencia de dicho evento.
- Para determinar los valores de probabilidad se requiere de la observación y de la recopilación de datos y no implica ningún supuesto previo de igualdad de probabilidades.

Enfoque empírico o de frecuencias relativas

- La definición clásica se ve limitada a situaciones en las que hay un número finito de resultados igualmente probables.
- Al calcular probabilidades con este método de frecuencias relativas se obtiene una aproximación en vez de un valor exacto.
- A mayor número de veces que se repita el experimento, más cerca estará la aproximación del valor real.
- Esta propiedad se enuncia en forma de teorema, el cual se conoce comúnmente como la ley de los números grandes: **Conforme un experimento se repite una y otra vez, la probabilidad de frecuencias relativas de un evento tiende a aproximarse a la probabilidad real.**
- Cuando se usa la definición empírica, es importante tomar en cuenta los siguientes aspectos:
  - La probabilidad obtenida de esta manera es únicamente una estimación del valor real.
  - Cuanto mayor sea el número de repeticiones del experimento, tanto mejor será la estimación de la probabilidad.
  - La probabilidad es propia de sólo un conjunto de condiciones idénticas a aquéllas en las que se obtuvieron los datos, o sea, la validez de emplear esta definición depende de que las condiciones en que se realizó el experimento sean repetidas idénticamente.

Enfoque personalista o subjetivo

- Se diferencia de los dos enfoques anteriores, debido a que tanto el enfoque clásico como el de frecuencia relativa producen valores objetivos de probabilidad.
- Debido a que el valor de la probabilidad es un juicio personal, al enfoque subjetivo se le denomina también como enfoque personalista
- El enfoque subjetivo define la probabilidad de un evento a base del grado de confianza que una persona tiene de que el evento ocurra, teniendo en cuenta toda la evidencia que tiene disponible, fundamentado en la intuición, opiniones, creencias personales y otra información indirecta relevante.
- El enfoque subjetivo no depende de la repetitividad de ningún evento y permite estimar la probabilidad de sucesos únicos.

Definiciones

- **Alternativas**: es el conjunto de posibles situaciones de que dispone el decisor para conseguir sus objetivos.
- **Estados de la naturaleza**: aquel factor o factores que influyen en el problema de decisión y que no están bajo el control del decisor. Refleja el entorno del problema de decisión.
- **Probabilidades de ocurrencia**: son las probabilidades asociadas a la ocurrencia de los diferentes estados de naturaleza.
- **Criterio de estimación**: es la característica que permite valorar el conjunto de alternativas

Métodos de matriz de pago

Decisiones en ambiente de incertidumbre

- Son aquellos modelos heurísticos donde las diferentes **alternativas** de acción se conocen, así como los **estados de la naturaleza,** los **resultados** de las mismas pero no las **probabilidades** de que cada una de estos resultados sea obtenido.
- En este caso la decisión tiene un factor subjetivo ya que no conoce de manera objetiva las probabilidades.

Matriz de pago o costo/beneficio

	Estados de la Naturaleza y probabilidades asociadas						
Alternativas	**1, p_1**	**2, p_2**	**3, p_3**	**.**	**.**	**.**	**n, p_n**
A_1	r_{A1}	$r_{A1,1}$	$r_{A1,1}$	.	.	.	$r_{A1,1}$
A_2	$r_{A2,1}$	$r_{A2,1}$	$r_{A2,1}$	.	.	.	$r_{A2,1}$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
A_k	$r_{AK,1}$	$r_{AK,1}$	$r_{AK,1}$	.	.	.	$r_{AK,1}$

https://www.youtube.com/watch?v=74aF2MSc8T4

Criterios de dominancia

- Criterio de dominancia simple:
  - Sean A_s y A_k dos alternativas de un problema de decisión y $r_{s,j}$ y $r_{k,j}$ sus resultados asociados para el j-ésimo estado de la naturaleza.
  - Se dice que A_s domina a A_k ($A_s > A_k$), para todos los estados de naturaleza j si:
    - $r_{s,j} \geq r_{k,j}$: en el caso de resultados favorables
    - $r_{s,j} \leq r_{k,j}$: en el caso de resultados desfavorables

Criterios de dominancia

- Criterio de dominancia estocástica:
  - Sean A_s y A_k dos alternativas de un problema de decisión y $r_{s,j}$ y $r_{k,j}$ sus resultados asociados para el j-ésimo estado de la naturaleza.
  - Se dice que A_s domina estocásticamente a A_k ($A_s > A_k$), para un valor de $C \in \Re$ si:
    - $P(r_{s,j} > C) \geq P(r_{k,j} > C)$: en el caso de resultados favorables
    - $P(r_{s,j} > C) \leq P(r_{k,j} > C)$: en el caso de resultados desfavorables

Toma de decisiones bajo condiciones de certidumbre

- Incluye aquellos en los cuales cada acto disponible para quien toma la decisión tiene consecuencias que pueden ser conocidas previamente con certeza.
- La certeza o certidumbre es la condición en que los individuos son plenamente informados sobre un problema, las soluciones alternativas son obvias, y son claros los posibles resultados de cada decisión.
- En condiciones de certidumbre, la gente puede al menos prever (si no es que controlar) los hechos y sus resultados.
- Esta condición significa el debido conocimiento y clara definición tanto del problema como de las soluciones alternativas.
- Una vez que un individuo identifica soluciones alternativas y sus resultados esperados, la toma de la decisión es relativamente fácil.
- Características:
  - Los parámetros son constantes conocidos y ciertos.
  - Solamente hay una consecuencia para cada alternativa.
  - Se tiene conocimiento total sobre el problema.
  - Información exacta, medible y confiable acerca del resultado de cada una de las alternativas que consideremos.

MODELOS DE OPTIMIZACIÓN
Modelos de decisiones

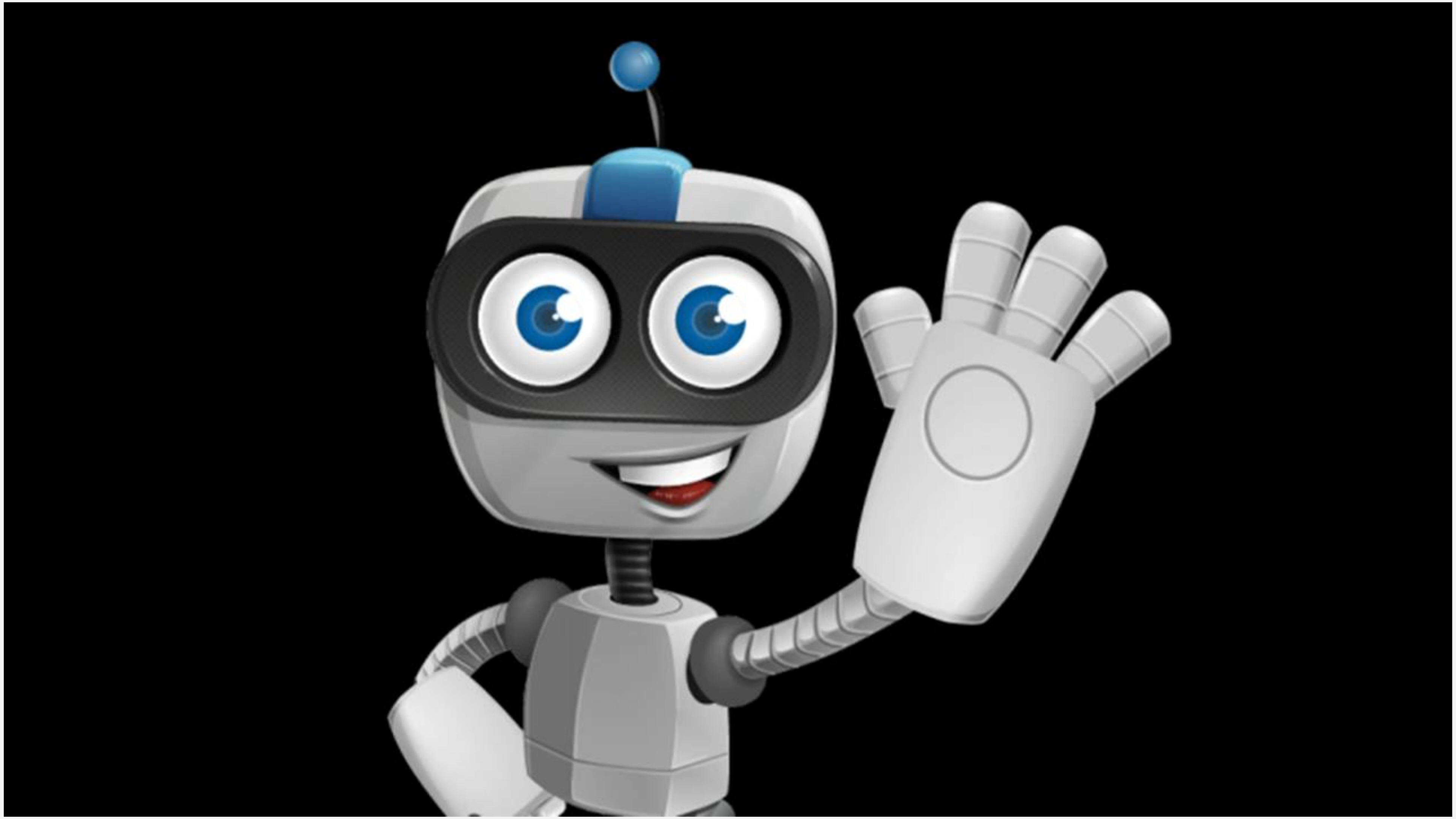
La calidad de la información será crítica para procesos donde se involucren decisiones complejas, tales cual:

Taha, H. A. (2004). Capítulo 14: Análisis de decisiones y juegos. En H. A. Taha, *Investigación de operaciones* (págs. 503-545). Naucalpan, México: Pearson Educación.

https://www.youtube.com/watch?v=SxxhO9aOXq0

Criterios de Decisión bajo Incertidumbre

- En este caso el decisor conoce los posibles estados de la naturaleza
- Pero no conoce las probabilidades asociadas con su ocurrencia
- En este caso la decisión tiene un factor subjetivo ya que no conoce de manera objetiva las probabilidades



https://www.youtube.com/watch?v=b7wiPokiU84

Criterio Maximax (optimista)

- Calcular el máximo pago o resultado para cada alternativa
- Escoger la alternativa con el máximo de todos
- $A^* \rightarrow \max\{\max(r_{i,j})\}$

Criterio Maximin (conservador)

- Calcular el mínimo de todos los pagos o resultados de cada alternativa
- Escoger el máximo de ellos
- $A^* \rightarrow \max\{\min(r_{i,j})\}$

Criterio Minimax (conservador)

- Calcular el máximo de todos los pagos o resultados de cada alternativa
- Escoger el mínimo de ellos
- $A^* \rightarrow \min\{\max(r_{i,j})\}$

Criterio Minimin (pesimista)

- Calcular el peor de todos los pagos o resultados de cada alternativa
- Escoger el peor de ellos
- $A^* \rightarrow \min\{\min(r_{i,j})\}$

Criterio: Mínimo costo de Oportunidad

- Sea $C(A_{i,j}^{*})$ el máximo de los costos asociados para cada alternativa **i** bajo cada estado de la naturaleza **j**
- Sea $C(A_{i,j}^{*}) - r_{i,j}\ \forall\ j$, el costo de oportunidad correspondiente para cada alternativa **i** bajo cada estado de la naturaleza **j**
- Sea $E(C(A_{i}^{*}) - r_{j})\ \forall\ j$ el valor esperado de cada costo de oportunidad j
- Calcular el valor esperado del costo de oportunidad de cada alternativa
- Seleccionar el mínimo de ellos: $\text{Min}\{E(C(A_i)-r_j)\ \forall\ j\}$

Decisiones en ambiente de riesgo

- Son aquellos modelos heurísticos donde las diferentes **alternativas** de acción se conocen, así como los **estados de la naturaleza** o **resultados** de las mismas y las **probabilidades** de que cada una de estos resultados sea obtenido

Criterio de Hurwicz

- Se trata de un criterio intermedio entre el criterio de Wald o maximin y el criterio maximax.
- Dado que muy pocas personas son tan extremadamente pesimistas u optimistas como sugieren dichos criterios, Hurwicz (1951) considera que el decisor debe ordenar las alternativas de acuerdo con una media ponderada de los niveles de seguridad y optimismo tal que el valor esperado para una alternativa i será $\alpha \mathrm{Min}_i + (1- \alpha)\mathrm{Max}_i$
- Valores de α próximos a cero corresponden a una persona optimista, donde si α=0, se tiene el criterio maximax.
- Valores de α próximos a uno corresponden a una persona pesimista, donde para α=1, se tiene el criterio maximin

$$\text{Elegir la alternativa } a_k \text{ tal que } \mathrm{T}(\mathrm{a}_\mathrm{k}) = \alpha \mathrm{s}_\mathrm{k} + (1-\alpha) o_k = \max_{1 \le i \le m} \{\alpha \mathrm{s}_\mathrm{i} + (1-\alpha) o_i\}$$

Criterio de Laplace

- El **criterio de Laplace** parte del hecho de que no se conocen las probabilidades de ocurrencia de cada uno de los estados de la naturaleza, propone que las probabilidades sean las mismas para cada estado.
- El valor esperado es entonces el promedio simple de cada alternativa y se seleccionará el mejor de los valores esperados.

Valor esperado de una decisión

- Definiendo el valor esperado de las diferentes alternativas como $E(N_i)$, donde N_i es el resultado de la alternativa **i**, se tiene que:

$$E(A_i) = \sum_{j=1}^{n} r_{i,j}\, p(r_j) \qquad \mathrm{i} = \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2; \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{k}$$

- Se escoge la alternativa tal que:
  - Max $E(N_i)$ para el caso favorable
  - Min $E(N_i)$ para el caso desfavorable

https://www.youtube.com/watch?v=12RF_SZ5S0g

Valor esperado de la información perfecta

- **Resultado esperado con información perfecta (REIP)**: es la cantidad que el decisor espera ganar si supiera con certeza qué estado de la naturaleza va a presentarse
- **Resultado esperado en riesgo (RER)**: es la cantidad que se espera ganar si no se tiene información adicional. Es el resultado óptimo sin información adicional.
- **Valor esperado de información perfecta (VIP)**: es el valor que la información perfecta tiene para el decisor porque supone la la mejora en los resultados esperados que obtendría con dicha información

Valor esperado de la información perfecta

- **Resultado esperado con información perfecta (REIP)**:
  - REIP = $E(r^*_j)$, donde r^*_j= mejor($r_{i,j}$) $\forall$ i, j
- **Resultado esperado en riesgo (RER)**:
  - RER = $E(A^*)$, esto es, el mejor valor esperado $E(A_j)$
- **Valor esperado de información perfecta (VIP)**:
  - VIP = REIP - RER

Ejemplo:

- Se juega una rifa con números del 00 a 99.
- Cada boleto cuesta 100 y puedes ganarte 5,000.
- ¿Vale la pena comprar la rifa?
- ¿Cuánto pagaría para información sobre el posible resultado de la rifa?

Ejemplo I

- La siguiente tabla muestra los estados de la naturaleza, alternativas y utilidad de tres alternativas de negocios.

	E1	E2	E3
	0.3	0.5	0.2
A1	8	2	0
A2	10	1	-5
A3	10	4	-4

Tabla Excel

	E_1	E_2	E_3	Valor Esperado
	0.3	0.5	0.2	E(A)
A_1	8	2	0	3.4
A_2	10	1	-5	2.5
A_3	10	4	-4	4.2*
REIP	10	4	0	5

Valor de Información Perfecta = REIP - RER

= 5 – 4.2 = 0.8

Efecto de la varianza

- La desventaja del valor medio es que no toma en cuenta la variabilidad
- Suponga que $A_i \rightarrow (\mu, \sigma^2)$
- Recordando que la varianza se estima como:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} r_{i,j}^2 - \mu_i^2$$

- Se escogerá la decisión donde $\sigma^2 \leq M$ ($\sqrt{\sigma^2} = N$) y además cumpla con los criterios favorables o desfavorables, según sea el caso.

Ejemplo

Ganga S. A., es una empresa que se dedica a la comercialización de bienes destinados a tiendas "¡TODO A BALBOA!". Esa empresa quiere ampliar su negocio entrando a nuevos mercados. Pos este motivo, realiza un estudio sobre la demanda de su productos en cuatro zonas distintas, I, II, III y IV, estimando una demanda (en miles de unidades) en cada zona de 11, 12, 15.5 y 17 respectivamente.

Para poder abastecer el nuevo mercado debe contar con un nuevo almacén; actualmente se alquilan tres, que tienen, cada uno, una capacidad (en miles de unidades) de 11, 15 y 17. La estructura de costos (en miles de balboas) para cada posible situación se muestra en la siguiente tabla:

Almacén/ Mercado	11,000	15,000	17,000
I	10	15	20
II	10	17.5	15
III	15	16	19
IV	30	35	18

Si la probabilidad de alquilar el primer almacén es de 30%, de conseguir el segundo es 40% y el tercero es 30%

-¿Cuál será la mejor decisión si se quiere reducir costos?

-¿Cuál será la decisión si no se aceptan varianzas de más de B/. 8 mil?

Análisis con la varianza

Almacén/ Mercado	11,000	15,000	17,000	Valor Esperado	Varianza
	0.3	0.4	0.3		
I	10	15	20	15.00	15.00
II	10	17.5	15	14.50	9.75
III	15	16	19	16.60	2.64
IV	30	35	18	28.40	50.64

Ejemplo: La Ampliación del Canal

Escenarios Macroeconómicos					
Escenario	Panorama Internacional	Ambiente de Políticas Públicas	Integración Hemisférica	Tendencias de Actividades del Conglomerado	Probabilidad
Optimista	Crecimiento dinámico en las actividades comerciales y marítimas	Productividad óptima, competitividad, mejoras	TLC rápido con EUA, América Central, Andes, ALCA	Sobre el promedio	15%
Más Probable	Tendencias promedio	Tendencias y situación presentes, mejoras lentas	Proceso largo, gradual	Tendencias promedio	60%
Pesimista	Por debajo de las tendencias promedio, complicaciones internacionales	Políticas ineficientes, ambiente de costos más altos	Demorado, bajas inversiones y crecimiento lento	Por debajo de las tendencias promedio	25%

Tomado de los estudios macroeconómicos para la ampliación desarrollados por DRI•WEFA, 2002

Ejemplo: La Ampliación del Canal

	Escenarios de canal no ampliado		
	Pesimista	Más probable	Optimista
	0.25	0.60	0.15
Demanda del Canal (Millones Ton CPSUAB, 2025)	237	296	330
Necesidad de agua (esclusajes diarios) del canal	29	32	35
Ingresos estimados (millones de USD)	2,800	3,520	3,900
Costo estimado de modernización a máxima capacidad (millones USD)	1,690	1,690	1,690

ACP, Propuesta de ampliación y otros estudios financieros

Ejemplo: La Ampliación del Canal

	Escenarios canal ampliado		
	Pesimista	Más probable	Optimista
	0.25	0.60	0.15
Demanda del Canal (Millones Ton CPSUAB, 2025)	428	508	660
Necesidad de agua (esclusajes diarios)	32	40	46
Ingresos estimados (millones de U$D)	5,436	9,700	12,920
Costo estimado de la ampliación	5,800	5,250	4,200

ACP, Propuesta de ampliación y otros estudios financieros

Árboles de decisión

Árboles de decisión

- Están dentro del área de técnicas bayesianas
- Pueden usarse para desarrollar una estrategia óptima cuando el tomador de decisiones se enfrenta con:
  - Una serie de alternativas de decisión
  - Incertidumbre o eventos futuros con riesgo que pueden ser diferentes para cada alternativa
  - Una serie de decisiones consecutivas

Árboles de decisión: Componentes y estructura

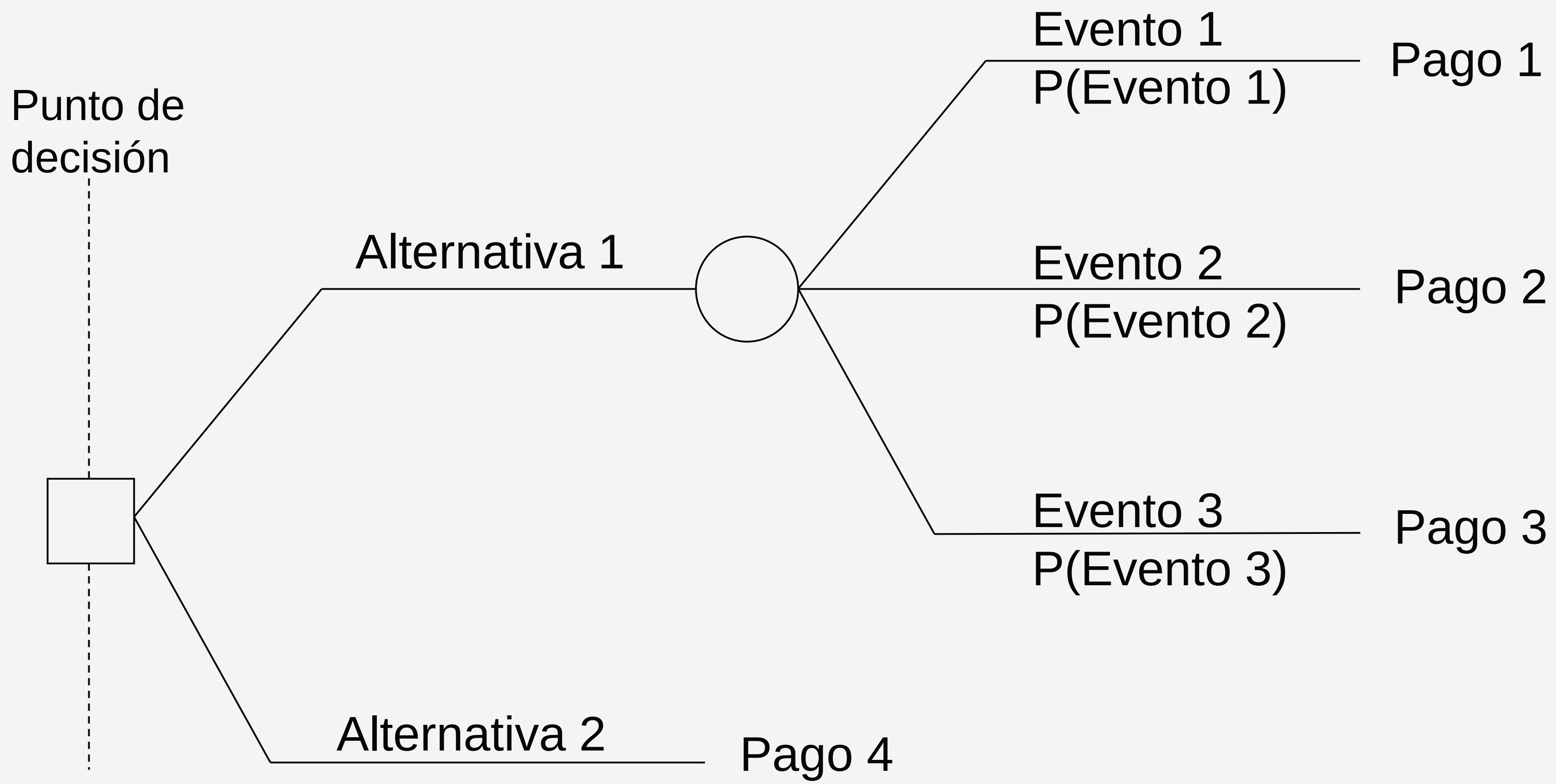
- ***Alternativas de decisión*** en cada punto de decisión
- ***Estados de la naturaleza o Eventos*** que pueden ocurrir como resultado de cada alternativa de decisión.
- ***Probabilidades*** de que ocurran los eventos posibles
- ***Resultados*** de las posibles interacciones entre las alternativas de decisión y los eventos. También se les conoce con el nombre de ***Pagos***

Árboles de decisión: Componentes y estructura

Los árboles de decisión poseen:

- Ramas: se representan con líneas
- Nodos de decisión: de ellos salen las ramas de decisión y se representan con □
- Nodos de incertidumbre: de ellos salen las ramas de los eventos y se representan con ○

Árboles de decisión: Componentes y estructura: ejemplo



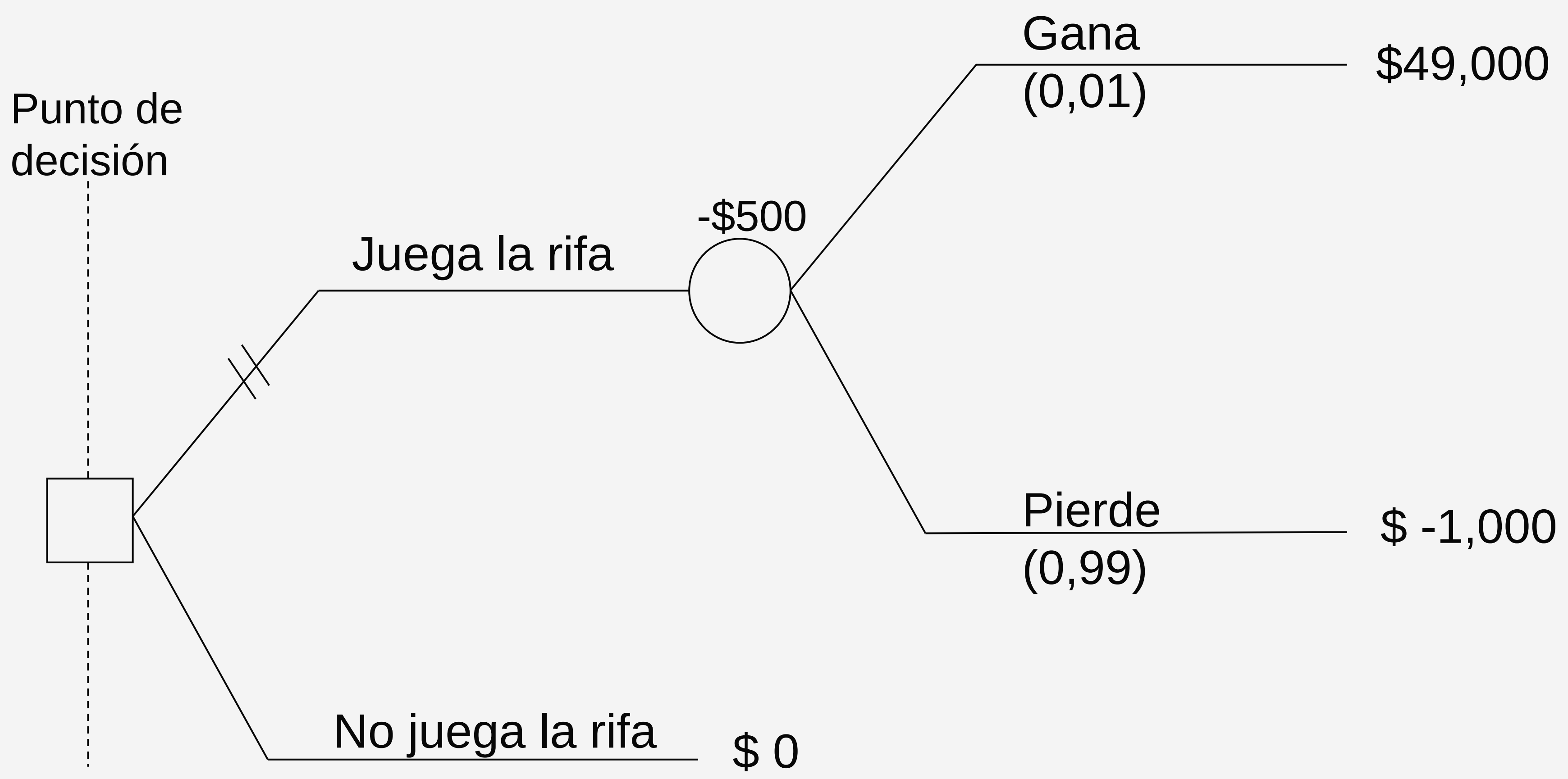
Árboles de decisión: Análisis: criterio del Valor Monetario Esperado

- Generalmente se inicia de derecha a izquierda, calculando cada pago al final de las ramas
- Luego en cada nodo de evento se calcula un valor esperado
- Después en cada punto de decisión se selecciona la alternativa con el valor esperado óptimo

Ejemplo de la rifa:

- Suponga que usted compra en $1,000 un número (de 00 a 99) de una rifa , la cual paga un premio de $50.000.
- Hay dos eventos posibles:
  - Usted gana la rifa, o
  - Pierde
- ¿Cuál es el valor esperado del juego?

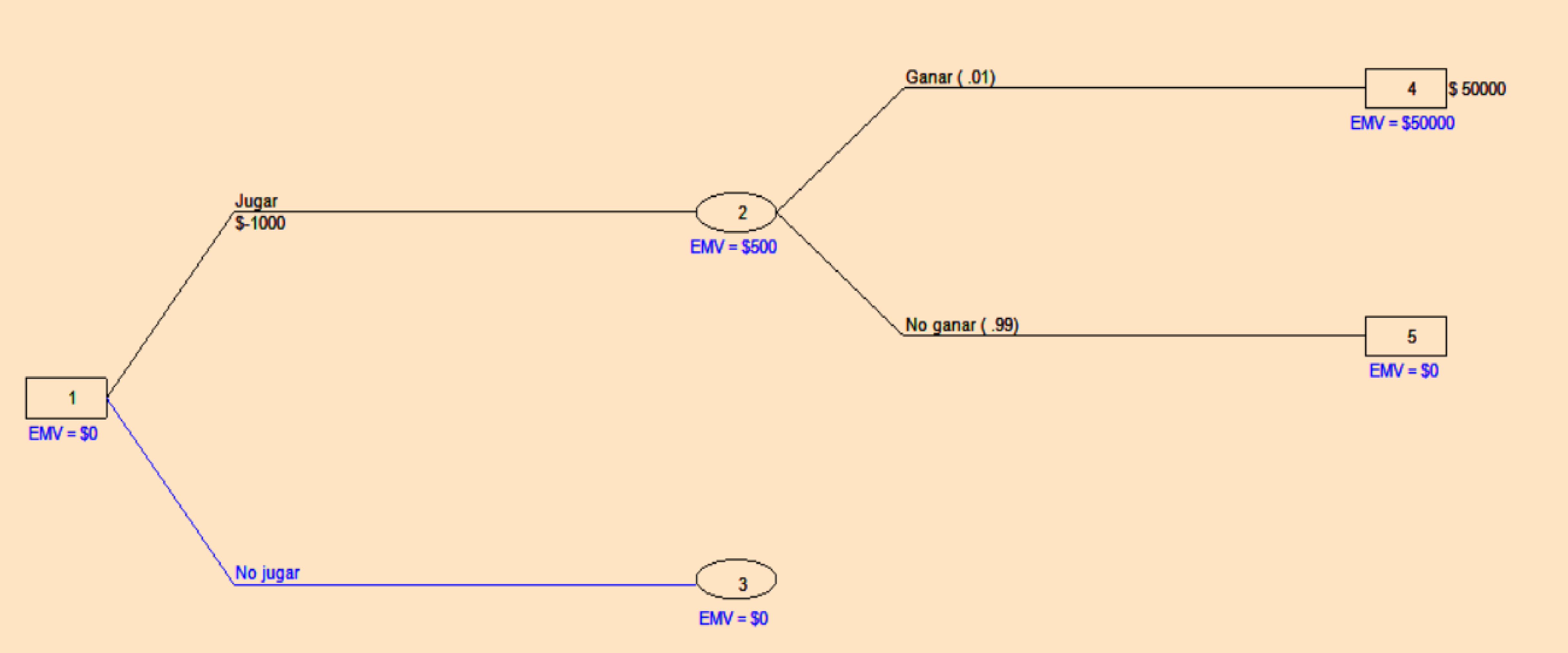
Árboles de decisión: Análisis: ejemplo de la rifa



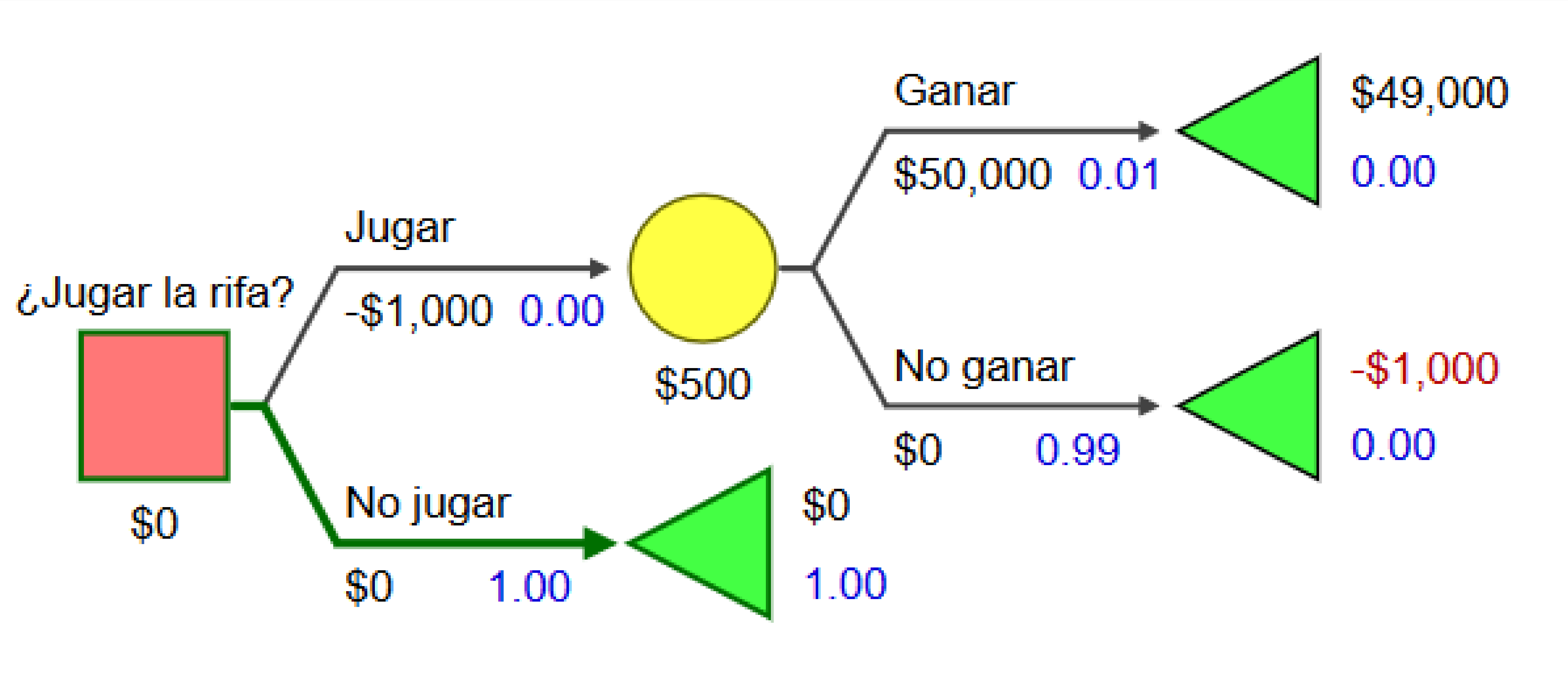
Árboles de decisión: Análisis: ejemplo de la rifa

- En el nodo de evento se calculó el valor esperado de jugar la rifa
- Luego se selecciona, en este caso el valor más alto (por ser ganancias)
- La decisión desechada se marca con \\
- En este caso la decisión es no jugar la rifa

Solución en QM



Solución en Silverdecisions

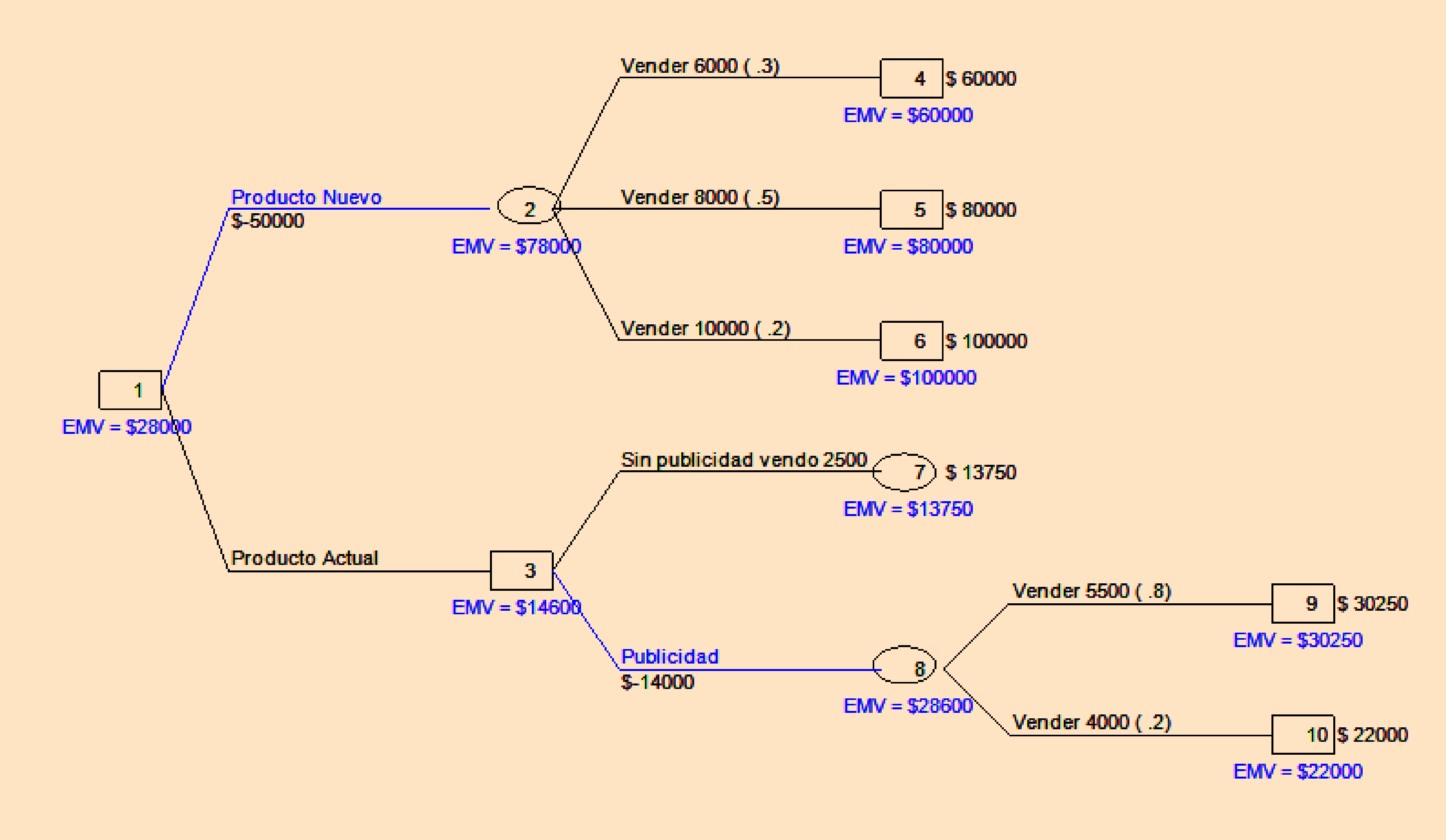


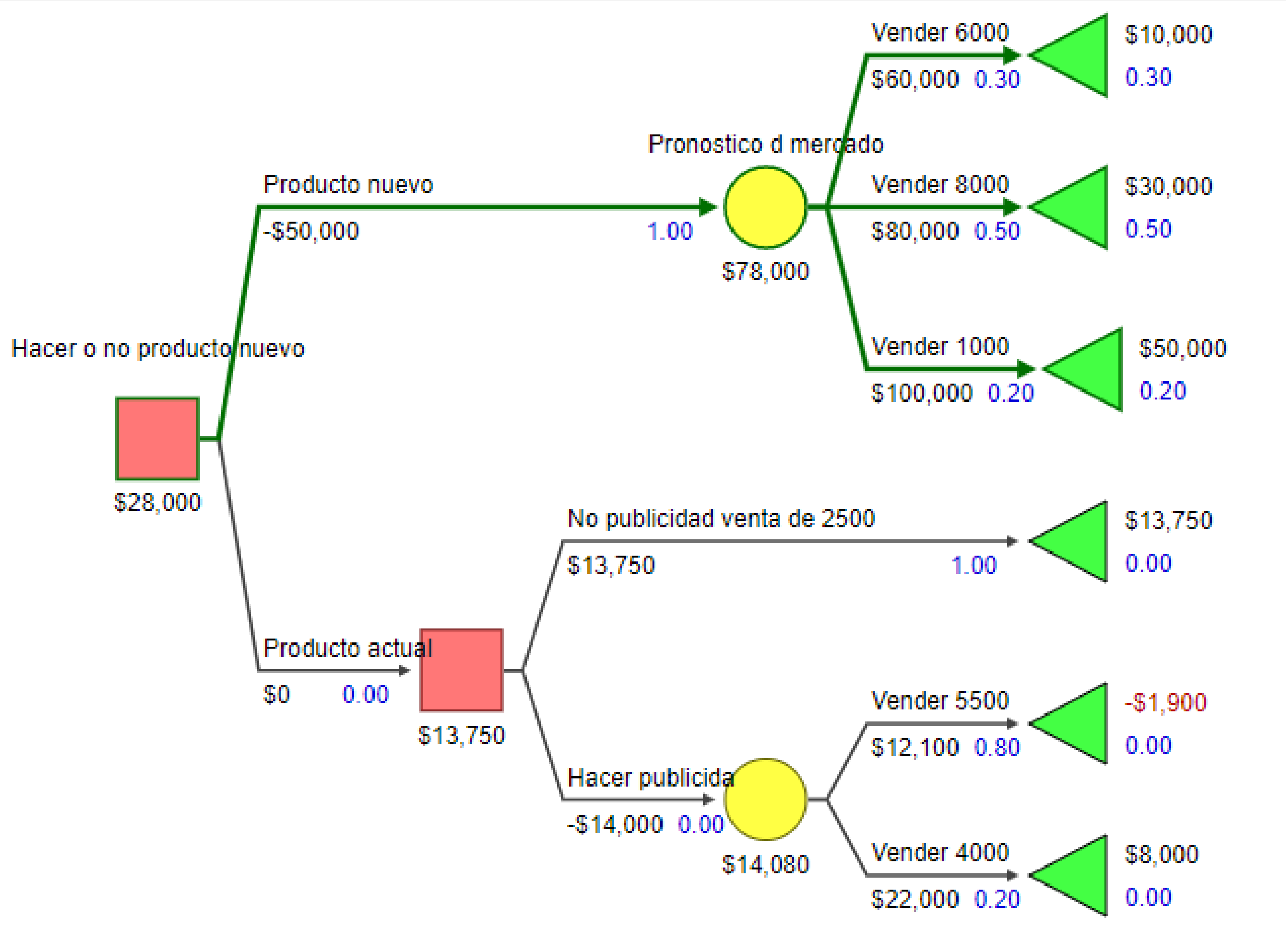
- Un fabricante está considerando la producción de un nuevo producto. La utilidad incremental es de $10 por unidad y la inversión necesaria en equipo es de $50.000
- El estimado de la demanda es como sigue:

Unidades	Probabilidad
6000	0.30
8000	0.50
10000	0.20

- Tiene la opción de seguir con el producto actual que tendría una utilidad incremental de $5.5. De hacerlo y si no hace publicidad, tendría ventas de 2.500 unidades, pero con la opción de que si destina $14.000 en publicidad podría, con una probabilidad de 80% conseguir ventas de 5.500 unidades y de un 20% de que éstas sean de 4.000 unidades

- Construya el árbol de decisión y determine la decisión óptima


Producto Nuevo
$-50000
Vender 6000 (.3)
Vender 8000 (.5)
Vender 10000 (.2)
$ 60000
EMV = $60000
$ 80000
EMV = $80000
$ 100000
EMV = $100000
EMV = $78000
EMV = $28000
Producto Actual
EMV = $14600
Sin publicidad vendo 2500
$ 13750
EMV = $13750
Publicidad
$-14000
EMV = $28600
Vender 5500 (.8)
$ 30250
EMV = $30250
Vender 4000 (.2)
$ 22000
EMV = $22000

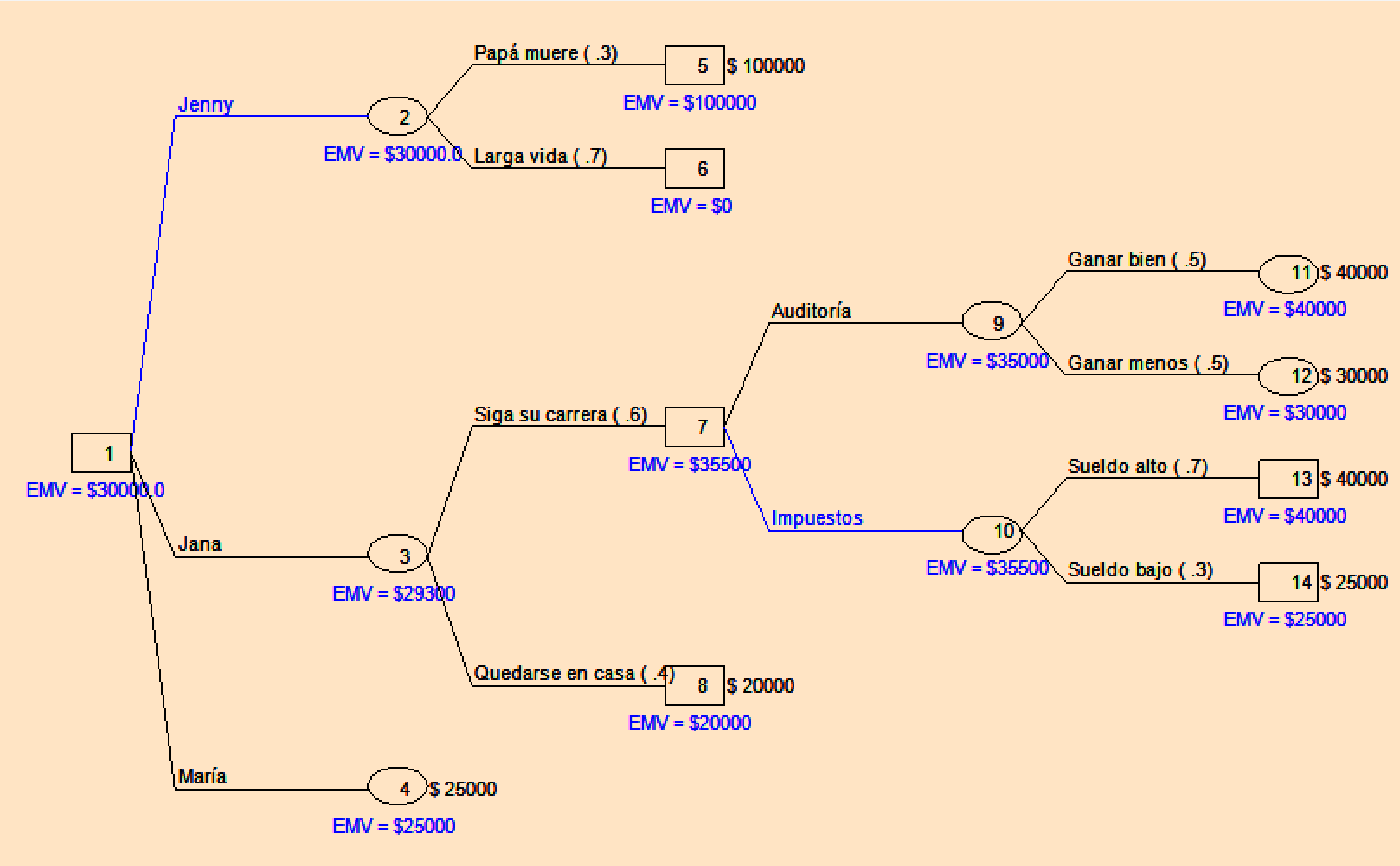

Hacer o no producto nuevo
$28,000
Producto nuevo
-$50,000
1.00
Pronostico d mercado
$78,000
Vender 6000
$60,000 0.30
$10,000
0.30
Vender 8000
$80,000 0.50
$30,000
0.50
Vender 1000
$100,000 0.20
$50,000
0.20
Producto actual
$0 0.00
$13,750
No publicidad venta de 2500
$13,750
1.00
$13,750
0.00
Hacer publicida
-$14,000 0.00
$14,080
Vender 5500
$12,100 0.80
-$1,900
0.00
Vender 4000
$22,000 0.20
$8,000
0.00

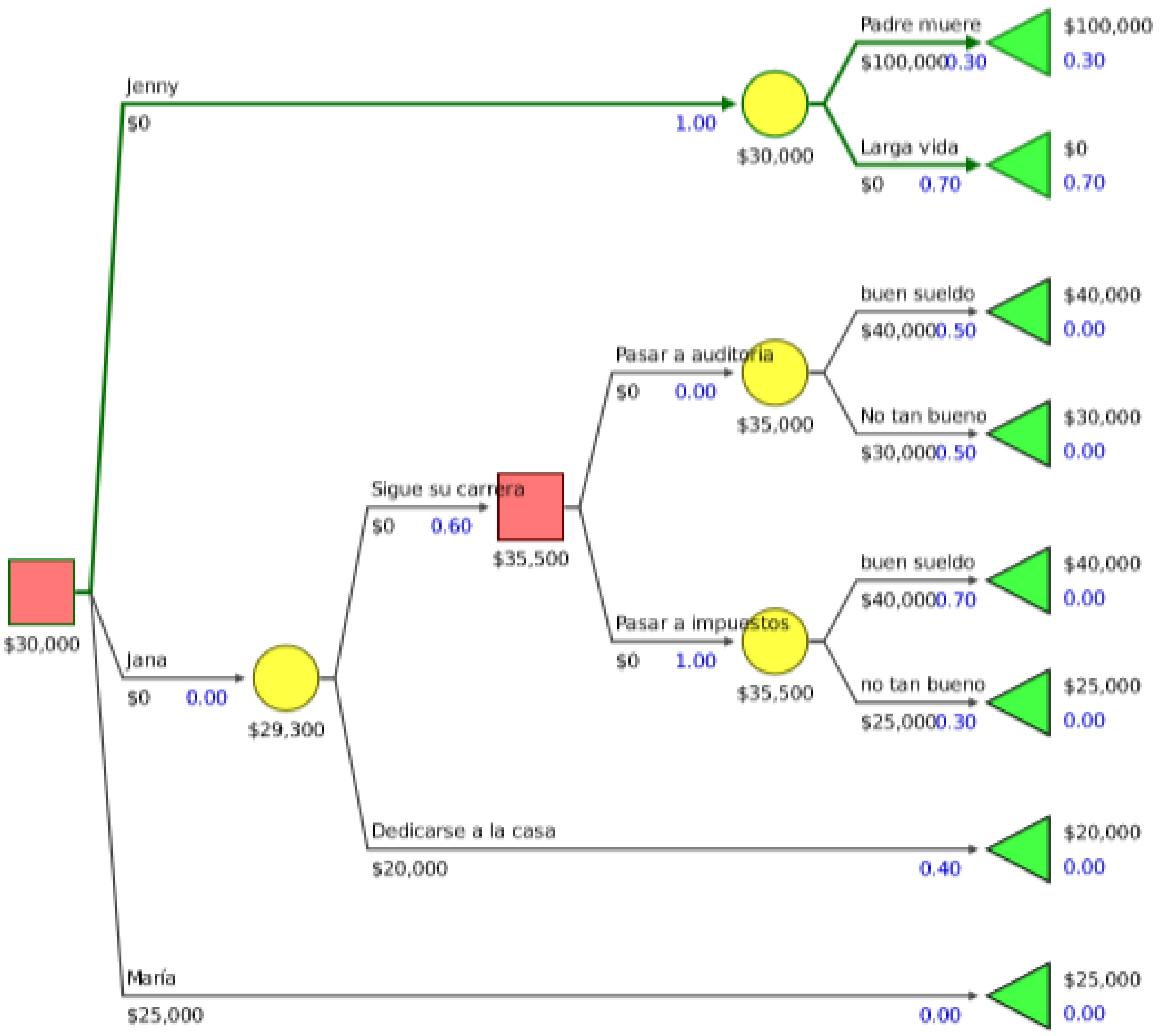
La decisión de Larry

- Durante la última semana Larry ha recibido 3 propuestas matrimoniales de 3 mujeres distintas y debe escoger una. Ha determinado que sus atributos físicos y emocionales son más o menos los mismos, y entonces elegirá según sus recursos financieros
- La primera se llama Jenny. Tiene un padre rico que sufre de artritis crónica. Larry calcula una probabilidad de 0.3 de que muera pronto y les herede $100.000. Si el padre tiene una larga vida no recibirá nada de él
- La segunda pretendiente se llama Jana, que es contadora en una compañía.
- Larry estima una probabilidad de 0.6 de que Jana siga su carrera y una probabilidad de 0.4 de que la deje y se dedique a los hijos. Si se dedica a los hijos podría tener un trabajo de tiempo parcial por $20.000
- Si continúa con su trabajo puede decidir entre,
    - pasar a auditoría, donde hay una probabilidad de 0.5 de ganar $40.000 y de 0.5 de ganar $30.000, o bien
    - pasar al departamento de impuestos donde ganaría $40.000 con probabilidad de 0.7 o $25.000 (0.3).
- La tercer pretendiente es María, la cual sólo puede ofrecer a Larry su dote de $25.000.
- ¿Con quién debe casarse Larry? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el riesgo involucrado en la secuencia óptima de decisiones?

Tomado de:

Gallagher. Watson. METODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN ADMINISTRACIÓN. McGraw Hill, México, 1982

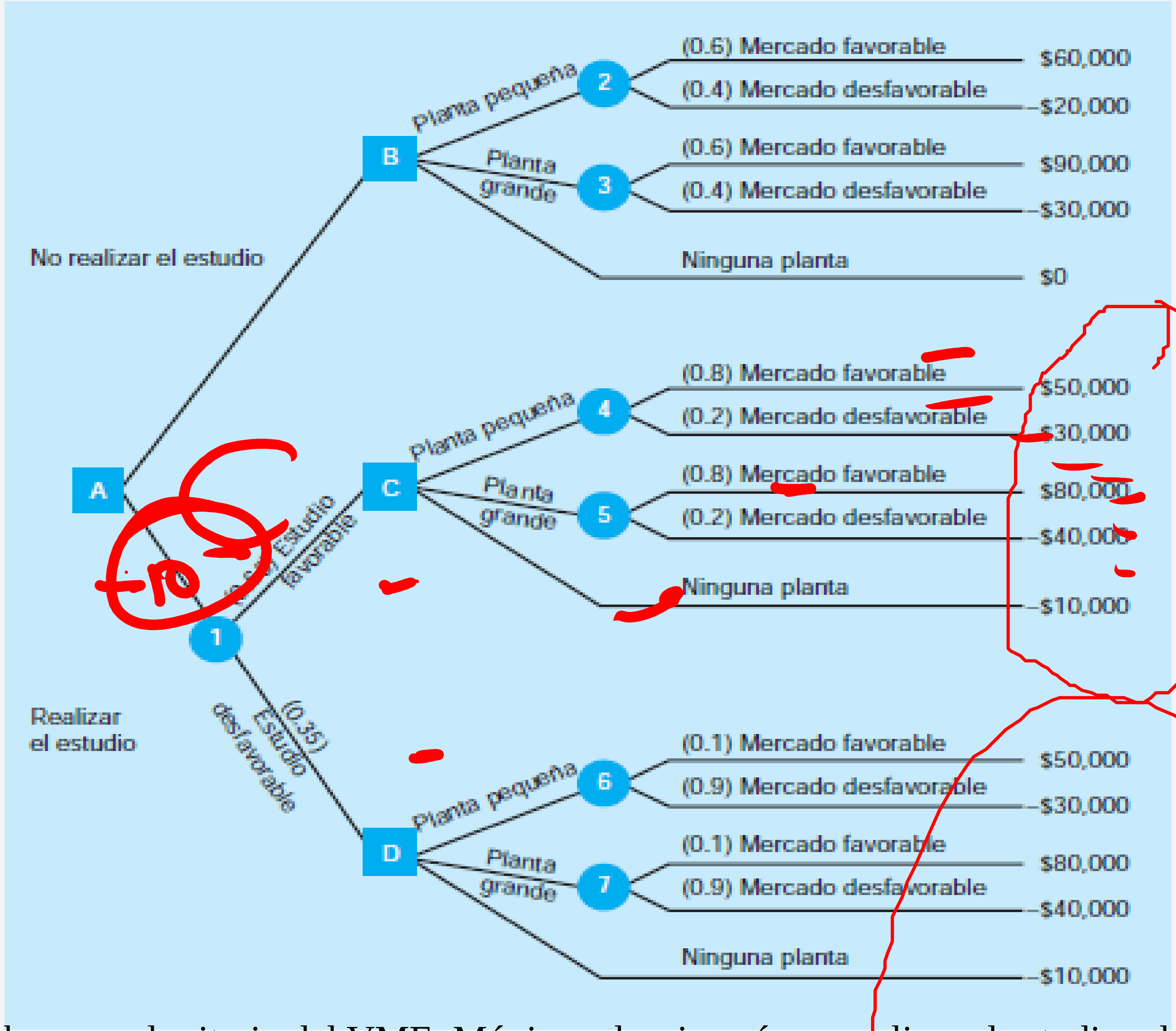

Jenny
2
EMV = $30000.0
Papá muere (.3)
5
$ 100000
EMV = $100000
Larga vida (.7)
6
EMV = $0
1
EMV = $30000.0
Jana
3
EMV = $29300
Siga su carrera (.6)
7
EMV = $35500
Auditoría
9
EMV = $35000
Ganar bien (.5)
11
$ 40000
EMV = $40000
Ganar menos (.5)
12
$ 30000
EMV = $30000
Impuestos
10
EMV = $35500
Sueldo alto (.7)
13
$ 40000
EMV = $40000
Sueldo bajo (.3)
14
$ 25000
EMV = $25000
Quedarse en casa (.4)
8
$ 20000
EMV = $20000
María
4
$ 25000
EMV = $25000



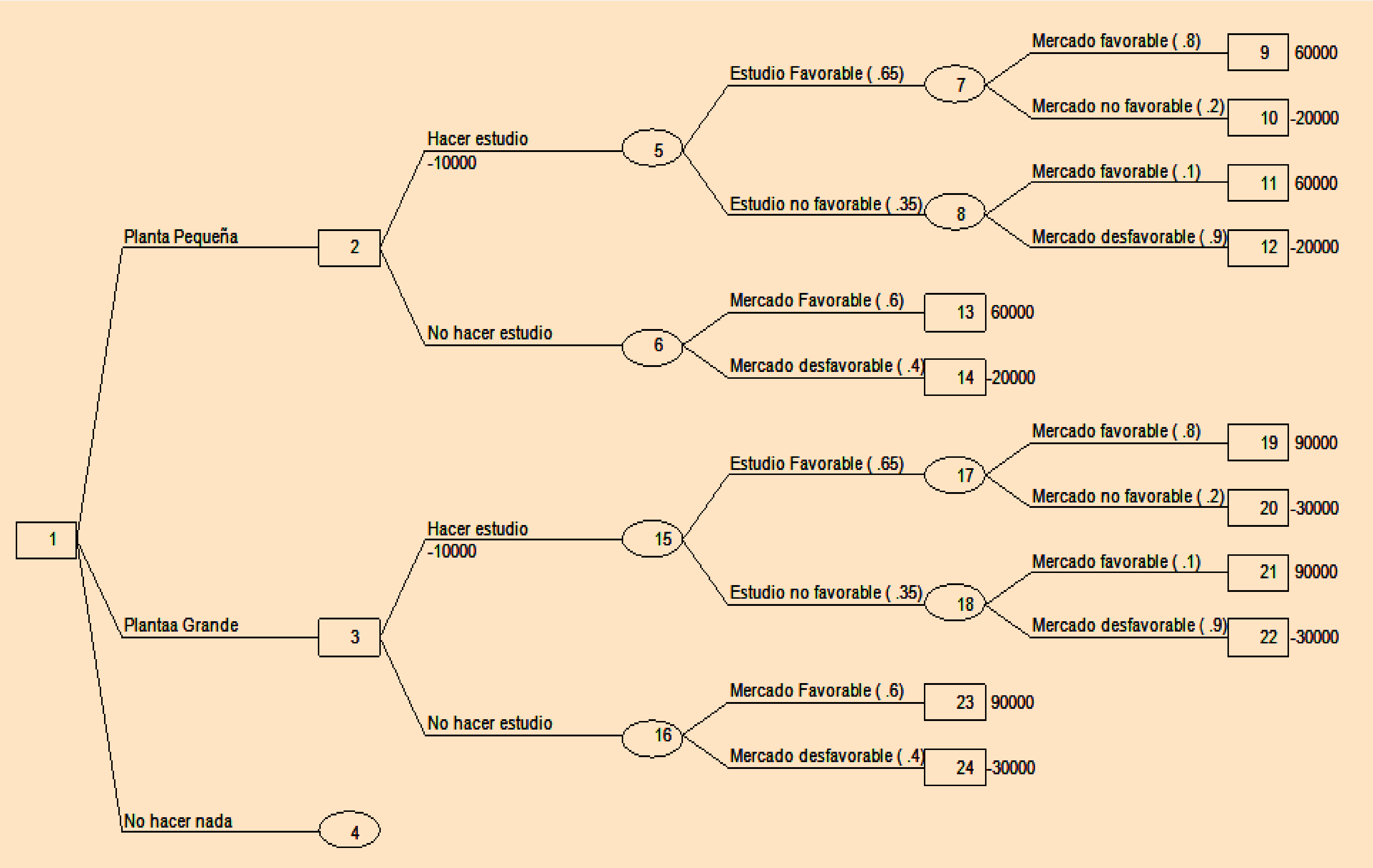
Jenny
$0
1.00
$30,000
Padre muere
$100,000
0.30
$100,000
0.30
Larga vida
$0
0.70
$0
0.70
Jana
$0
0.00
$29,300
Sigue su carrera
$0
0.60
$35,500
Pasar a auditoria
$0
0.00
$35,000
buen sueldo
$40,000
0.50
$40,000
0.00
No tan bueno
$30,000
0.50
$30,000
0.00
Pasar a impuestos
$0
1.00
$35,500
buen sueldo
$40,000
0.70
$40,000
0.00
no tan bueno
$25,000
0.30
$25,000
0.00
Dedicarse a la casa
$20,000
0.40
$20,000
0.00
María
$25,000
0.00
$25,000
0.00
$30,000

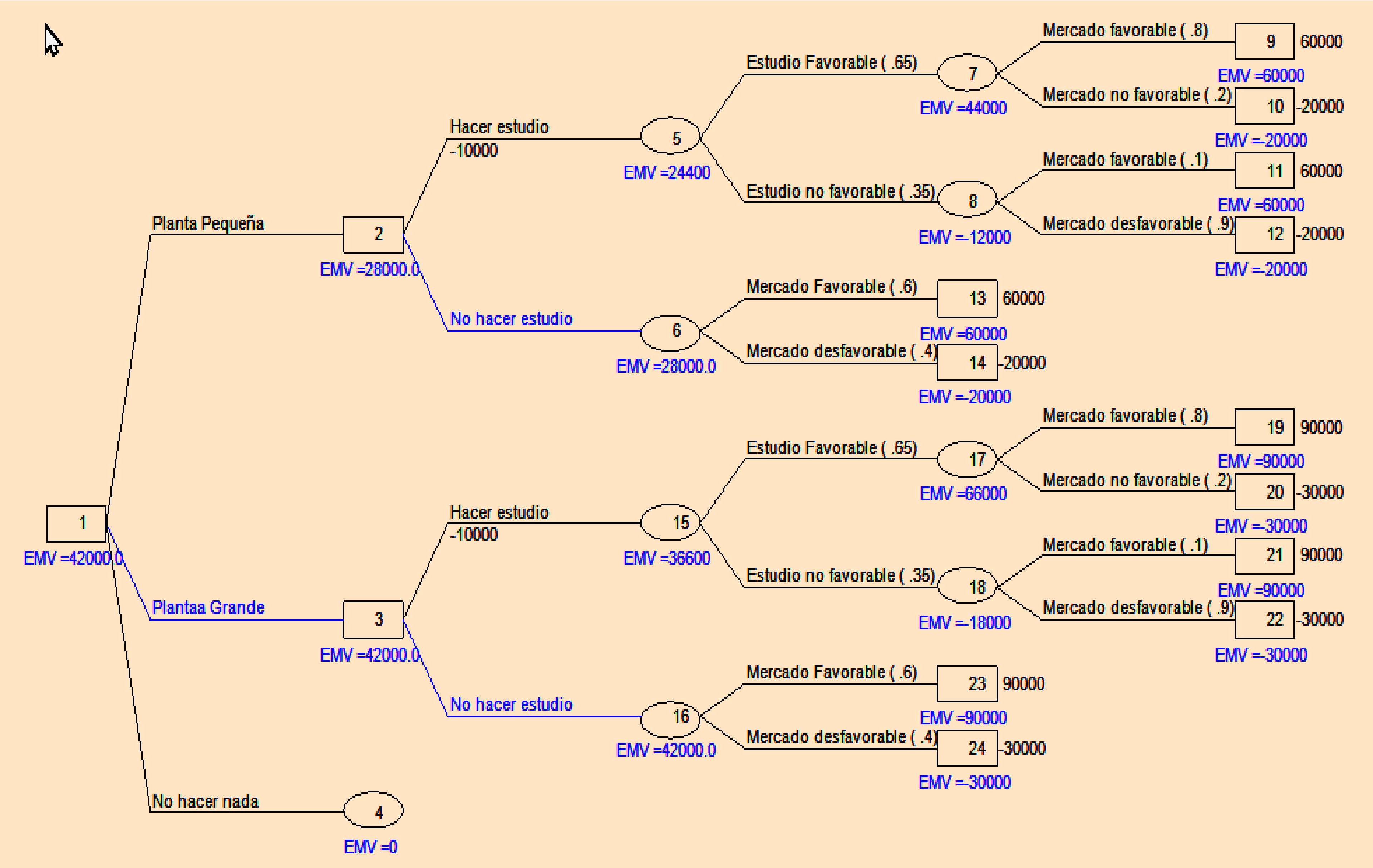
Mónica Britt ha disfrutado la navegación en barcos pequeños desde que tenía 7 años, cuando su madre comenzó a navegar con ella. En la actualidad Mónica considera la posibilidad de comenzar una compañía para fabricar veleros pequeños para el mercado recreacional. A diferencia de la producción de veleros en masa, estos veleros se harían específicamente para niños de entre 10 y 15 años. Los botes serán de la más alta calidad y extremadamente estables, y el tamaño de las velas se reducirá para evitar que se volteen.

Su decisión básica es si construir una planta de manufactura grande, una pequeña o no construir ninguna. Con un mercado favorable, Mónica puede esperar un ingreso de $90,000 con la planta grande, o bien, $60,000 con la planta más pequeña. Sin embargo, si el mercado es desfavorable, Mónica estima que perdería $30,000 con una planta grande y tan solo $20,000 con una planta pequeña. Debido a los gastos para desarrollar los moldes iniciales y adquirir el equipo necesario para producir veleros de fibra de vidrio para niños, Mónica ha decidido realizar un estudio piloto para asegurase de que el mercado de veleros será adecuado. Estima que el estudio piloto le costará $10,000. Asimismo, el estudio puede ser favorable o desfavorable. Mónica estima que la probabilidad de un mercado favorable dado que el estudio piloto fue favorable es de 0.8. La probabilidad de un mercado desfavorable dado que el estudio fue desfavorable se estima en 0.9. Mónica piensa que hay una posibilidad de 0.65 de que el estudio piloto sea favorable. Desde luego, Mónica puede saltarse el estudio piloto y simplemente tomar la decisión de construir una planta grande, una pequeña o ninguna. Sin hacer pruebas con un estudio piloto, estima que la probabilidad de un mercado favorable es de 0.6. ¿Qué le recomendaría? Calcule el VEIM.



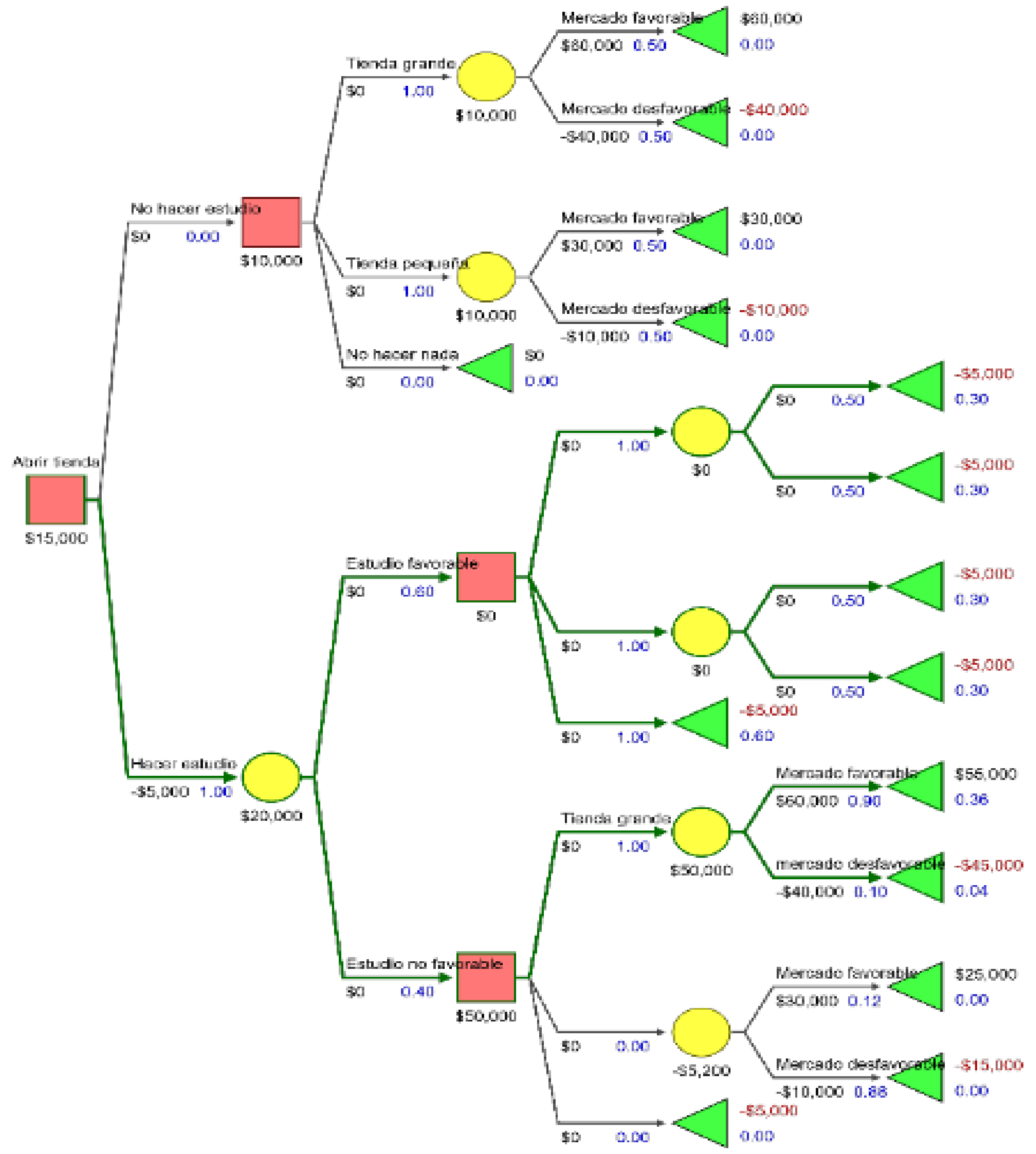
Con base en el criterio del VME, Mónica seleccionaría no realizar el estudio y luego elegiría la planta grande. El VME de esta decisión es de $42,000.


1
Planta Pequeña
2
Hacer estudio
-10000
5
Estudio Favorable (.65)
7
Mercado favorable (.8)
9
60000
Mercado no favorable (.2)
10
-20000
Estudio no favorable (.35)
8
Mercado favorable (.1)
11
60000
Mercado desfavorable (.9)
12
-20000
No hacer estudio
6
Mercado Favorable (.6)
13
60000
Mercado desfavorable (.4)
14
-20000
Plantaa Grande
3
Hacer estudio
-10000
15
Estudio Favorable (.65)
17
Mercado favorable (.8)
19
90000
Mercado no favorable (.2)
20
-30000
Estudio no favorable (.35)
18
Mercado favorable (.1)
21
90000
Mercado desfavorable (.9)
22
-30000
No hacer estudio
16
Mercado Favorable (.6)
23
90000
Mercado desfavorable (.4)
24
-30000
No hacer nada
4



Planta Pequeña
2
EMV =28000.0
Hacer estudio
-10000
5
EMV =24400
Estudio Favorable (.65)
7
EMV =44000
Mercado favorable (.8)
9
60000
EMV =60000
Mercado no favorable (.2)
10
-20000
EMV =-20000
Estudio no favorable (.35)
8
EMV =-12000
Mercado favorable (.1)
11
60000
EMV =60000
Mercado desfavorable (.9)
12
-20000
EMV =-20000
No hacer estudio
6
EMV =28000.0
Mercado Favorable (.6)
13
60000
EMV =60000
Mercado desfavorable (.4)
14
-20000
EMV =-20000
1
EMV =42000.0
Plantaa Grande
3
EMV =42000.0
Hacer estudio
-10000
15
EMV =36600
Estudio Favorable (.65)
17
EMV =66000
Mercado favorable (.8)
19
90000
EMV =90000
Mercado no favorable (.2)
20
-30000
EMV =-30000
Estudio no favorable (.35)
18
EMV =-18000
Mercado favorable (.1)
21
90000
EMV =90000
Mercado desfavorable (.9)
22
-30000
EMV =-30000
No hacer estudio
16
EMV =42000.0
Mercado Favorable (.6)
23
90000
EMV =90000
Mercado desfavorable (.4)
24
-30000
EMV =-30000
No hacer nada
4
EMV =0

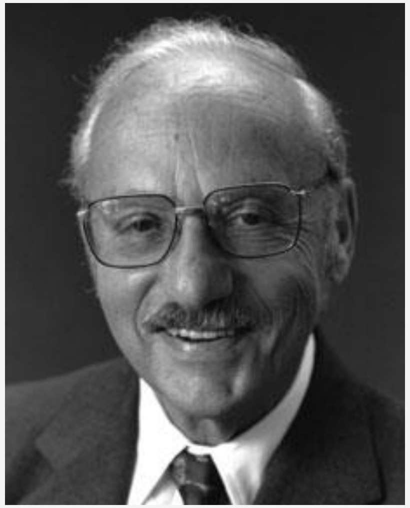
- Jerry Smith está pensando abrir una tienda de bicicletas en su ciudad natal. A Jerry le encanta llevar su bicicleta en viajes de 50 millas con sus amigos, pero cree que cualquier negocio pequeño debería iniciarse tan solo si hay una buena posibilidad de ganar dinero. Jerry puede abrir una tienda pequeña, una tienda grande o no abrir una tienda. Las ganancias dependerían del tamaño de la tienda, y de si el mercado es favorable o desfavorable para sus productos. Como hay un local para rentar por 5 años en un edificio que Jerry está pensando usar, quiere asegurase de tomar la decisión correcta. Jerry también piensa contratar a su antiguo profesor de marketing para realizar un estudio de mercado. Si el estudio se realiza podría ser favorable (es decir, predecir un mercado favorable) o desfavorable (predecir un mercado desfavorable). Desarrolle un árbol de decisiones para Jerry.
- Jerry Smith hizo un análisis de la rentabilidad de la tienda de bicicletas. Si Jerry abre una tienda grande, ganará $60,000 si el mercado es favorable, pero perderá $40,000 si es desfavorable. La tienda pequeña le hará ganar $30,000 en un mercado favorable y perder $10,000 en un mercado desfavorable. Actualmente, él cree que hay una posibilidad de 50-50 de que el mercado sea favorable. Su antiguo profesor de marketing le cobrará $5,000 por el estudio de mercado. Se estima que hay una probabilidad de 0.6 de que el estudio de mercado sea favorable y una probabilidad de 0.9 de que el mercado sea favorable dado un resultado favorable para el estudio. Sin embargo, el profesor advirtió a Jerry que tan solo hay una probabilidad de 0.12 de un mercado favorable, si los resultados del estudio no son favorables. Jerry está confundido.


Abrir tienda
$15,000
No hacer estudio
$0 0.00
$10,000
Tienda grande
$0 1.00
$10,000
Mercado favorable
$80,000 0.50
$80,000
0.00
Mercado desfavorable
-$40,000 0.50
-$40,000
0.00
Tienda pequeña
$0 1.00
$10,000
Mercado favorable
$30,000 0.50
$30,000
0.00
Mercado desfavorable
-$10,000 0.50
-$10,000
0.00
No hacer nada
$0 0.00
$0
0.00
Hacer estudio
-$5,000 1.00
$20,000
Estudio favorable
$0 0.60
$0
$0 1.00
$0
$0 0.50
-$5,000
0.30
$0 0.50
-$5,000
0.30
$0 1.00
$0
$0 0.50
-$5,000
0.30
$0 0.50
-$5,000
0.30
$0 1.00
-$5,000
0.60
Estudio no favorable
$0 0.40
$50,000
Tienda grande
$0 1.00
$50,000
Mercado favorable
$60,000 0.90
$55,000
0.36
mercado desfavorable
-$40,000 0.10
-$45,000
0.04
$0 0.00
-$5,200
Mercado favorable
$30,000 0.12
$25,000
0.00
Mercado desfavorable
-$10,000 0.88
-$15,000
0.00
$0 0.00
-$5,000
0.00

Modelos de optimización: La Programación Lineal

Aspectos generales

- Se considera a George Dantzig el padre de la P. L.
- Su objetivo es el de asignar recursos escasos a actividades que compiten por ellos.



http://www2.informs.org/History/dantzig/

- Técnica matemática que permite seleccionar el mejor curso de acción o programa de un conjunto de soluciones factibles.
- Los modelos que describen las relaciones son funciones lineales.

Formulación típica

- El planteamiento típico se puede suponer como:

  Optimizar alguna variable dependiente, expresada como una función lineal de n variables independientes, sujeta a una serie de restricciones lineales que son a su vez funciones de las n variables independientes.

- La variable dependiente se conoce como **Función Objetivo**
- Está relacionada a menudo con conceptos económicos tales como ganancias, costos, ingresos, tiempo, distancia, etc.
- Las variables independientes son **variables de decisión**

Formulación estándar

$$\left.\begin{aligned}&\text{Optimizar:}\\&f(x) = Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\end{aligned}\right\}\ \text{Función objetivo}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{sujeto a:}\\&g(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \le b_i \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, m\end{aligned}\right\}\ \text{Restricciones}$$

Donde:

- f(.): función objetivo
- x_j : variables de decisión
- c_j : coeficiente de la j-ésima variable de decisión en la función objetivo
- $a_{1,j}$: coeficiente de la j-ésima variable de decisión en la iésima restricción
- b_i : constante o límite de la i-ésima restricción

Las restricciones:

- En general las restricciones pueden ser de tres tipos:
  - $g(x) \leq b$
  - $g(x) \geq b$, o
  - $g(x) = b$
- La restricción de tipo ≤ asegura que el uso de un recurso no exceda cierto límite
- La restricción de tipo ≥ asegura que el uso de un recurso satisfaga un mínimo establecido
- La restricción de tipo = asegura que el uso de un recurso esté limitada a una cantidad previamente establecida.

Pasos para formular el modelo

- Entender bien el problema
- Identificar las variables de decisión
- Establecer la función objetivo
- Establecer las restricciones
- Identificar los límites superior e inferior de las variables de decisión

Ejemplo

Una fábrica de ventanas produce artículos de vidrio de alta calidad, incluyendo ventanas y puertas. Tiene tres plantas. Los marcos de aluminio se producen en la planta A, los de madera se producen en la planta B y en la C se corta el vidrio y se ensamblan los productos.

Se ha decidido ampliar la producción en dos artículos adicionales: un tipo especial de puerta y una ventana de seguridad. Se ha determinado que la empresa tiene capacidad suficiente para producir estos artículos sin sacrificar la producción de los otros que tiene, aunque tendrán que competir con la capacidad excedente de la planta C. Adicionalmente se conoce que se podrá vender todo lo que se produce.

Datos del problema

Una fábrica de ventanas produce artículos de vidrio de alta calidad, incluyendo ventanas y puertas. Tiene tres plantas. Los marcos de aluminio se producen en la planta A, los de madera se producen en la planta B y en la C se corta el vidrio y se ensamblan los productos.

Se ha decidido ampliar la producción en dos artículos adicionales: un tipo especial de puerta y una ventana de seguridad. Se ha determinado que la empresa tiene capacidad suficiente para producir estos artículos sin sacrificar la producción de los otros que tiene, aunque tendrán que competir con la capacidad excedente de la planta C. Adicionalmente se conoce que se podrá vender todo lo que se produce.

Planta	Horas utilizadas por unidad producida		Horas disponibles
	Producto		
	Puertas	Ventanas	
A	1	0	4
B	0	2	12
C	3	2	18
Utilidad por unidad vendida	3	5	

Ejemplo …

La empresa está interesada en encontrar una mezcla óptima de puertas especiales y ventanas de seguridad a fin de tener la mayor cantidad de ingresos posible.

Formulación

- ¿Cuál es el objetivo del problema?
  - Encontrar cuantas puertas y ventanas producir a fin de maximizar la utilidad
- ¿Cuáles son las variables de decisión?
  - La cantidad de puertas (x_1) y ventanas (x_2) a producir
- ¿Cuál es la función objetivo?
  - La utilidad por ventana y puerta vendida
- ¿Cuáles son las restricciones?
  - Las capacidades de las plantas

Formulación estándar

Maximizar:

$Z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad &\leq 4 \\
2x_2 &\leq 12 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\
x_1, \qquad x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

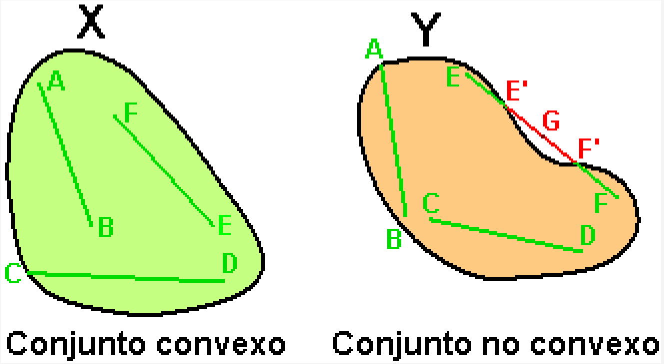
Resolviendo el problema

- Método intuitivo
- Enumeración completa
- Solución gráfica
- Métodos matemáticos exactos
  - Simplex
  - Otros
- Heurísticas

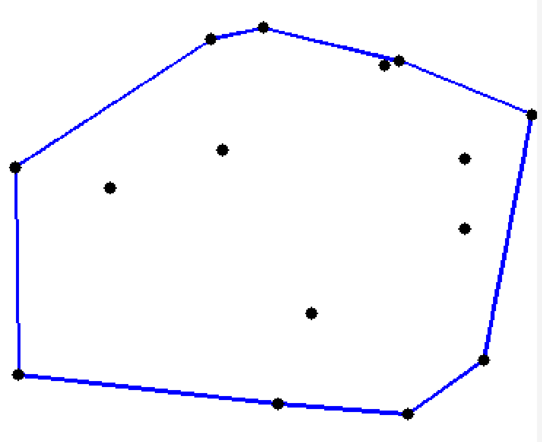
La solución gráfica

- Un problema de programación lineal puede representarse como un espacio o polígono convexo
- Formado por la intersección de las diferentes restricciones
- De manera general, se formará un hiperespacio en la región $\Re^n$, formado por la intersección de m hiperplanos, también localizados en $\Re^n$

¿Qué es un polígono convexo?



- U polígono en el cual los ángulos internos son menores a 180 grados y las diagonales que pueden trazarse son todas internas.
- Toda línea recta que atraviese alguno de sus lados, por lo tanto, hace que el polígono quede abarcado por completo en uno de los semiplanos que quedaron marcados a partir de la recta.



Definición formal: C es convexo si y solo si para todo $a, b \in C$:

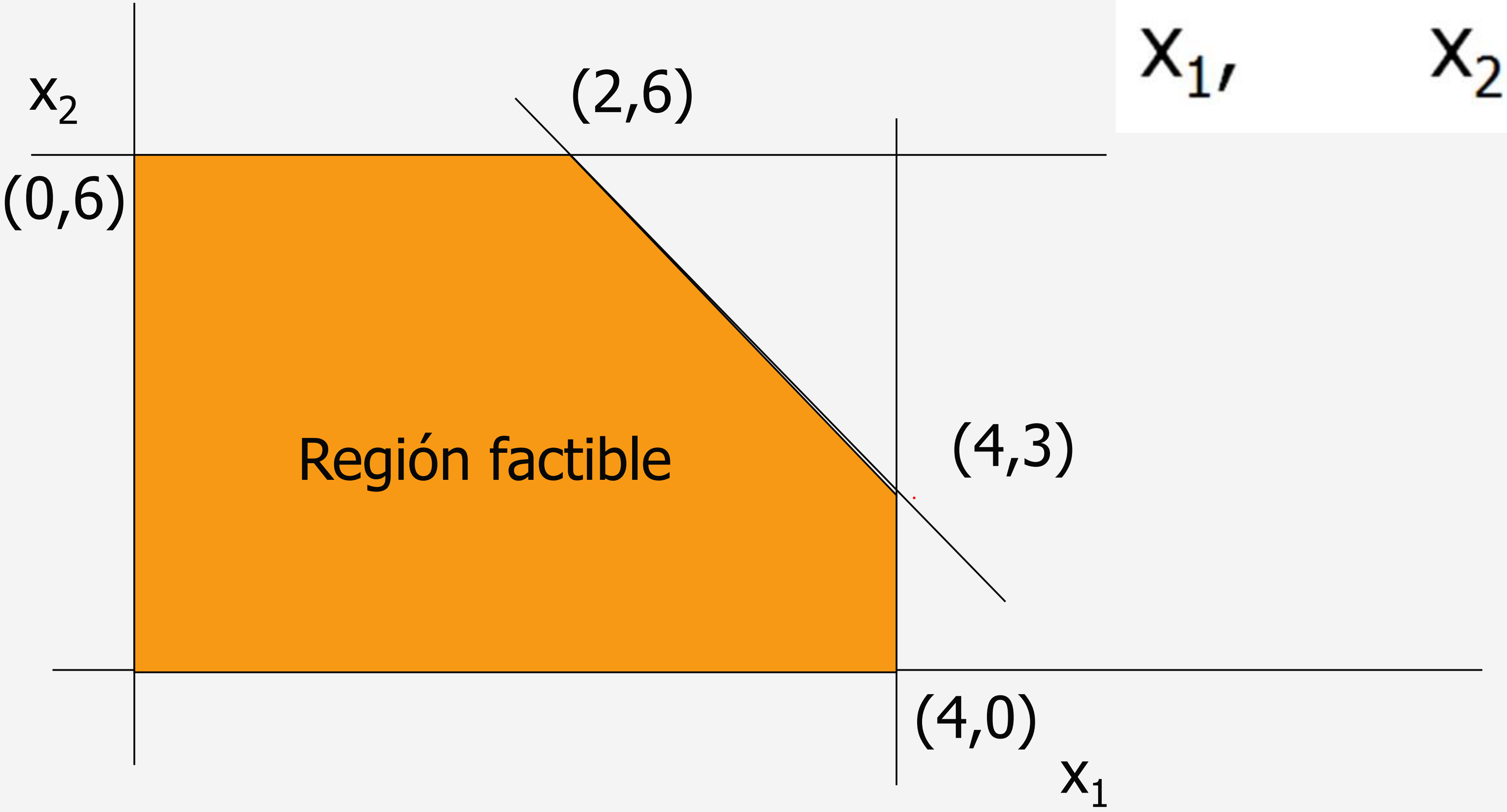
$$[ab] \subset C$$

Es decir, $\forall t \in [0;1]$:

$$(1-t)a + tb \in C$$

Solución gráfica

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



La solución óptima

- La región factible es el conjunto de valores que una variable de decisión puede asumir y simultáneamente satisfacer las diferentes restricciones.
- Es una región convexa, por lo tanto sus esquinas son una función ponderada de cualquier combinación de los puntos que la forman.
- Las posibles soluciones están localizadas en las intersecciones o esquinas de los hiperplanos formados por las restricciones.

La solución óptima

- Si existe una solución óptima, ésta deberá estar en una esquina.
- Si hay más de una solución, al menos dos de ellas deberán estar en esquinas adyacentes.
- Existe un número finito de soluciones esquinas.
- Si una esquina proporciona una solución igual o mejor que sus puntos esquinas factibles adyacentes, entonces es óptimo.

La solución óptima

		Función objetivo	
Esquinas		x_1	x_2
x_1	x_2	3	5
0	6	30	
2	6	36	
4	3	27	
4	0	12	

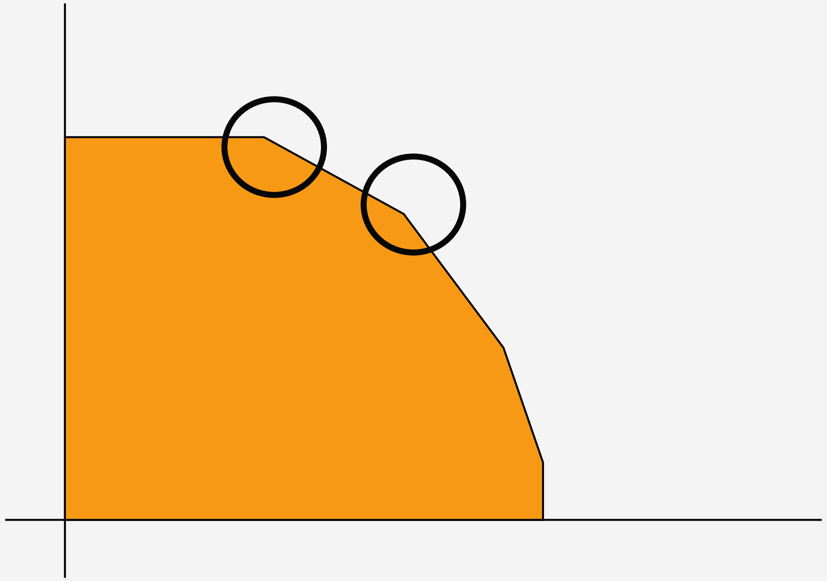
Óptimo

Significado de la solución

- La mezcla óptima de productos será
  - 2 puertas y 6 ventanas
  - Un ingreso o utilidad de 36 unidades monetarias
  - Quedarán disponible recursos en la planta A para poder hacer 2 puertas más ($2 \leq 4$)
  - No quedarán recursos disponibles recursos en la planta B ($2*6 = 12$)
  - No quedarán recursos disponibles en la planta B ($3*2 + 2*6 = 18$)

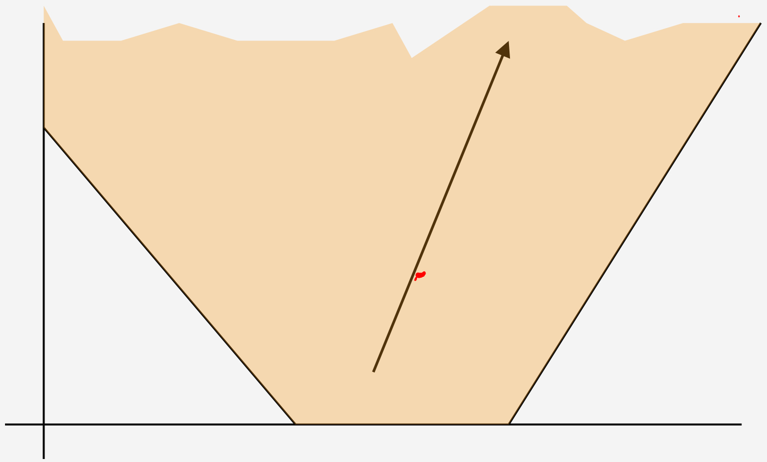
Algunas condiciones especiales

- Soluciones alternas: puede existir más de una solución óptima, pero al menos una de ellas debe estar en una esquina.



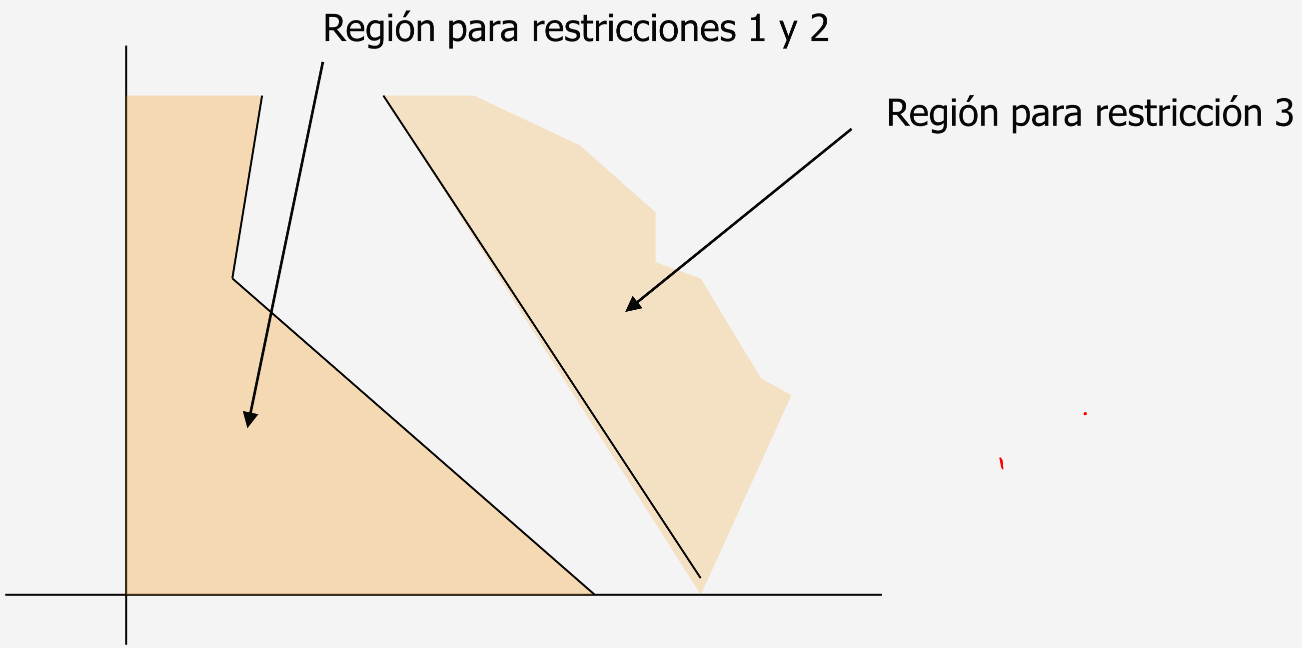
Solución no limitada

- El espacio o región de la solución no está limitado por ninguna restricción, por lo que la solución podrá variar de manera infinita sin límite. Normalmente esto indica un error en la formulación



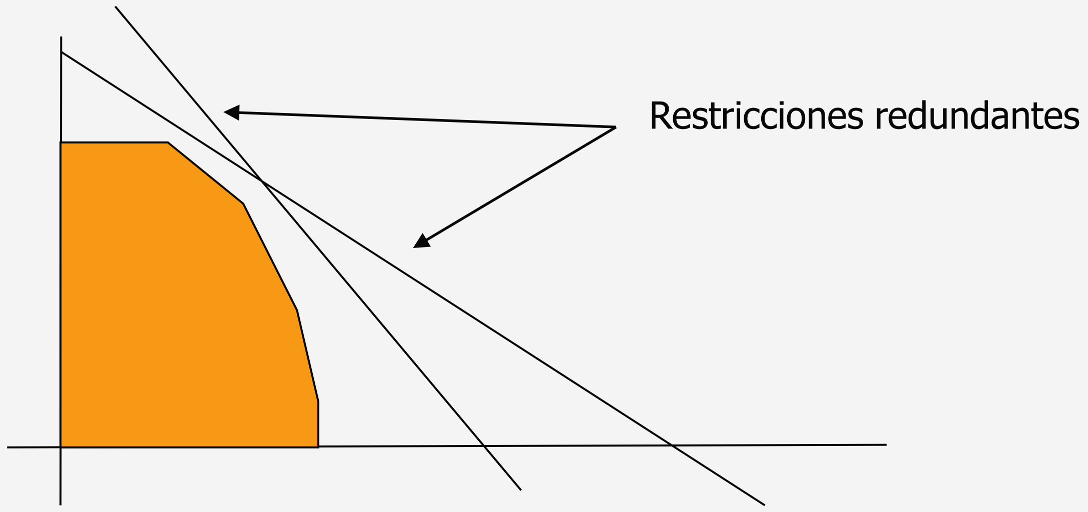
Problema no factible

- Cuando el conjunto de soluciones es un conjunto vacío, esto es, no hay puntos dentro de la región factible que satisfaga todas las soluciones



Restricciones redundantes

- Hay más de una restricción que no afecta la región factible, al estar la misma limitada por otras restricciones. Estas restricciones no son necesarias para encontrar la solución del modelo



La Programación Lineal – El Método Simplex

El Método Simplex

- Desarrollado en 1947 por George Dantzig como parte de un proyecto para el Departamento de Defensa
- Se basa en la propiedad de la solución esquina de P. L.
- Es un proceso iterativo
  - Solución inicial en el origen lo que obliga a crea un problema con condiciones iniciales
  - Busca una solución en cada esquina del sistema $\Re^n$, partiendo del origen
  - Prueba de optimalidad
- Complejidad O(n)
- No se ha desarrollado método más confiable para problemas grandes (n, m > 10,000)

La solución inicial

- El Simplex asume una solución inicial en el origen, por lo que todas las variables iniciales son cero.
- Para poder que exista una solución inicial factible, Simplex se ve obligado a crear una forma aumentada.

La solución aumentada

- Es la solución a un problema de programación lineal expresado originalmente de manera estándar y que ha sido aumentado introduciendo las variables de holgura y artificiales correspondientes.
- Una solución básica es una solución esquina aumentada
- Una solución básica factible es una solución esquina aumentada factible.

Propiedades de la solución

- Grados de libertad del modelo: es la diferencia entre el número de variables en la forma aumentada y el número de restricciones (no considerando la no negatividad)
- A fin de poder resolver un sistema de ecuaciones, habrá que dar valores arbitrarios a las variables que exceden. Simplex asume 0

Expresión aumentada: Convertir todas las restricciones en igualdad

- El caso de ≤
  - Es necesario añadir una variable de holgura

    $x_1 \leq 4$; $x_1 = 4 - x_3$; $x_1 + x_3 = 4$
- El caso de ≥
  - Es necesario añadir una variable de excedente

    $x_1 \geq 5$; $x_1 = 5 + x_4$; $x_1 - x_4 = 5$
  - Es necesario añadir una variable artificial x_5 tal que, $x_1 - x_4 + x_5 = 5$ y no viole la condición de $x_j > 0$ en la solución inicial donde su coeficiente en la solución será M>>0 tal que x_5 tenga que ser cero para que no la variable artificial no aparezca en la solución
- Es caso de =
  - Se añade una variable artificial con coeficiente M en la solución

    $x_1 = 5$; $x_1 + x_6 = 5$

Otra vez el ejemplo Wyndor

Una fábrica de ventanas produce artículos de vidrio de alta calidad, incluyendo ventanas y puertas. Tiene tres plantas. Los marcos de aluminio se producen en la planta A, los de madera se producen en la planta B y en la C se corta el vidrio y se ensamblan los productos.

Se ha decidido ampliar la producción en dos artículos adicionales: un tipo especial de puerta y una ventana de seguridad. Se ha determinado que la empresa tiene capacidad suficiente para producir estos artículos sin sacrificar la producción de los otros que tiene, aunque tendrán que competir con la capacidad excedente de la planta C. Adicionalmente se conoce que se podrá vender todo lo que se produce.

La empresa está interesada en encontrar una mezcla óptima de puertas especiales y ventanas de seguridad a fin de tener la mayor cantidad de ingresos posible.

Planta	Capacidad utilizada por unidad producida		Capacidad disponible
	Producto		
	Puertas	Ventanas	
A	1	0	4
B	0	2	12
C	3	2	18
Utilidad por unidad vendida	3	5	

Formulación estándar

Maximizar:

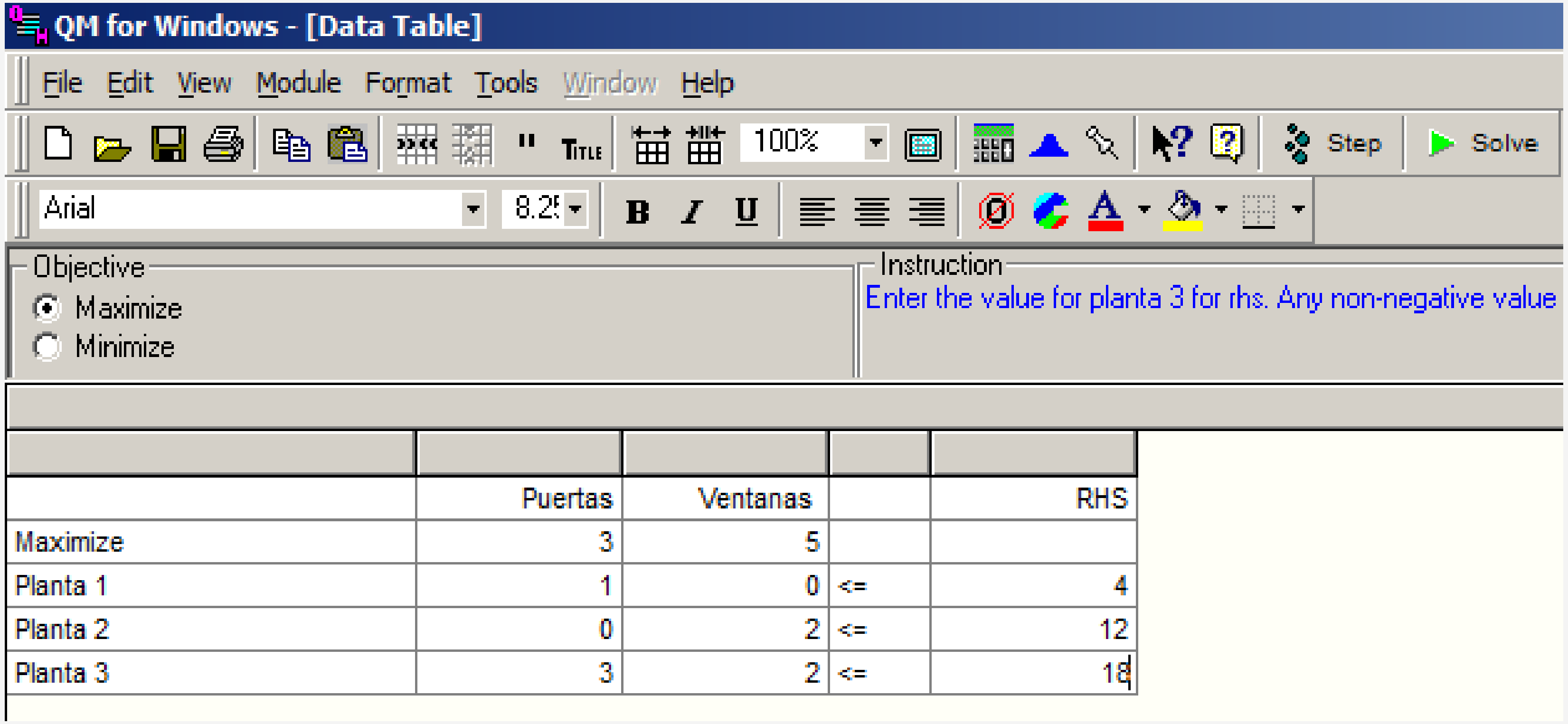
$Z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeto a:

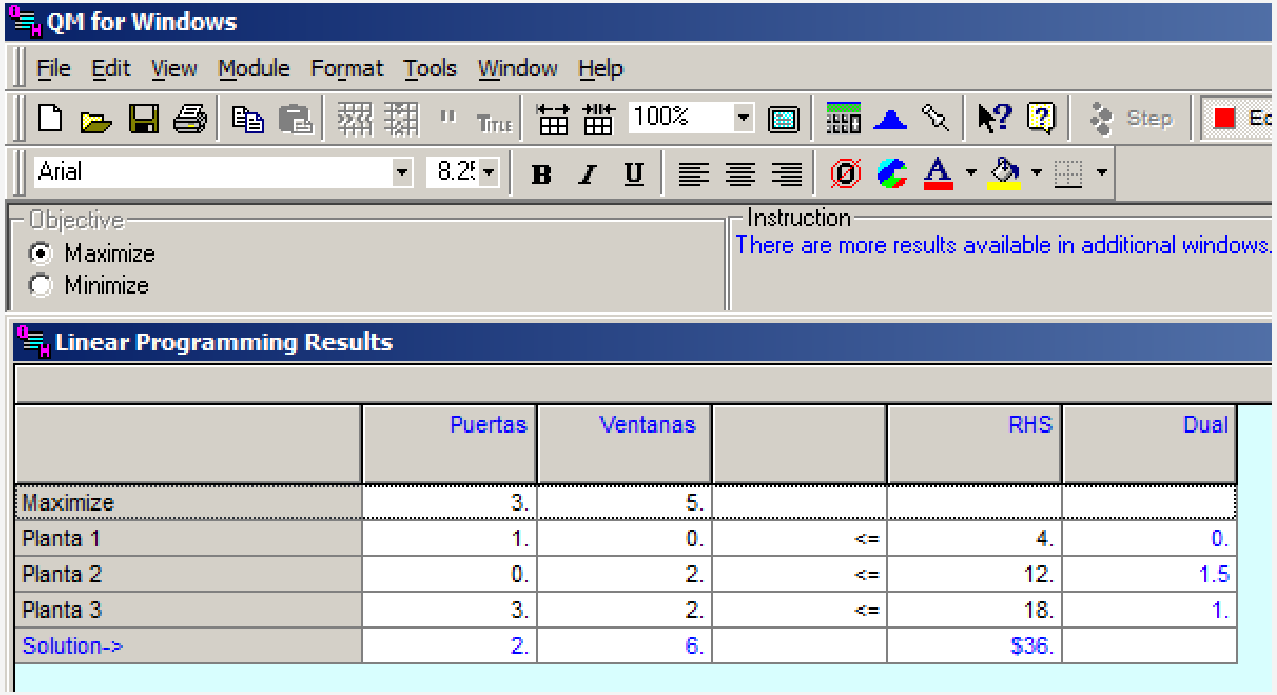
$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad &\leq 4 \\
2x_2 &\leq 12 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\
x_1, \qquad x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Uso de software: QM

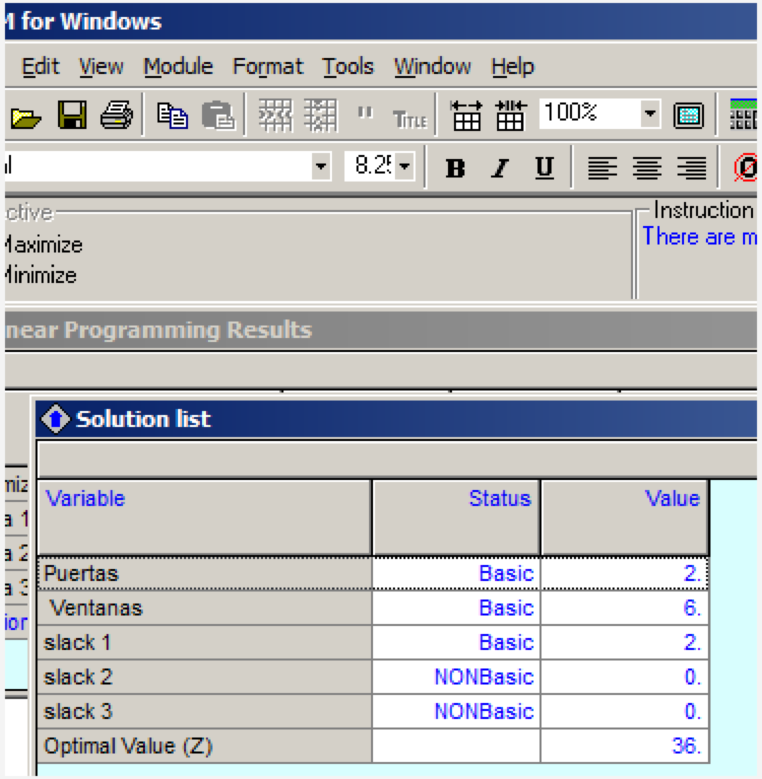
Entrada de datos



Respuesta QM



	Puertas	Ventanas		RHS	Dual
Maximize	3.	5.			
Planta 1	1.	0.	<=	4.	0.
Planta 2	0.	2.	<=	12.	1.5
Planta 3	3.	2.	<=	18.	1.
Solution->	2.	6.		$36.	



Variable	Status	Value
Puertas	Basic	2.
Ventanas	Basic	6.
slack 1	Basic	2.
slack 2	NONBasic	0.
slack 3	NONBasic	0.
Optimal Value (Z)		36.

El precio sombra

- El precio sombra del recurso i mide el valor marginal de dicho recurso, es decir, la tasa en que Z puede cambiar si varia el recurso b_i
- El valor en que se puede "vender" cada unidad de recurso i de tal manera que se indiferente utilizarlo o venderlo.

Análisis de sensibilidad o post-óptimo

- Estudia las posibles variaciones del problema una vez esta ha sido resuelto.
- Se utiliza para determinar la variación de un coeficiente o de una restricción sin variar la validez de una solución.
- Se hace debido a:
  - El alto costo de desarrollar otro modelo de P. L.
  - Ver la variación de datos aproximados
  - Estudiar diferentes escenarios

Análisis de sensibilidad

- Es una de las partes más importantes en la programación lineal.
- Permite determinar cuando una solución sigue siendo óptima dados algunos cambios en el problema.
- Consiste en determinar que tan sensible es la respuesta óptima al cambio de algunos datos como los coeficientes de la función objetivo) o los términos independientes de las restricciones.
- Consiste en establecer un intervalo de números reales en el cual el dato que se analiza puede estar contenido, de tal manera que la solución sigue siendo óptima siempre que el dato pertenezca a dicho intervalo
- Los análisis más importantes son;
    - Los coeficientes de la función objetivo; y
    - Los términos independientes de las restricciones

Cambios paramétricos

- **Cambios en el coeficiente de una variable no básica**: no afectan la solución ya que estas no aparecen en la solución del modelo.
- **Introducción de una nueva variable**: habrá que ver si la nueva restricción afecta la solución del dual
- **Cambios en b_i**: pueden cambiar el problema y los precios sombra
- **Cambios en los coeficientes de la variable básica**: afecta el valor de la función objetivo.

Costo reducido

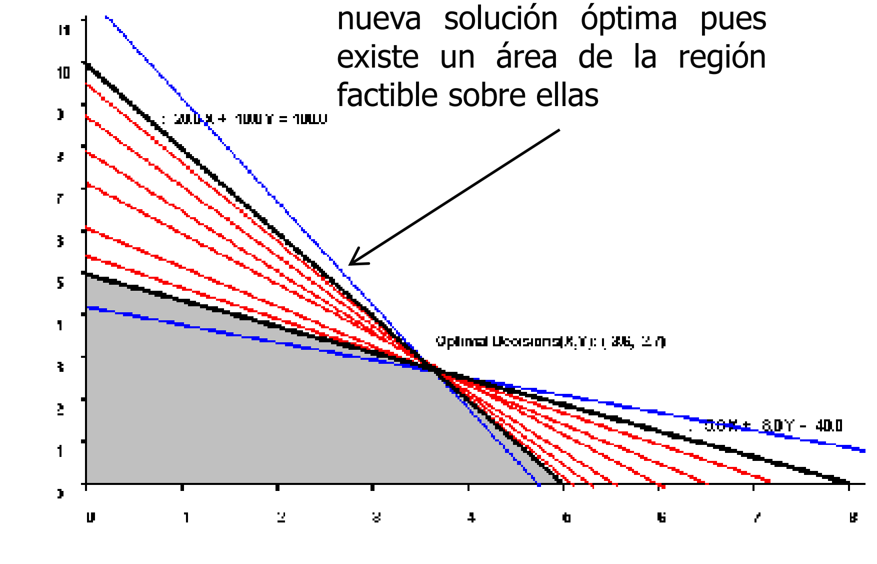
- En las soluciones no degeneradas, el costo reducido de cualquier variable de decisión se define como cuánto tendría que cambiar el coeficiente de dicha variable, en la función objetivo, para tener un valor óptimo positivo.
- Si una variable ya es positiva en la solución óptima, su costo reducido es cero.
- Por el contrario, si el valor óptimo de una variable es cero, entonces, según la definición de costo reducido, dicho costo es el incremento o el decremento permisible que corresponde a dicha variable.

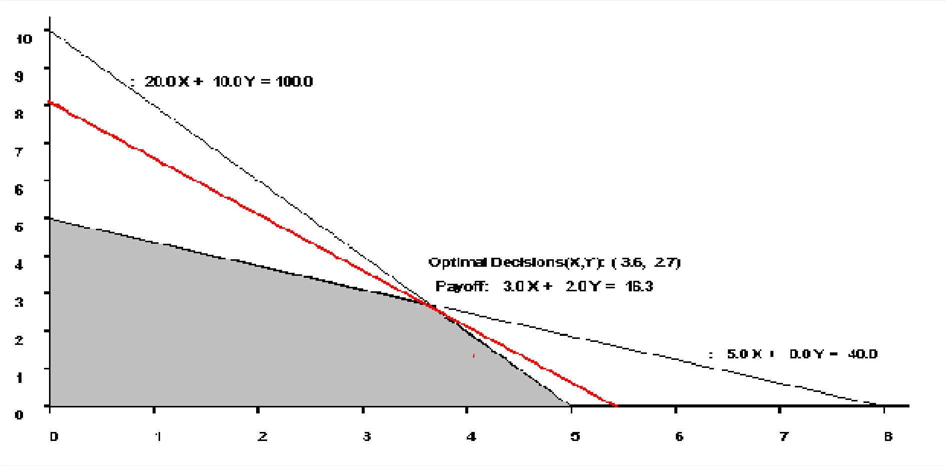
Análisis para los coeficientes de la función objetivo

- El objetivo es encontrar el rango de los coeficientes para que la solución original se mantenga óptima

Todas las líneas rojas mantienen la solución óptima. Las líneas azules generan una nueva solución óptima pues existe un área de la región factible sobre ellas

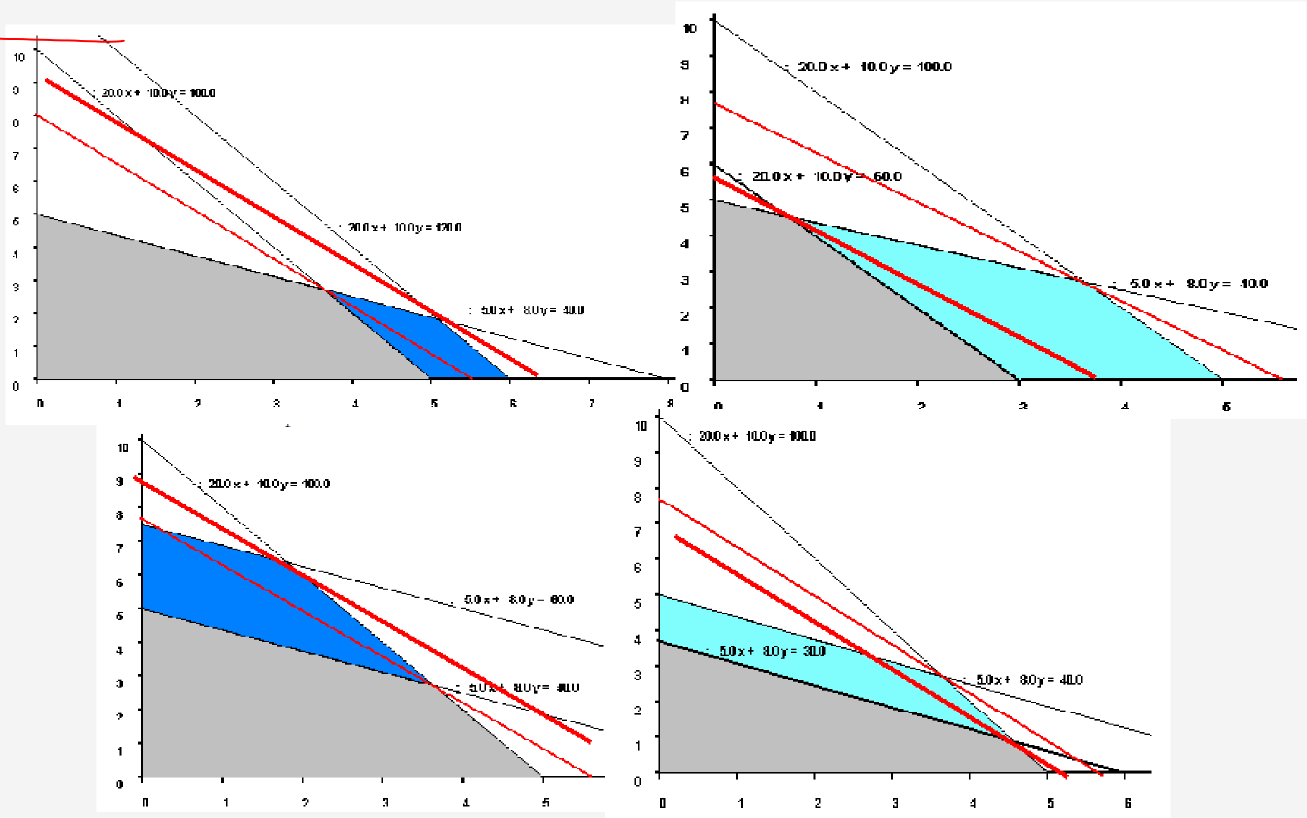
$$\begin{aligned} Máx \quad & Z = 3x + 2y \\ s/a \quad & 5x + 8y \leq 40 \\ & 20x + 10y \leq 100 \\ & x \geq 0 \,;\, y \geq 0 \end{aligned}$$





Análisis para los términos independientes de las restricciones

- El objetivo será que las restricciones que le daban solución al problema original, le den también solución al nuevo problema



Respuesta QM: Analisis de sensibilidad

Linear Programming Results

Ranging

(u

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Puertas	2.	0.	3.	0.	7.5
Ventanas	6.	0.	5.	2.	Infinity
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Planta 1	0.	2.	4.	2.	Infinity
Planta 2	1.5	0.	12.	6.	18.
Planta 3	1.	0.	18.	12.	24.

Procesos estocásticos, Variables Aleatorias y Principios de Simulación Montecarlo

Definición de proceso estocástico

- Estudio del comportamiento de una variable aleatoria a lo largo del tiempo
- El ajuste de cualquier modelo teórico que permita hacer pronósticos o predicciones sobre el comportamiento futuro de un proceso.
- Es un concepto matemático que sirve para caracterizar y estudiar todo tipo fenómenos aleatorios (estocásticos) que evolucionan, generalmente, con el tiempo.
- En estadística, y específicamente en la teoría de la probabilidad, un proceso estocástico es un concepto matemático que sirve para caracterizar una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo.
- Así, consiste en una sucesión de variables aleatorias indexadas por una variable (continua o discreta), generalmente, el tiempo.
- Cada una de las variables aleatorias del proceso tiene su propia función de distribución de probabilidad y, entre ellas, pueden estar correlacionadas o no.

Ejemplos

- Señales de telecomunicación
- Señales biomédicas (electrocardiograma, encefalograma, etc...)
- Señales sísmicas
- El número de manchas solares año tras año
- El índice de la bolsa segundo a segundo
- La evolución de la población de un municipio año tras año
- El tiempo de espera en cola de cada uno de los usuarios que van llegando a una ventanilla
- El clima es un gigantesco cúmulo de procesos estocásticos interrelacionados (velocidad del viento, humedad del aire, temperatura, etc) que evolucionan en el espacio y en el tiempo.

Casos especiales de procesos estocásticos

- Proceso estacionario: si la función de distribución conjunta de cualquier subconjunto de variables es invariable respecto a un desplazamiento en el tiempo.
- Proceso homogéneo: variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas
- Proceso de Markov: Aquellos procesos discretos en que la evolución sólo depende del estado actual y no de los anteriores.
- Proceso de Gauss: Proceso continuo en el que toda combinación lineal de variables es una variable de distribución normal.
- Proceso de Poisson
- Proceso de Gauss-Markov: Son procesos, al mismo tiempo, de Gauss y de Markov
- Proceso de Bernoulli: Son procesos discretos con una distribución binomial.

Proceso estacionario

- Es un proceso estocástico cuya distribución de probabilidad en un instante de tiempo fijo o una posición fija es la misma para todos los instantes de tiempo o posiciones.
- En consecuencia, parámetros tales como la media y la varianza, si existen, no varían a lo largo del tiempo o la posición.

Series temporales

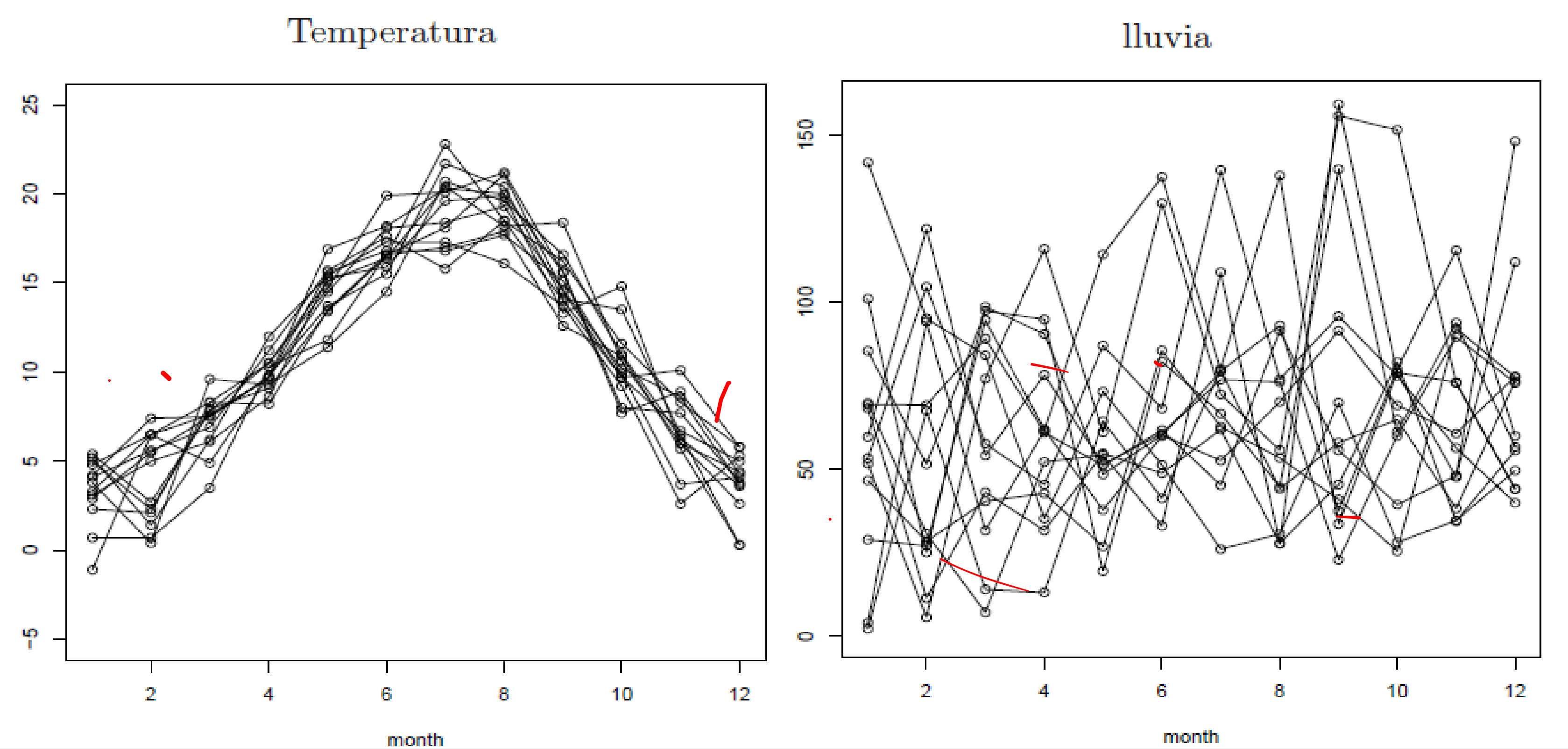
- Una serie temporal describe la evolución aleatoria de una variable en el tiempo.
- Es el modelado de un proceso estocástico en tiempo discreto, donde los elementos de I están ordenados y corresponden a instantes equidistantes del tiempo.
- Si I = {1, . . . , n}, la serie es $y_1, y_2, . . . , y_n$;

Un caso especial

- Un paseo aleatorio se modela mediante la siguiente expresión: $X(t + \tau) = X(t) + \Phi(\tau)$
- donde Φ es la variable aleatoria que describe la ley de probabilidad para tomar el siguiente paso y τ es el intervalo de tiempo entre pasos subsecuentes.

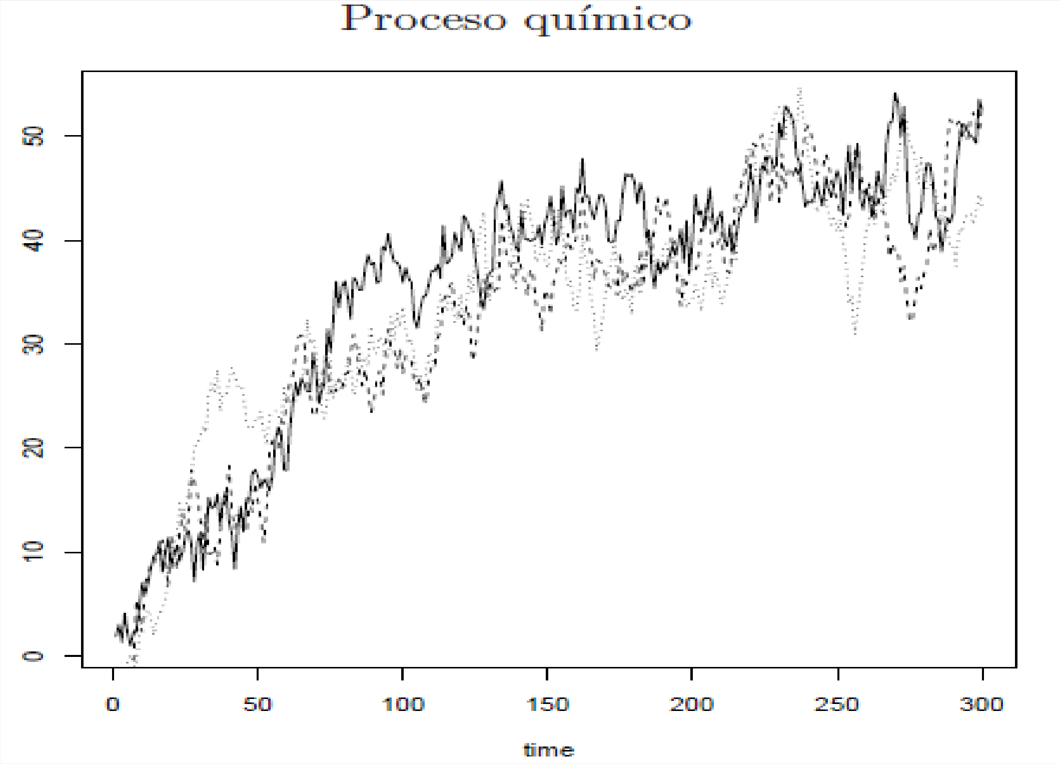
Ejemplo: modelado del clima

- Se considera la que distribución de la temperatura es la misma en 13 años observados, entonces se tendrá 13 trayectorias del proceso con 12 variables aleatorias cada una, una por mes. Igual puede hacerse lo mismo con la serie de las lluvias.



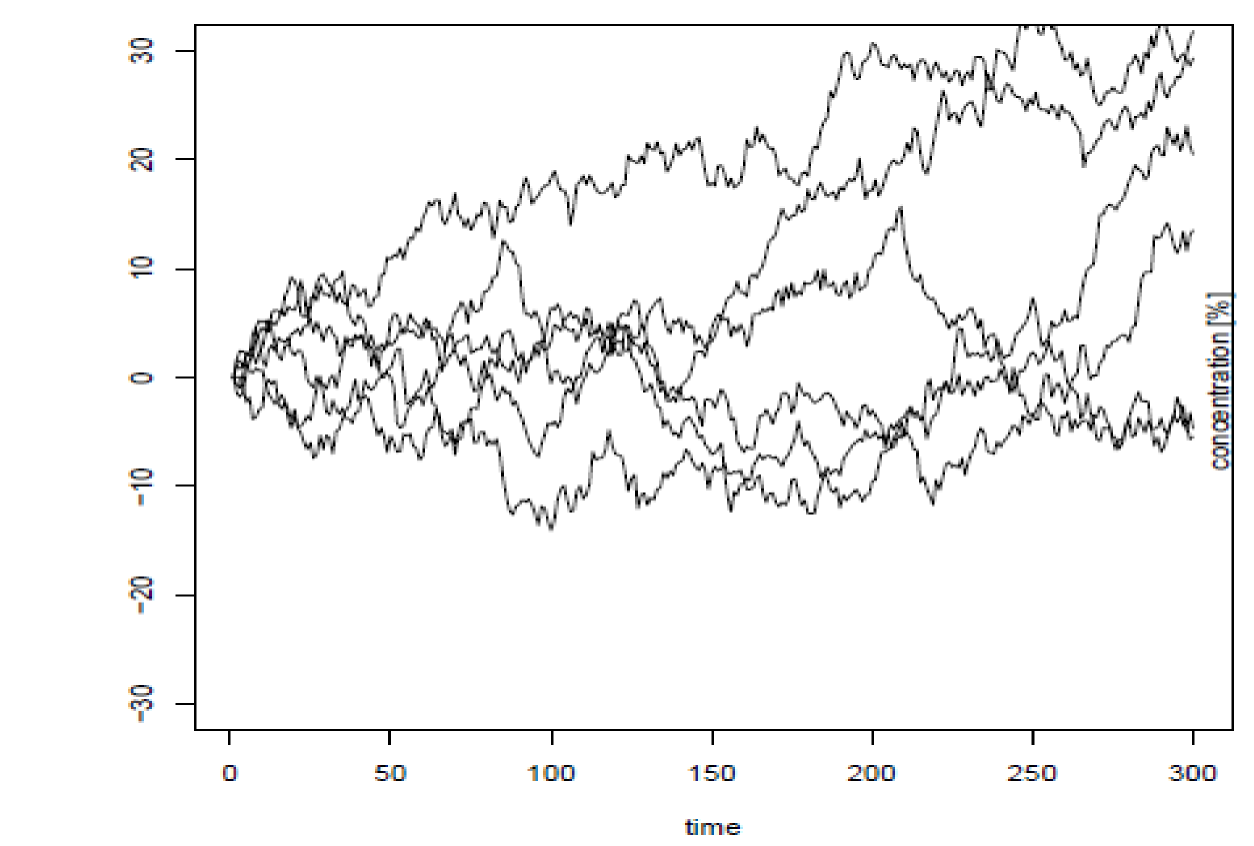
Ejemplo: proceso químico

- La medida de la concentración de una sustancia se toma cada minuto durante 5 horas. Se repite esto en distintos días bajo las mismas condiciones para obtener información sobre la distribución del proceso. Se tendrán varias series de la forma $y_1, \ldots, y_{300}$ provenientes del mismo proceso, una para cada día.

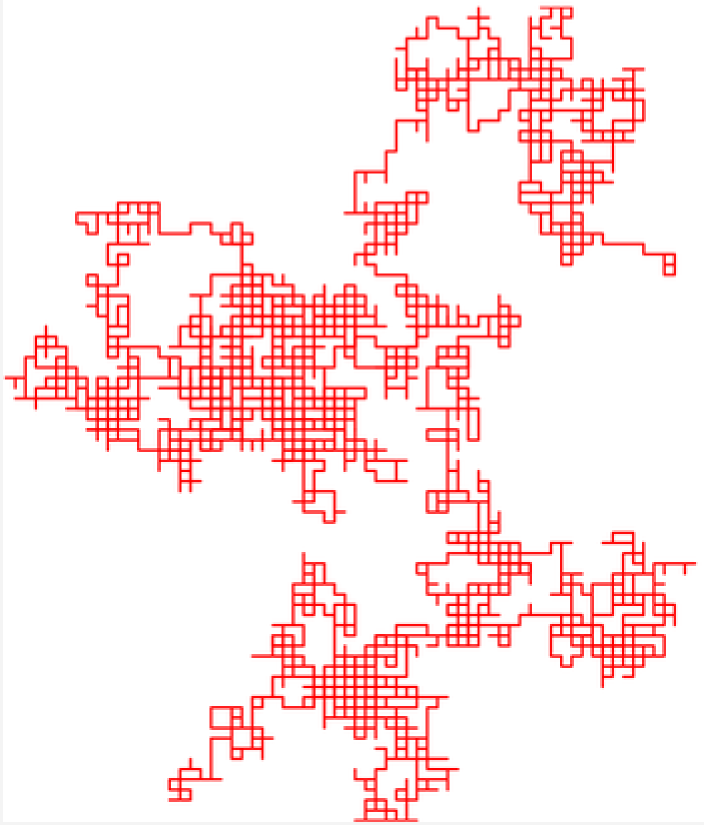


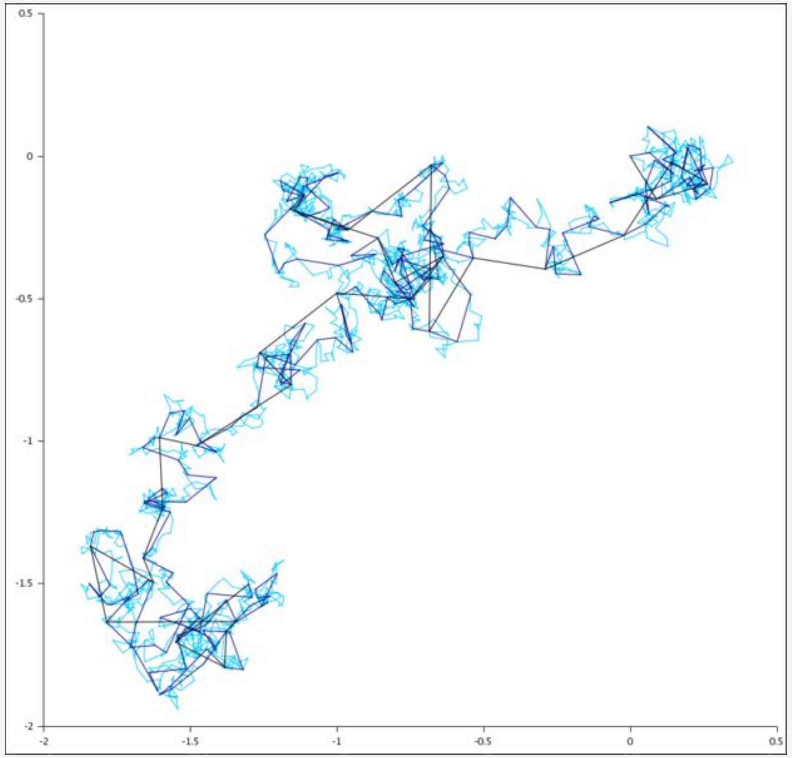
Ejemplo: proceso simulado

- Se han generado seis trayectorias de tamaño T = 300; $y_1, \ldots, y_{300}$, de un paseo aleatorio (Yt) con $\sigma^2 = 1$, se han representado en la figura. Se puede ver que el gráfico de las distintas trayectorias nos da información sobre la distribución de probabilidad del proceso.



Paseo aleatorio bidimensional





Movimiento Browniano

Distribuciones de probabilidad

- Una variable aleatoria toma cada uno de sus valores con cierta probabilidad.
- La función de probabilidad es la representación de todas las probabilidades de una variable aleatoria X mediante una expresión matemática tal que

$$P(X = x) = f(x)$$

Distribuciones de Probabilidad discreta

Distribuciones de probabilidad discretas

- El conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ es una función de probabilidad discreta o distribución de probabilidad discreta de la variable discreta X, si para cada resultado x
  1. $f(x) \geq 0$
  2. $\sum_x f(x) = 1$
  3. $P(X = x) = f(x)$
- La distribución acumulada F(x) de una variable aleatoria discreta X con distribución de probabilidad $f(x)$ es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \quad \text{para } -\infty \leq x \leq \infty$$

Media de una variable aleatoria

- La media de una variable aleatoria es el valor más esperado de dicha variable.

$$\mu = E(X) = \sum_{x} xf(x)$$

Varianza de una variable aleatoria

- Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad f(x) y media μ, la varianza de X será:

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

Donde la desviación estándar σ será la raiz de la varianza

Distribución uniforme discreta

- Si la variable aleatoria discreta X toma valores discretos x_1, x_2, ….., x_k con igual probabilidad, entonces estos valores están distribuidos en función a la Distribución Uniforme Discreta:

$$P(X = x) = f(x;k) = \frac{1}{k}$$

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2}{k}$$

El Proceso de Bernoulli

- El experimento consiste en n pruebas iguales que se repiten
- Cada prueba produce un resultado que se puede clasificar como éxito o fracaso
- La probabilidad de un éxito, p, permanece constante en cada prueba
- Cada prueba es independiente

La Distribución Binomial

- En experimento de Bernoulli puede tener como resultado un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad 1-p. Entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, el número de éxitos en n pruebas independientes es:

$$P(X = x) = f(x;n,x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

donde

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = npq$$

$$P(x \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Proceso de Poisson

- Son aquellos experimentos donde los resultados ocurren durante un intervalo dado o en una región específica.
- Los resultados que ocurren en un intervalo son independientes de los resultados en otro intervalo o región.
- La probabilidad de que ocurra un solo resultado durante un intervalo muy corto es proporcional a la longitud del intervalo y no depende del número de resultados en otros intervalos
- La probabilidad de que se den resultados simultáneos en un intervalo es despreciable.

Distribución de Poisson

- Sea X la variable aleatoria asociada con la ocurrencia de eventos en un proceso de Poisson. Esta variable estará distribuida de acuerdo a la siguiente función:

$$P(X = x) = \frac{e^{-1/\lambda}(1/\lambda)^x}{x!}, \text{para } x = 1, 2, 3, \ldots$$

$$P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-1/\lambda}(1/\lambda)^k}{k!}$$

$$\mu = \sigma \quad = 1/\lambda$$

Donde 1/λ es el número promedio de eventos por unidad de tiempo

Distribuciones de Probabilidad continuas

Distribuciones de probabilidad continuas

- El conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ es una función de probabilidad continua o función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua X, definida en el conjunto de números reales $\Re$, si:

1. $f(x) \geq 0$, para toda $x \in \Re$
2. $\int_{\Re} f(x) = 1$
3. $P(a < x < b) = \int_{a < x < b} f(x)dx$

- La distribución acumulada F(x) de una variable aleatoria continua X con distribución de probabilidad $f(x)$ es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{t \leq x} f(t)dt \quad \text{para } -\infty \leq x \leq \infty$$

Media de una variable aleatoria

- La media de una variable aleatoria es el valor más esperado de dicha variable.

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Varianza de una variable aleatoria

- Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad f(x) y media μ, la varianza de X será:

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

Donde la desviación estándar σ será la raiz de la varianza

Distribución uniforme

- Una variable aleatoria continua X tendrá una distribución uniforme en el intervalo [a, b] de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$P(X \le x) = \int_0^x \frac{dy}{b-a}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2}, \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribución exponencial

- La variable aleatoria continua X tiene una **distribución exponencial** con parámetro λ si su función de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$P(X \le x) = \int_0^x \lambda e^{-1/\lambda\, y} dy$$

$$P(0 \le X \le x) = 1 - e^{-1/\lambda\, x}$$

$$\mu = 1/\lambda, \; \sigma = 1/\lambda$$

Donde $1/\lambda$ es el número promedio de eventos por unidad de tiempo

Distribución normal

- Es la distribución más importante en el campo de la estadística
- La curva normal describe aproximadamente muchos fenómenos que ocurren en la naturaleza
- Desarrollada en 1733 por Abraham DeMoivre
- Aunque fue Karl Fiedrich Gauss quien demostró su aplicabilidad

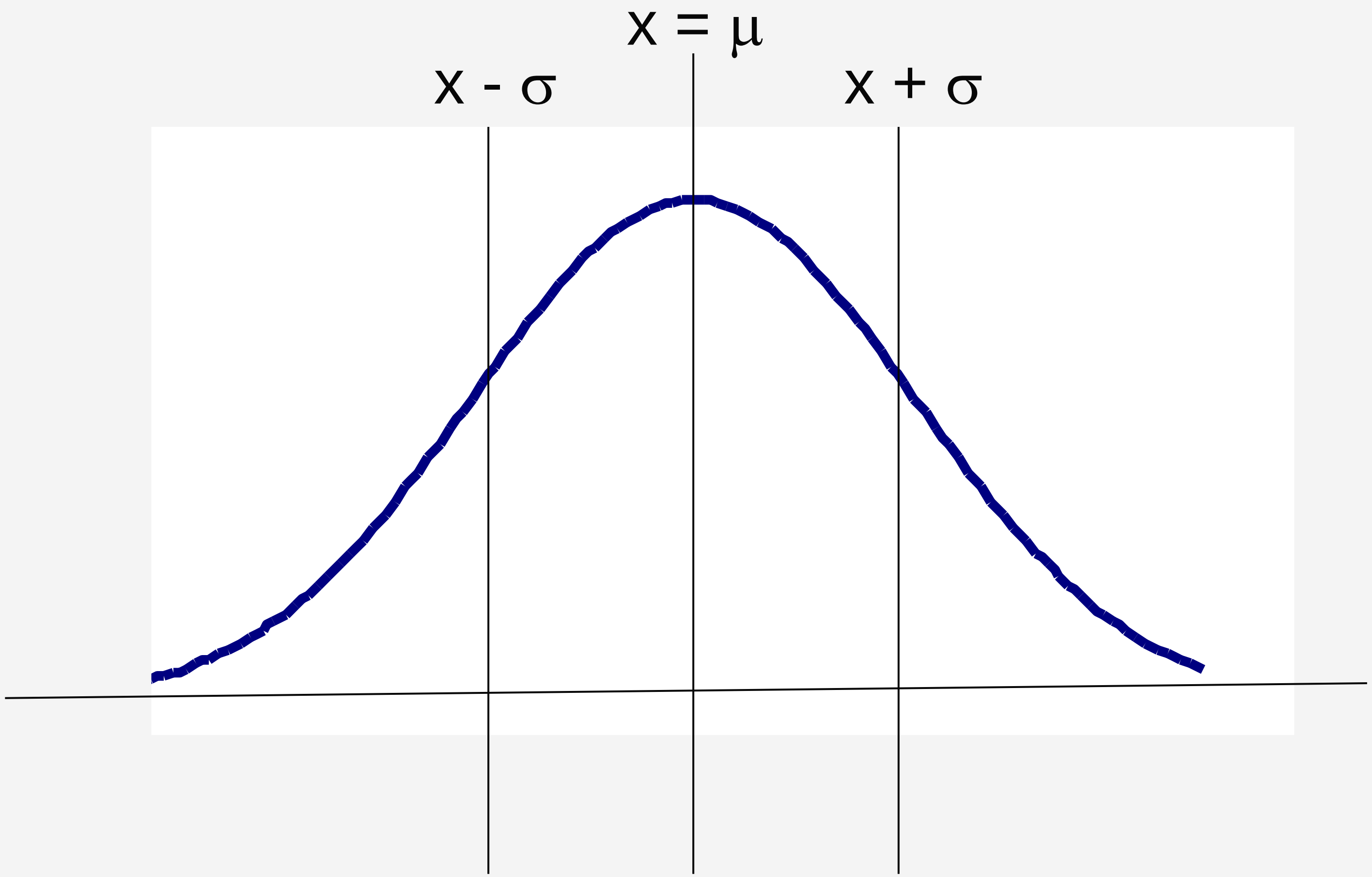
Distribución normal

- La función de probabilidad de la variable aleatoria normal X, con media μ y varianza σ^2 está dada por:

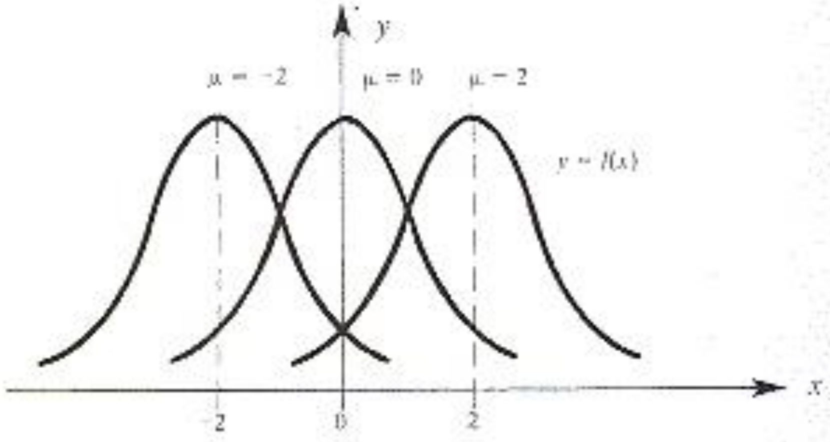
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

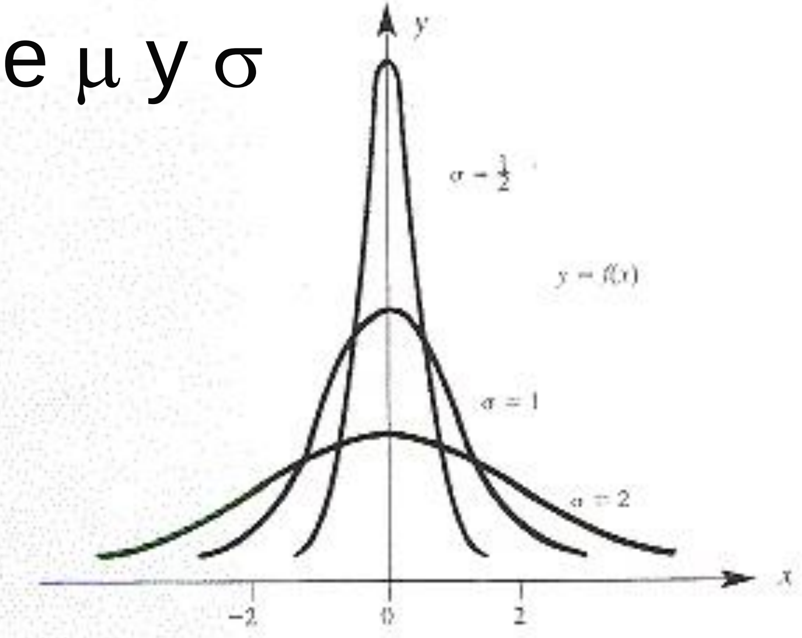
Características de la curva normal

- La variable aleatoria normal X se expresa como $N(\mu, \sigma^2)$
- La moda está localizada en el punto donde $x = \mu$
- La curva es simétrica en el eje de la media μ
- Sus puntos de inflexión están en $x = \mu \pm \sigma$
- Se aproxima al eje horizontal de manera asintótica en ambos lados
- Su área total es igual a 1


X = μ
X - σ
X + σ

Efectos de μ y σ





Áreas bajo la curva normal

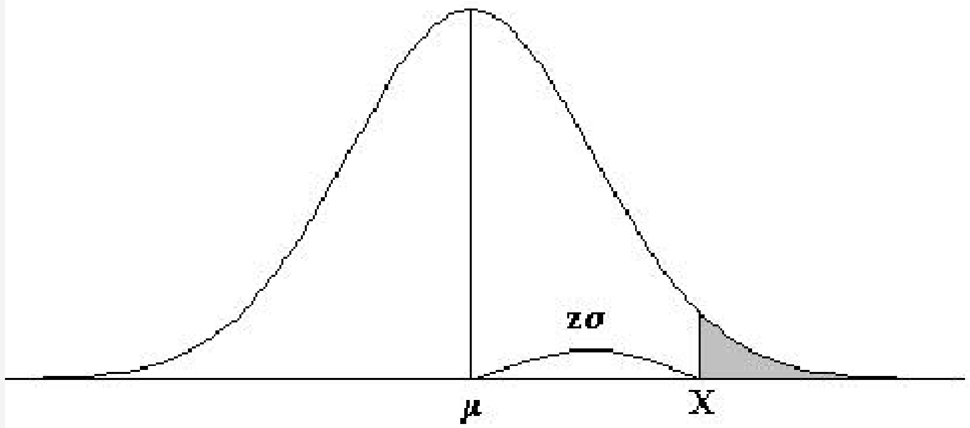
- Es matemáticamente difícil calcular las probabilidades o el área bajo la curva normal:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} dx$$

- Se determina el valor normalizado estándar tal que N(0,1)

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Áreas bajo la curva normal



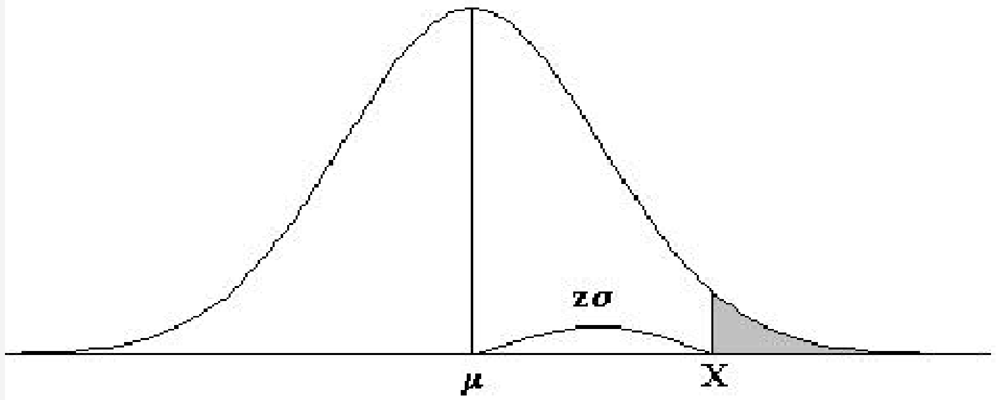
Ejemplo:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$P\ [Z > 1] = 0.1587$
$P\ [Z > 1.96] = 0.0250$

Desv. normal x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681

Áreas bajo la curva normal



Ejemplo:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

P [Z > 1] = 0.1587
P [Z > 1.96] = 0.0250

Desv. normal x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010

Simulando procesos estocásticos estacionarios

Funciones generadoras

$$Exponencial:$$

$$x_i = -1/\lambda \ln(R_i)$$

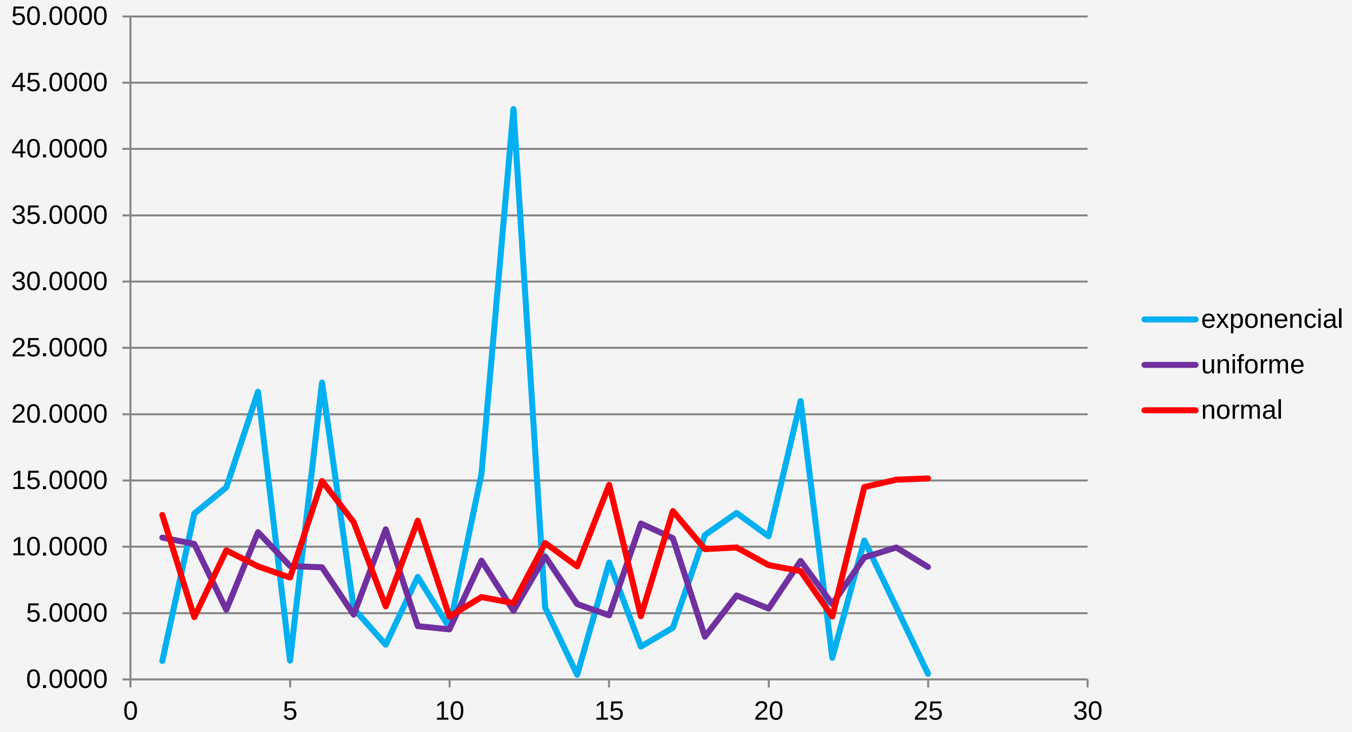
$$Uniforme:$$

$$x_i = a + (b-a) \times R_i$$

$$Normal:$$

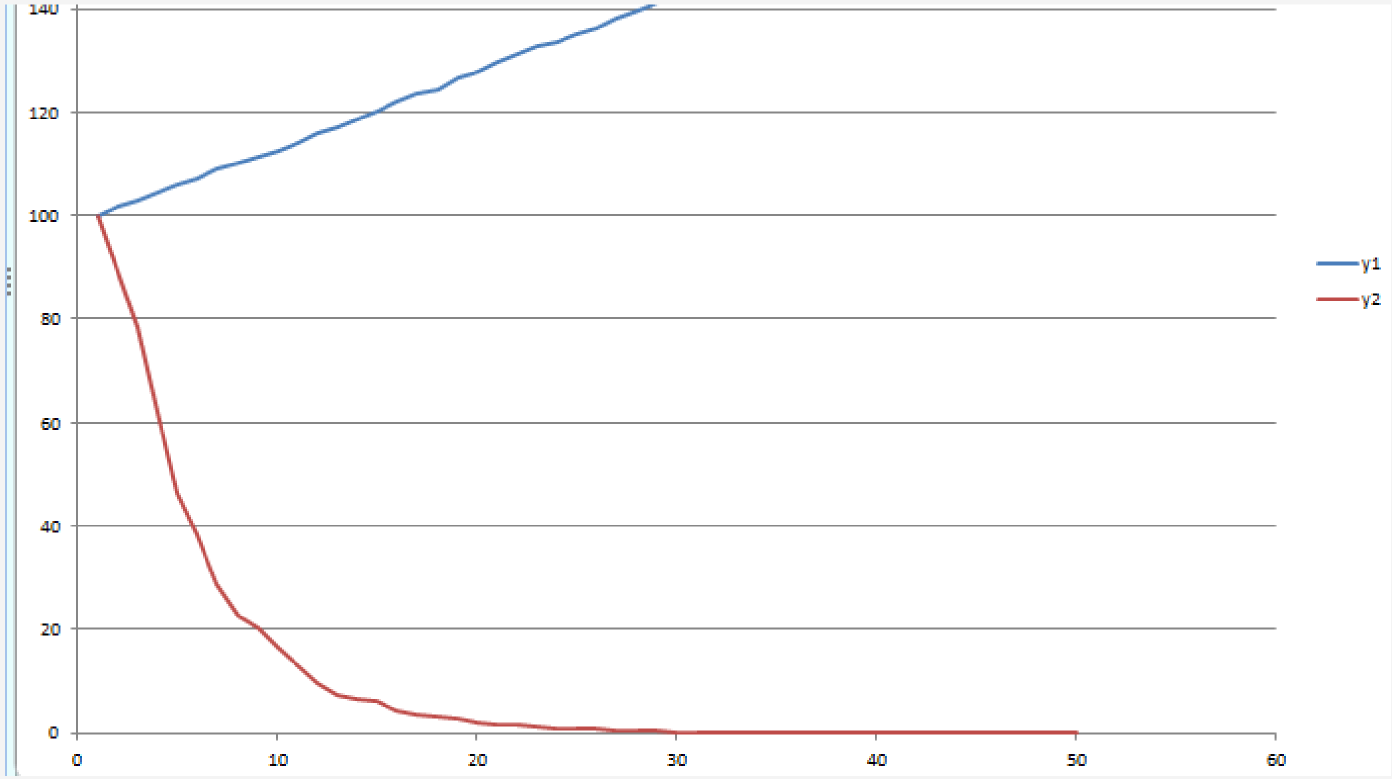
$$x_i = \mu + (6R_i - 3)\sigma$$

	a,b	μ, σ
1/λ	3	10
10	12	2
$x_i = -1/\lambda \ln(R_i)$	$x_i = a + (b-a) \times R_i$	$x_i = \mu + (6R_i - 3)\sigma$
exponencial	uniforme	normal
=-$B$3*LN(ALEATORIO())	=$C$2+($C$3-$C$2)*ALEATORIO()	=$D$2+(6*ALEATORIO()-3)*$D$3

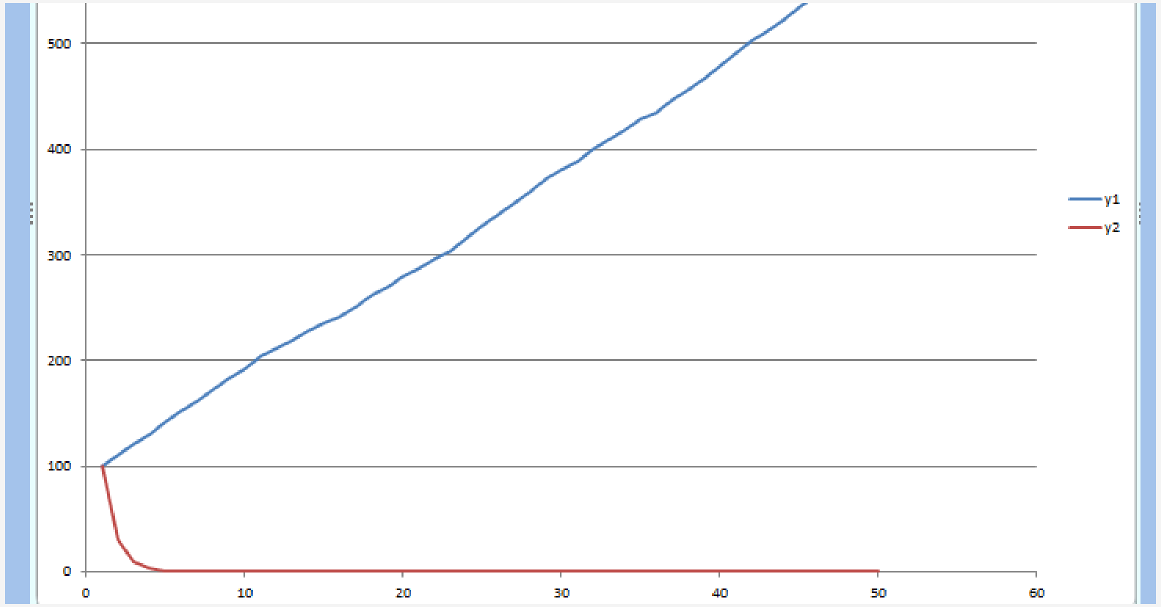


Crecimientos aleatorios

$$y_{i+1} = (1 + U(a,b)) + y_i \qquad y_{i+1} = \frac{y_i}{\sqrt{1 + U(a,b)}}$$



	A	B	C
1			
2		a	5.2
3		b	11.5
4			
5		$y_{i+1} = (1 + U(a,b)) + y_i$	$y_{i+1} = \frac{y_i}{\sqrt{1 + U(a,b)}}$
6	i	y1	y2
7	1	100	100
8	2	=(1+$C$2+($C$3-$C$2)*ALEATORIO())+B7	=C7/RAIZ(1+$C$2+($C$3-$C$2)*ALEATORIO())

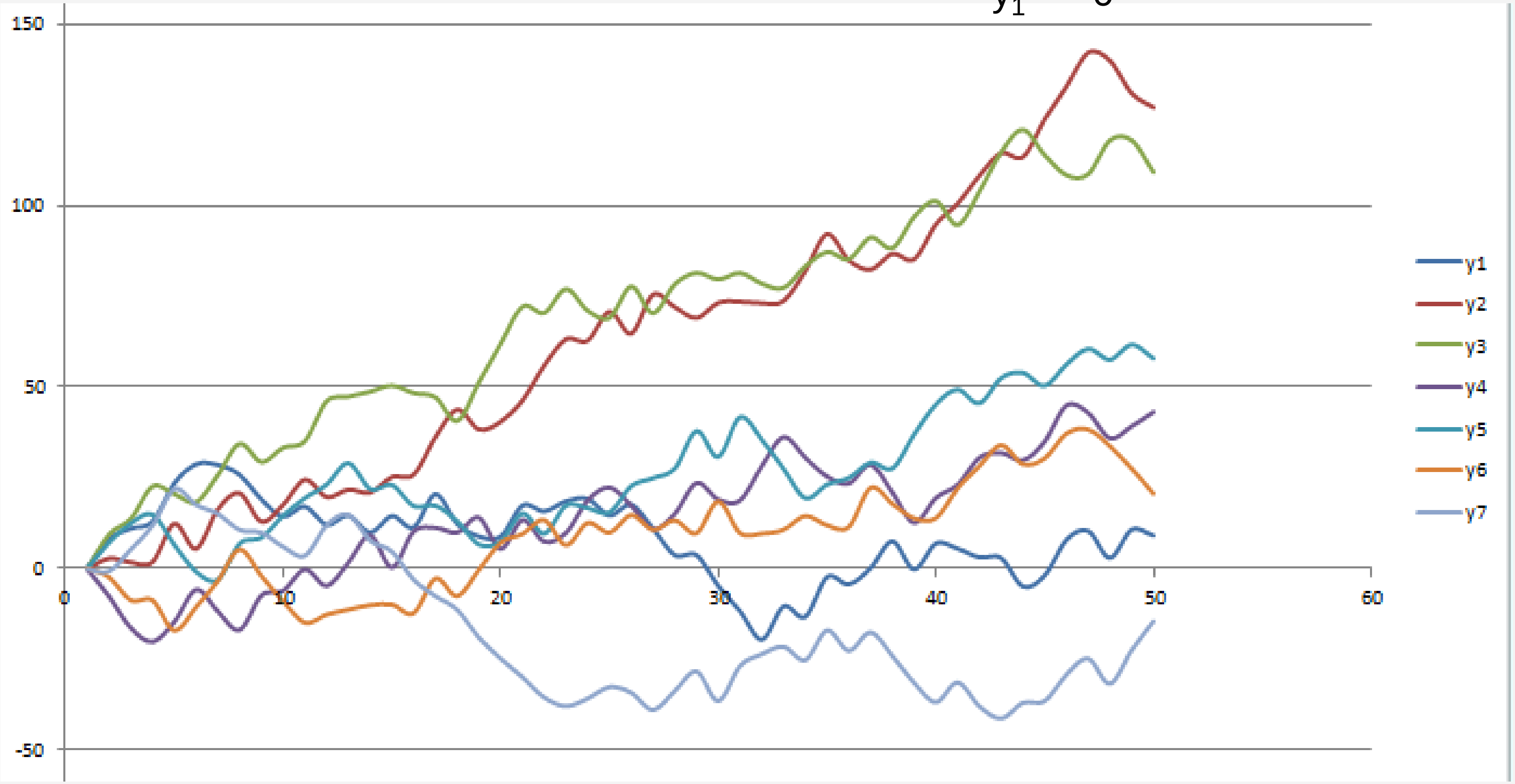


Paseo aleatorio

- Se hacen siete corridas aleatorias para la función

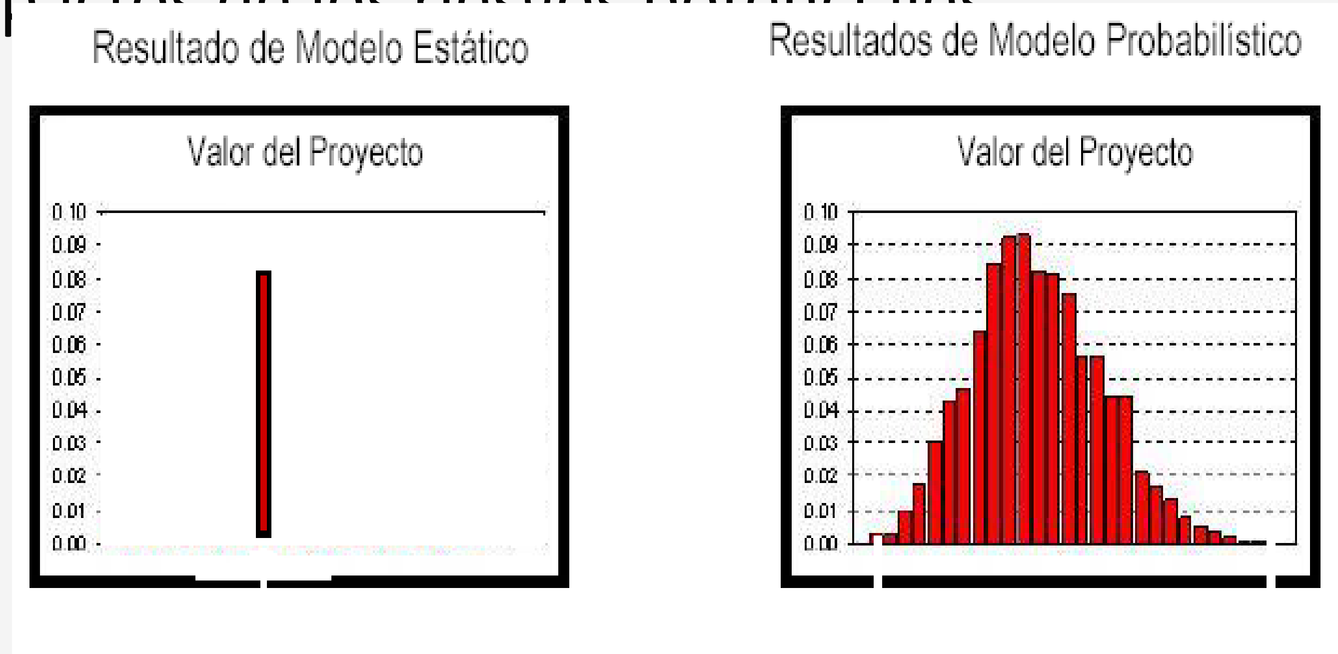
$$y_{i+1} = (1 + U(a,b)) + y_i$$

Con parámetros:
a = -10
b = 10
y_1 =   0



Modelado estocástico

- Cuando se realiza un análisis determinístico a un modelo, una serie de supuestos y variables producen un resultado de valor único.
- Mientras que un análisis estocástico o probabilístico le da al analista un rango de valores como resultado.
- Los resultados estocásticos son mucho más realistas que estimados de valor único ya que se enfocan tanto en la probabilidad de ocurrencia como en las consecuencias o impactos de los riesgos potenciales.



Métodos Monte Carlo

- Abarcan una colección de técnicas que permiten obtener soluciones de problemas matemáticos o físicos por medio de pruebas aleatorias repetidas.
- En la práctica, las pruebas aleatorias se sustituyen por resultados de ciertos cálculos realizados con números aleatorios.
- La Simulación Mone Carlo es una técnica de análisis de riesgos que incorpora múltiples simulaciones de resultados con la variabilidad de elementos individuales para producir una distribución de resultados potenciales.
- Para cada simulación, la herramienta de simulación Monte Carlo escoge al azar un valor para cada evento de riesgo dentro de su rango de valores posibles, pero de acuerdo con la probabilidad de ocurrencia de cada uno de éstos.
- Luego se combinan los valores escogidos al azar para generar un solo resultado para una simulación. Este proceso se repite un cierto número de veces (típicamente más de 1,000 iteraciones), y se produce un rango de resultados potenciales igualmente probables.

Historia

- El método fue llamado así por el principado de Mónaco por ser “la capital del juego de azar”, al tomar una ruleta como un generador simple de números aleatorios.
- El nombre y el desarrollo sistemático de los métodos de Monte Carlo datan de circa 1944 con el desarrollo de la computadora.
- El uso real de los métodos de Monte Carlo como una herramienta de investigación, proviene del trabajo de la bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial.
- Este trabajo involucraba la simulación directa de problemas probabilísticos de hidrodinámica concernientes a la difusión de neutrones aleatorios en material de fusión.

Algoritmo

- Determinar las variables aleatorios y sus distribuciones acumuladas.
- Generar un número aleatorio uniforme U $\in$ (0, 1)
- Determinar el valor de la variable aleatoria
  que corresponde el número aleatorio generado
  de acuerdo las clases que se tengan

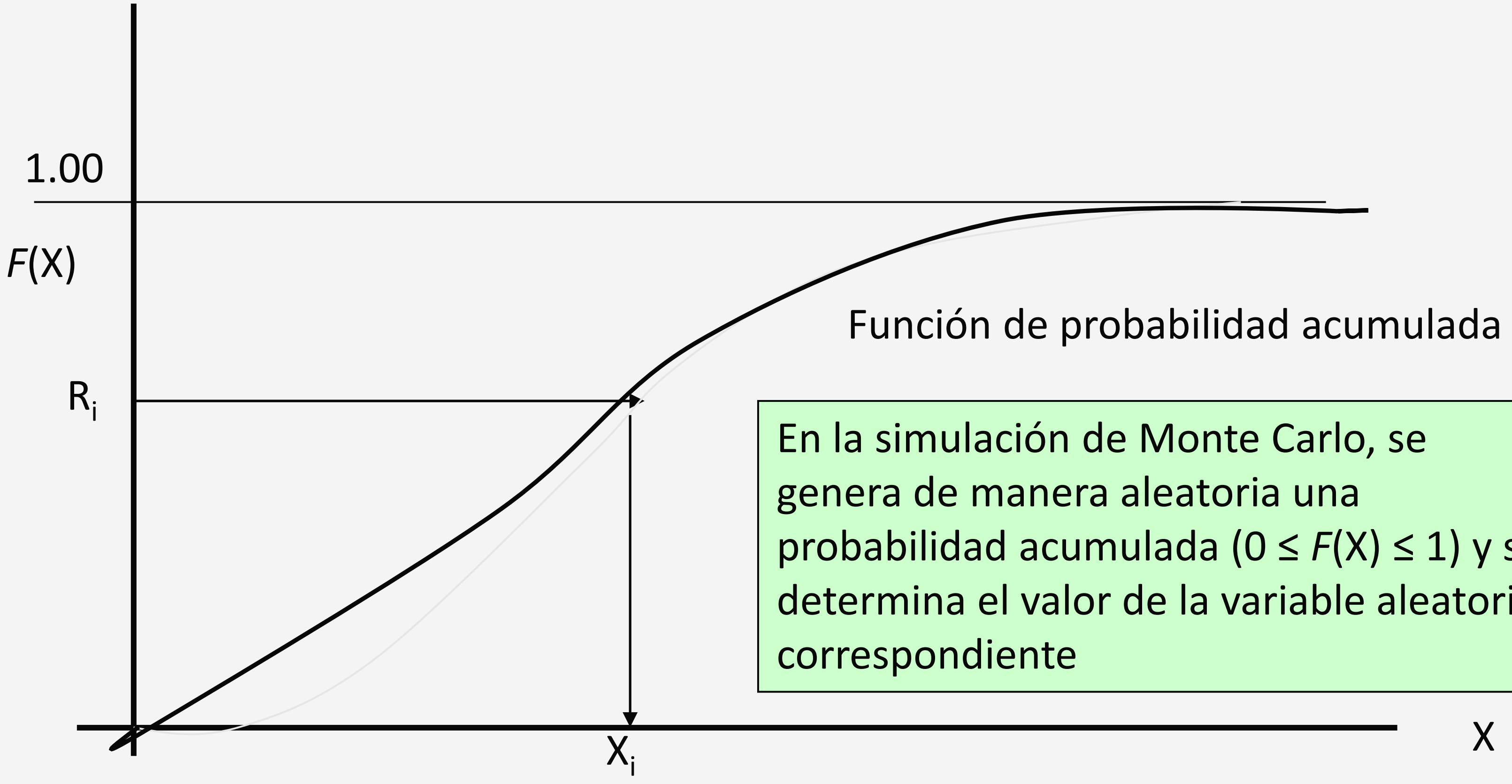
Repetir tantas veces
sea necesario

- Determinar los diferentes parámetros estadísticos para la simulación
- Analizar los resultados para diferentes corridas.

Números aleatorios

- Deben tener igual probabilidad de salir elegidos.
- No debe existir correlación serial
- Se generan por tablas (Rand 1955), o por dispositivos especiales: ruleta.
- En la práctica se utilizan algoritmos y se generan números pseudo aleatorios.
  - Sustituyen a los números aleatorios.
  - Se generan por algoritmos o fórmulas.
  - Se debe asegurar la existencia de secuencias largas y densas.

La función de probabilidad invertida



En la simulación de Monte Carlo, se genera de manera aleatoria una probabilidad acumulada ($0 \leq F(X) \leq 1$) y se determina el valor de la variable aleatoria correspondiente

Otros elementos importantes

Número de réplicas

$$T = \frac{t^2_{\frac{\alpha}{2}} p_H(1-p_H)}{A^2}$$

Intervalo de confianza

$$\bar{X} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Ejemplo: Se tiene la siguiente distribución de la demanda (días):

Demanda	Frecuencia
42	17
45	20
48	40
51	15
54	10

Modelar estocásticamente su comportamiento y encontrar sus parámetros principales. Hacer un análisis de los mismos.

Ejemplo 2

Se quiere analizar la rentabilidad de una inversión a cuatro años de cierto producto.

Se estima que la demanda del mismo está uniformemente distribuida con valores entre 8 y 13 unidades anuales con un precio de $35,000 cada una. Los costos fijos anuales son de $15,000 y los variables del 75% de las ventas. La depreciación anual del equipo necesario es de $10,000 y se estima una inversión de $150,000. El costo de capital es del 10% y los impuestos se calculan en base a una tasa del 34%.

A fin de tener un estimado realista, se sugiere desarrollar 100 simulaciones del comportamiento de la inversión y calcular el promedio del valor presente de la misma antes de tomar una decisión.

	B	C	D	E	F
1	$ 150,000.00		Costos variables	75%	de lo
2	$ 35,000.00		Costo de capital	10%	
3	$ 15,000.00		Impuestos	34%	
4	$ 10,000.00		Demanda	max	13
5				min	8

	A	B	C
13	Unidades vendidas		=REDONDEAR($F$5+($F$4-$F$5)*ALEATORIO(),0)
14	Ingresos por ventas		=$B$2*C13
15	Costos variables		=$E$1*C14
16	Costos fijos		=$B$3
17	Depreciación anual		=$B$4
18	UAI		=C14-SUMA(C15:C17)
19	Impuestos		=$E$3*C18
20	Utilidad Neta		=C18-C19
21	Mas: Depreciación anual		=$B$4
22	Flujo Neto	=-B12	=C20+C21
23			
24		VPN	=VNA(E2,C22:F22)+B22

Inversión Inicial	$	150,000.00	Costos variables		75%	de los ingresos
Precio de venta	$	35,000.00	Costo de capital		10%	
Costos fijos	$	15,000.00	Impuestos		34%	
Depreciación anual	$	10,000.00	Demanda	max		13
				min		8

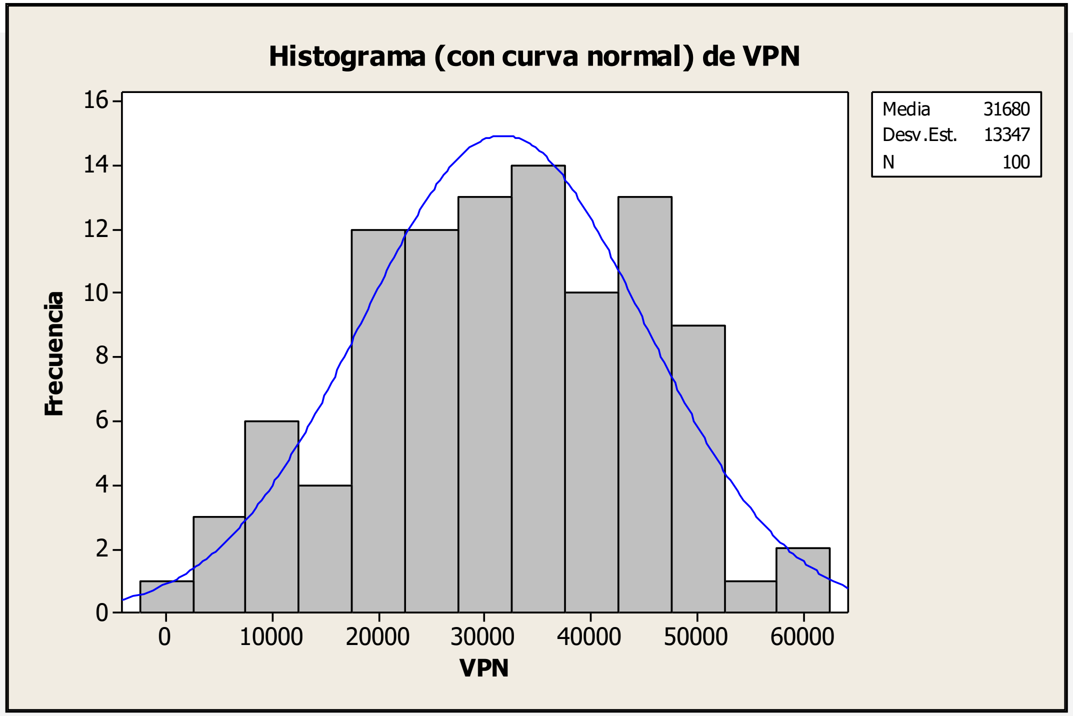
Año	0	1	2	3	4
Inversión Inicial	$ 150,000.00				
Unidades vendidas		10	10	13	10
Ingresos por ventas		$ 350,000.00	$ 350,000.00	$ 455,000.00	$ 350,000.00
Costos variables		$ 262,500.00	$ 262,500.00	$ 341,250.00	$ 262,500.00
Costos fijos		$ 15,000.00	$ 15,000.00	$ 15,000.00	$ 15,000.00
Depreciación anual		$ 10,000.00	$ 10,000.00	$ 10,000.00	$ 10,000.00
UAII		$ 62,500.00	$ 62,500.00	$ 88,750.00	$ 62,500.00
Impuestos		$ 21,250.00	$ 21,250.00	$ 30,175.00	$ 21,250.00
Utilidad Neta		$ 41,250.00	$ 41,250.00	$ 58,575.00	$ 41,250.00
Mas: Depreciación anual		$ 10,000.00	$ 10,000.00	$ 10,000.00	$ 10,000.00
Flujo Neto	$ (150,000.00)	$ 51,250.00	$ 51,250.00	$ 68,575.00	$ 51,250.00

Valor presente $ 25,472.13

	A	B
1	Simulacion	VPN
2	1	25,472.13
3	2	25,073.75
4	3	51,595.91
5	4	13,761.20
6	5	25,073.75
7	6	31,550.46
8	7	29,495.42
9	8	50,807.03
10	9	28,639.49
11	10	44,338.21
12	11	16,005.57
13	12	50,018.15
14	13	24,643.81
15	14	33,412.22
16	15	3,344.03
17	16	20,738.85
18	17	21,567.17
19	18	38,567.55
20	19	35,494.86
21	20	36,883.29
22	21	46,073.75
23	22	49,106.99

Resultados de la simulación

Variable	N	Media	Desv.Est.	Mínimo	Mediana	Máximo
VPN	100	31680	13347	2038	32454	59485



Resultados por MINITAB