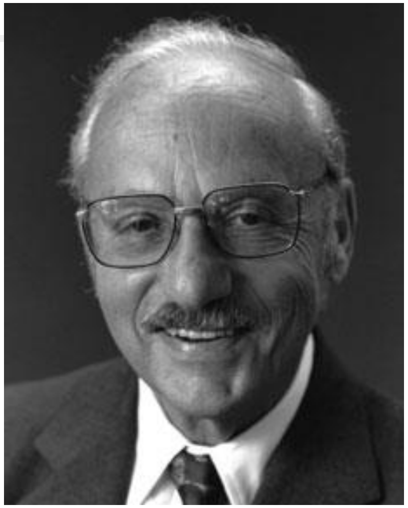
La Programación Lineal

Aspectos generales de la Programación Lineal (P. L.)

- Se considera a George Dantzig el padre de la P. L.
- Su objetivo es el de asignar recursos escasos a actividades que compiten por ellos.



http://www2.informs.org/History/dantzig/

- Técnica matemática que permite seleccionar el mejor curso de acción o programa de un conjunto de soluciones factibles.
- Los modelos que describen las relaciones son funciones lineales.

Formulación típica

- El planteamiento típico se puede suponer como:

  Optimizar alguna variable dependiente, expresada como una función lineal de n variables independientes, sujeta a una serie de restricciones lineales que son a su vez funciones de las n variables independientes.

Formulación típica

- La variable dependiente se conoce como **Función Objetivo**
- Está relacionada a menudo con conceptos económicos tales como ganancias, costos, ingresos, tiempo, distancia, etc.
- Las variables independientes son **variables de decisión**

Formulación estándar

$$\left.\begin{aligned}&\text{Optimizar :}\\&f(x) = Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\end{aligned}\right\}\ \text{Función objetivo}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{sujeto a :}\\&g(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \le b_i \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, m\end{aligned}\right\}\ \text{Restricciones}$$

Donde:

- f(.): función objetivo
- x_j : variables de decisión
- c_j : coeficiente de la j-ésima variable de
  decisión en la función objetivo
- $a_{1,j}$: coeficiente de la j-ésima variable de decisión
  en la iésima restricción
- b_i : constante o límite de la i-ésima restricción

Las restricciones:

- En general las restricciones pueden ser de tres tipos:
  - $g(x) \leq b$
  - $g(x) \geq b$, o
  - $g(x) = b$
- La restricción de tipo $\leq$ asegura que el uso de un recurso no exceda cierto límite
- La restricción de tipo $\geq$ asegura que el uso de un recurso satisfaga un mínimo establecido
- La restricción de tipo $=$ asegura que el uso de un recurso esté limitada a una cantidad previamente establecida.

Pasos para formular el modelo

- Entender bien el problema
- Identificar las variables de decisión
- Establecer la función objetivo
- Establecer las restricciones
- Identificar los límites superior e inferior de las variables de decisión

Ejemplo

Una fábrica de ventanas produce artículos de vidrio de alta calidad, incluyendo ventanas y puertas. Tiene tres plantas. Los marcos de aluminio se producen en la planta A, los de madera se producen en la planta B y en la C se corta el vidrio y se ensamblan los productos.

Se ha decidido ampliar la producción en dos artículos adicionales: un tipo especial de puerta y una ventana de seguridad. Se ha determinado que la empresa tiene capacidad suficiente para producir estos artículos sin sacrificar la producción de los otros que tiene, aunque tendrán que competir con la capacidad excedente de la planta C. Adicionalmente se conoce que se podrá vender todo lo que se produce.

Planta	Horas utilizadas por unidad producida		Capacidad (horas)
	Producto		
	Puertas	Ventanas	
A	1	0	4
B	0	2	12
C	3	2	18
Utilidad por unidad vendida	3	5	

La empresa está interesada en encontrar una mezcla óptima de puertas especiales y ventanas de seguridad a fin de tener la mayor cantidad de ingresos posible.

Ejemplo …

La empresa está interesada en encontrar una mezcla óptima de puertas especiales y ventanas de seguridad a fin de tener la mayor cantidad de ingresos posible.

Formulación

- ¿Cuál es el objetivo del problema?
  - Encontrar cuantas puertas y ventanas producir a fin de maximizar la utilidad
- ¿Cuáles son las variables de decisión?
  - La cantidad de puertas (x_1) y ventanas (x_2) a producir
- ¿Cuál es la función objetivo?
  - La utilidad por ventana y puerta vendida
- ¿Cuáles son las restricciones?
  - Las capacidades de las plantas

Formulación estándar

Maximizar:

$Z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeto a:

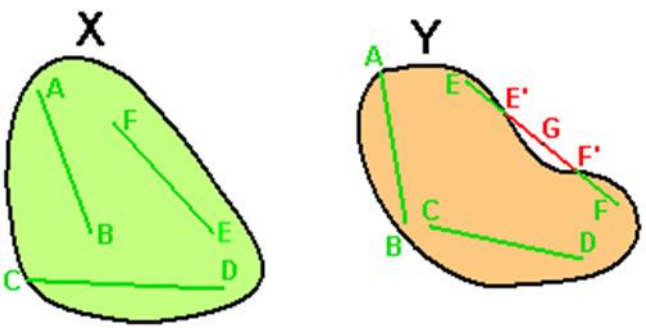
$$
\begin{aligned}
x_1 \quad & \leq 4 \\
2x_2 & \leq 12 \\
3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\
x_1, \quad x_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

Resolviendo el problema

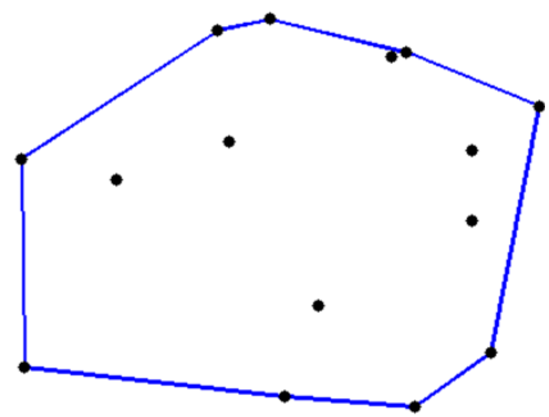
- Método intuitivo
- Enumeración completa
- Solución gráfica
- Métodos matemáticos exactos
  - Simplex
  - Otros
- Heurísticas

La solución gráfica

- Un problema de programación lineal puede representarse como un espacio o polígono convexo
- Formado por la intersección de las diferentes restricciones.
- ¿Qué es un polígono convexo?
  - Un polígono en el cual los ángulos internos son menores a 180 grados y las diagonales que pueden trazarse son todas internas.

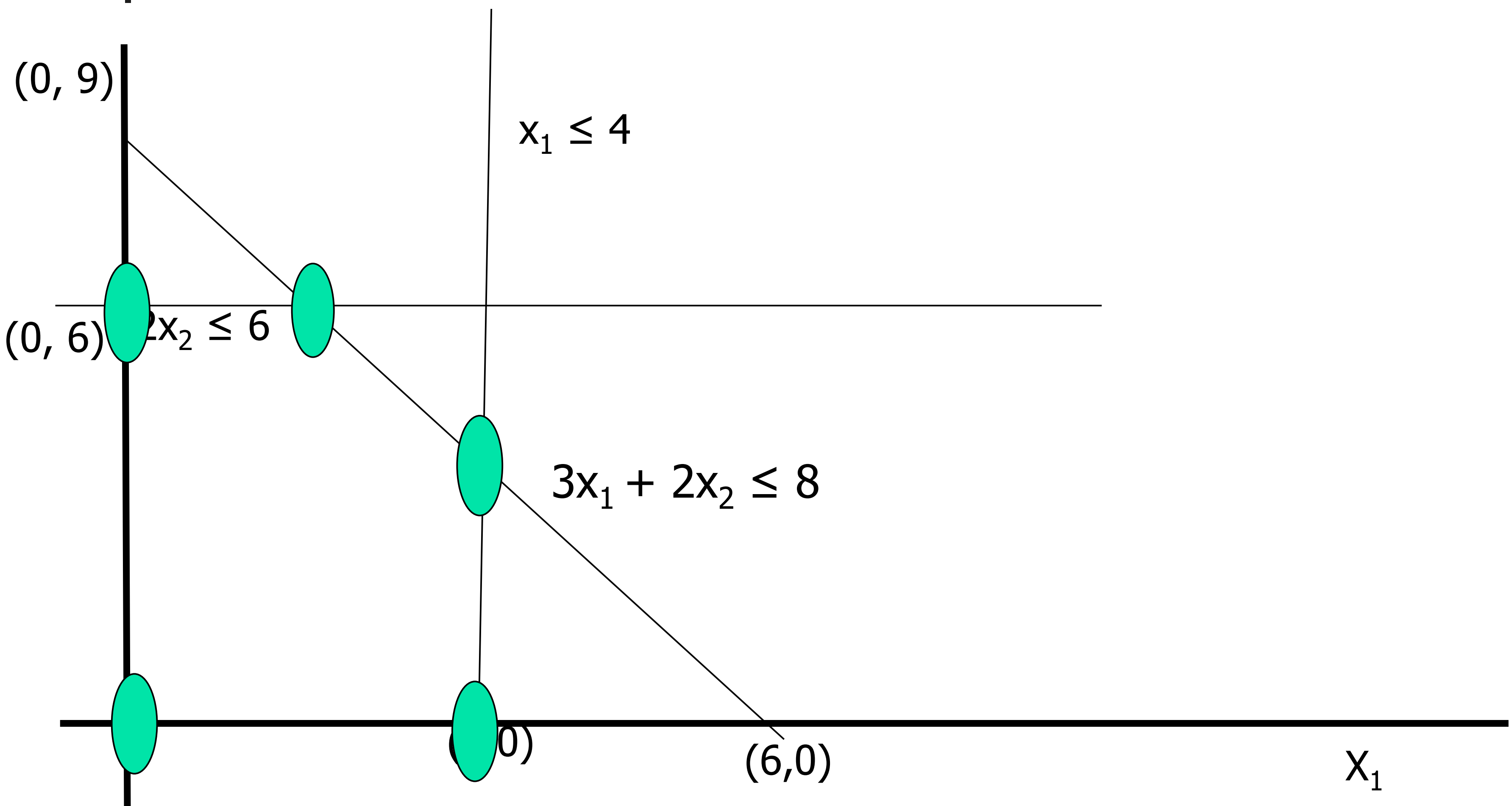


Conjunto convexo   Conjunto no convexo



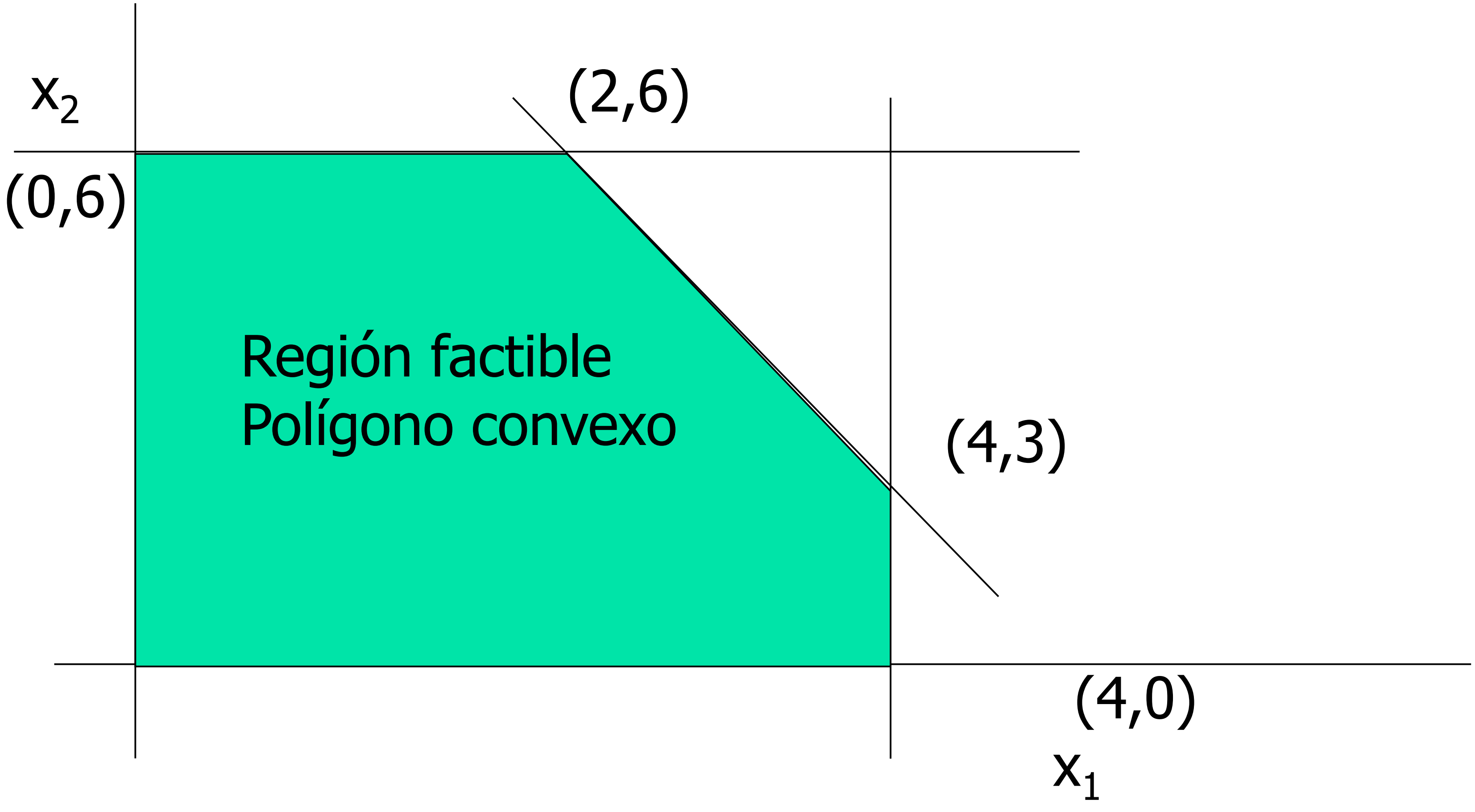
El problema ejemplo

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad\quad\quad &\leq 4 \\
2x_2 &\leq 12 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\
x_1, \quad x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



Solución gráfica

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



La solución óptima

- La región factible es el conjunto de valores que una variable de decisión puede asumir y simultáneamente satisfacer las diferentes restricciones.
- Es una región convexa, por lo tanto sus esquinas son una función ponderada de cualquier combinación de los puntos que la forman.
- Las posibles soluciones están localizadas en las intersecciones o esquinas de los hiperplanos formados por las restricciones.

La solución óptima

- Si existe una solución óptima, ésta deberá estar en una esquina.
- Si hay más de una solución, al menos dos de ellas deberán estar en esquinas adyacentes.
- Existe un número finito de soluciones esquinas.
- Si una esquina proporciona una solución igual o mejor que sus puntos esquinas factibles adyacentes, entonces es óptimo.

La solución óptima

		Función objetivo	
Esquinas		x_1	x_2
x_1	x_2	3	5
0	6	30	
2	6	36	
4	3	27	
4	0	12	

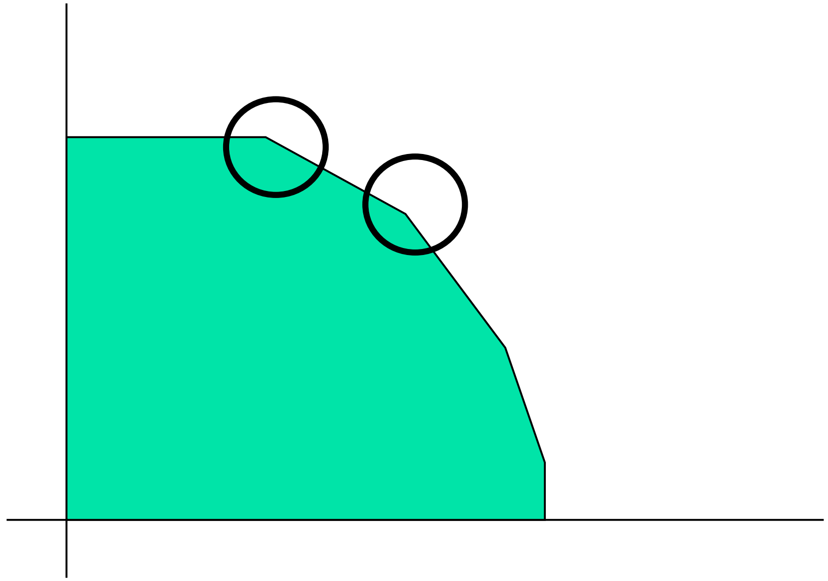
Óptimo

Significado de la solución

- La mezcla óptima de productos será
  - 2 puertas y 6 ventanas
  - Un ingreso o utilidad de 36 unidades monetarias
  - Quedarán disponible recursos en la planta A para poder hacer 2 puertas más ($2 \leq 4$)
  - No quedarán recursos disponibles recursos en la planta B ($2*6 = 12$)
  - No quedarán recursos disponibles en la planta B ($3*2 + 2*6 = 18$)

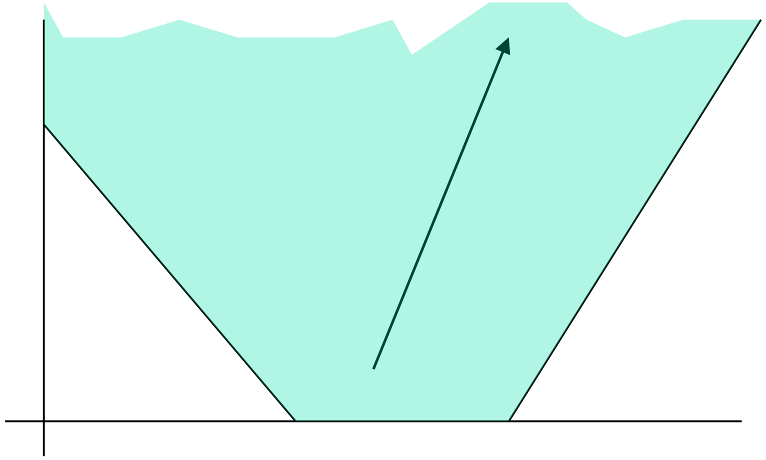
Algunas condiciones especiales

- Soluciones alternas: puede existir más de una solución óptima, pero al menos una de ellas debe estar en una esquina.



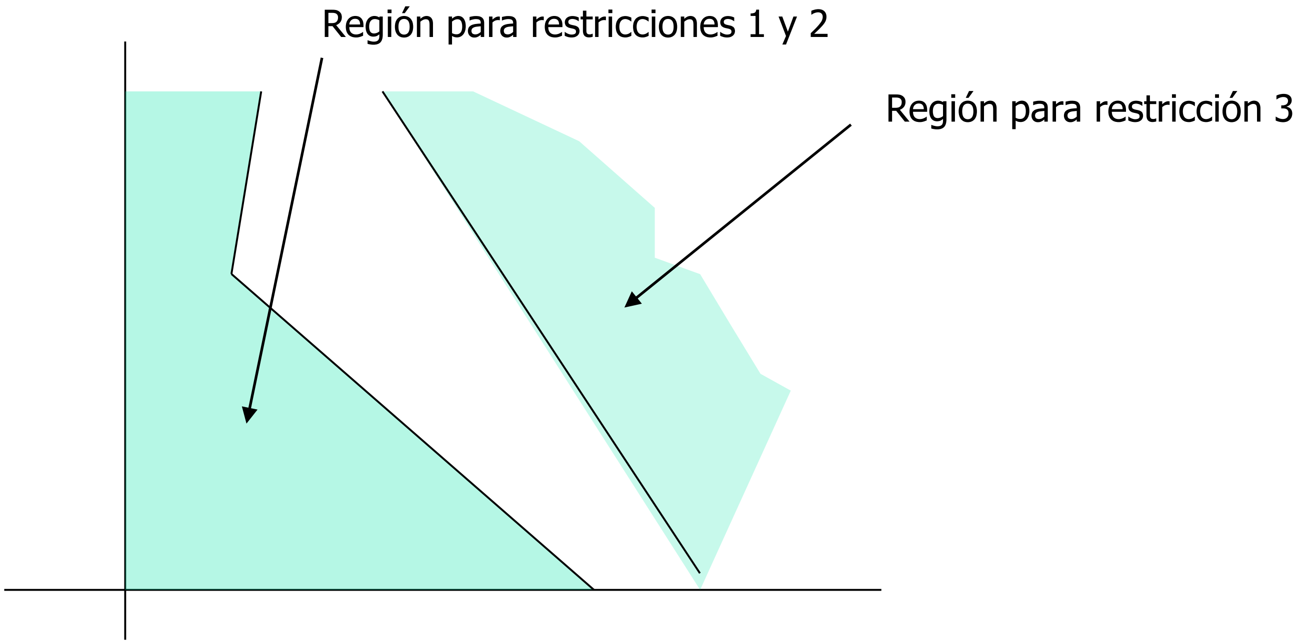
Solución no limitada

- El espacio o región de la solución no está limitado por ninguna restricción, por lo que la solución podrá variar de manera infinita sin límite. Normalmente esto indica un error en la formulación



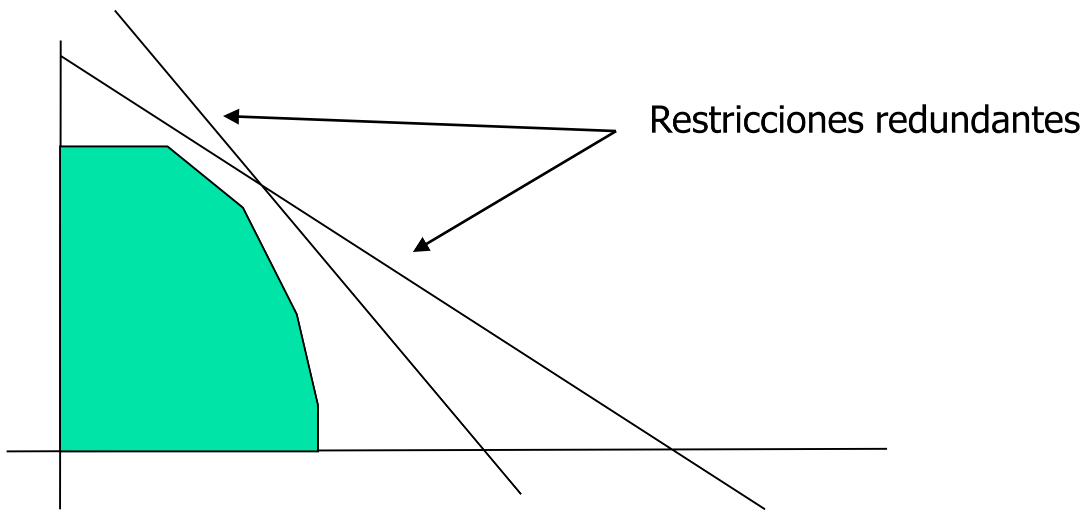
Problema no factible

- Cuando el conjunto de soluciones es un conjunto vacío, esto es, no hay puntos dentro de la región factible que satisfaga todas las soluciones



Restricciones redundantes

- Hay más de una restricción que no afecta la región factible, al estar la misma limitada por otras restricciones. Estas restricciones no son necesarias para encontrar la solución del modelo



El uso de Software

- Existe una gran cantidad de herramientas computacionales que permiten resolver problemas de mediano y gran tamaño (más de 50,000 variables y restricciones)
- QM para uso académico
- Solver de Excel
- Solver para Open Office

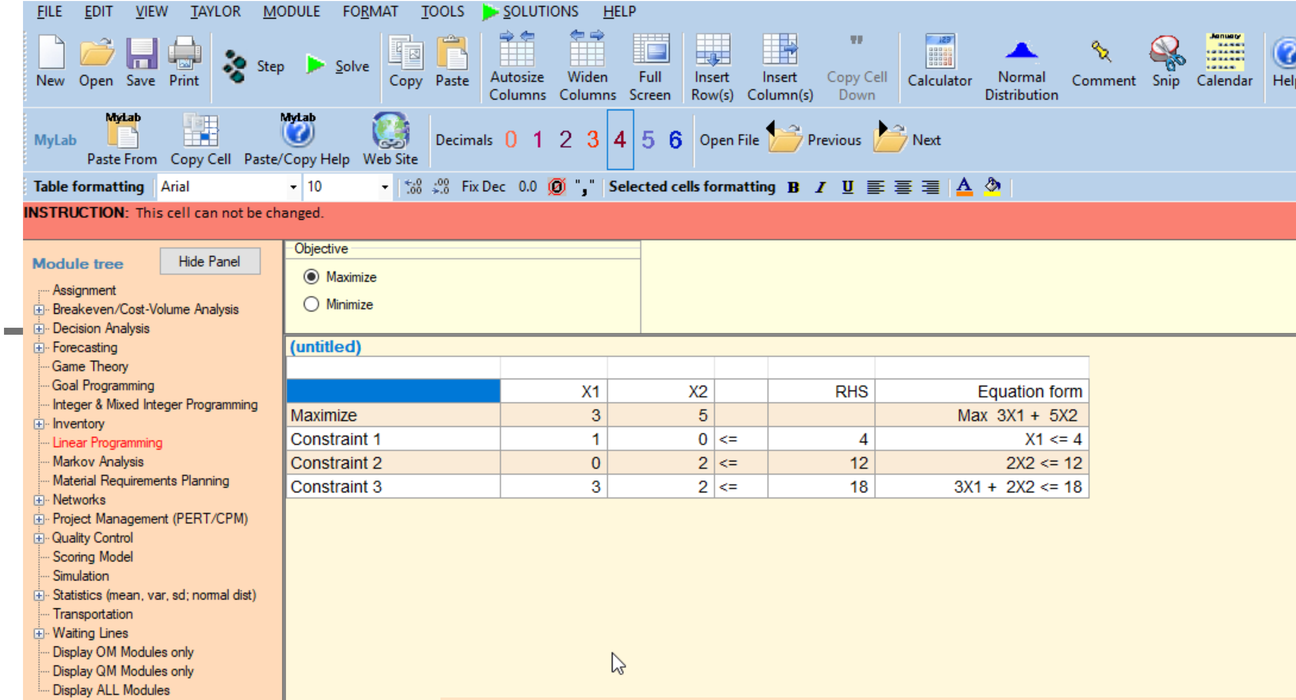
QM

Maximizar:

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad &\leq 4 \\
2x_2 &\leq 12 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\
x_1, \quad x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



	X1	X2		RHS	Equation form
Maximize	3	5			Max 3X1 + 5X2
Constraint 1	1	0	<=	4	X1 <= 4
Constraint 2	0	2	<=	12	2X2 <= 12
Constraint 3	3	2	<=	18	3X1 + 2X2 <= 18

Linear Programming Results

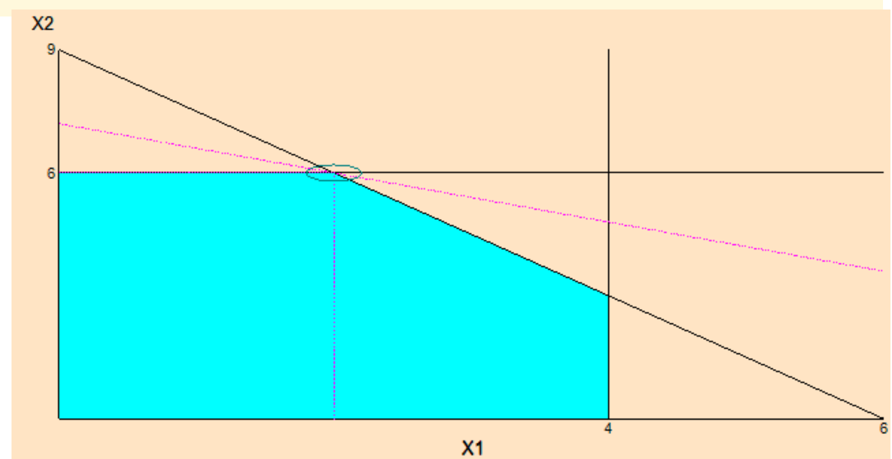
(untitled) Solution

	X1	X2		RHS	Dual
Maximize	3	5			
Constraint 1	1	0	<=	4	0
Constraint 2	0	2	<=	12	1.5
Constraint 3	3	2	<=	18	1
Solution	2	6		36	

Solution list

(untitled) Solution

Variable	Status	Value
X1	Basic	2
X2	Basic	6
slack 1	Basic	2
slack 2	NONBasic	0
slack 3	NONBasic	0
Optimal Value (Z)		36



Solver

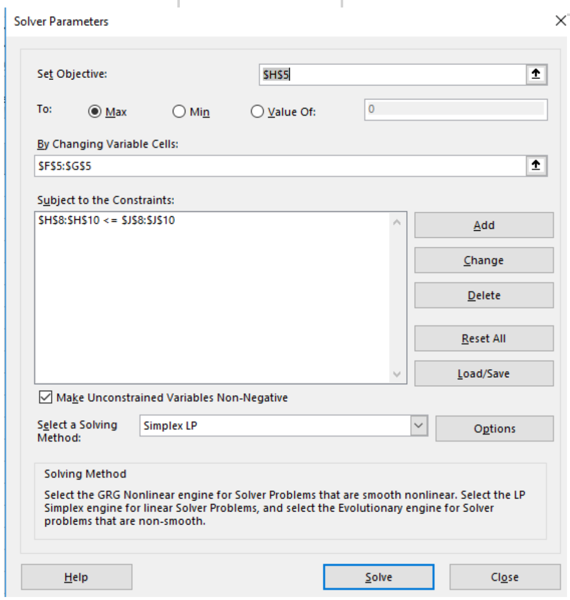
Maximizar:

$Z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 &\le 4 \\ 2x_2 &\le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 18 \\ x_1, \quad x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

		x1	x2	Total		
	Ingreso	3	5			
	Ingreso	0	0	0		
Sujeto a						
		1	0	0		4
		0	2	0		12



		x1	x2	Total		
	Ingreso	3	5			
	Ingreso	2	6	36		
Sujeto a						
		1	0	2		4
		0	2	12		12
		3	2	18		18

Microsoft Excel 16.0 Sensitivity Report
Worksheet: [Book1]Sheet1
Report Created: 04/02/2019 7:50:41 a.m.

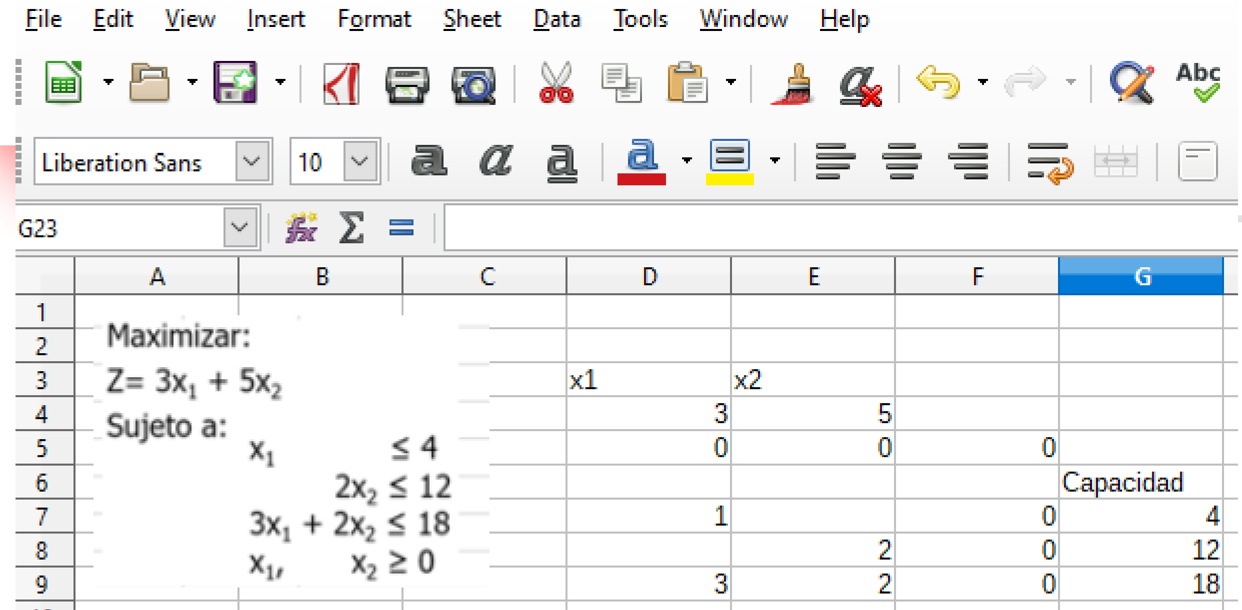
Variable Cells

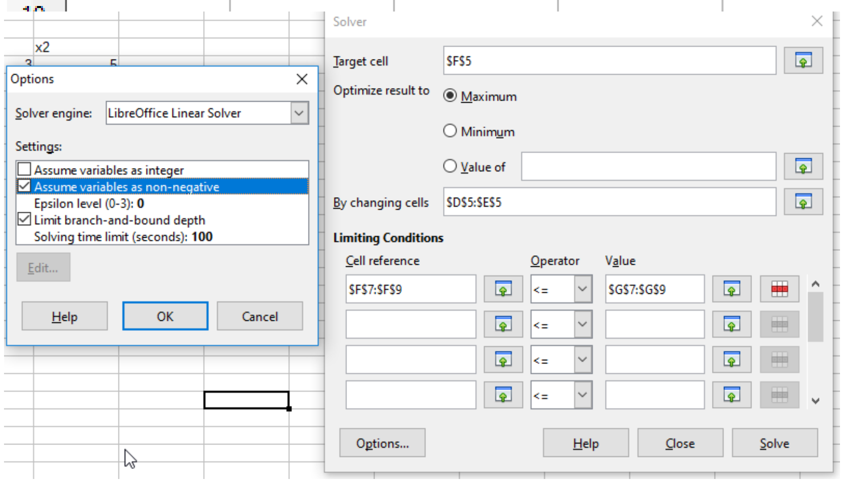
Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
F5	Ingreso x1	2	0	3	4.5	3
G5	Ingreso x2	6	0	5	1E+30	3

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
H8	Total	2	0	4	1E+30	2
H9	Total	12	1.5	12	6	6
H10	Total	18	1	18	6	6

Libre Office





x1	x2		
3	5		
2	6	36	
			Capacidad
1		2	4
	2	12	12
3	2	18	18