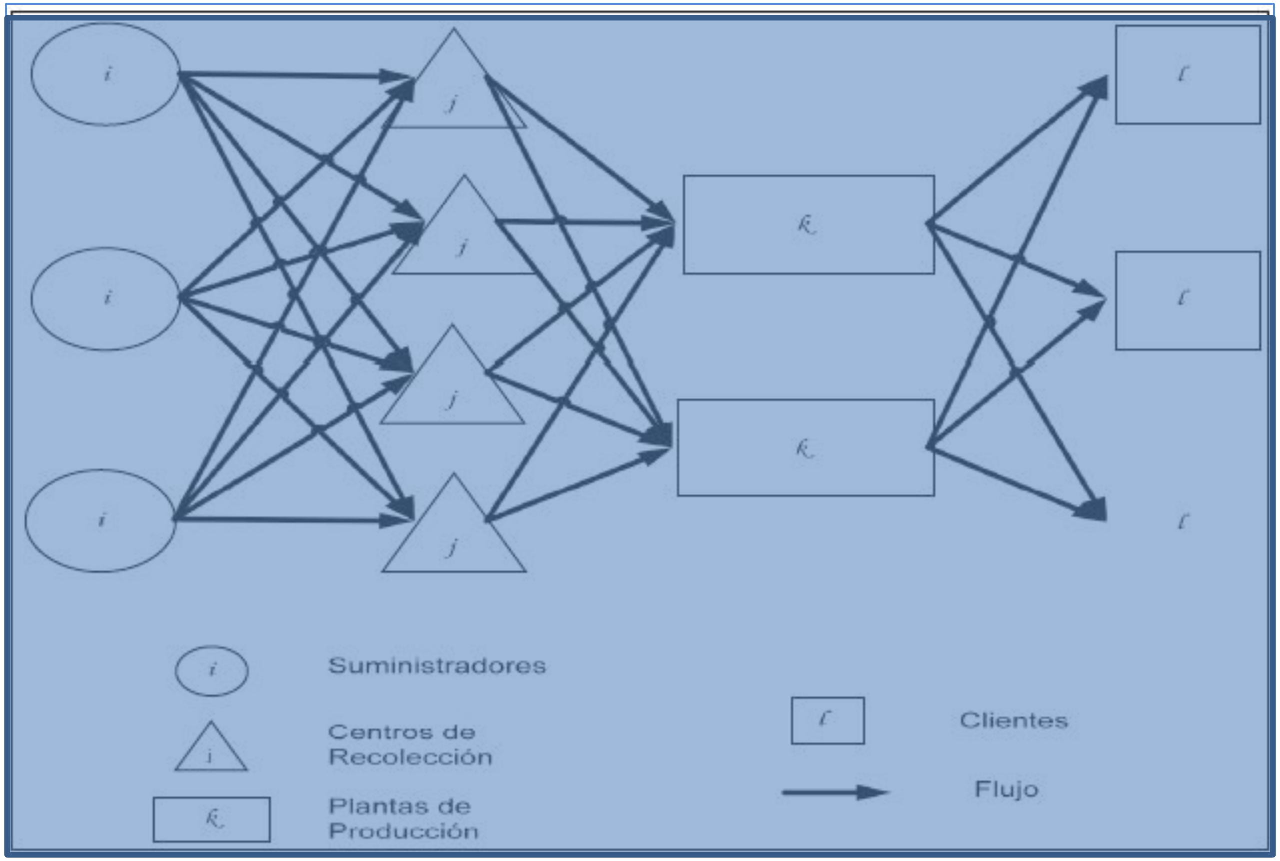
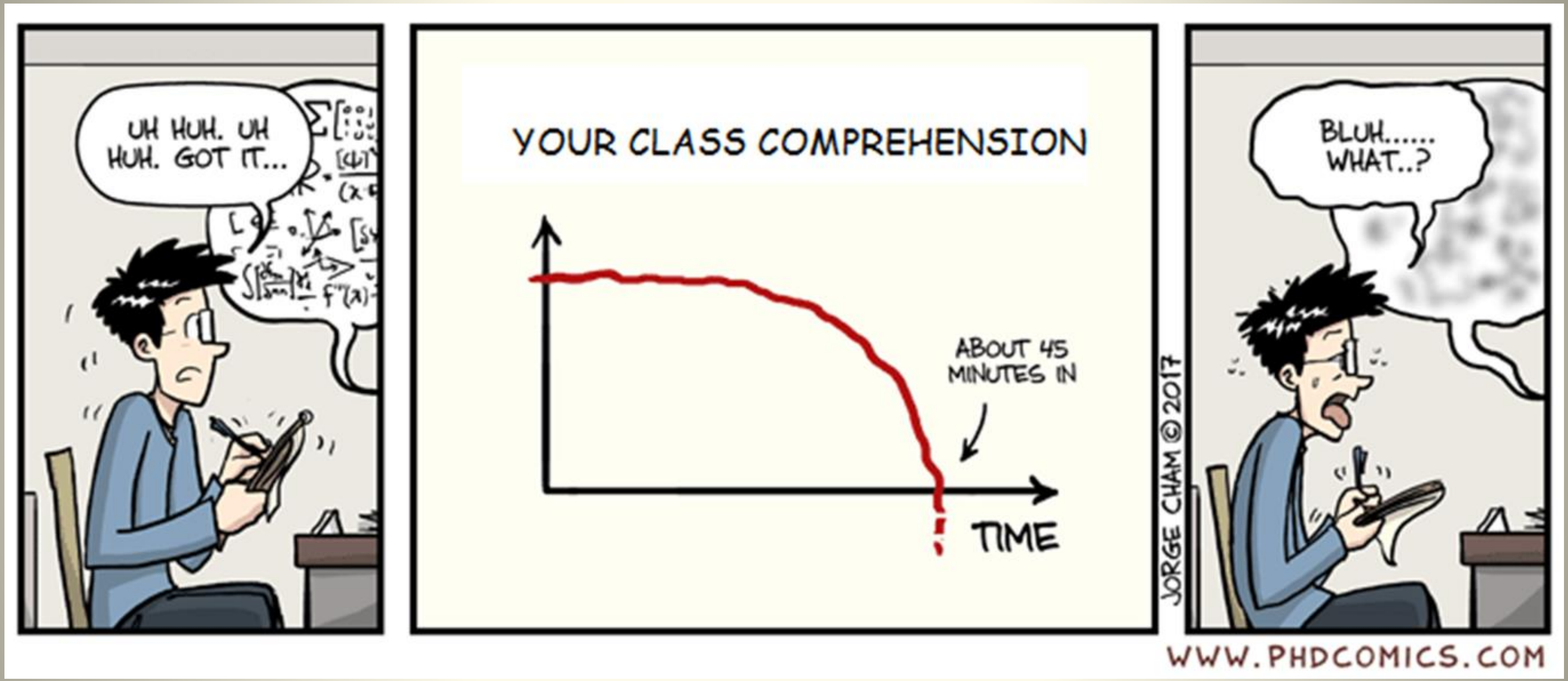
Modelando la cadena de suministros



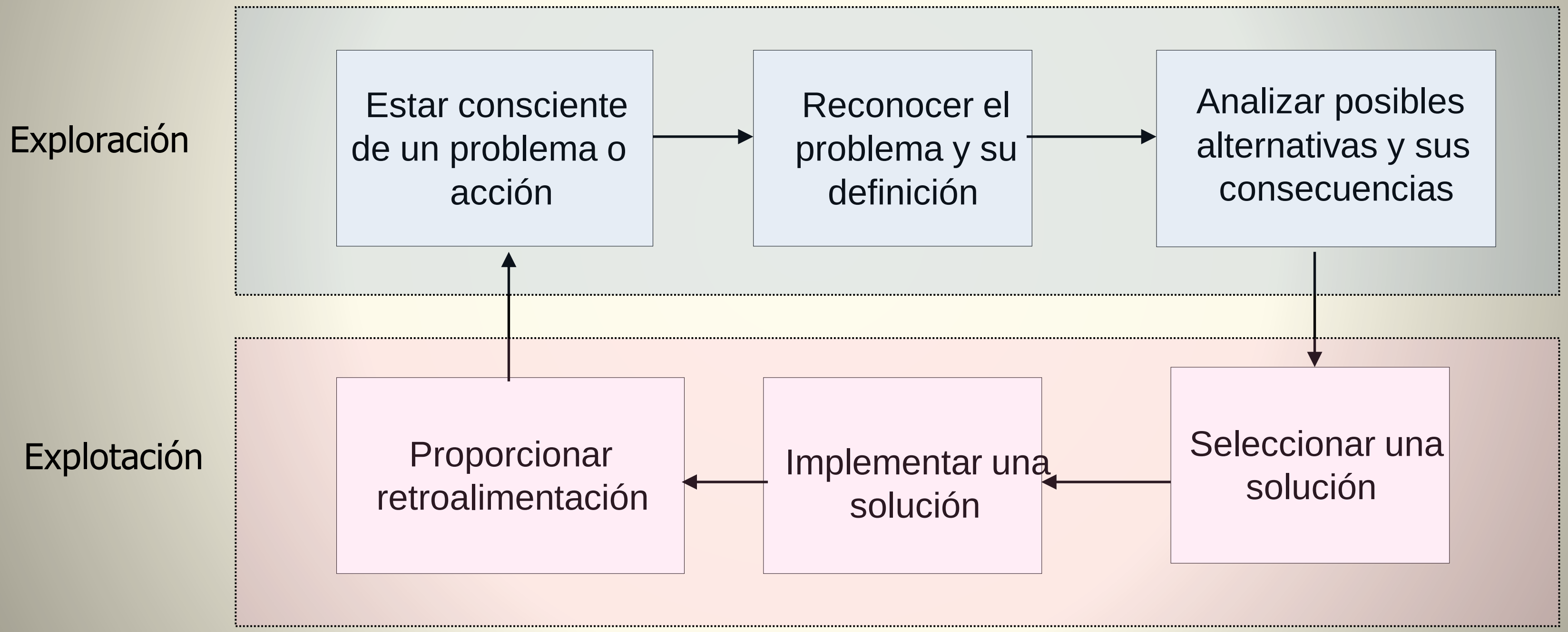
http://academia.utp.ac.ac.pa/humberto-alvarez


UH HUH. UH HUH. GOT IT...
YOUR CLASS COMPREHENSION
ABOUT 45 MINUTES IN
TIME
JORGE CHAM © 2017
BLUH...... WHAT..?
WWW.PHDCOMICS.COM

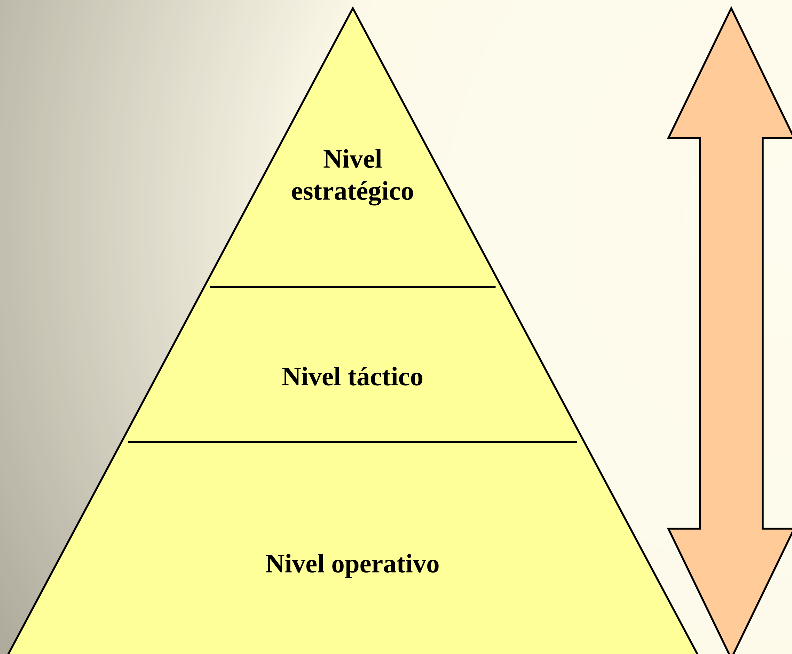
Toma de decisiones

- Keeney (2004) define decisiones como situaciones donde se reconce que hay que hacer una selección a conciencia de un curso de acción.
- Es la emisión de un juicio referente a lo que se debe hacer en una situación determinada, después de haber deliberado acerca de algunos cursos de acción específicos
  - Exploración: búsqueda y descubrimiento
  - Explotación: refinamiento e institucionalización

El proceso de toma de decisiones



Tipos de decisiones



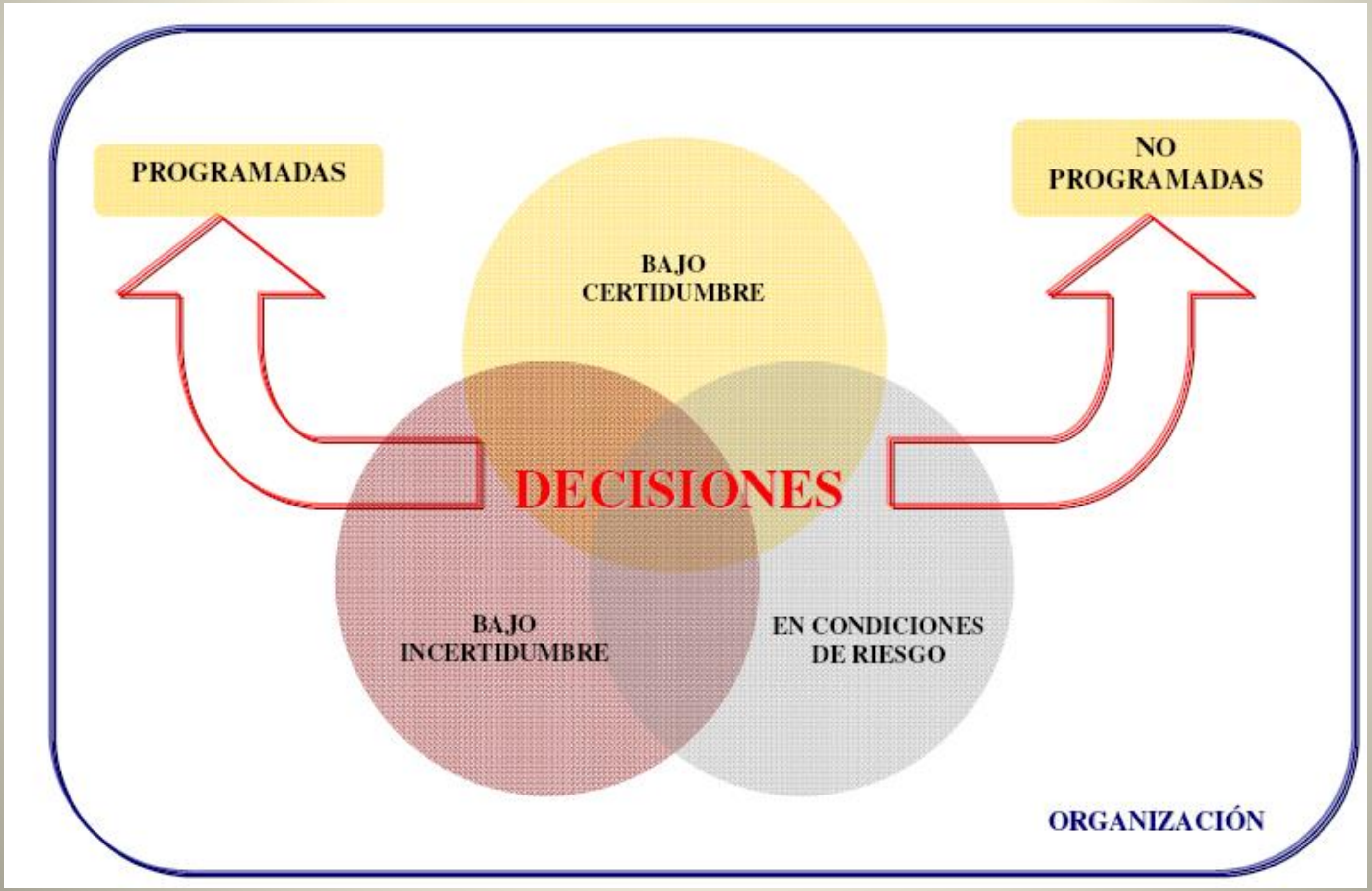
Decisiones no programadas.
Efecto a largo plazo.

Son soluciones específicas creadas por medio de un proceso no estructurado con el fin de tratar problemas que no son de rutina.

Decisiones programadas.
Efecto a corto plazo.

Son aquellas tomadas como un hábito, regla o procedimiento; se aplican a problemas estructurados o rutinarios y en algunos casos son repetitivos y es posible definir, prever y analizar sus componentes.

Decisiones e incertidumbre



Teorías que rigen la toma de decisiones

- **Teoría racional**
  - Se conocen las alternativas
  - Se conocen las consecuencias
  - Reglas para priorizar
  - Reglas o criterios de decisión
  - Solución óptima

Teorías que rigen la toma de decisiones

- **Teoría de la racionalidad limitada**
  - Modifica la teoría racional
  - Conocimiento limitado de alternativas
  - Conocimiento limitado de consecuencias
  - Reglas para priorizar
  - Reglas o criterios de decisión
  - Se busca satisfacer

Enfoques que rigen la toma de decisiones

- **Toma decisiones basada en reglas**
  - Alternativa realista a las anteriores
  - Decisiones definidas por procedimientos, estándares, reglas o políticas
  - Toma decisiones basadas en los siguientes factores:
    - Identidad: decisiones basadas en situación particular
    - Situación: situaciones están clasificadas en categorías con reglas asociadas a la identidad
    - Relación:acciones específicas para atacar situaciones que estén de acuerdo a sus identidades en dichas situaciones

Buenas decisiones vs. buenos resultados

- No necesariamente buenas decisiones resultan en buenos resultados
- El efecto de la incertidumbre puede afectar los resultados
- Riesgo vs. Certeza
- Minimizar riesgo minimizando sus elementos:
  - Humano
  - Ambiental

Decisiones para el diseño de una red

- El papel de las instalaciones
- Localización de las instalaciones
- Capacidad de las instalaciones
- Asignación de los proveedores y mercados

Factores que influencian el diseño

- Estratégicos
- Tecnológicos
- Macroeconómicos
- Políticos
- Infraestructura
- Competitividad
- Costos logísticos y de instalaciones

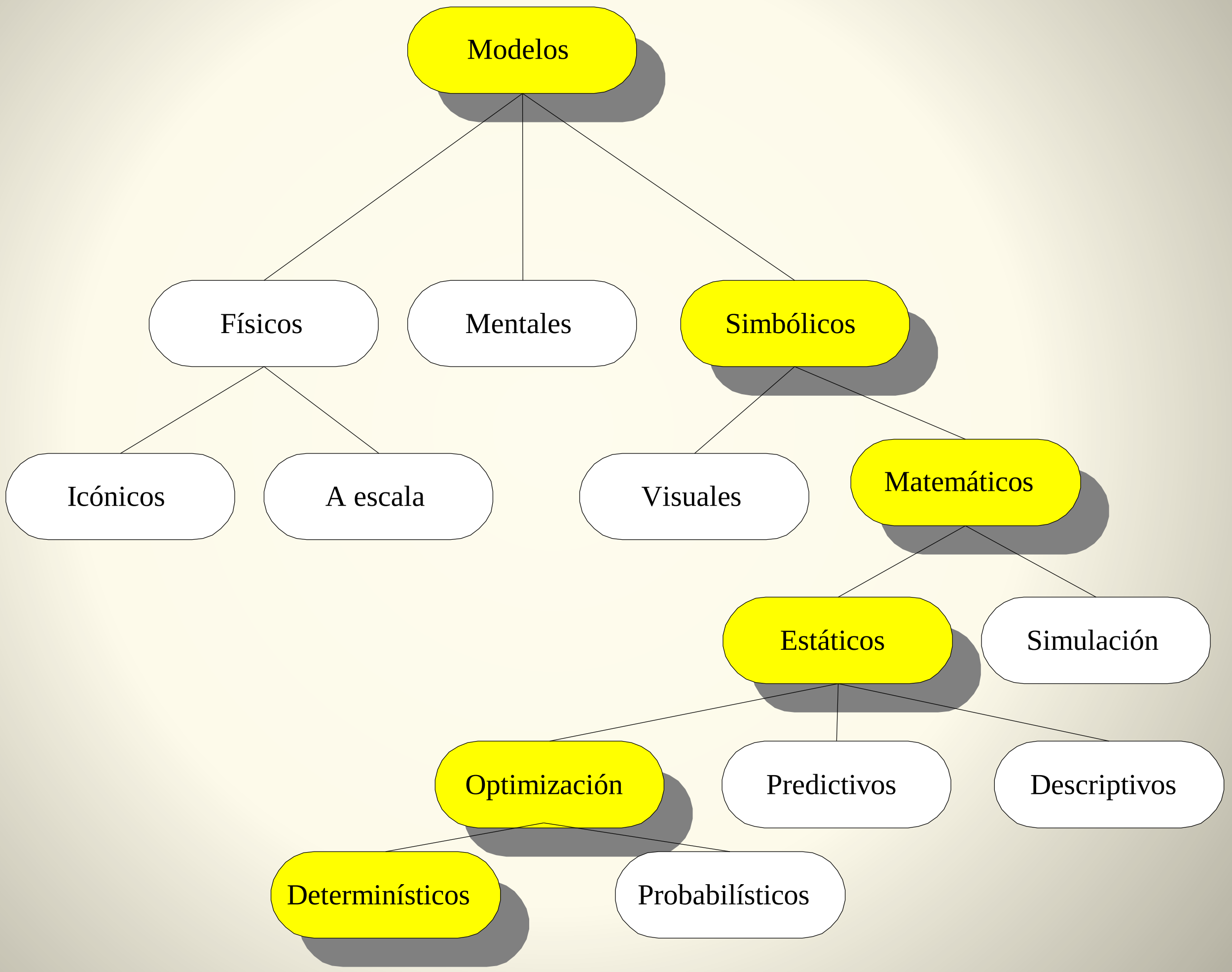
¿Qué es un modelo?

- Un modelo es una representación de un grupo de objetos o ideas de alguna manera diferente a la entidad misma
  - Es una abstracción de la realidad
  - Son ideales
  - No son exactos
- Su objetivo es el capacitar al analista para determinar como uno o varios cambios en las variables del sistema pueden afectarlo parcial o globalmente.

Modelos y la toma de decisiones

- El proceso racional de toma de decisiones utiliza modelos y reglas matemáticas
- Estos modelos y reglas permiten un proceso sistemático y ordenado de toma de decisiones
- La idea de utilizar modelos no es nueva: mapas, diagramas de flujo, gráficas y ecuaciones básicas apoyan el proceso racional de toma de decisiones

Taxonomía


Modelos
Físicos
Mentales
Simbólicos
Icónicos
A escala
Visuales
Matemáticos
Estáticos
Simulación
Optimización
Predictivos
Descriptivos
Determinísticos
Probabilísticos

Modelos Matemáticos

- Son expresiones idealizadas expresadas en término de expresiones y símbolos matemáticos (Mckeon, 1980)
- Describen relaciones funcionales de la forma: $Y = f(.)$

Características de un modelo matemático

- **Parsimonia**, un modelo no es necesariamente mejor por tener muchos parámetros. La simplicidad es siempre deseable.
- **Modestia**, deben tratar de alcanzarse sólo objetivos asequibles. No debe aspirar a imitar la realidad sino sólo a resaltar aquellos aspectos de interés para su aplicación.
- **Exactitud**, el modelo debe reproducir en la medida de lo posible el funcionamiento del sistema y generar valores para las variables de salida y estado similares a los observados en la realidad.
- **Verificabilidad**, los resultados del modelo deben poder compararse con datos reales y determinar de este modo el grado de exactitud del modelo.

Clasificación de los modelos

- Estructura, objetivos y restricciones (lineales o no-lineales)
- Características de las Variables (Reales, Discretas -Enteras-, Binarias)
- Certidumbre de los Parámetros (Ciertos e Inciertos)
- Número de Objetivos (Ninguno, Uno o más de Uno)
- Número de Restricciones (Ninguna, Más de Cero)

El problema

El problema resultante de un modelo matemático tiene cinco elementos

- **El problema**: la pregunta a resolver
- **Elementos**: lista de parámetros, variables y relaciones
- **Instancias**: valores de los parámetros
- **Solución**: valores de las variables de manera que su combinación sea factible.
- **Supuestos**: son limitantes o situaciones bajo las cuales se define la validez del modelo.

Tipo de problemas

- Problemas decidibles o tractables: existen algoritmos capaces de resolverlos
- Problemas indecidibles o no tractables: no existen algoritmos capaces de resolverlos.

Tipos de problema

- Conteo
- Estimación
- Ordenamiento
- Estructuración

Supuestos

- Las funciones matemáticas utilizadas describen el sistema
- Las variables son cuantificables
- Las variables están directamente ligadas con el objetivo del problema modelado.

Ciclo del modelado

- **Etapa 1.** Definir el Problema. Esta fase incluye entender el problema y acordar los resultados a obtener.
- **Etapa 2.** Modelar y Construir la Solución. Esta fase incluye definir el tipo de técnica a utilizar, generar el modelo (implementarlo informáticamente si es el caso) y por último validarlo.
- **Etapa 3.** Utilizar la Solución. Ser capaz de implementar el modelo de tal manera que se utilice, y mantener un sistema de actualización son los dos elementos básicos de esta fase.

El uso de datos

- El modelo debe requerir datos, no los datos conformar el modelo.
- Hay tres conjuntos básicos de datos necesarios para crear y validar un modelo:
  - Datos que aportan información preliminar y contextual. Permitirán generar el modelo.
  - Datos que se recogen para definir el modelo. Estos datos nos permitirán parametrizar el modelo.
  - Datos que permiten evaluar la bondad del modelo.

Elementos de un modelo matemático

- Variables
  - **Independientes**: definen las condiciones del sistema en un momento dado
    - Endógenas
    - Exógenas
  - **Dependientes**: definen la respuesta del modelo
- Relación matemática

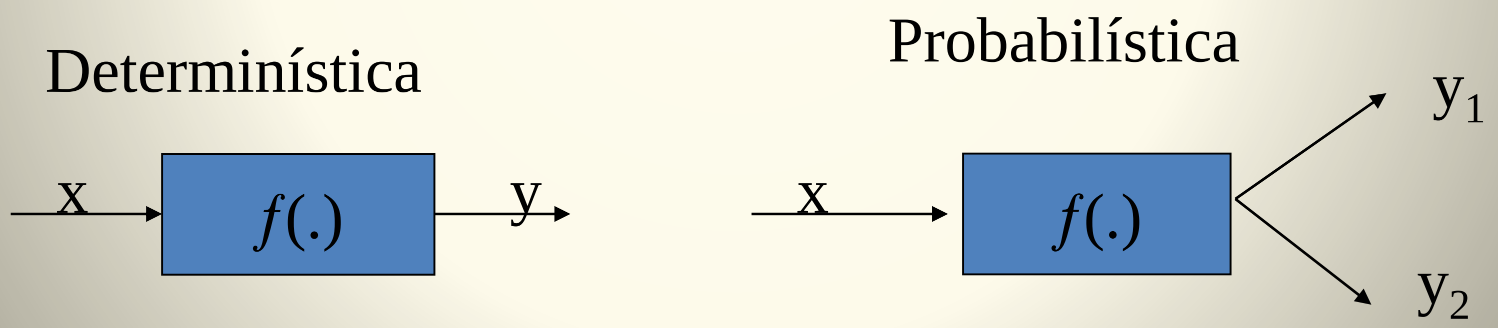
Categorías de los Modelos

Características

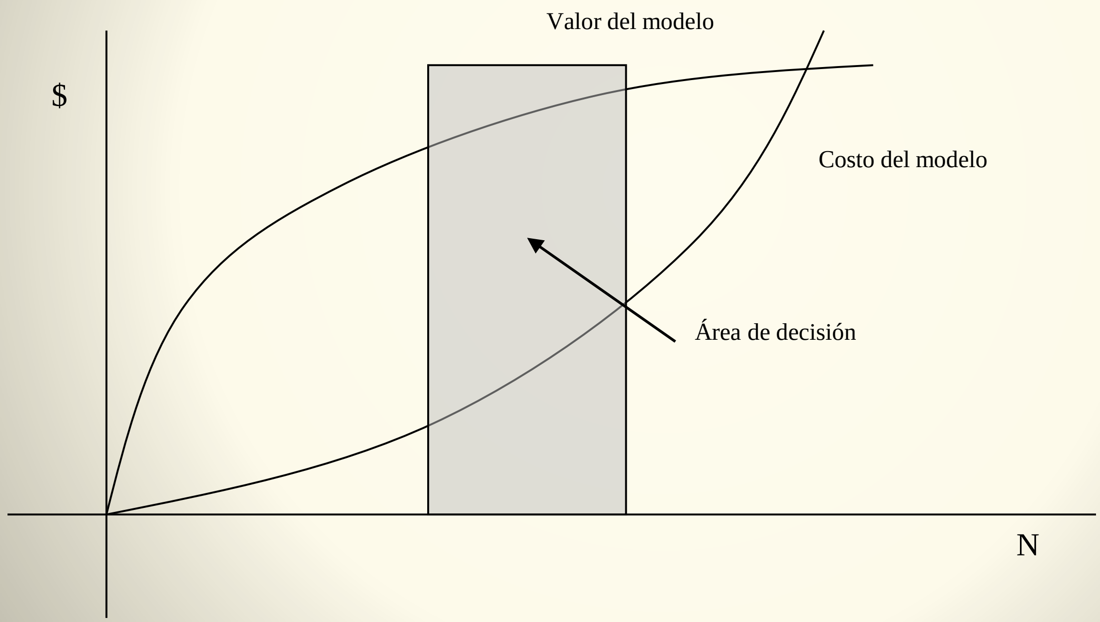
Categoría	Forma de $f(.)$	Variable independiente	Técnica cuantitativa
Prescriptivo u optimización	Conocida, bien definida	Conocida o bajo el control de tomador de decisiones	Programación lineal, entera o no lineal; Redes; CPM; EOQ
Predictivo	Desconocida, mal definida	Conocida o bajo el control de tomador de decisiones	Regresión, Series de Tiempo, Análisis de Discriminante
Descriptivo	Conocida, bien definida	Desconocida o bajo incertidumbre	Simulación, Colas, PERT, Modelos de Inventarios

Tipos de relación

- En función a su relación matemática – lineal o no lineal
- En función a sus resultados:

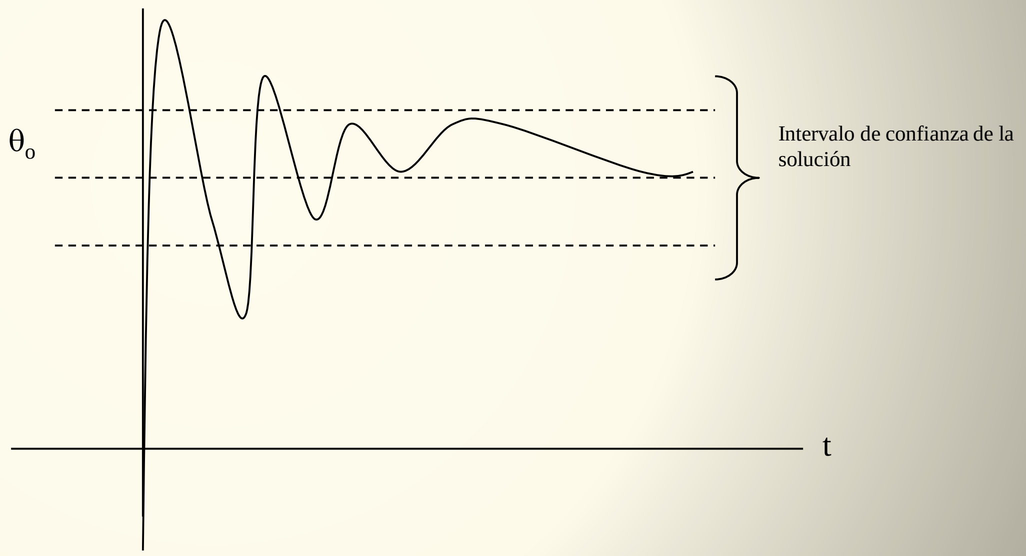


Costo vs. valor



Características del modelo

- Tratabilidad
- Trazabilidad
- Factibilidad
- Convergencia



Las redes:

- Las redes están presentes en diferentes lugares en la vida real: redes de transporte, flujo eléctrico y comunicaciones, por ejemplo.

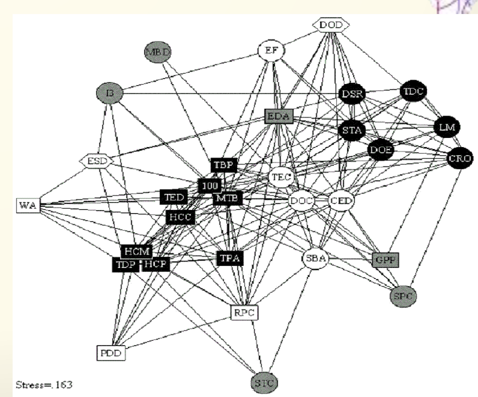
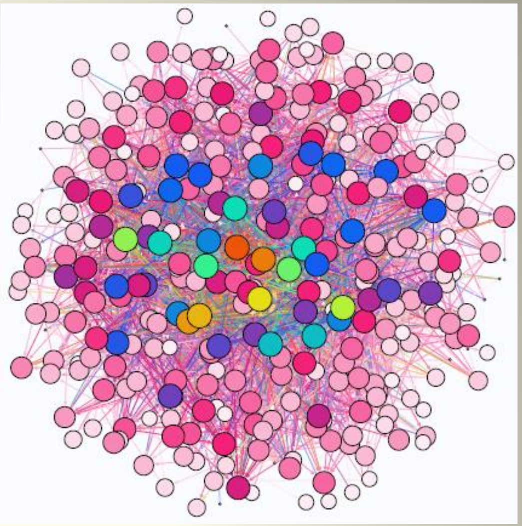
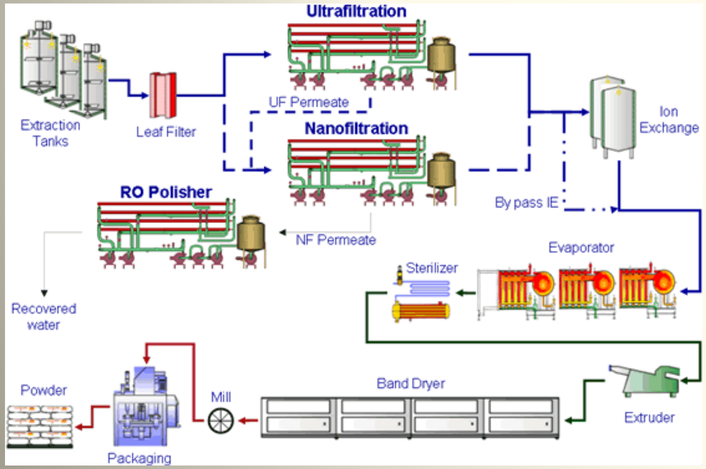


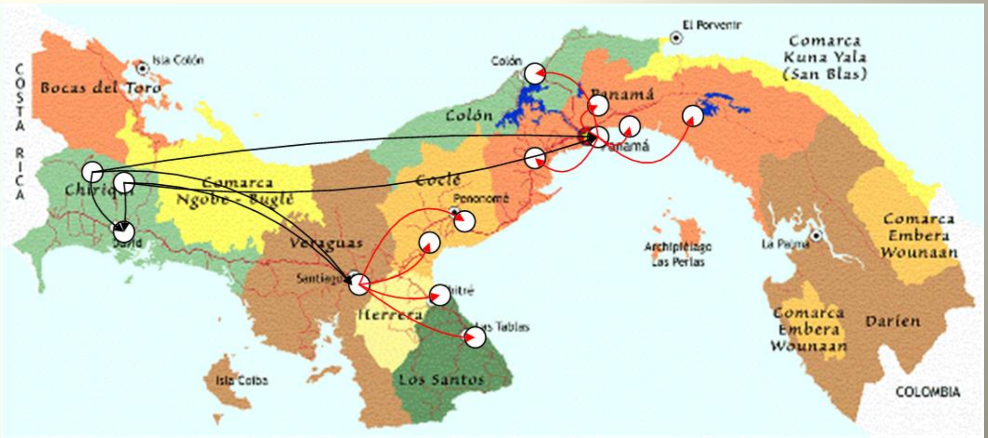
Figure 1. Communication links.

Las redes:

- También son ampliamente utilizadas para representar problemas tales como problemas de producción, distribución, localización de facilidades, etc.

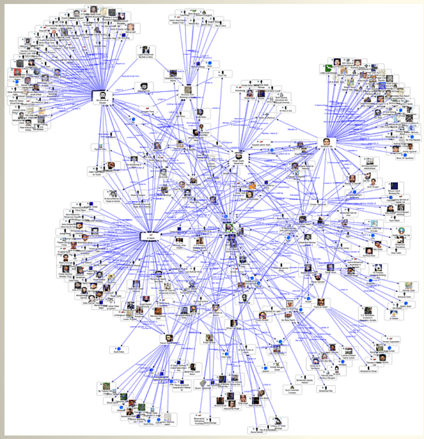


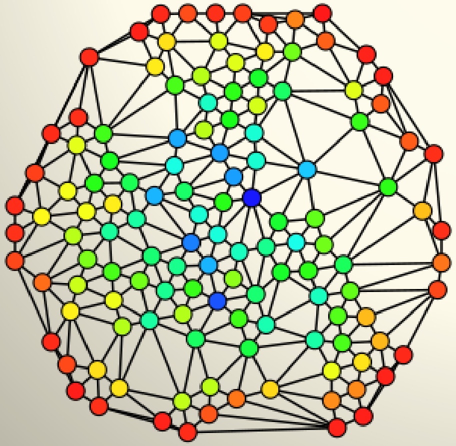


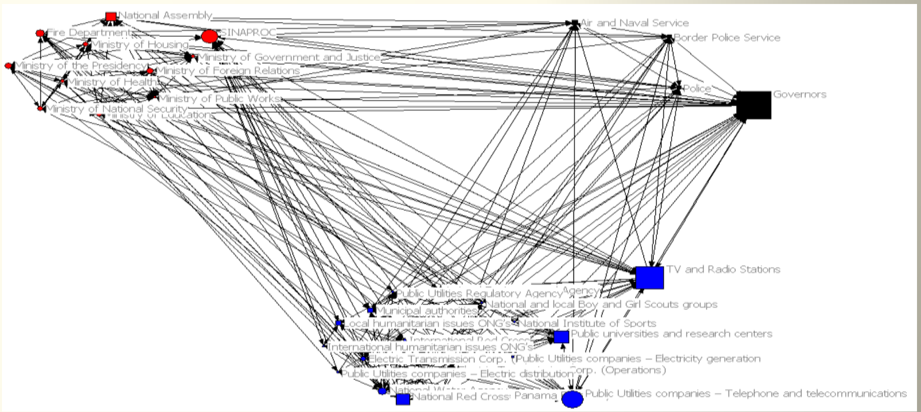


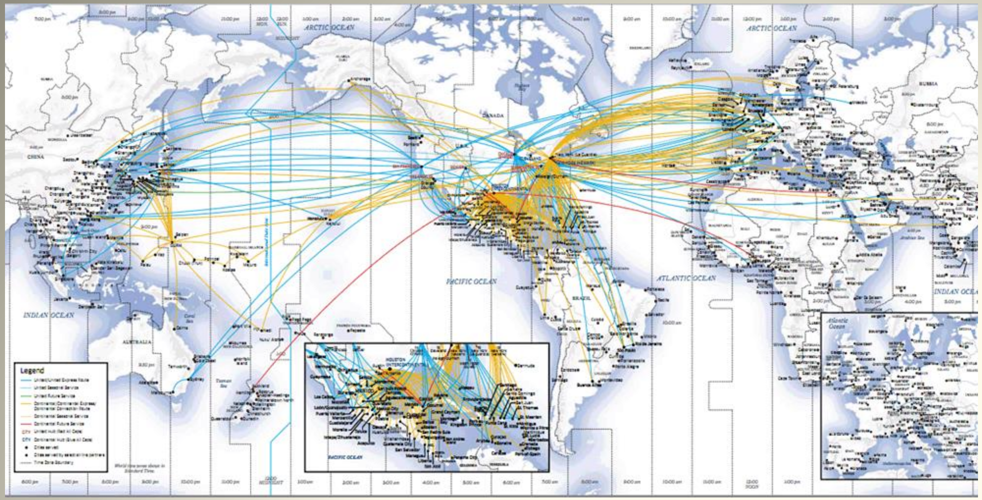
Las redes:

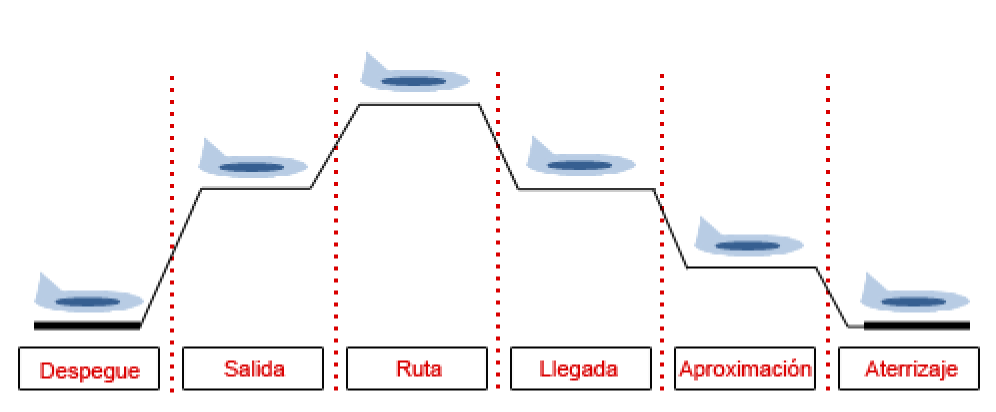
- Las redes proveen una poderosa ayuda visual y conceptual para explicar las diferentes relaciones entre componentes de un sistema.



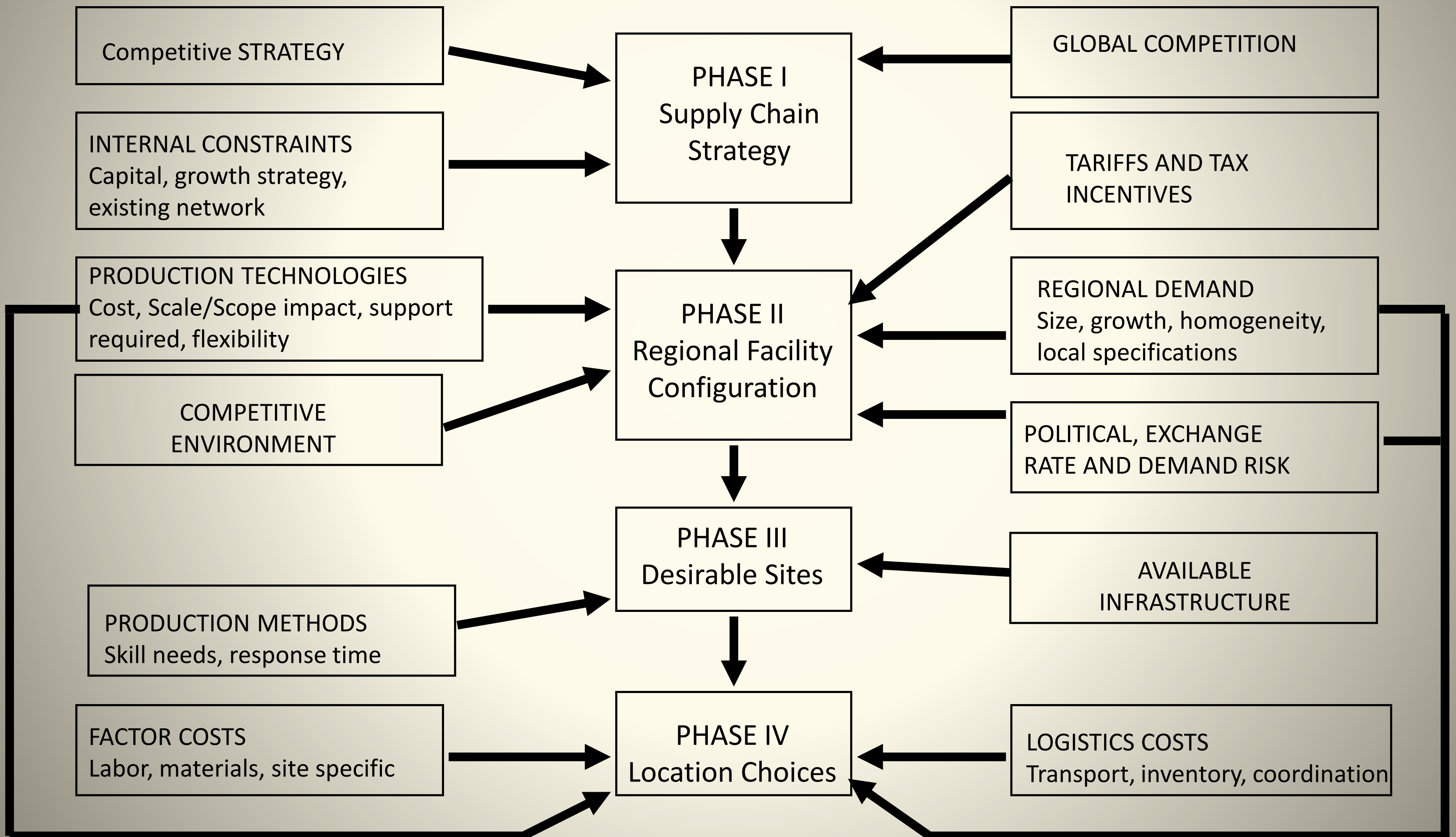




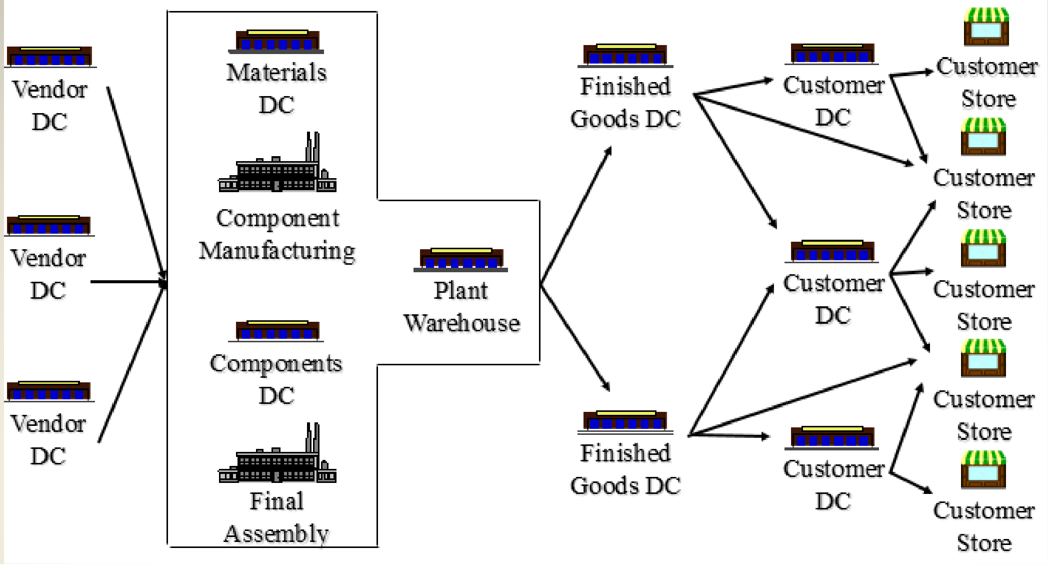


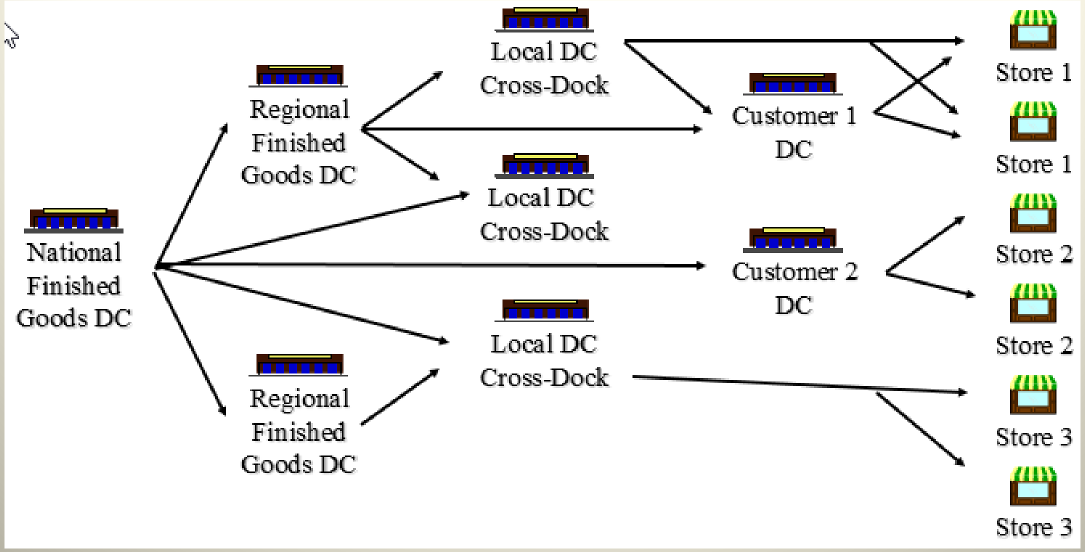

Despegue
Salida
Ruta
Llegada
Aproximación
Aterrizaje

Marco de referencia para la ubicación de instalaciones

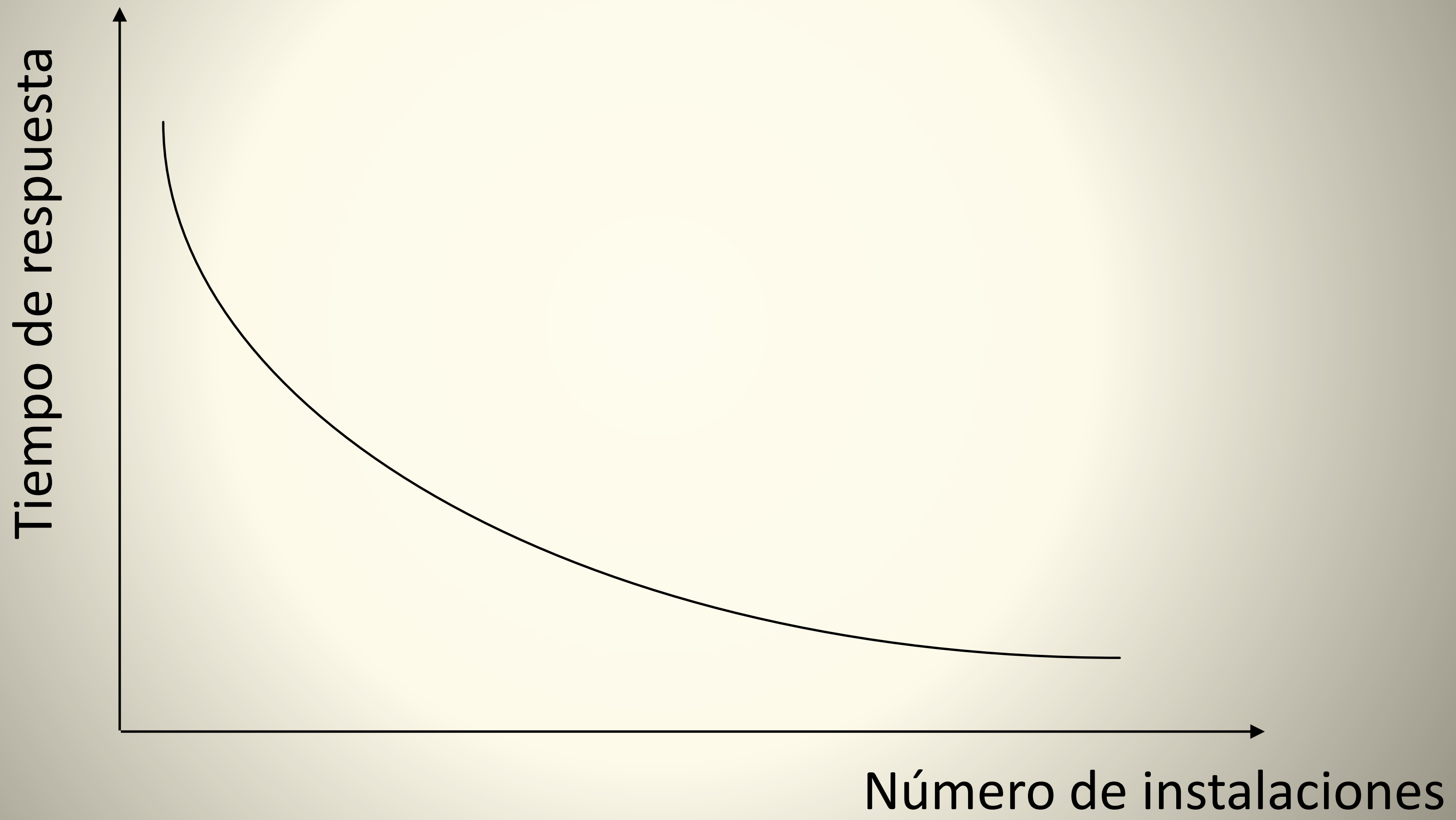


Red convencional vs. a la medida

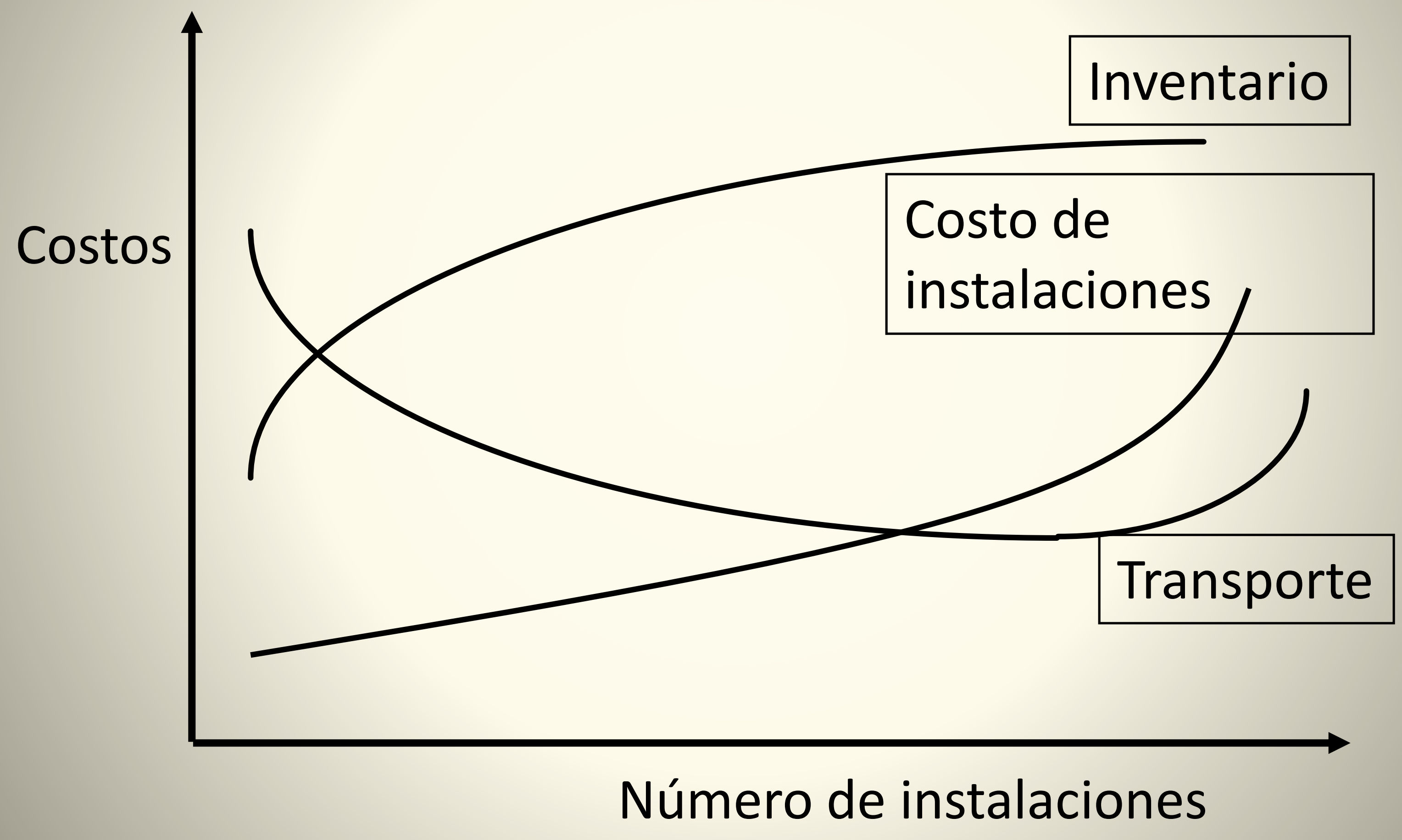




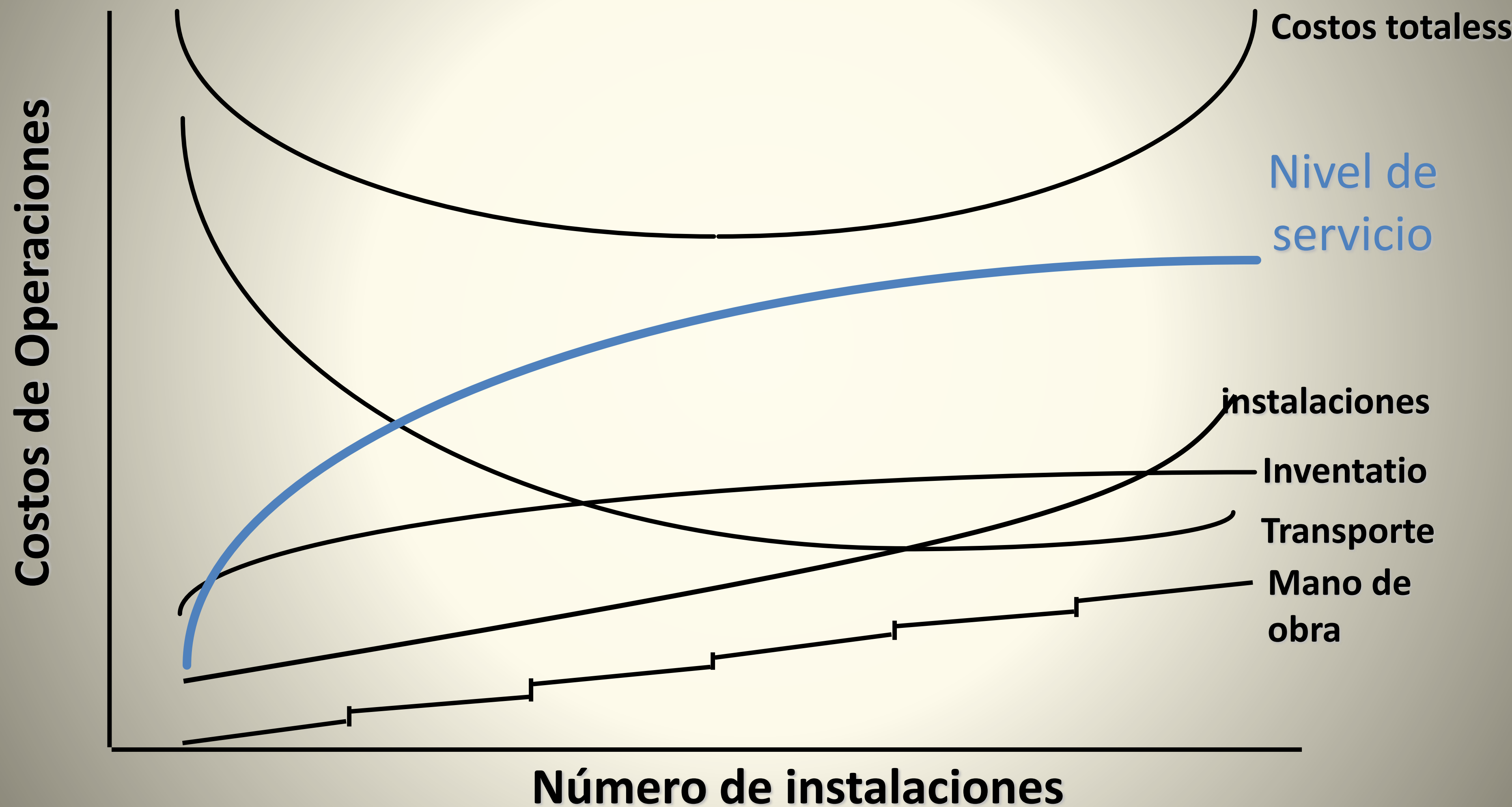
Tiempo de respuesta vs. número de instalaciones



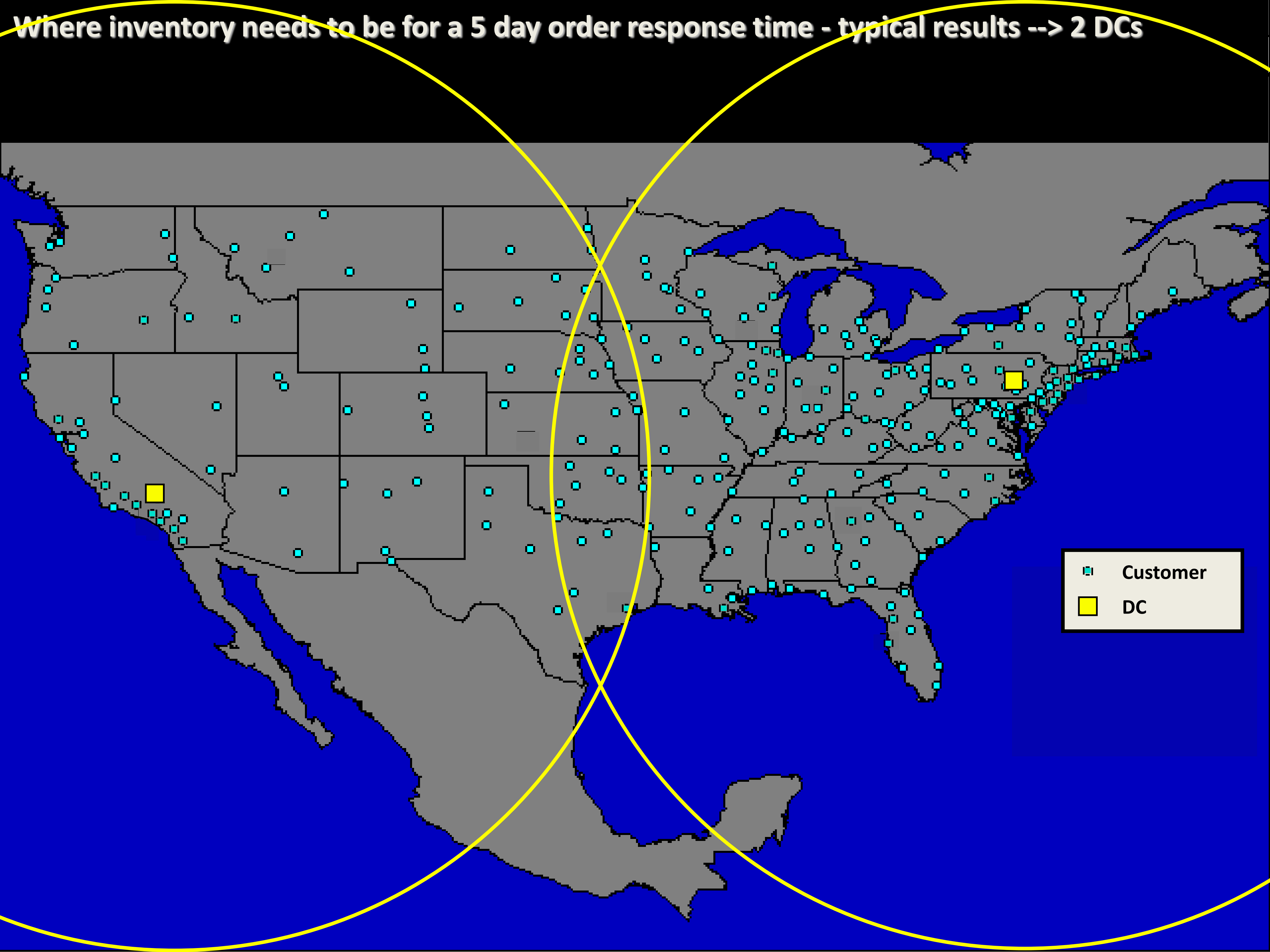
Costos y número de instalaciones



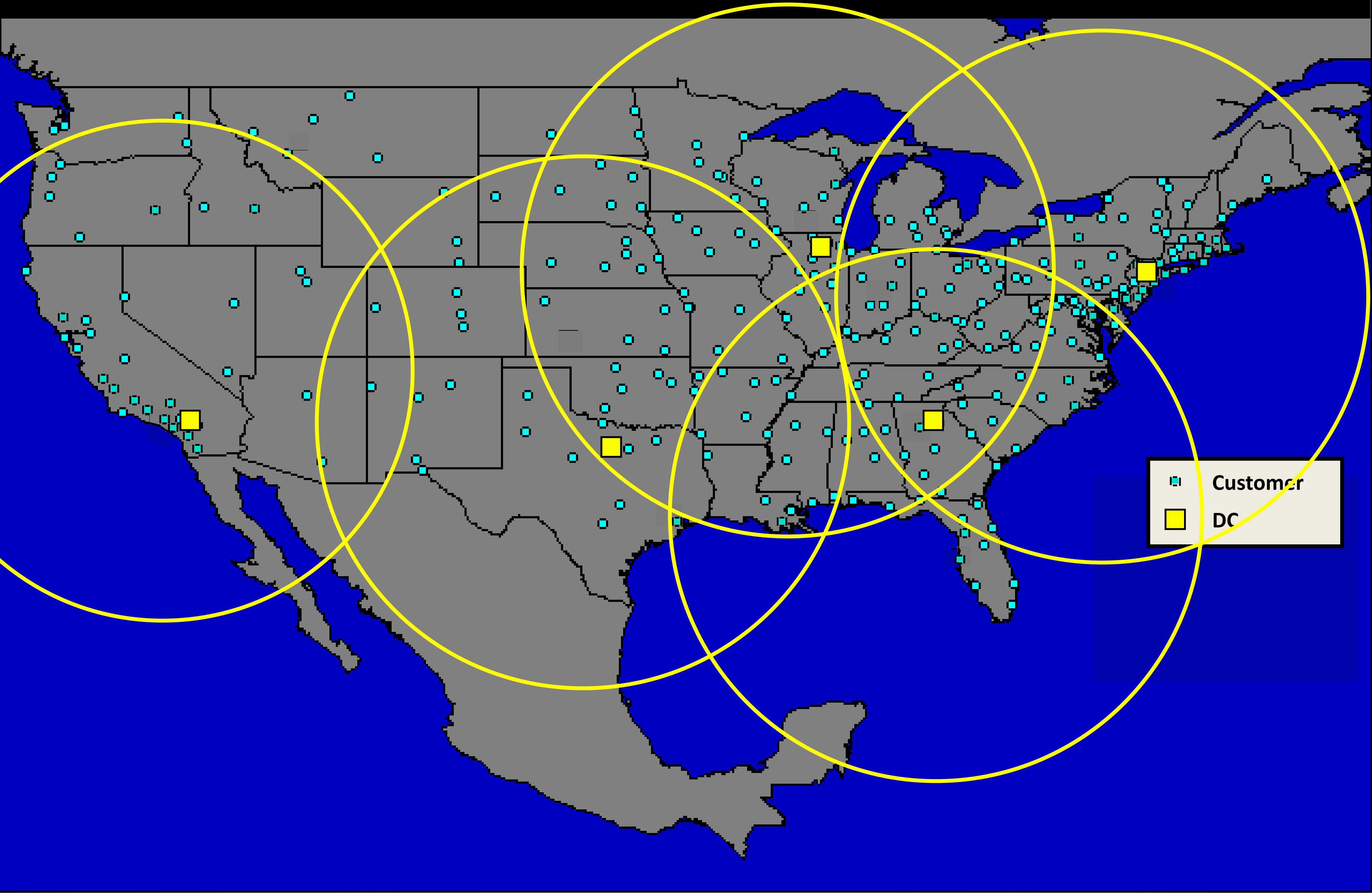
Generación de costos en función al número de instalaciones



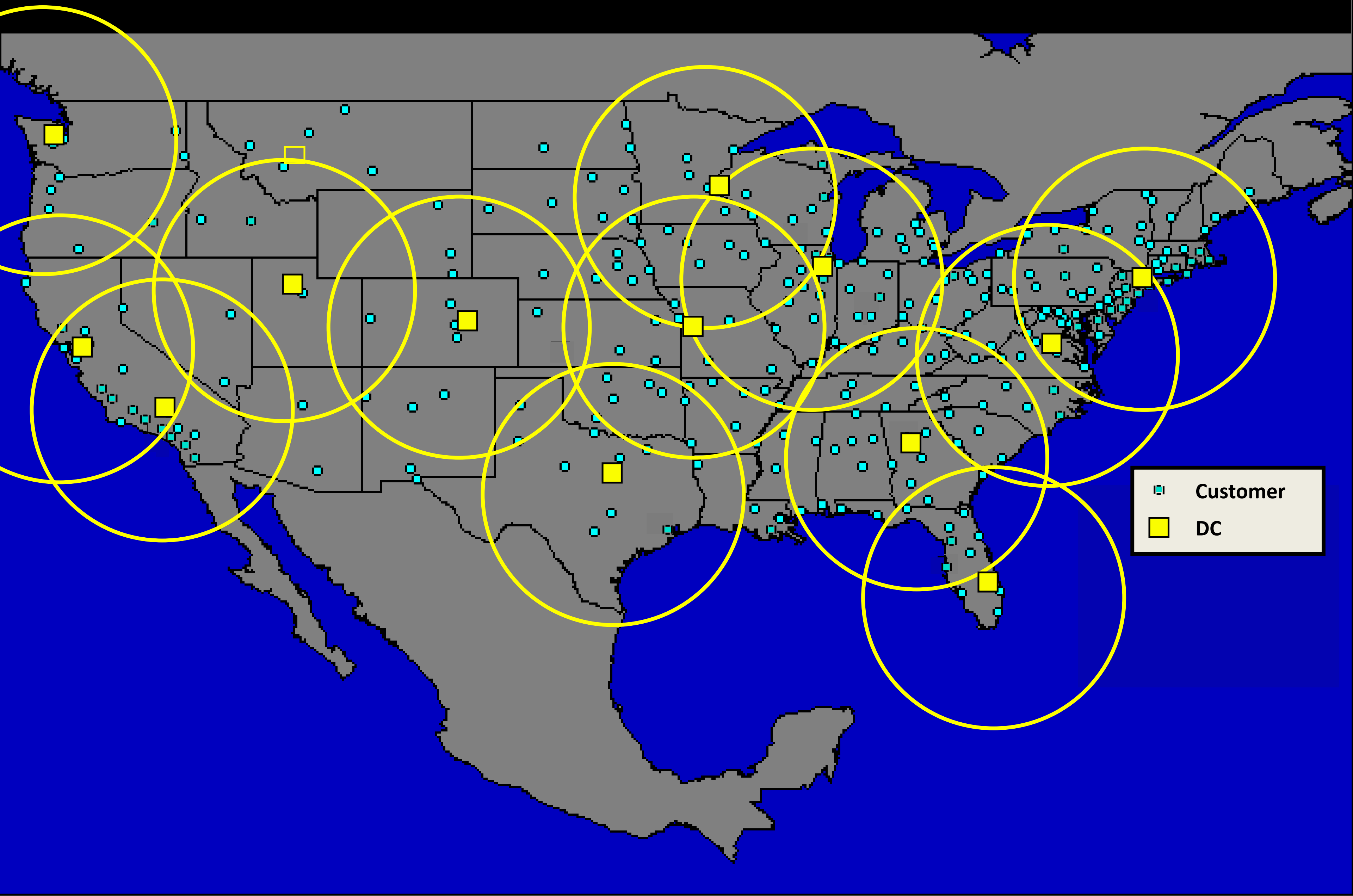
Where inventory needs to be for a 5 day order response time - typical results --> 2 DCs



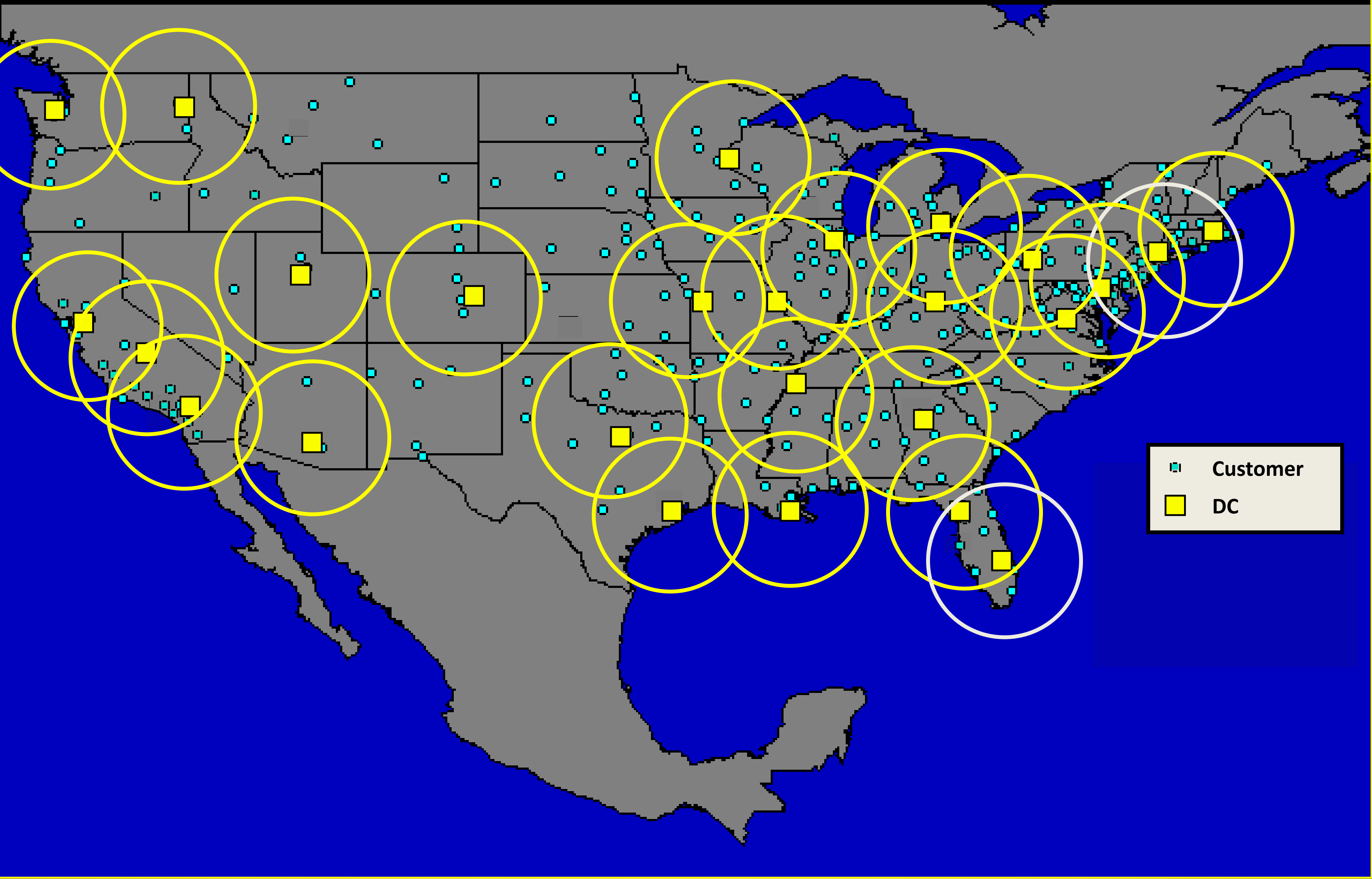
Where inventory needs to be for a 3 day order response time - typical results --> 5 DCs



Where inventory needs to be for a next day order response time - typical results --> 13 DCs

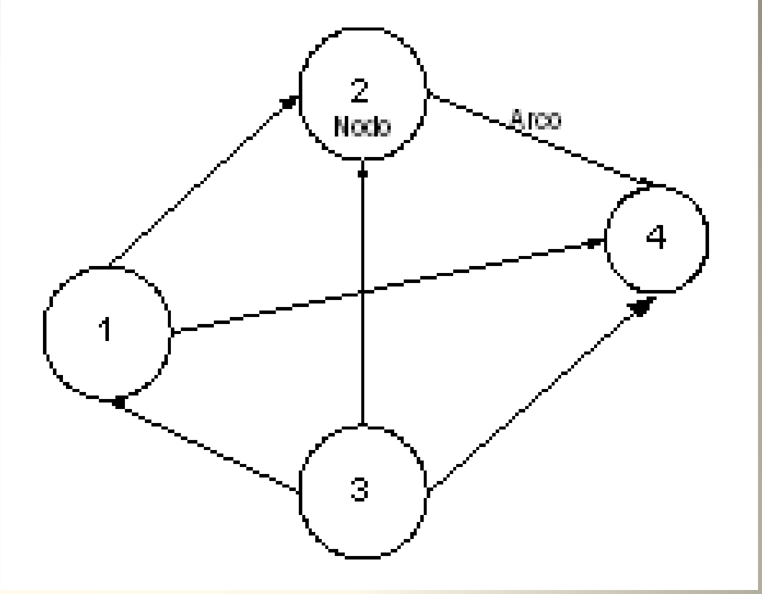


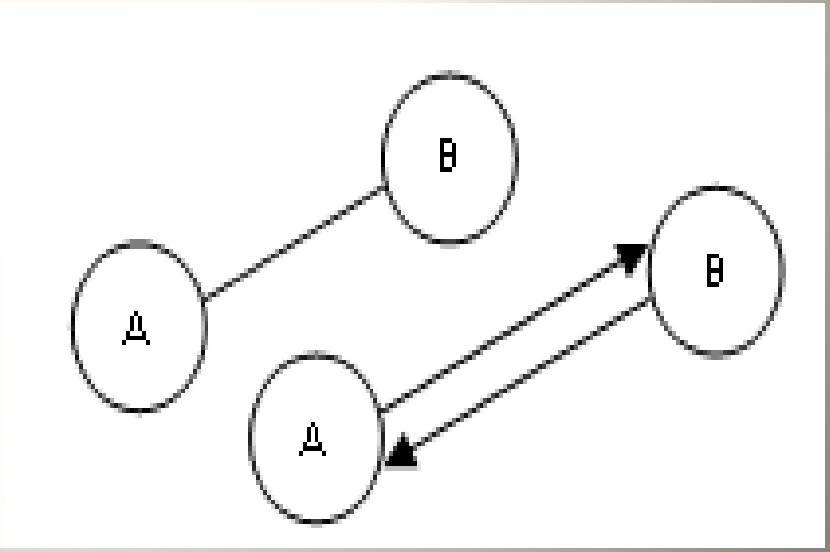
Where inventory needs to be for a same day / next day order response time - typical results --> 26 DCs



Conceptos básicos

- Una red consiste en conjunto definido de puntos y líneas que unen ciertos pares de puntos.
- Se conoce como **nodos** (vértices) a dichos nudos y como **arcos** a las líneas que los unen.
- Se dice que un arco es **dirigido** si permite flujo en una sola dirección, de lo contrario se conoce como un **arco no dirigido** o **ligadura**. Por convención, el arco se denomina en función a su dirección. Así, en la figura el arco 3-2 indica que su dirección se del nodo 3 al nodo 2 y no viceversa. Una red que tiene solamente arcos dirigidos se conoce como **red dirigida**, de lo contrario se conocerá como una red **no dirigida**.



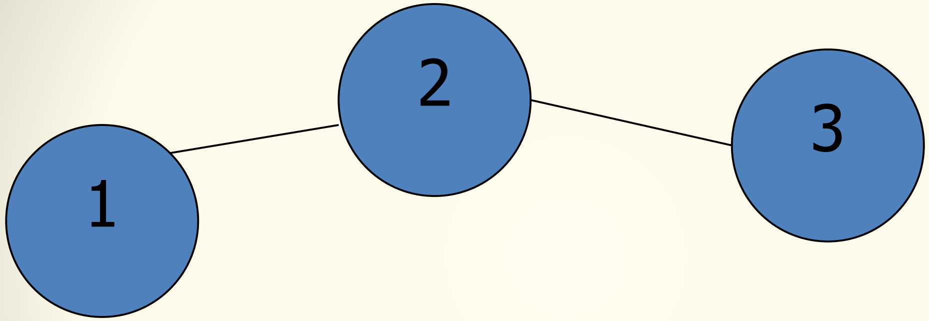


Conceptos básicos

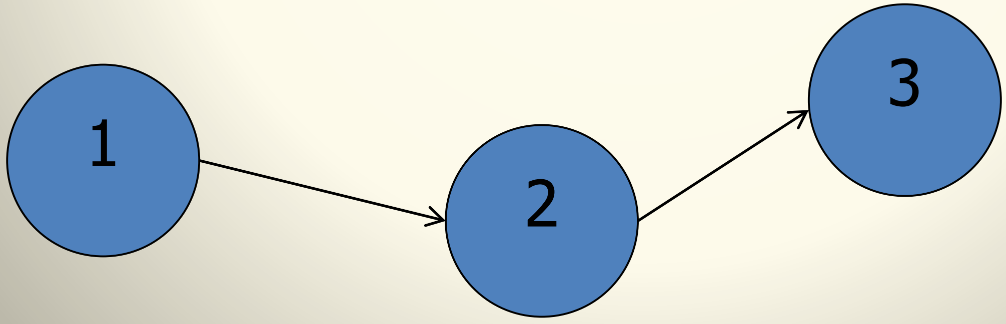
- Una **trayectoria** entre dos nodos es una sucesión de arcos distintos.
- Una **trayectoria dirigida** del nodo i al nodo j es una sucesión de arcos cuya dirección es hacia el nodo j.
- Un **ciclo** es una trayectoria que comienza y termina en el mismo nodo. En una red dirigida, un ciclo puede ser o no dirigido, según la trayectoria en cuestión.
- Se dice que dos nodos están **conectados** si la red contiene al menos una trayectoria no dirigida entre ellos.
- Una **red conectada** es una red en la que cada par de nodos está conectado.

Conceptos básicos

- Una **trayectoria** entre dos nodos es una sucesión de arcos distintos.

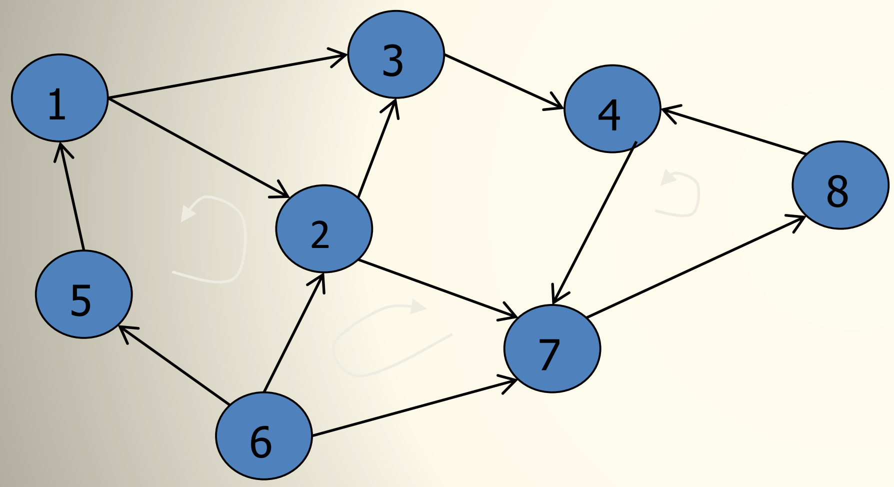


- Una **trayectoria dirigida** del nodo i al nodo j es una sucesión de arcos cuya dirección es hacia el nodo j.



Conceptos básicos

- Un **ciclo** es una trayectoria que comienza y termina en el mismo nodo. En una red dirigida, un ciclo puede ser o no dirigido, según la trayectoria en cuestión.



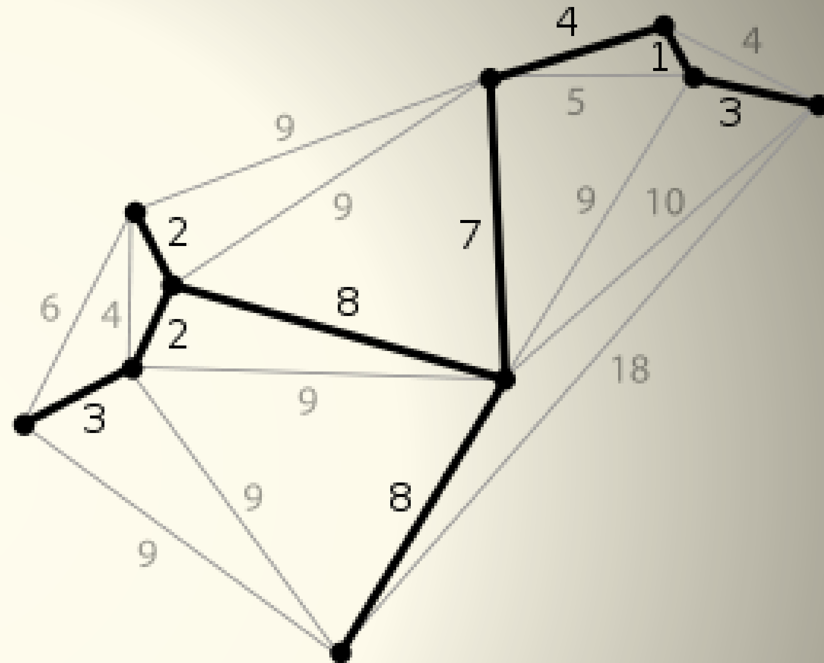
- Se dice que dos nodos están **conectados** si la red contiene al menos una trayectoria no dirigida entre ellos.
- Una **red conectada** es una red en la que cada par de nodos está conectado.

Conceptos básicos

- La **capacidad de un arco** es la cantidad neta máxima de flujo que puede circular en arco dirigido.
- Un nodo generador de flujo se conoce como **nodo fuente u origen**.
- Un nodo fuente tiene la propiedad de que el flujo que sale del nodo supera al que entra e él.
- Un **nodo demanda o destino** es aquel en el que el flujo que llega excede al que sale.
- Un **nodo de trasbordo** o **intermedio** satisface la conservación de flujo, o sea, el flujo que sale es igual al que entra.

Árbol de expansión

- Un **árbol** es una red conectada para algún subconjunto de nodos que no contiene ciclos.
- Un **árbol de expansión**, es una red que conecta los n nodos sin formar ciclos.
- El número mínimo de **ramas** o arcos necesarios para conectar todos los nodos es n-1.



Árbol de expansión mínima

- Dado un grado conectado G = (V,E), con pesos $c_{i,j}$ para todos los ejes en E, encontrar un árbol de expansión $G_T = (V_T, E_T)$ para un mínimo de peso.
- Dados los nodes de una red, se conocen los enlaces potenciales y la distancia o peso positivo de cada uno.
- El problema consiste en diseñar una red con suficientes enlaces de tal manera que exista un camino factible entre cualquier par de nodos.
- El objetivo es encontrar dicho árbol de expansión de tal menera que tenga el mínimo costo.

Algoritmo de Dijkstra

- El algoritmo consiste en ir explorando todos los caminos más cortos que parten del vértice origen y que llevan a todos los demás vértices.
- Cuando se obtiene el camino más corto desde el vértice origen, al resto de vértices que componen el grafo, el algoritmo se detiene. Inicializar todas las distancias en D con un valor infinito relativo ya que son desconocidas al principio, exceptuando la de x que se debe colocar en 0 debido a que la distancia de x a x sería 0.

1. Sea a = x (tomamos a como nodo actual).
2. Se recorren todos los nodos adyacentes de *a*, excepto los nodos marcados, llamando a estos nodos no marcados v_i.
3. Para el nodo. Si la distancia tentativa es menor que la distancia almacenada en el vector, actualizamos el vector con esta distancia tentativa. Es decir: Si $dt(v_i) < D_{vi} \rightarrow D_{vi} = dt(v_i)$
4. Se marca como completo el nodo a.
5. Elegir como próximo nodo actual el de menor valor en D (puede hacerse almacenando los valores en una cola de prioridad) y volver al paso 3 mientras existan nodos no marcados.

Formulación

$$\min Z = \sum_i \sum_j c_{i,j} x_{i,j}$$

Subjectto:

$$\sum_v x_{i,j} = n - 1, \ \forall v \in V$$

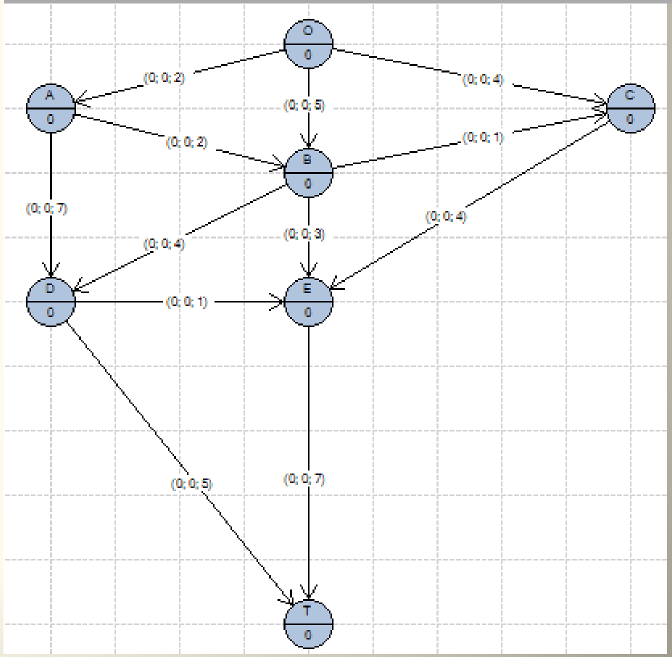
$$\sum_{s \in S} x_{ij} \geq 1, \forall S = set\ of\ edges\ going\ from\ nodes\ in\ the\ subset\ \bar{V} \in V$$

$$x_{i,j} \begin{cases} 1, if\ edge\ from\ i\ to\ j\ exists \\ 0\ otherwise \end{cases}$$

Ejemplo

- La Administración de una reserva forestal necesita determinar los caminos bajo los cuales se deben tender las líneas telefónicas para conectar las estaciones de los guardabosques con una longitud mínima de cables de acuerdo a la figura siguiente:

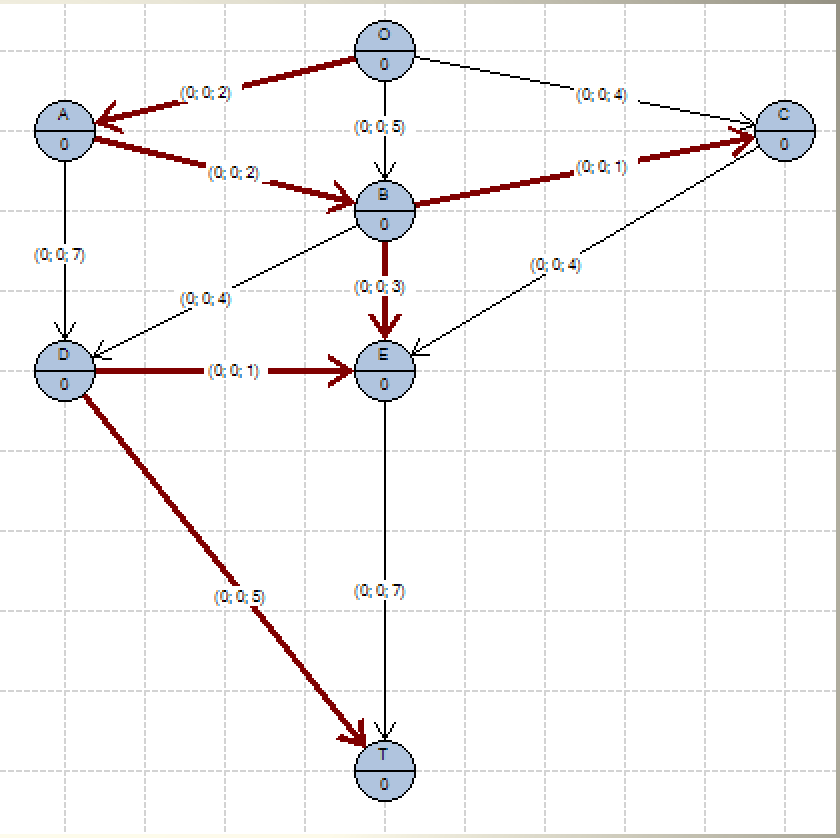
Origen\Destino	O	A	B	C	D	E	T
O		2	5	4			
A			2		7		
B				1	4	3	
C						4	
D						1	5
E							7
T							



Gráfica y tabla hecha utilizando GRAFOS: http://arodrigu.webs.upv.es/grafos/doku.php?id=software

Solución con Grafos

```
ÁRBOL DE VALOR TOTAL MÍNIMO - ALGORITMO DE KRUSKAL
--------------------------------------------------

Tiempo de proceso = 0 segundos

 *   O ----(2)---> A
 *   A ----(2)---> B
 *   B ----(1)---> C
 *   B ----(3)---> E
 *   D ----(1)---> E
 *   D ----(5)---> T

Coste total = 14
```



Gráfica y tabla hecha utilizando GRAFOS:
http://arodrigu.webs.upv.es/grafos/doku.php?id=software

Problemas de flujo de costo mínimo

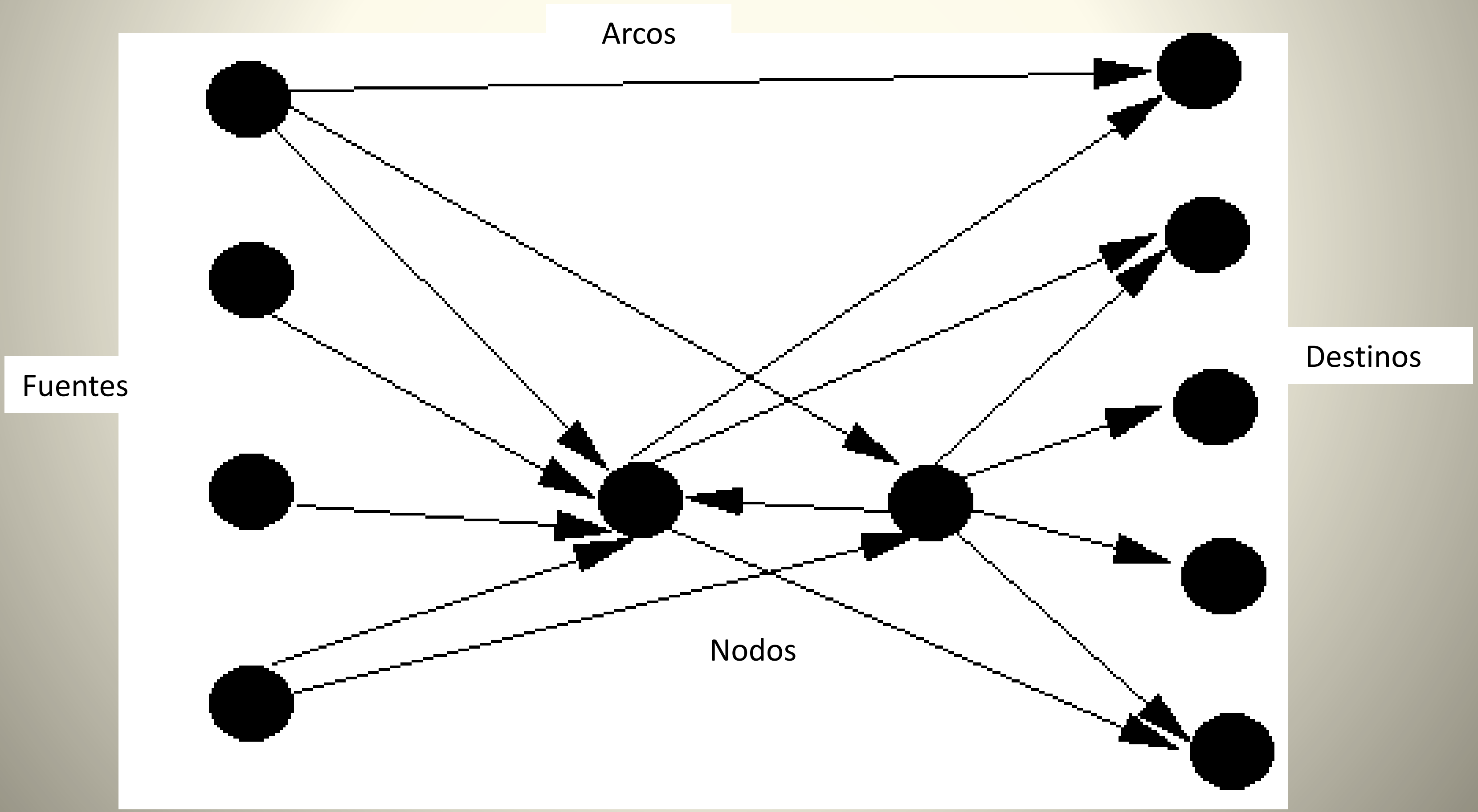
Planteamiento del problema

- Son problemas de programación lineal con ciertas estructuras especiales
- Permiten ser trabajados con algoritmos especiales
- Aprovechan su estructura para aproximarlos a redes
- Su estructura permite la solución de grandes problemas de manera relativamente sencilla

Elementos de un problema de flujo mínimo

- Se tiene un número dado de fuentes y destinos de transacciones
- Cada fuente y destino tiene una capacidad máxima de envío y recibo
- Se pueden tener nodos intermedios
- Se tienen arcos que:
  - Tienen una capacidad máxima de flujo
  - Tienen un costo asociado a una unidad de flujo

Elementos de un problema de flujo de costo mínimo



Problemas típicos

- Costo Mínimo
- Ruta Más Corta
- Flujo máximo
- Asignación
- Transporte
- Trasbordo
- Problema del agente viajero

Formulación del problema de flujo de costo mínimo:

- Considere una red dirigida y conectada, donde esta incluye al menos un nodo de oferta y otro de demanda:
- La variable de decisión será:

x_{ij}: será el flujo a través del arco $i \rightarrow j$

Formulación General:

- Incluye la siguiente información:

  c_{ij}: es el costo de enviar una unidad a través del arco $i \rightarrow j$

  u_{ij}: *l*es la capacidad del arco $i \rightarrow j$

  b_i: es el flujo generado en el nodo *i*

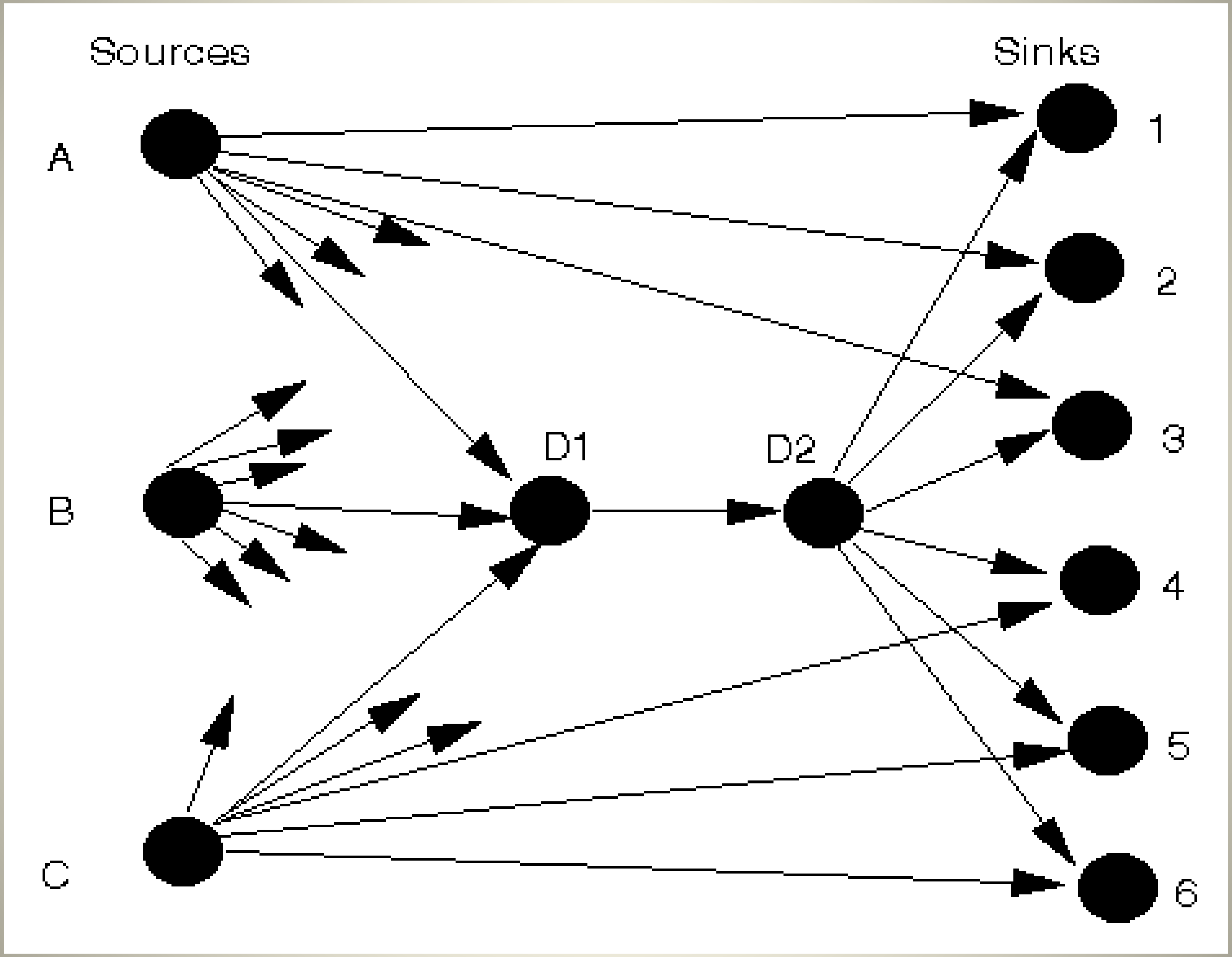
- *El* valor de b_i depende de la naturaleza del nodo :

  $b_i > 0$, si *i* es un nodo de oferta

  $b_i < 0$, si *i* es un nodo de demanda

  $b_i = 0$, si *i* es un nodo de trasbordo

- El objetivo es minimizar el costo total de enviar el suministro disponible a través de la red a fin de satisfacer una demanda dada.
- En una solución factible, el flujo total generado en los nodos de oferta iguala al flujo total consumido por los nodos de demanda.


Sources
Sinks
A
B
C
D1
D2
1
2
3
4
5
6

$$\text{Minimize} \quad Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = b_i, \quad \text{for each node } i,$$

and

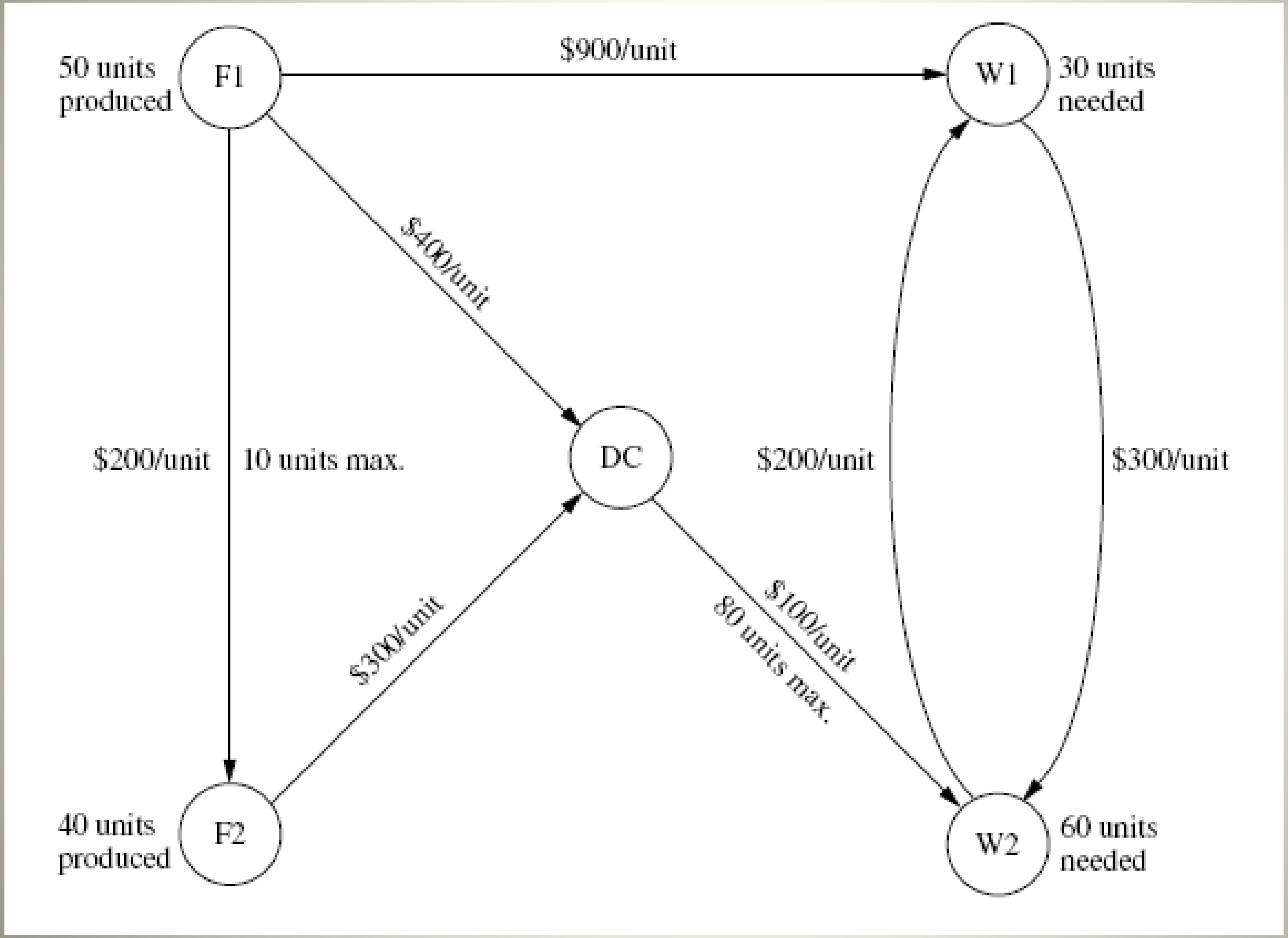
$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \quad \text{for each arc } i \to j.$$

Una condición necesaria para la factibilidad de estos problemas es que:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0.$$

En otras palabras, el flujo total generado en los nodos de suministro debe ser igual a la demanda total

Ejemplo:

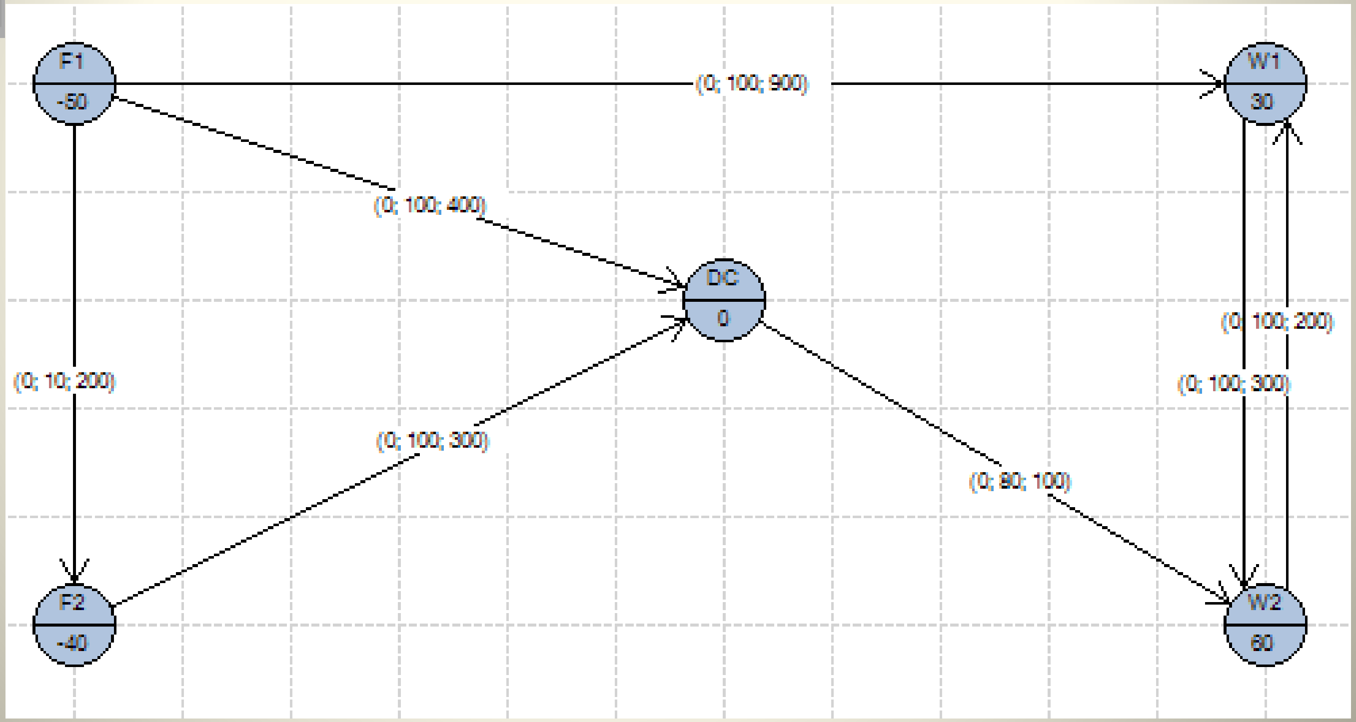


50 units
produced
F1
$900/unit
W1
30 units
needed
$400/unit
$200/unit
10 units max.
DC
$200/unit
$300/unit
$300/unit
$100/unit
80 units max.
40 units
produced
F2
W2
60 units
needed

Nodos	Valor
F1	-50
F2	-40
DC	0
W1	30
W2	60

Origen\Destino	F1	F2	DC	W1	W2
F1		10	100	100	
F2			100		
DC					80
W1					100
W2				100	

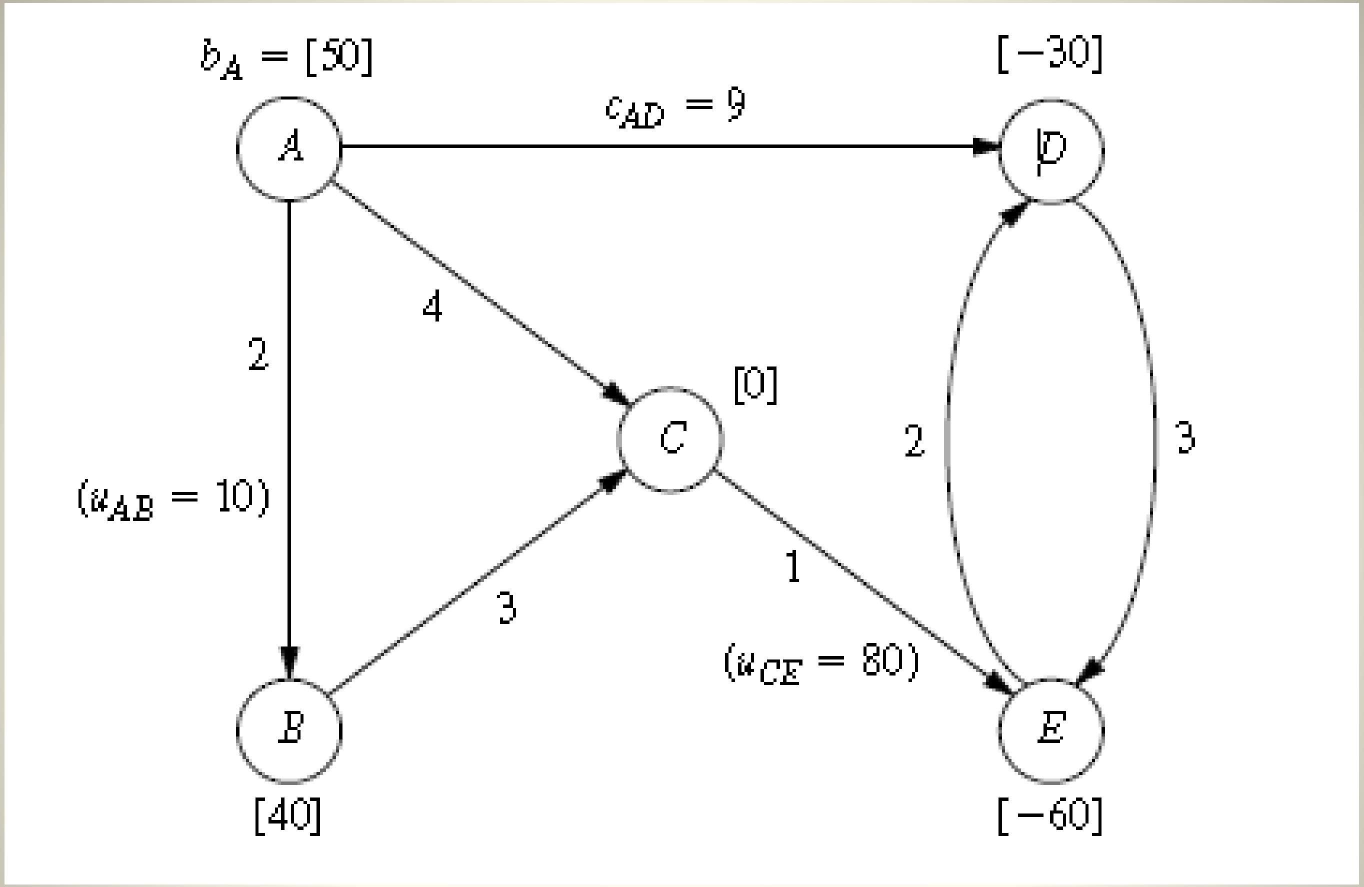
Origen\Destino	F1	F2	DC	W1	W2
F1		200	400	900	
F2			300		
DC					100
W1					300
W2				200	



Gráfica y tabla hecha utilizando GRAFOS:
http://arodrigu.webs.upv.es/grafos/doku.php?id=software

```
PROBLEMA DEL TRANSBORDO
----------------------------------------

 Tiempo de modelado = 0 segundos
 Tiempo de proceso  = 0 segundos

 SOLUCION OPTIMA ENCONTRADA
 lp_solve -> 0


Valor de la función objetivo = 49000.00000000

Valor actual de las variables:

x_0_1:: F1 --> F2 =          0
x_0_2:: F1 --> DC =         40
x_0_3:: F1 --> W1 =         10
x_1_2:: F2 --> DC =         40
x_2_4:: DC --> W2 =         80
x_3_4:: W1 --> W2 =          0
x_4_3:: W2 --> W1 =         20
```

Gráfica y tabla hecha utilizando GRAFOS:
http://arodrigu.webs.upv.es/grafos/doku.php?id=software



$b_A = [50]$
$c_{AD} = 9$
$[-30]$
A
D
4
2
$[0]$
C
2
3
$(u_{AB} = 10)$
1
3
$(u_{CE} = 80)$
B
E
$[40]$
$[-60]$

$$\text{Minimize} \quad Z = 2x_{AB} + 4x_{AC} + 9x_{AD} + 3x_{BC} + x_{CE} + 3x_{DE} + 2x_{ED},$$

subject to

$$\begin{aligned}
x_{AB} + x_{AC} + x_{AD} &= 50 \\
-x_{AB} + x_{BC} &= 40 \\
-x_{AC} - x_{BC} + x_{CE} &= 0 \\
-x_{AD} + x_{DE} - x_{ED} &= -30 \\
-x_{CE} - x_{DE} + x_{ED} &= -60
\end{aligned}$$

and

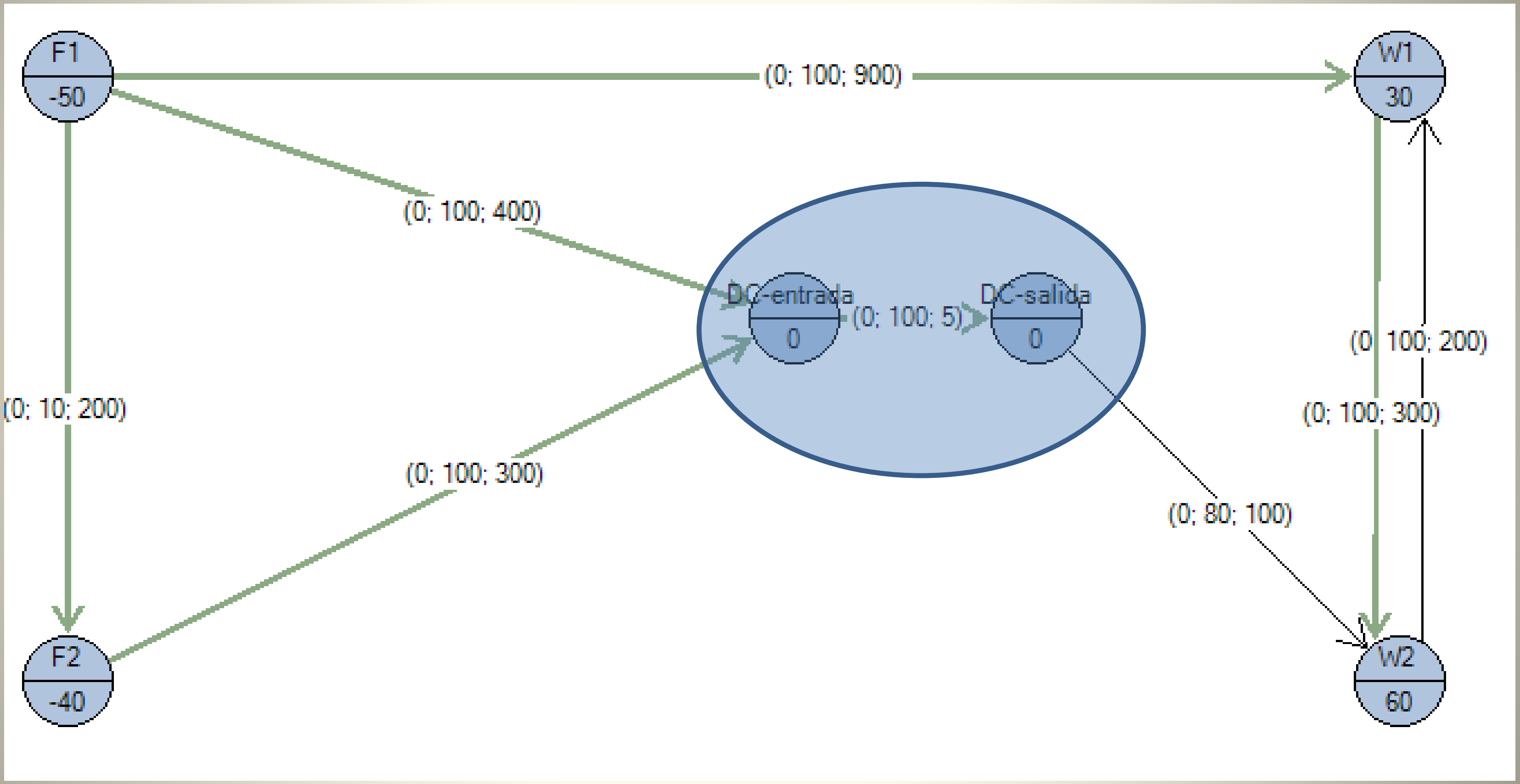
$$x_{AB} \leq 10, \qquad x_{CE} \leq 80, \qquad \text{all } x_{ij} \geq 0.$$

Formulación y solución en SOLVER

	Xab	Xac	Xad	Xbc	Xce	Xde	Xed	Costo total	Capacidad
	0	40	10	40	80	0	20		
Costo	2	4	9	3	1	3	2	490	
								Envios	
	1	1	1					50	50
	-1			1				40	40
		-1		-1	1			0	0
			-1			1	-1	-30	-30
					-1	-1	1	-60	-60
	1							0	10
					1			80	80

Xab	0		
Xac	40		
Xad	10		
Xbc	40	Costo total	490
Xce	80		
Xde	0		
Xed	20		

¿Qué pasa si el centro de trasbordo tiene costos asociados?



```
Valor de la función objetivo = 49400.00000000

Valor actual de las variables:

x_0_1:: F1 --> F2 =            0
x_0_2:: F1 --> DC-entrada =         40
x_1_2:: F2 --> DC-entrada =         40
x_0_3:: F1 --> W1 =           10
x_4_3:: W2 --> W1 =           20
x_3_4:: W1 --> W2 =            0
x_2_5:: DC-entrada --> DC-salida =         80
x_5_4:: DC-salida --> W2 =          80
```

El problema de Asignación

El problema de asignación

- Supóngase que se tienen n centros de trabajo y n posibles asignaciones, cada una de las cuales puede ser realizada por cualquiera de los n centros de trabajo.
- Supóngase además que existe un costo asociado $c_{i,j}$ que resulta de asignar un trabajo i a un centro de trabajo j.
- En este caso, la asignación de cada trabajo se realizará solamente a un solo centro de tal manera que el costo total de la asignación de los trabajos sea mínimo.

Formulación general

$$\min .Z=\sum_{i}\sum_{j}C_{i,j}X_{i,j}$$

s.a. :

$$\sum_{i}X_{i,j}=1 \quad \forall\ j=1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{j}X_{i,j}=1 \quad \forall\ i=1,2,\ldots,n$$

$$X_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{si trabajo i se asigna a centro j}\\ 0 & \text{otra cosa}\end{cases}$$

Solución

- Método fila columna – o método Húngaro
- Método SIMPLEX o programación entera binaria

El Método Húngaro

- La más conocida técnica de solución para el problema de asignación pura es el método húngaro, desarrollado a partir de los trabajos de Köning y Egerváry en 1916
- Es un algoritmo de optimización combinatoria que resuelve el problema en tiempo polinomial.
- Fue desarrollado y publicado por Harold Kuhn en 1955. Es por esto que se le conoce también como el algoritmo de Kuhn-Munkres o el algoritmo de asignación de Munkres
- Este método utiliza la propiedad de reducción de matrices para reducir la matriz original de costo, hasta que los costos c_{ij} asociados con la asignación óptima, sean cero y todos los otros costos sean no negativos.

Coefficientes de costos del problema

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = C$$

Ejemplo

- La administración de cierto restaurante ha decidido dirigir diferentes clientes a diferentes áreas de servicio. La administración sabe que las diferentes combinaciones de cliente/mesero hacen variar los costos de servicio a causa de las características del cliente y las habilidades de los diferentes meseros. A continuación se tiene la información de costos por cliente y mesero:

Costo por mesero

	Costo de Meseros		
Cliente	1	2	3
1	12.90	11.90	12.10
2	15.30	15.50	14.30
3	11.90	13.90	13.00

Formulación y solución con SOLVER

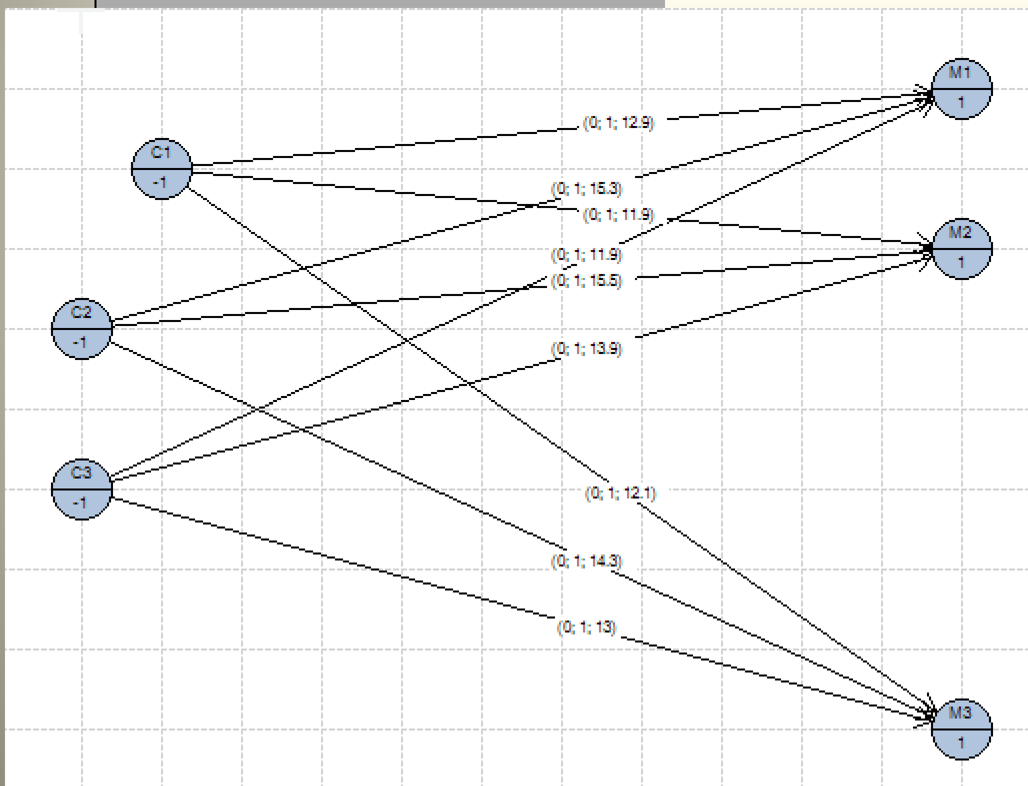
			Mesero				
		1	2	3	Costo	Asignación de cliente	
Cliente	1	0	1	0	11.9	1	1
	2	0	0	1	14.3	1	1
	3	1	0	0	11.9	1	1
	Costo total				38.1		
	Asignación de mesero	1	1	1			
		1	1	1			

Planteamiento y solución en grafos

Valor (Nodos) | Mínimo (Arcos) | Máximo (Arcos) | Coste (Ar

Nodos	Valor	C1	C2	C3	M1	M2	M3
C1	-1				1	1	1
C2	-1				1	1	1
C3	-1				1	1	1
M1	1						
M2	1						
M3	1						

C1	C2	C3	M1	M2	M3
			12.9	11.9	12.1
			15.3	15.5	14.3
			11.9	13.9	13




```
Valor de la función objetivo = 38.10000000

Valor actual de las variables:

x_0_3:: C1 --> M1 =          0
x_1_3:: C2 --> M1 =          0
x_2_3:: C3 --> M1 =          1
x_0_4:: C1 --> M2 =          1
x_1_4:: C2 --> M2 =          0
x_2_4:: C3 --> M2 =          0
x_0_5:: C1 --> M3 =          0
x_1_5:: C2 --> M3 =          1
x_2_5:: C3 --> M3 =          0
```

El problema de transporte

El Problema de Transporte

- También conocido como modelo de Asignación de Demanda.
- Busca optimizar la satisfacción de demandas de destinos a través de oferta de orígenes.
- Se optimiza en base a:
  - Distancias
  - Tiempos
  - Costos

Objetivo

- Su objetivo es el de analizar la manera óptima de distribuir un producto desde un grupo de orígenes o centros de suministros a un grupo de centros de recibo o destinos de tal manera que se minimice el costo total de la política.
- Cada fuente tiene cierta capacidad de suministro a ser distribuida, mientras que cada destino tiene cierta capacidad de demanda a ser satisfecha.

Supuestos:

- **El Supuesto de los requerimientos:** debe existir un balance entre todo el suministro **s** de las diferentes fuentes y la demanda total **d** de los destinos.
- **La propiedad de la solución factible:** en el problema de trasnporte habrá una solución factible sí y solo sí $\Sigma s = \Sigma d$
- **El supuesto de costso:** el costo de distribuir unidades de cualquier fuente a cualquier destino es directamente proporcional al número de productos distribuídos.
- **El modelo:** cualquier problema puede ser visto como este caso si puede ser descrito completamente en términos de una tabla de parámetros que satisfaga tanto el supuesto de los requirimientos como el de los costos.

Descripción

- Un conjunto A de m puntos de origen de donde un bien es enviado. El punto *i* puede suministrar hasta s_i unidades.
- Un conjunto de n puntos de demanda donde llega un bien. Los puntos de demanda *j* pueden recibir por lo menos d_j bienes.
- Cada unidad enviada del punto *i* al punto *j* incurre en un costo unitario cij.

Tabla de parámetros.

	Cost per Unit Distributed				
	Destination				
	1	2	⋯	n	Supply
Source 1	c_{11}	c_{12}	⋯	c_{1n}	s_1
2	c_{21}	c_{22}	⋯	c_{2n}	s_2
⋮					⋮
m	c_{m1}	c_{m2}	⋯	c_{mn}	s_m
Demand	d_1	d_2	⋯	d_n	

Formulación general

$$\min \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} \le s_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad \text{(Supply constraints)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} \ge d_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{(Demand constraints)}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

If $\sum_{i=1}^{i=m} s_i = \sum_{j=1}^{j=n} d_j$ Será un problema balanceado

La formulación general para el problema balanceado

$$\text{Minimize} \quad Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m,$$

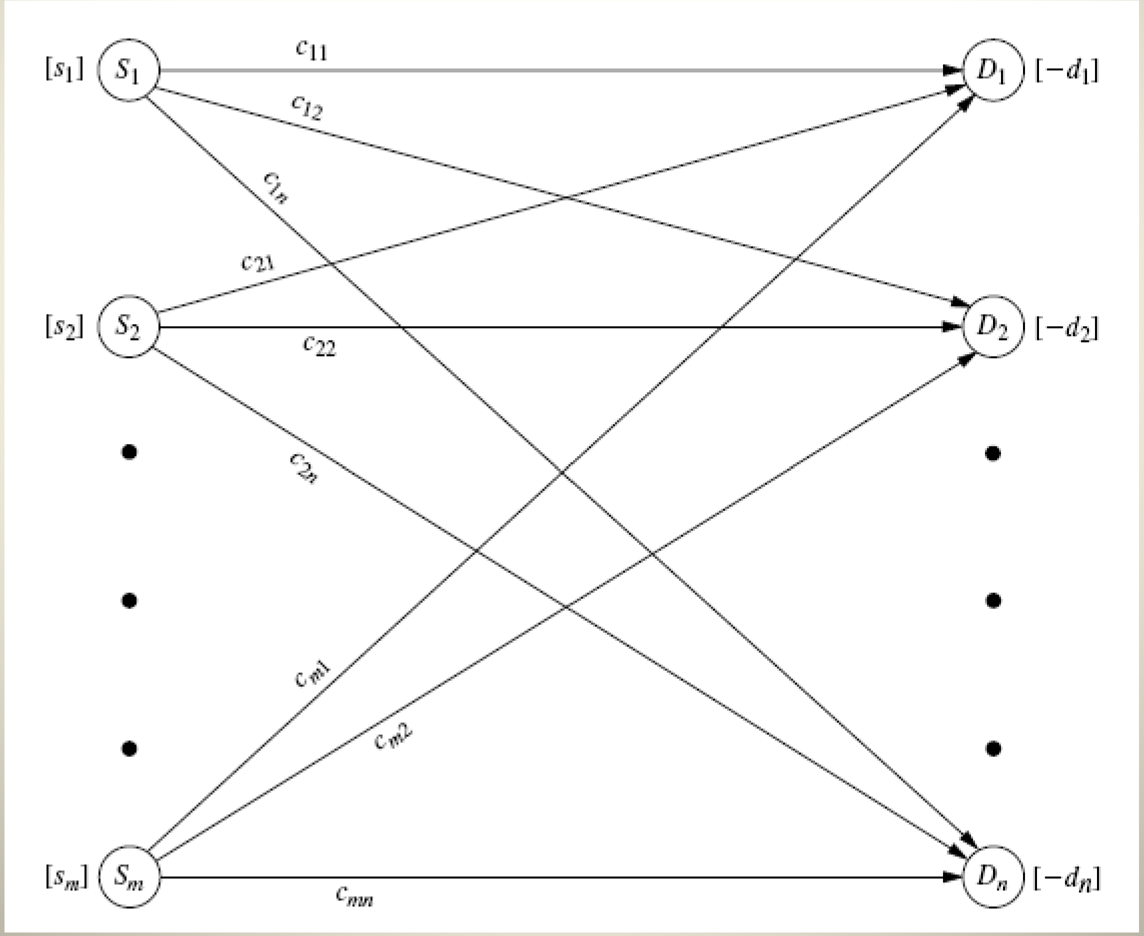
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n,$$

and

$$x_{ij} \geq 0, \quad \text{for all } i \text{ and } j.$$

El requerimiento es que la demanda sea igual a la oferta. De otra manera habrá que crear puntos de oferta o demanda ficticios.

Representación de la red



Solución

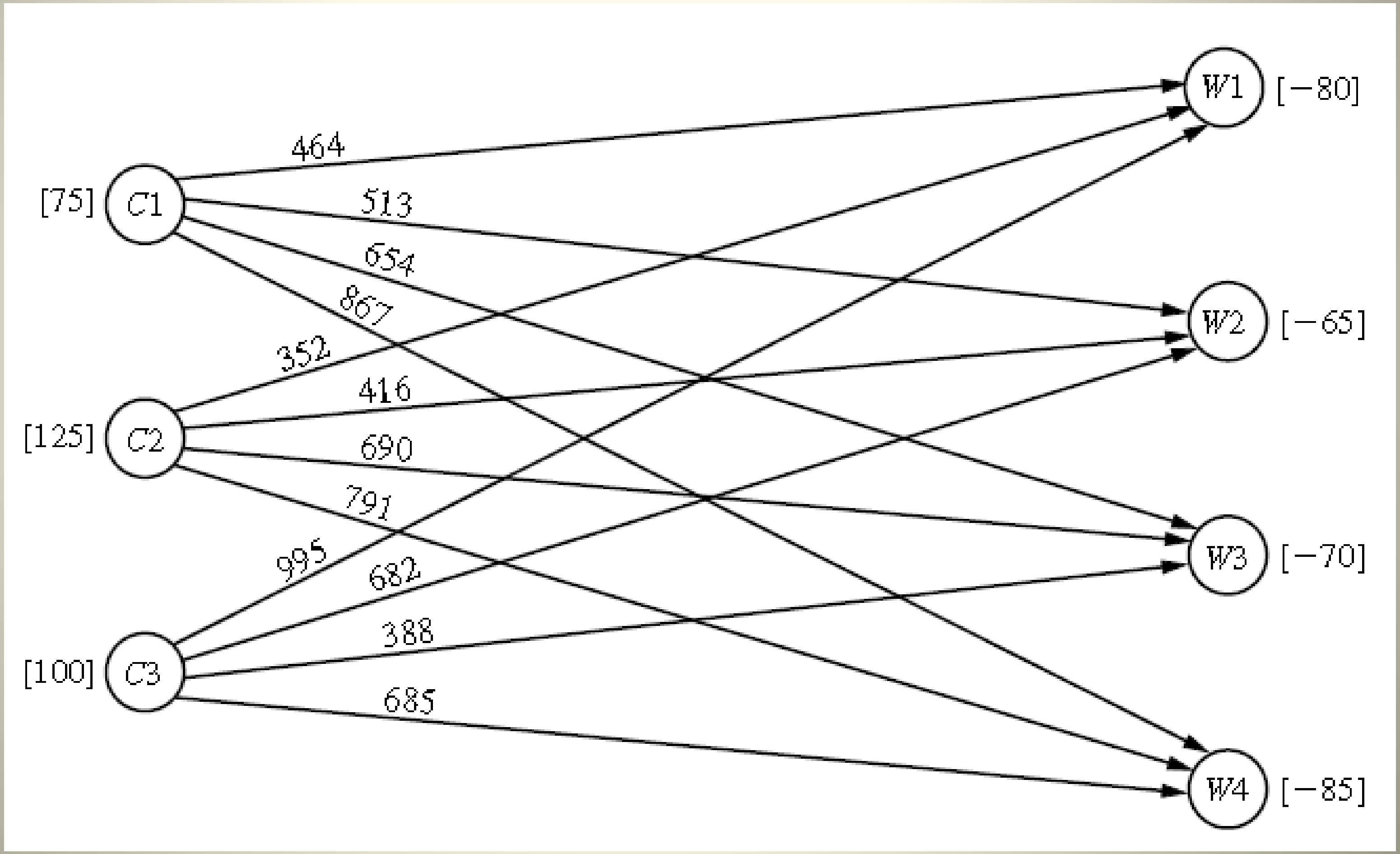
- Método simplex
- Algoritmo de transporte
  - Tableau inicial
  - Solución
  - Prueba de optimalidad
  - Redistribución de envios

Ejemplo: Se tiene la siguiente red de distribución (Hillier)

		Costo de envío por embarque					
		Bodega					Oferta
		1	2	3	4		
¨Planta	1	464	513	654	867		75
	2	352	416	690	791		125
	3	995	682	388	685		100
							300
Demanda		80	65	70	85	300	

Es necesario encontrar la política óptima de transporte

Red del sistema



Solución en Solver

		Costo de envío por embarque						
		Bodega				Envíos	Oferta	Costo
		1	2	3	4			
¨Planta	1	0	20	0	55	75	75	57945
	2	80	45	0	0	125	125	46880
	3	0	0	70	30	100	100	47710
Recibos		80	65	70	85	Costo total		152535
Demanda		80	65	70	85			

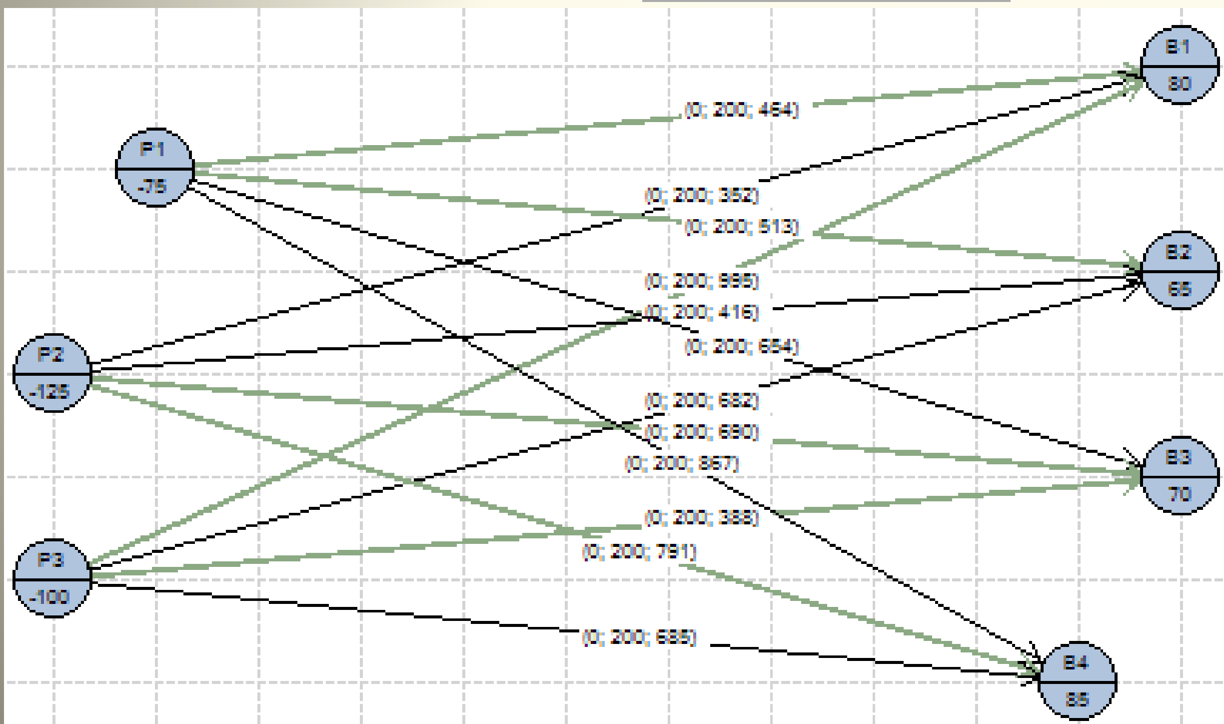
Planteamiento y solución en grafos

Nodos	Valor
P1	-75
P2	-125
P3	-100
B1	80
B2	65
B3	70
B4	85

	P1	P2	P3	B1	B2	B3	B4
P1				200	200	200	200
P2				200	200	200	200
P3				200	200	200	200
B1							
B2							
B3							
B4							

	P1	P2	P3	B1	B2	B3	B4
P1				464	513	654	867
P2				352	416	690	791
P3				995	682	388	685
B1							
B2							
B3							
B4							

```
Valor de la función objetivo = 152535.00000000

Valor actual de las variables:

x_0_3:: P1 --> B1 =          0
x_1_3:: P2 --> B1 =         80
x_2_3:: P3 --> B1 =          0
x_0_4:: P1 --> B2 =         20
x_1_4:: P2 --> B2 =         45
x_2_4:: P3 --> B2 =          0
x_0_5:: P1 --> B3 =          0
x_1_5:: P2 --> B3 =          0
x_2_5:: P3 --> B3 =         70
x_0_6:: P1 --> B4 =         55
x_1_6:: P2 --> B4 =          0
x_2_6:: P3 --> B4 =         30
```



El problema de la ruta más corta

- Considera una red NO DIRIGIDA y conectada, con dos nodos llamados origen y destino.
- Asociado con cada arco no dirigido hay una distancia no negativa.
- El objetivo es encontrar la ruta más corta del origen al destino.

Formulación

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

Subject to

$$\sum_{arcs\ out} x_{ij} - \sum_{arcs\ in} x_{ij} = 1 \quad \text{Origin Node i}$$

$$\sum_{arcs\ out} x_{ij} - \sum_{arcs\ in} x_{ij} = 0 \quad \text{Intermediate nodes } \forall \text{i,j}$$

$$\sum_{arcs\ in} x_{ij} - \sum_{arcs\ out} x_{ij} = 1 \quad \text{Destination node j}$$

For unacceptable route add a new constraint

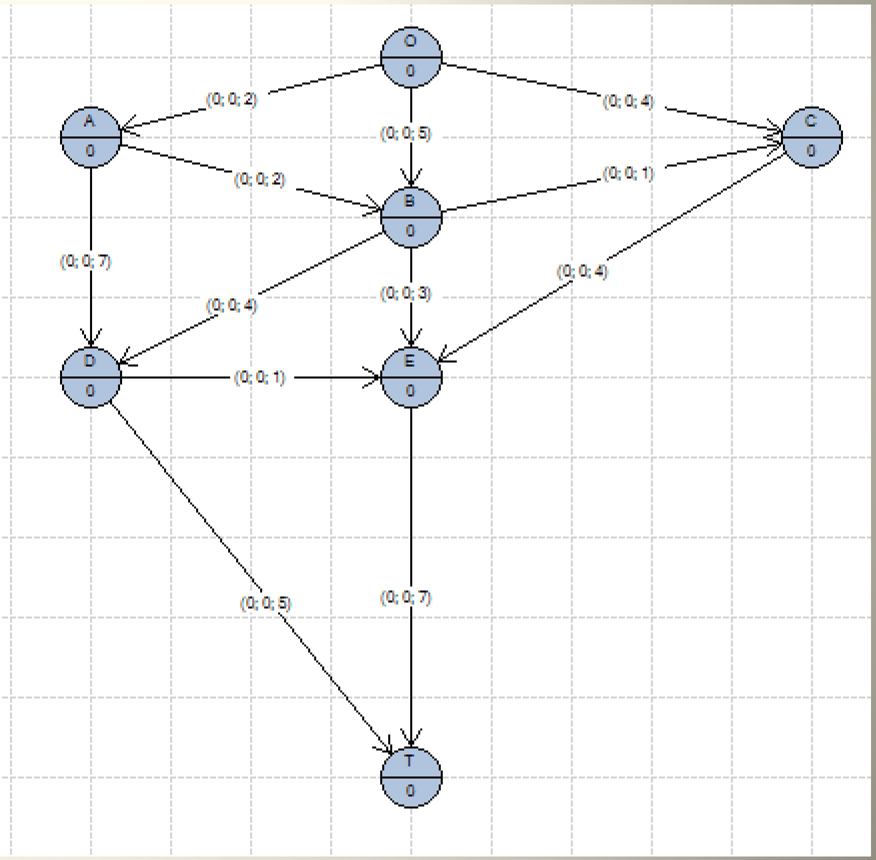
$$\sum x_{ij} = 0$$

$$x_{i,j} \begin{cases} 1, if\ edge\ from\ i\ to\ j\ exists \\ 0\ otherwise \end{cases}$$

Ejemplo

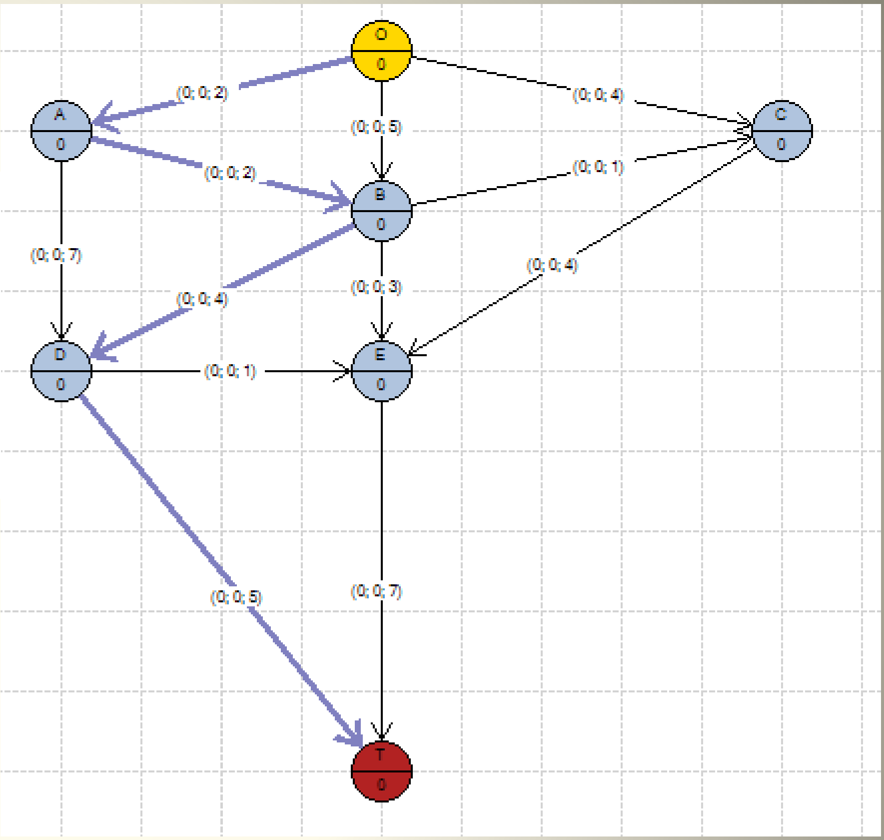
Gráfica y tabla hecha utilizando GRAFOS:
http://arodrigu.webs.upv.es/grafos/doku.php?id=software

Origen\Destino	O	A	B	C	D	E	T
O		2	5	4			
A			2		7		
B				1	4	3	
C						4	
D						1	5
E							7
T							



Solución en Grafos

```
Tiempo de proceso = 0 segundos

Arcos calculados desde el nodo origen (O) hasta el nodo destino (T):

 *   O ----(2)---> A
 *   A ----(2)---> B
 *   B ----(4)---> D
 *   D ----(5)---> T

Coste total = 13
```



El problema del flujo máximo

- Todo flujo a través de una red dirigida e interconectada se origina en el nuede fuente y termina en el nodo destino.
- Todos los otros nodos serán nodos de trasbordo.
- El flujo a través del arco es permitido en una dirección, donde el máximo flujo permitido está dado por la capacidad del arco.
- En la fuente, todos los arcos salen. En el destino, todos los arcos llegan.
- El objetivo es maximizar el flujo total de la fuente al destino.

LP formulation

$$\max F$$

$$\sum_{arcs\ out} x_{ij} - F = 0 \text{ at Origin}$$

$$\sum_{arcs\ out} x_{ij} - \sum_{arcs\ in} x_{ij} = 0 \text{ Intermediate nodes } \forall\, i$$

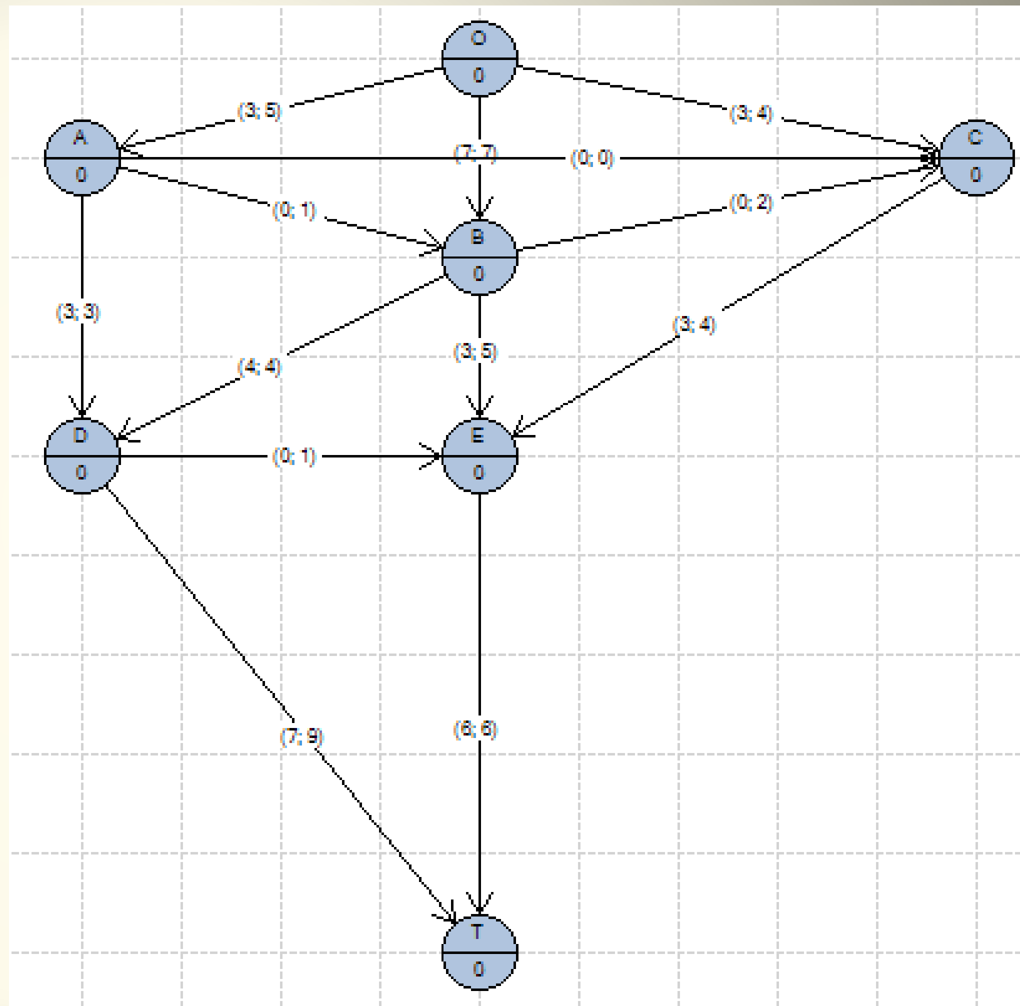
$$\sum_{arcs\ in} x_{ij} - F = 0 \text{ at Destinations}$$

$$x_{ij} \le f_{ij} \;\forall \text{ nodes}$$

$$x_{ij} \ge 0$$

Ejemplo

Origen\Destino	O	A	B	C	D	E	T
O		5	7	4			
A			1	0	3		
B				2	4	5	
C						4	
D						1	9
E							6
T							



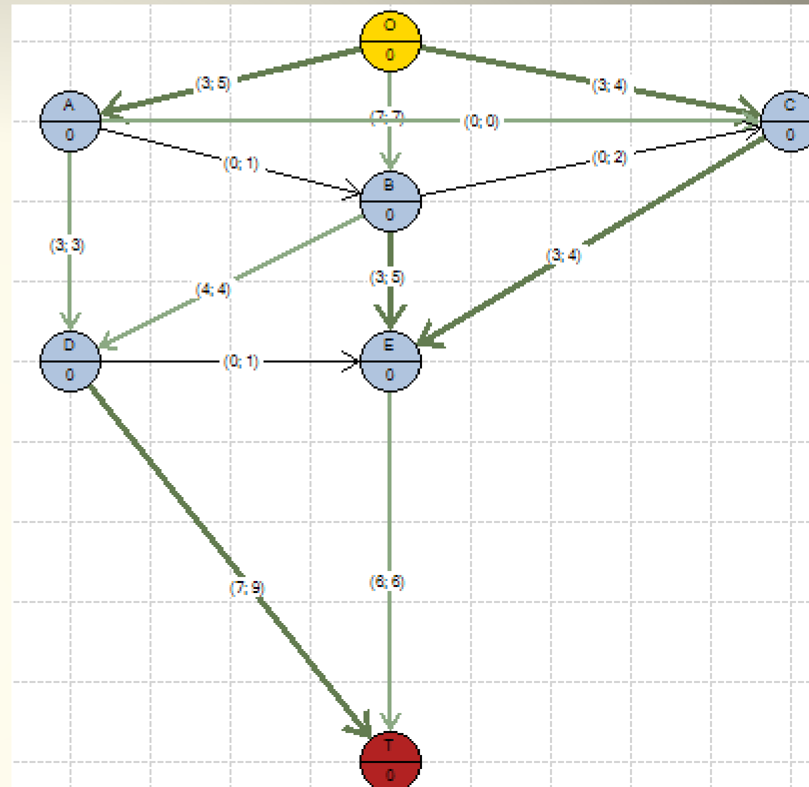
Tiempo de proceso = 0 segundos

Flujos calculados desde el nodo origen (O) hasta el nodo destino (T)
Flujo máximo = 13

Matriz de Arcos con flujo máximo:

N1\N2	O	A	B	C	D	E	T
O	0	3	7	3	0	0	0
A	-3	0	0	0	3	0	0
B	-7	0	0	0	4	3	0
C	-3	0	0	0	0	3	0
D	0	-3	-4	0	0	0	7
E	0	0	-3	-3	0	0	6
T	0	0	0	0	-7	-6	0

Matriz de Capacidades Residuales:



El Problema del Agente Viajero (TSP)

- Tiene gran aplicación en el ámbito de la logística y distribución.
- Responde a la siguiente pregunta: Dada una lista de ciudades y las distancias entre cada par de ellas, ¿cuál es la ruta más corta posible que visita cada ciudad exactamente una vez y regresa a la ciudad origen?
- Así, su objetivo es encontrar un recorrido completo que conecte todos los nodos de una red, visitándolos tan solo una vez y volviendo al punto de partida, y que además minimice la distancia total de la ruta.

Su complejidad

- El problema del agente viajero tiene una variación importante, y esta depende de que las distancias entre un nodo y otro sean simétricas o no.
- La cantidad de rutas posibles en una red está determinada por la ecuación: ***(n-1)!***
- En el caso de que el problema sea simétrico la cantidad de rutas posibles se reduce a la mitad, es decir: ***((n-1)!) / 2***
- Este es un problema NP-duro dentro en la optimización combinatoria
- El problema fue formulado por primera vez en 1930 y es uno de los problemas de optimización más estudiados.
- Aunque el problema es computacionalmente complejo, una gran cantidad de heurísticas y métodos exactos son conocidos, de manera que, algunas instancias desde cien hasta miles de ciudades pueden ser resueltas.

Su formulación

- Sea x_{ij} igual a 1 si hay una ruta factible y 0 si no existe, para n ciudades.
- Sea c_{ij} el costo de ir de una ciudad i a otra j
- Sea u_i una variable artificial que evita que hayan subciclos

$$\min \sum_{i=0}^{n} \sum_{j\neq i, j=0}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$0 \le x_{ij} \le 1 \qquad i, j = 0, \dots n$$

$$x_{ij} \text{ integer} \qquad i, j = 0, \dots n$$

$$\sum_{i=0, i\neq j}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 0, \dots, n$$

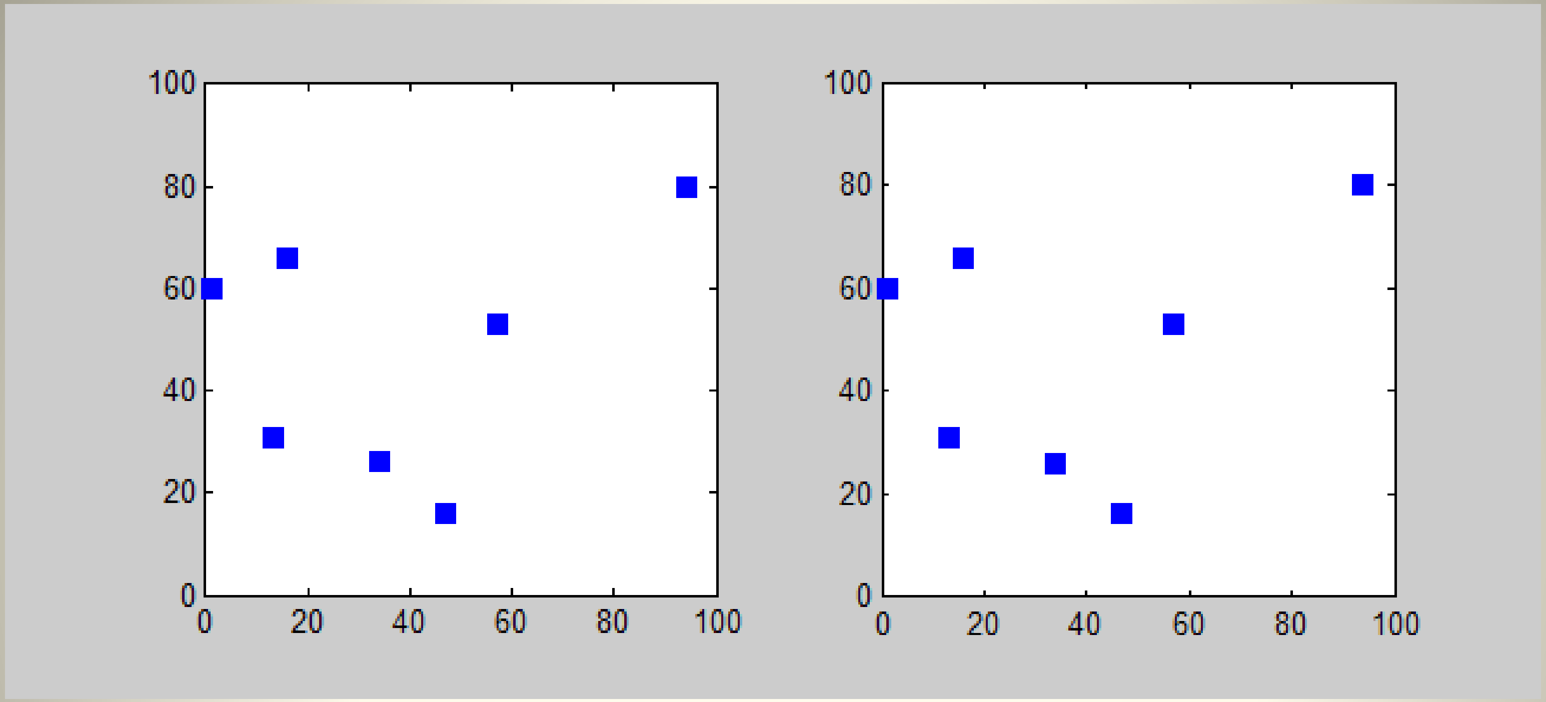
$$\sum_{j=0, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \dots, n$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \le n - 1 \qquad 1 \le i \neq j \le n.$$

Su solución

- La complejidad del cálculo del problema del agente viajero ha despertado múltiples iniciativas por mejorar la eficiencia en el cálculo de rutas.
- El método más básico es el conocido con el nombre de fuerza bruta, que consiste en el cálculo de todos los posibles recorridos, lo cual se hace extremadamente ineficiente y casi que se imposibilita en redes de gran tamaño.
- También existen heurísticos que se han desarrollado por la complejidad en el cálculo de soluciones óptimas en redes robustas, es por ello que existen métodos como el vecino más cercano, la inserción más barata y el doble sentido.
- Por último se encuentran los algoritmos que proporcionan soluciones óptimas, como el método de branch and bound (ramificación y poda), que trabaja el problema como un algoritmo de asignación y lo resuelve por medio del método simplex.

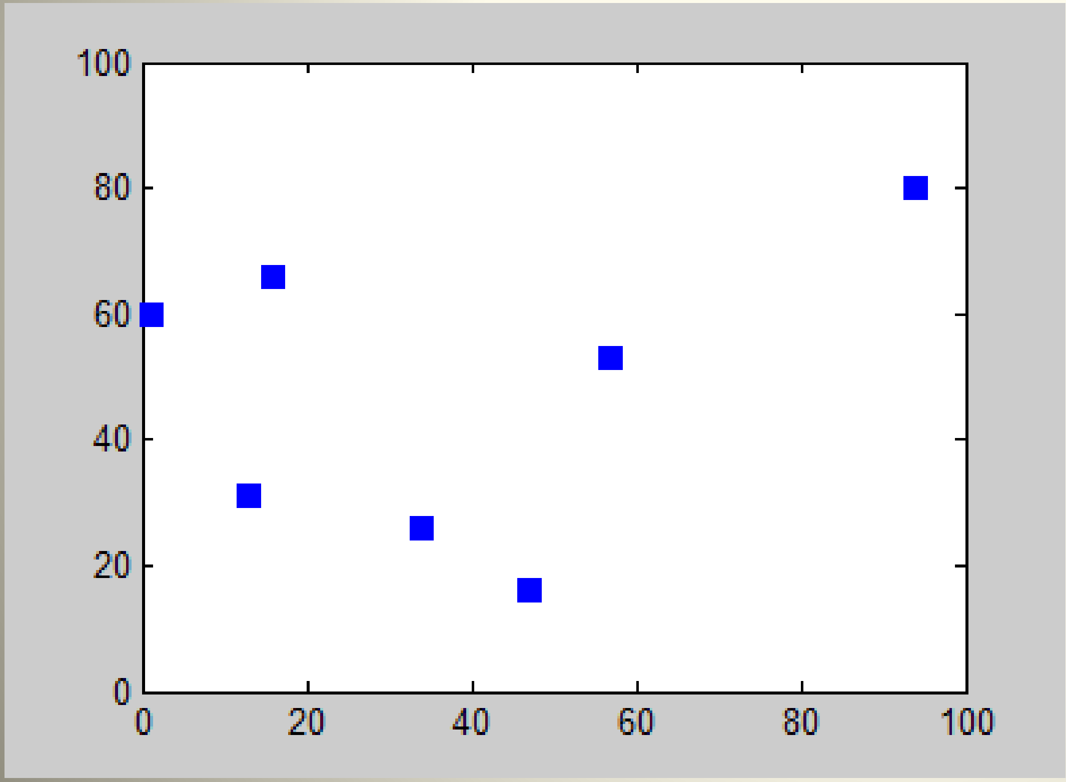
Solución por fuerza bruta



Solución de un TSP con 7 ciudades usando algoritmo fuerza bruta.
Nota: Número de permutaciones: (7-1)!/2 = 360

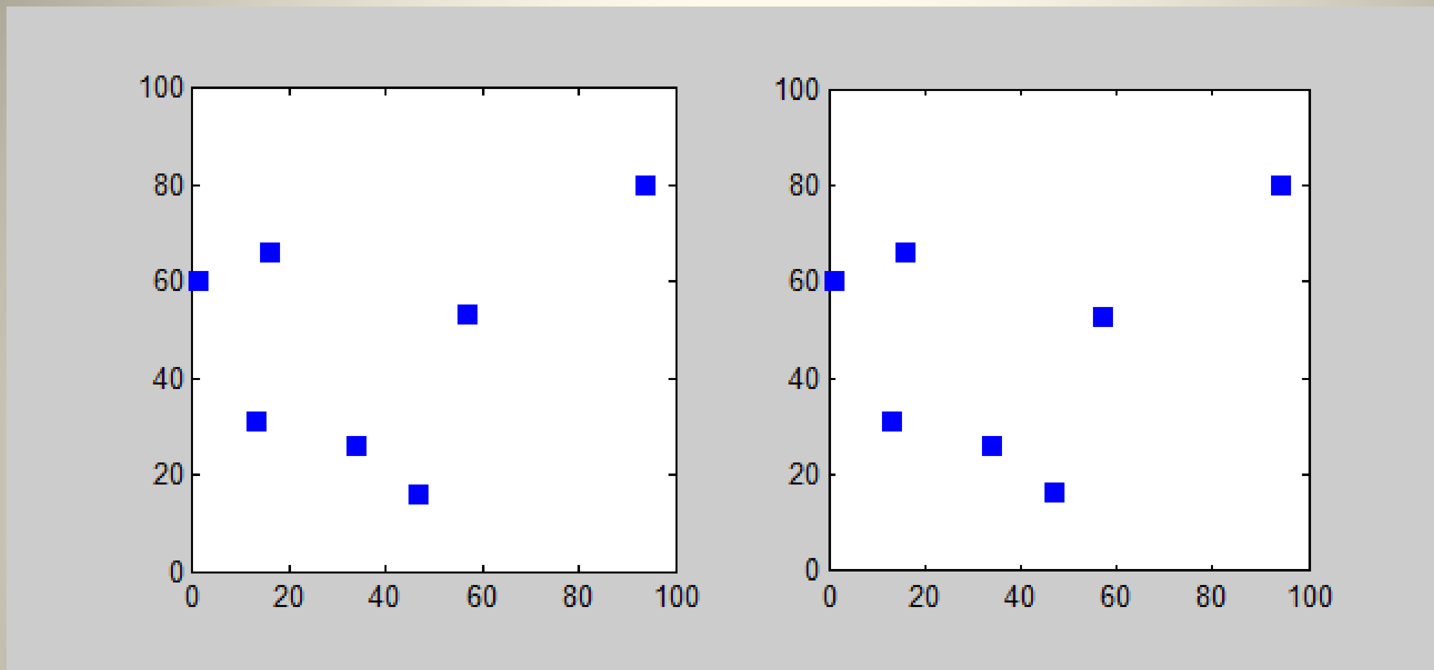
Heurísticas constructivas

El Algoritmo del vecino más próximo (NN por sus siglas en inglés) o también llamado algoritmo voraz (greedy) permite al viajante elegir la ciudad no visitada más cercana como próximo movimiento. Este algoritmo retorna rápidamente una ruta corta. Para N ciudades aleatoriamente distribuidas en un plano, el algoritmo en promedio, retorna un camino de un 25% más largo que el menor camino posible.



Algoritmo del vecino más próximo para un TSP con 7 ciudades. La solución cambia cuando el punto de inicio es cambiado

Rama y acotamiento (branch and bound)



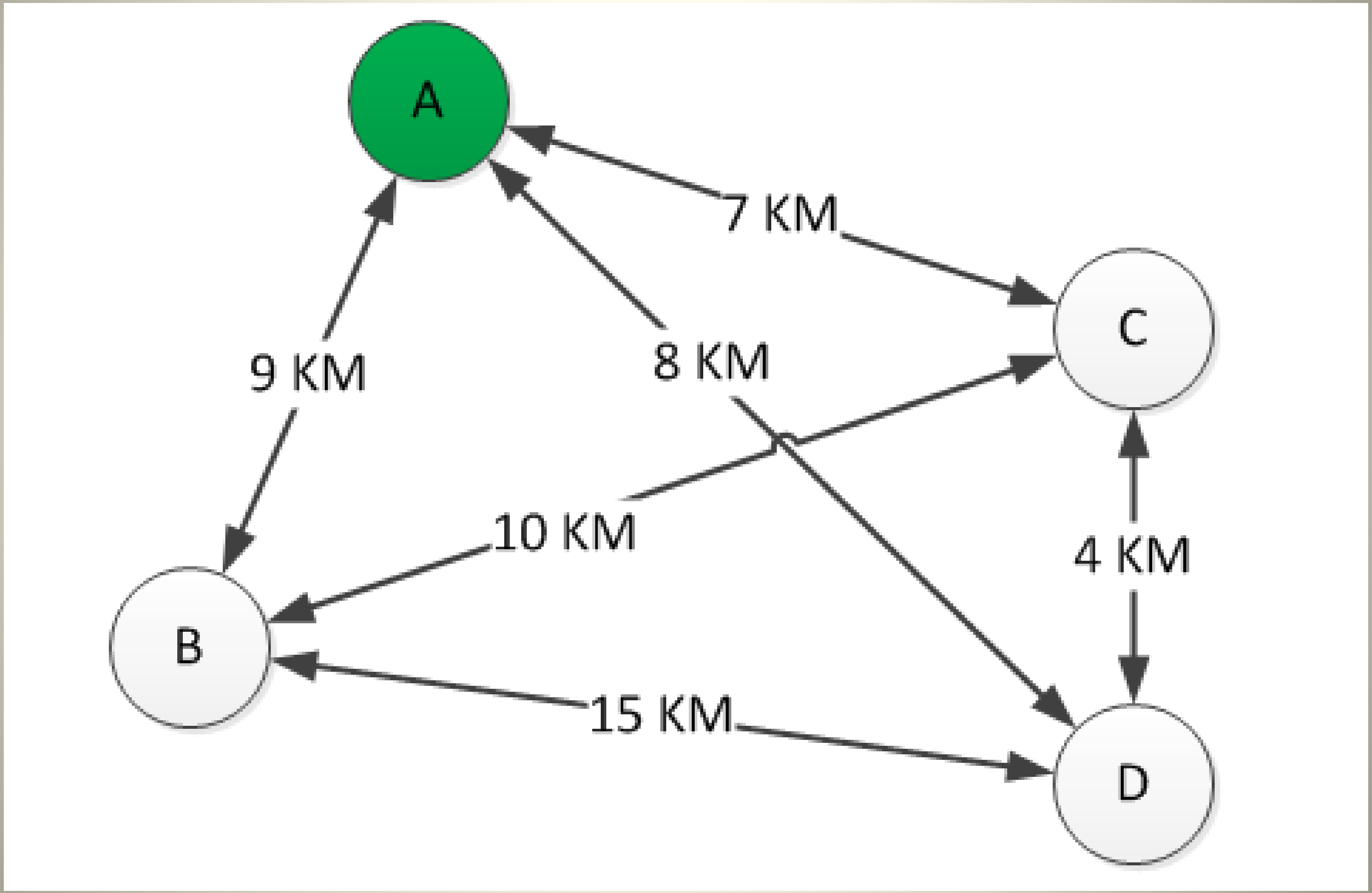
Solución de un TSP con 7 ciudades usando un simple algoritmo de ramificación y acotación. Nota: El número de permutaciones es mucho menor que el de la búsqueda Fuerza Bruta. Pueden ser usados para procesar TSP que contienen entre 40 y 60 ciudades.

Otras heurísticas
Colonización por colonias de hormigas (ACS)

Modela el comportamiento observado en las hormigas reales de encontrar caminos cortos entre las fuentes de comida y su nido. ACS envía un gran número de hormigas (agentes virtuales) para explorar las posibles rutas en el mapa. Cada hormiga elige probabilísticamente la próxima ciudad a visitar basada en una heurística, combinando la distancia a la ciudad y la cantidad de feromonas depositadas en la arista hacia la ciudad. La cantidad de feromonas depositadas es inversamente proporcional a la longitud del camino: el camino más corto, tiene más cantidad de feromonas.

Algoritmo de optimización por Colonia de Hormigas para el TSP con 7 ciudades: Las líneas rojas y gruesas en el mapa de feromonas indican presencia de más feromonas

Ejemplo



Solución… Fuerza bruta

Posibles rutas

A - B - D - C - A = 9 + 15 + 4 + 7 = 35 km

A - B - C - D - A = 9 + 10 + 4 + 8 = 31 km

A - C - B - D - A = 7 + 10 + 15 + 8 = 40 km

Rutas simétricas

A - D - C - B - A = 8 + 4 + 10 + 9 = 31 km

A - C - D - B - A = 7 + 4 + 15 + 9 = 35 km

A - D - B - C - A = 8 + 15 + 10 +7 = 40 km

Vecino más cercano

El método consiste en una vez establecido el nodo de partida, evaluar y seleccionar su vecino más cercano. En este caso:

Vecinos de A	B	C	D
Distancia	9	7	8

En la siguiente iteración habrá que considerar los vecinos más cercanos al nodo C (se excluye A por ser el nodo de origen):

Vecinos de C	B	D
Distancia	10	4

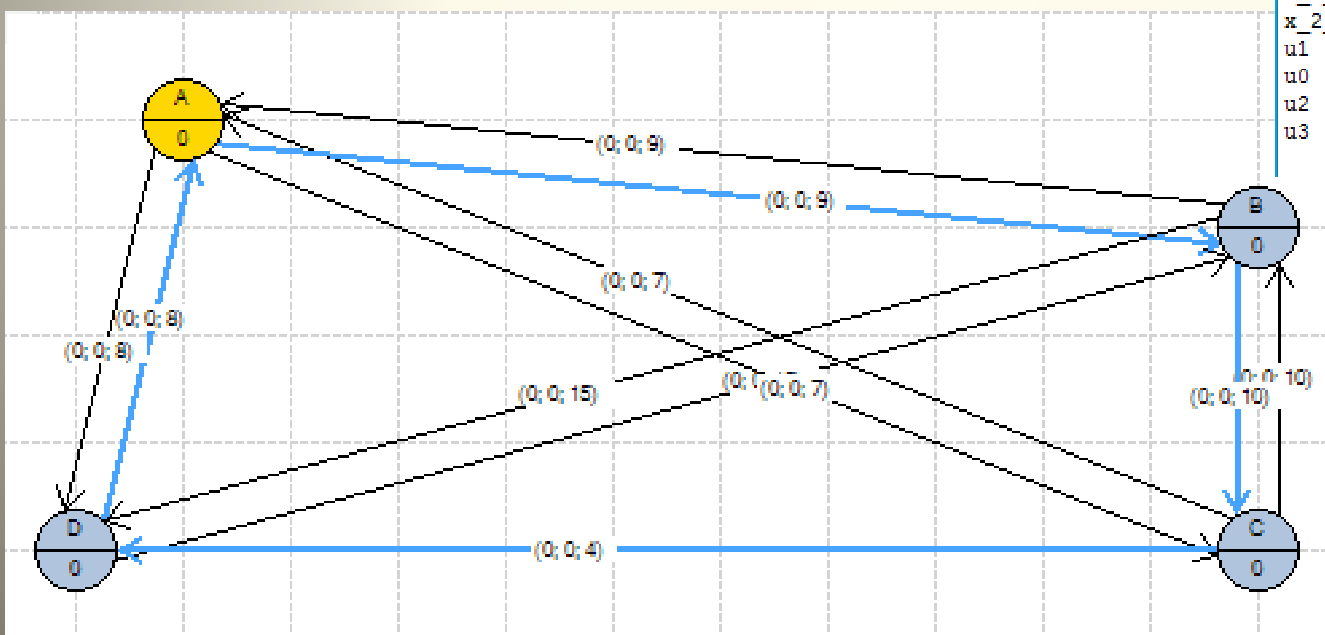
En la siguiente iteración los vecinos más cercanos de D serán C, con quien ya tiene conexión, A quién es el nodo de origen y B, por esta razón B se debe seleccionar por descarte. Al estar en B todos los nodos se encuentran visitados, por lo que corresponde a cerrar la red uniendo el nodo B con el nodo A, así entonces la ruta solución por medio del vecino más próximo sería A, C, D, B, A = 7, 4, 15, 9 = 35 km.

Este es un caso en el que a pesar de tener una red compuesta por pocos nodos, el método del vecino más cercano no proporciona la solución óptima, la cual calculamos con el método de fuerza bruta como 31 km.

Utilizando Grafos - Simétrico

	Origen\Destino	A	B	C	D
▶	A		9	7	8
	B	9		10	15
	C	7	10		4
	D	8	15	4	

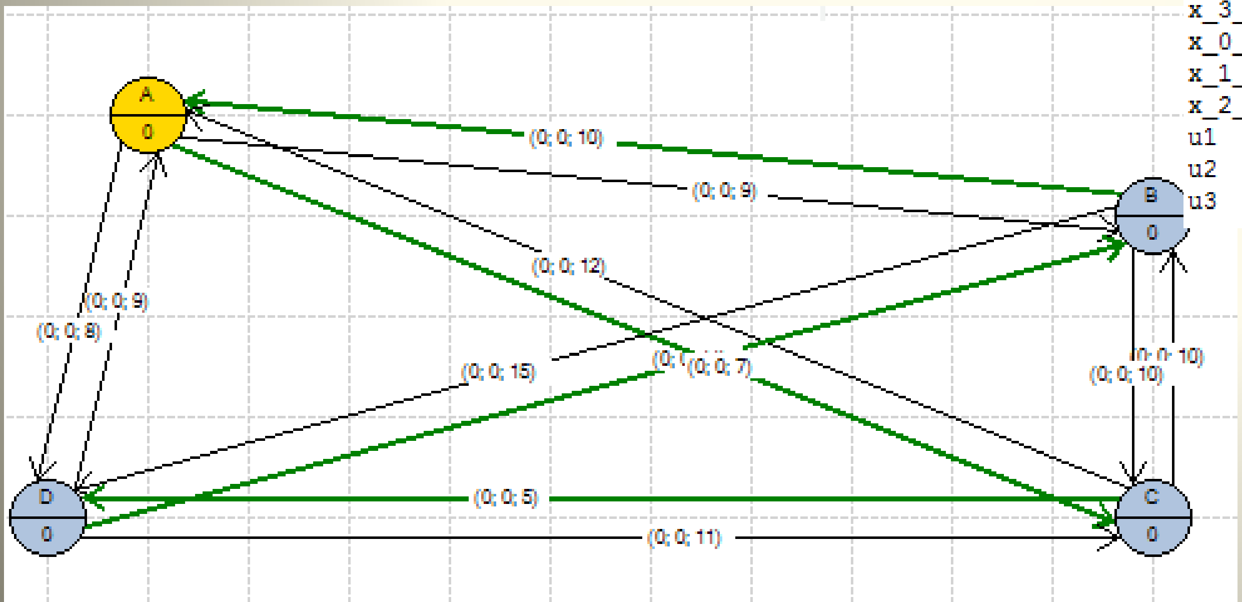
```
 Tiempo de proceso  = 0 segundos

 SOLUCION OPTIMA ENCONTRADA
 lp_solve -> 0


Valor de la función objetivo = 31.00000000

Valor actual de las variables:

x_1_0:: B --> A =          0
x_2_0:: C --> A =          0
x_3_0:: D --> A =          1
x_0_1:: A --> B =          1
x_2_1:: C --> B =          0
x_3_1:: D --> B =          0
x_0_2:: A --> C =          0
x_1_2:: B --> C =          1
x_0_3:: A --> D =          0
x_1_3:: B --> D =          0
x_2_3:: C --> D =          1
u1                             0
u0                             3
u2                             1
u3                             2
```



Utilizando Grafos-asimétrico

Origen\Destino	A	B	C	D
A		9	7	8
B	10		10	15
C	12	10		5
D	9	11	11	

```
Tiempo de modelado = 0 segundos
Tiempo de proceso  = 0 segundos

SOLUCION OPTIMA ENCONTRADA
lp_solve -> 0


Valor de la función objetivo = 33.00000000

Valor actual de las variables:

x_1_0:: B --> A =          1
x_2_0:: C --> A =          0
x_3_0:: D --> A =          0
x_0_1:: A --> B =          0
x_2_1:: C --> B =          0
x_3_1:: D --> B =          1
x_0_2:: A --> C =          1
x_1_2:: B --> C =          0
x_3_2:: D --> C =          0
x_0_3:: A --> D =          0
x_1_3:: B --> D =          0
x_2_3:: C --> D =          1
u1                              2
u2                              0
u3                              1
```



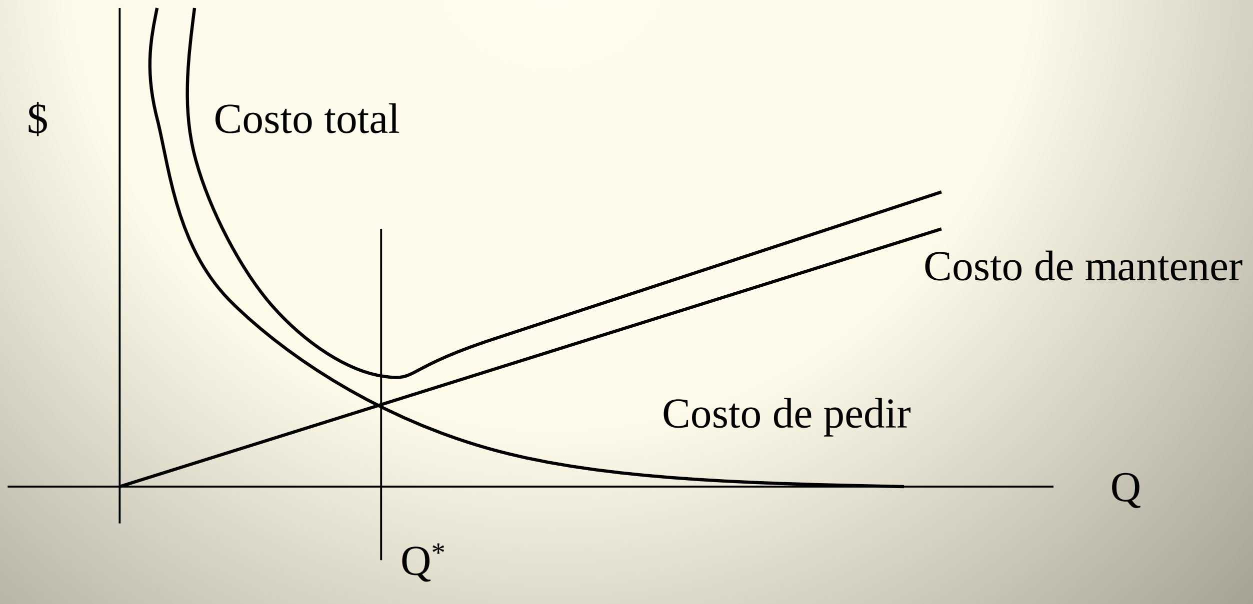
Gestión de Inventarios

Inventarios

- Los inventarios tienen una gran importancia siempre y cuando estos añadan valor a los procesos.
- La existencia de los inventarios añade valor si estos están disponibles sin generar costos adicionales que muchas veces están ocultos.
- Razones para tener inventarios:
  - Para crear reservas contra imprevistos en la oferta y la demanda
  - Para lograr ventajas en descuentos de cantidad
  - Para disminuir costos de instalación y montaje aprovechando la producción por lotes
  - Para tener reservas que permitan enfrentar demandas estacionales o promociones
  - Para mantener el flujo de productos entre lugares o centros de trabajo
  - Para explotar oportunidades de especulación

Modelos de inventario

- El objetivo es mantener inventarios “justo a tiempo” y no “por si acaso”.
- El énfasis es más en disminuir o eliminar inventarios al minimizar el grado de incertidumbre.
- El objetivo es el de minimizar el costo total de la política de inventario: Costo de Mantener y Costo de Pedir



Costos asociados

- En la política de inventarios:
- Costo de la política = Costo Total de Pedidos + Costo promedio de mantener una unidad

$$C_T = C_p \frac{D}{Q} + C_h \frac{Q}{2}$$

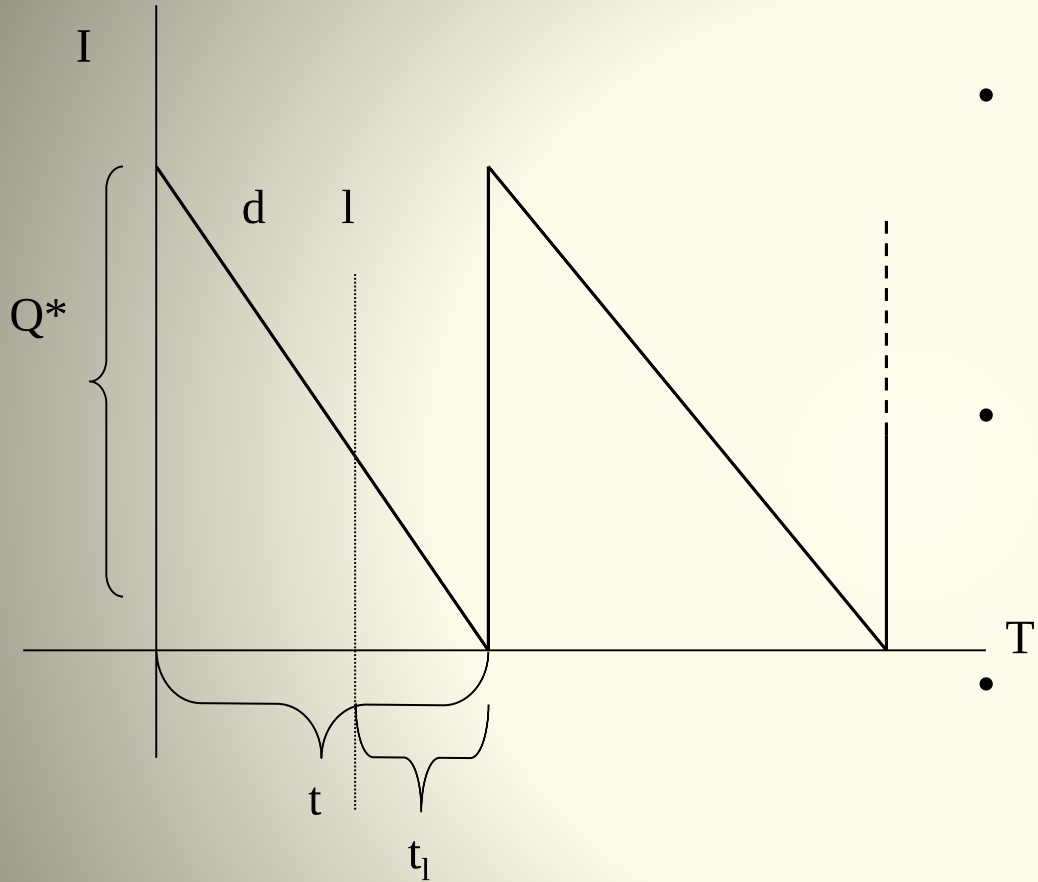
Minimizando C_T en función de Q se tiene que:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_pD}{C_h}}$$

Modelos determinísticos:

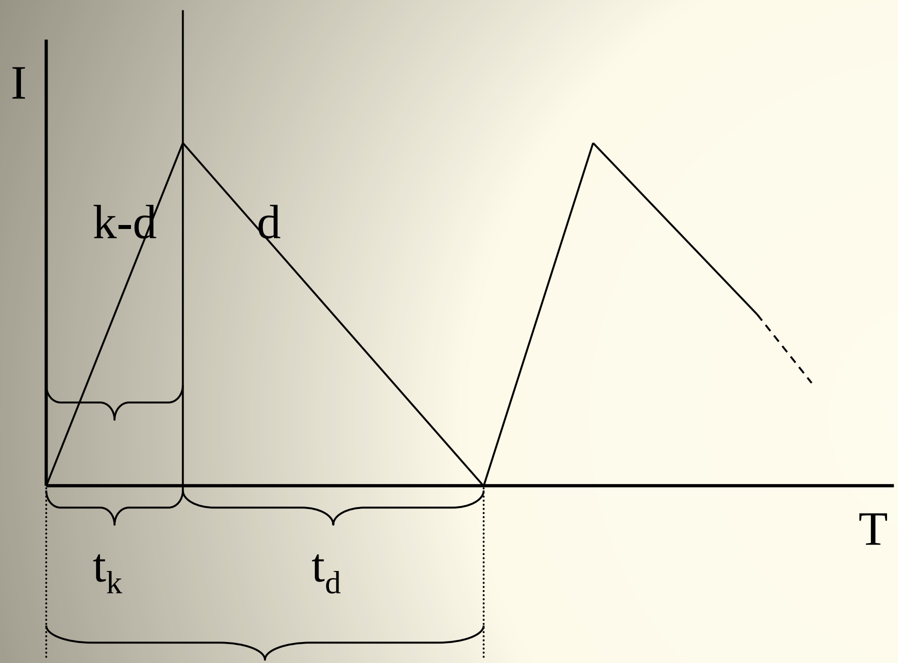
- **Modelo del Tamaño Económico de Lote** (EOQ).
- Este modelo analiza el comportamiento de los inventarios de un producto único basándose en los siguientes supuestos:
  - La demanda es conocida y ocurre a una tasa constante **d** totalizando **D** unidades al año.
  - Cada vez que se hace una orden, el costo de ordenar es constante e igual a **P**
  - Cada orden se recibe a tiempo, o sea no hay tiempo de espera
  - La orden se recibe exactamente cuando el inventario es cero
  - No se permite déficit
  - El costo por unidad por año de mantener el inventario es **H**

Modelo EOQ determinístico



- Al inicio del período de inventario, se reciben **Q*** unidades que son consumidas a una taza **d** cada día en un tiempo de **t** días, momento en el que llega el siguiente pedido.
- Se puede suponer que el pedido demora $\mathbf{t_l}$ días en llegar, por lo que habrá que pedir cuando el nivel de inventario llega al punto de reorden **l**.
- El ciclo se repite indefinidamente o hasta que alguno de los elementos que definió la política de inventario cambie.

EOQ con acumulación progresiva

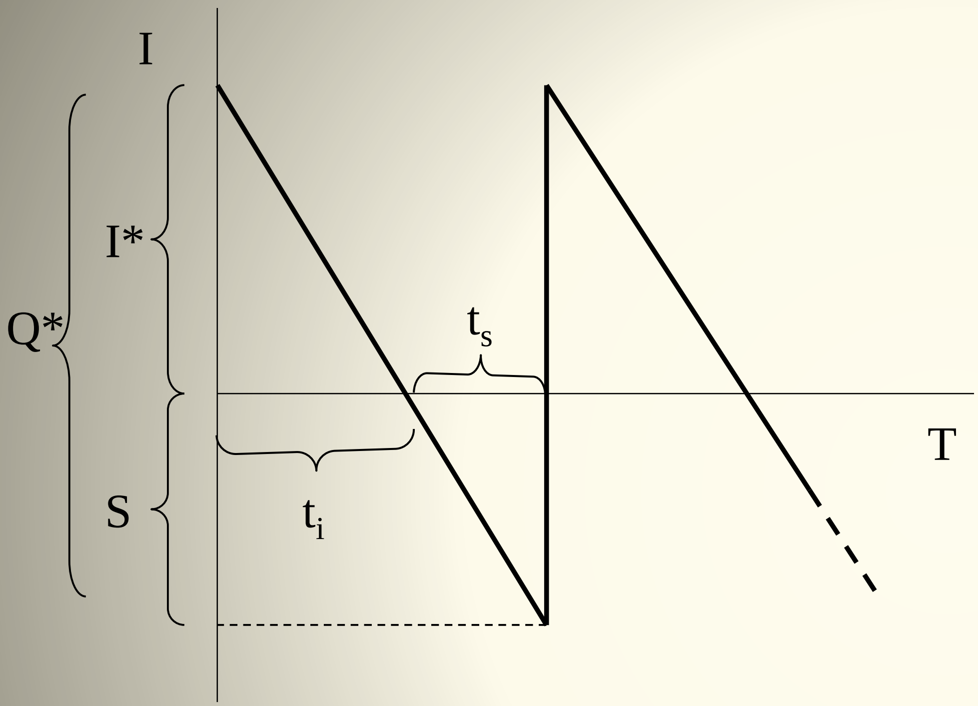


$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_pD}{C_h(1-d/k)}}$$

$$C_T = C_p\frac{D}{Q} + \frac{C_h}{2}Q(1-d/k)$$

- Sea **k** la taza de producción tal que **k** > **d** y P el costo de preparar los equipos para iniciar una tanda de producción del lote.
- El lote de tamaño **Q** se acumulará a una taza **k-d** en tiempo **tk**, mientras se consume a una taza **d** en tiempo **td**.
- Finalmente, el tiempo entre ciclos estará dado por **t = tk + td**

Modelo EOQ con faltante



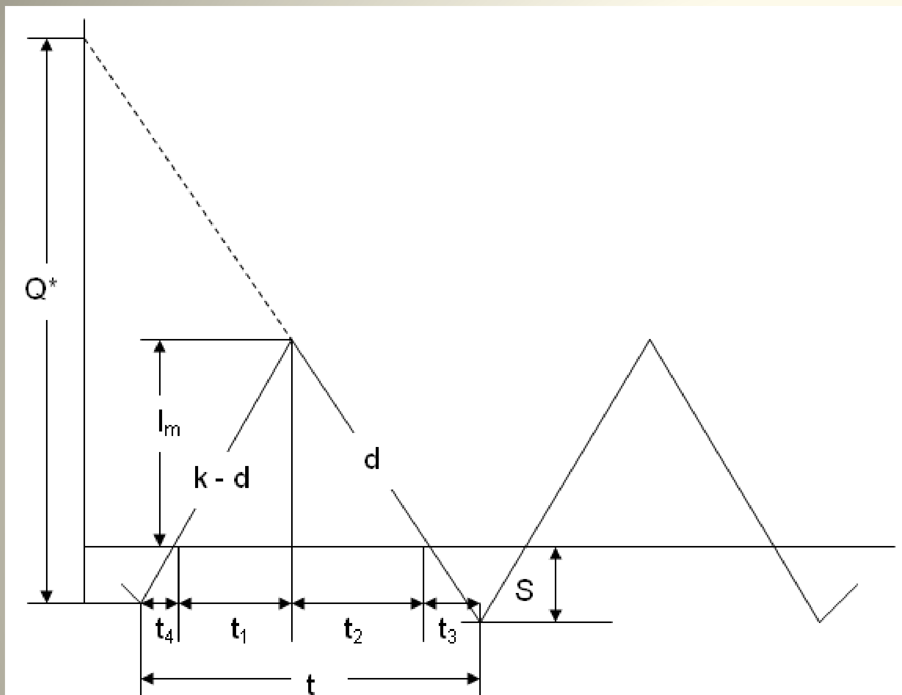
$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_pD}{C_h}\left(\frac{C_h + C_b}{C_b}\right)} \qquad S^* = \sqrt{\frac{2C_pDC_h}{(C_b + C_h)C_b}}$$

$$I^* = Q^* - S^*$$

$$C_T = C_p\frac{D}{Q} + C_h\frac{(Q-S)^2}{2Q} + C_b\frac{S^2}{2Q}$$

- En el modelo EOQ original se permite un faltante **S** con un costo de faltante **C_b**.
- Supóngase también que el pedido total **Q** incluye tanto el inventario **I*** que se consume en tiempo **t_i**, y el faltante **S** que se acumula durante el tiempo **t_s**.

Acumulación progresiva con faltante



$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_pD}{C_h\left(1-\frac{d}{k}\right)}\left(\frac{C_h+C_b}{C_b}\right)} \qquad S^* = \sqrt{\frac{2C_pDC_h(1-\frac{d}{k})}{(C_b+C_h)C_b}}$$

$$C_T = C_p\frac{D}{Q^*} + \frac{C_h}{2Q^*(1-d/k)}\left(Q(1-d/k)-S\right)^2 + \frac{C_bS^2}{2Q^*(1-d/k)}$$

- En este caso, el inventario máximo $\mathbf{I_m}$ se acumula en un tiempo $\mathbf{t_1 + t_4}$ a una tasa **k – d**.
- A esta tasa se permitirá acumular el déficit **S** y el inventario necesario para cubrir parcialmente las necesidades que se presenten en $\mathbf{t_2}$, mientras que en el tiempo $\mathbf{t_3}$ se volverá a acumular el déficit permitido.
- Los costos de iniciar una tanda **C**, mantener el inventario **H** y déficit **B** son similares a los casos anteriores.
- ¿Cuánto será I_m?

Ejemplo

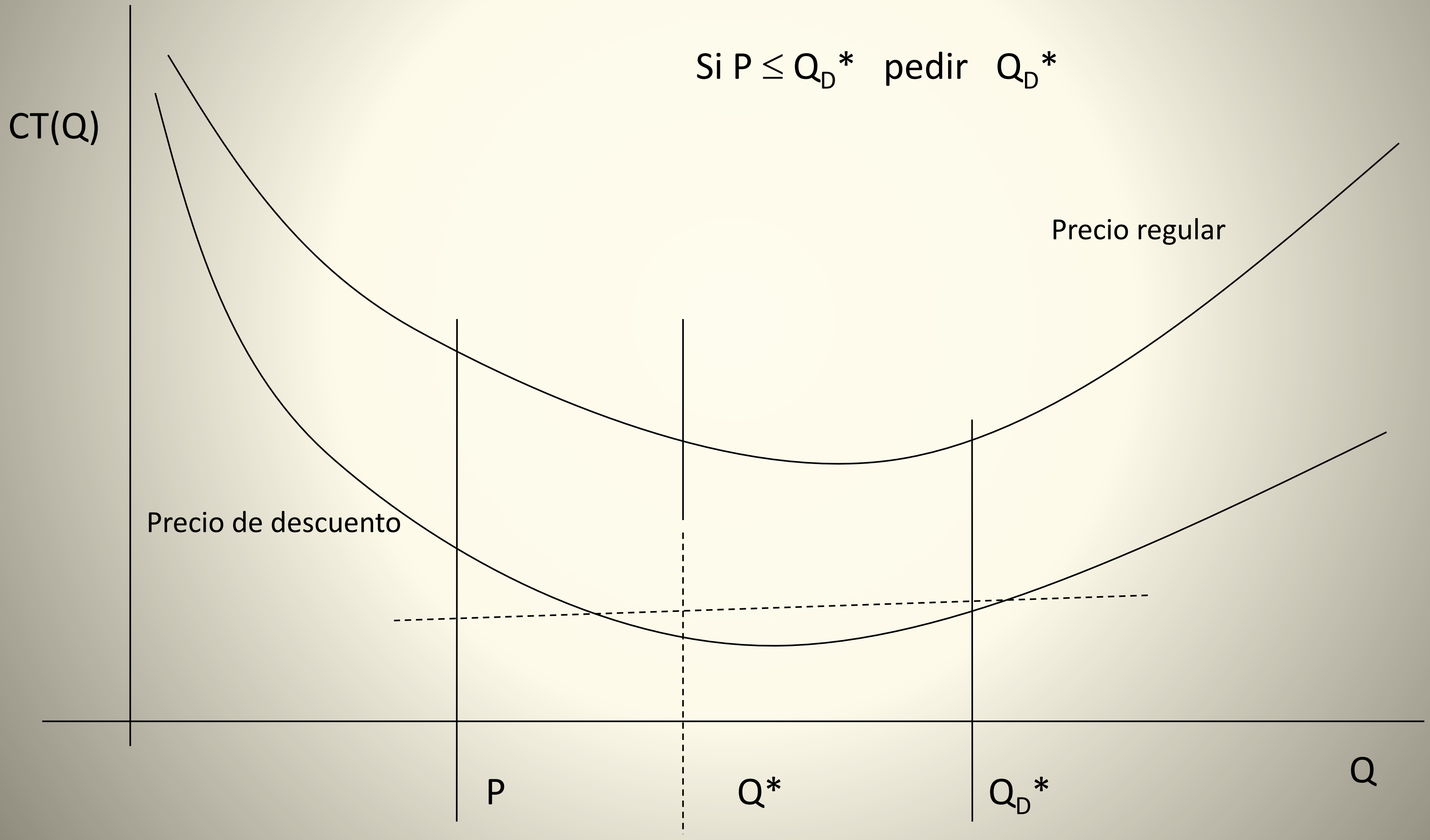
- Supóngase que se tiene un proceso de producción bajo las siguientes características:
- Demanda 15,000 unidades al año
- Costo de iniciar una tanda: 10,000
- Costo de mantener una unidad al año: 20% del costo del producción de una unidad
- El costo de tener faltantes es del 30% del costo del producción de una unidad
- Costo de producción de una unidad: 1,000
- Tasa de producción anual 18,000 unidades

- El departamento de mantenimiento de un hospital cambia luces de neón a una tasa de 100 unidades diarias. Cuesta \$100 hacer una orden de compra. Se estima que una luz de neón en el almacén cuesta aproximadamente \$0.02 diarios. El tiempo de entrega, considerando el tiempo procesar el pedido y recepción es de 12 días
  - Determine la política óptima de pedido del hospital, considerando el cálculo del lote óptimo, el tiempo de pedido y el punto de reorden (nivel de inventario para hacer el próximo pedido)
  - Presente un bosquejo del comportamiento del inventario ¿Habrán pedidos pendientes dentro del sistema de compras?
  - ¿Cuánto es el costo de la política de inventarios?

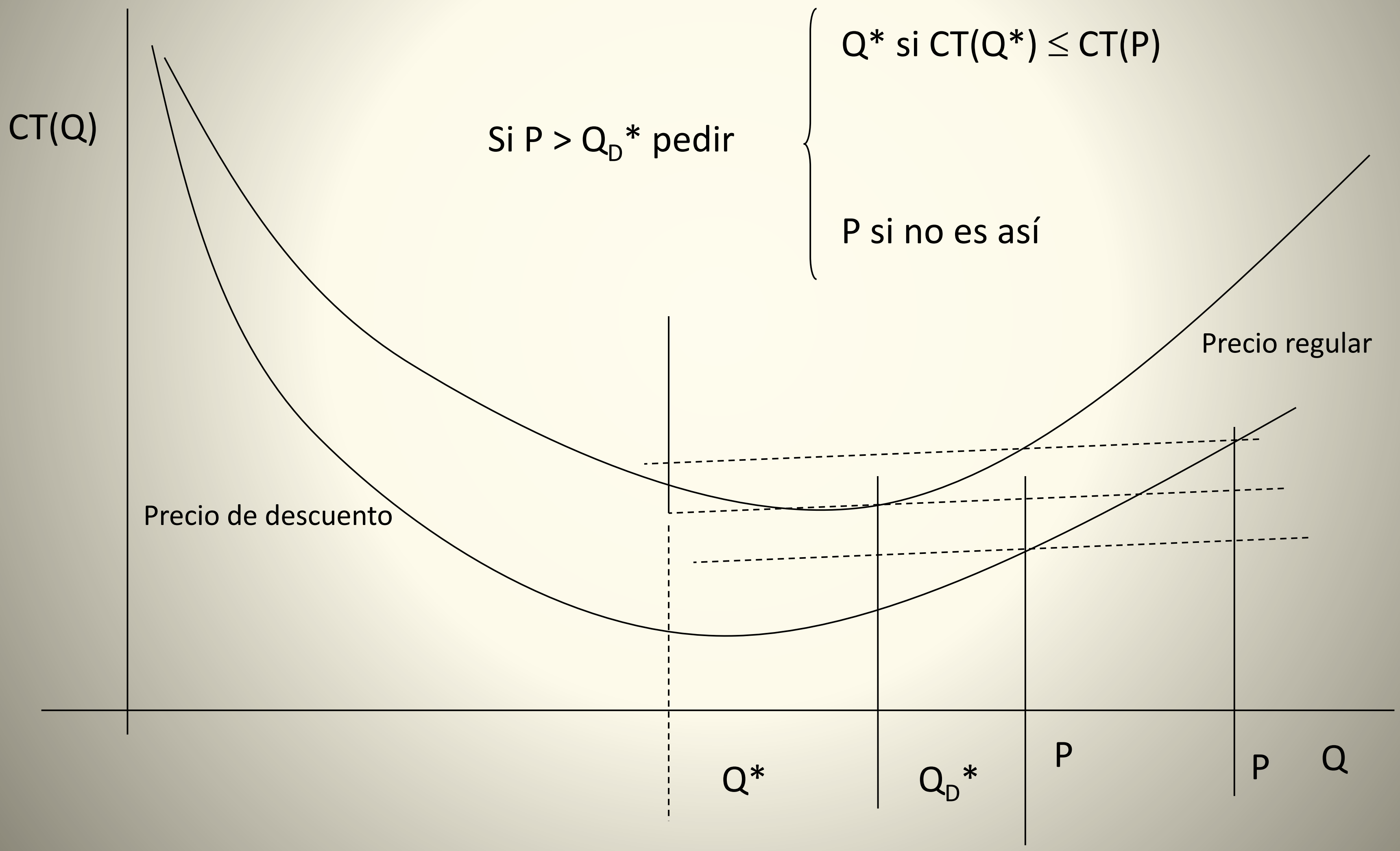
Descuentos por cantidad

- En los modelos anteriores el costo unitario es constante
- El contexto cambia si se ofrecen descuentos por cantidad
- El descuento en general es un porcentaje del precio de compra
- El descuento se ofrece cuando se compra más de cierta cantidad P

Efecto del tamaño de P



Efecto del tamaño de P



Ejemplo

- Supóngase el siguiente caso:
- Demanda de 5000 unidades al año
- Costo unitario $5.00
- Costo de mantener 20% del costo unitario por unidad año
- Costo de pedir $49
- Cuadro de descuento:

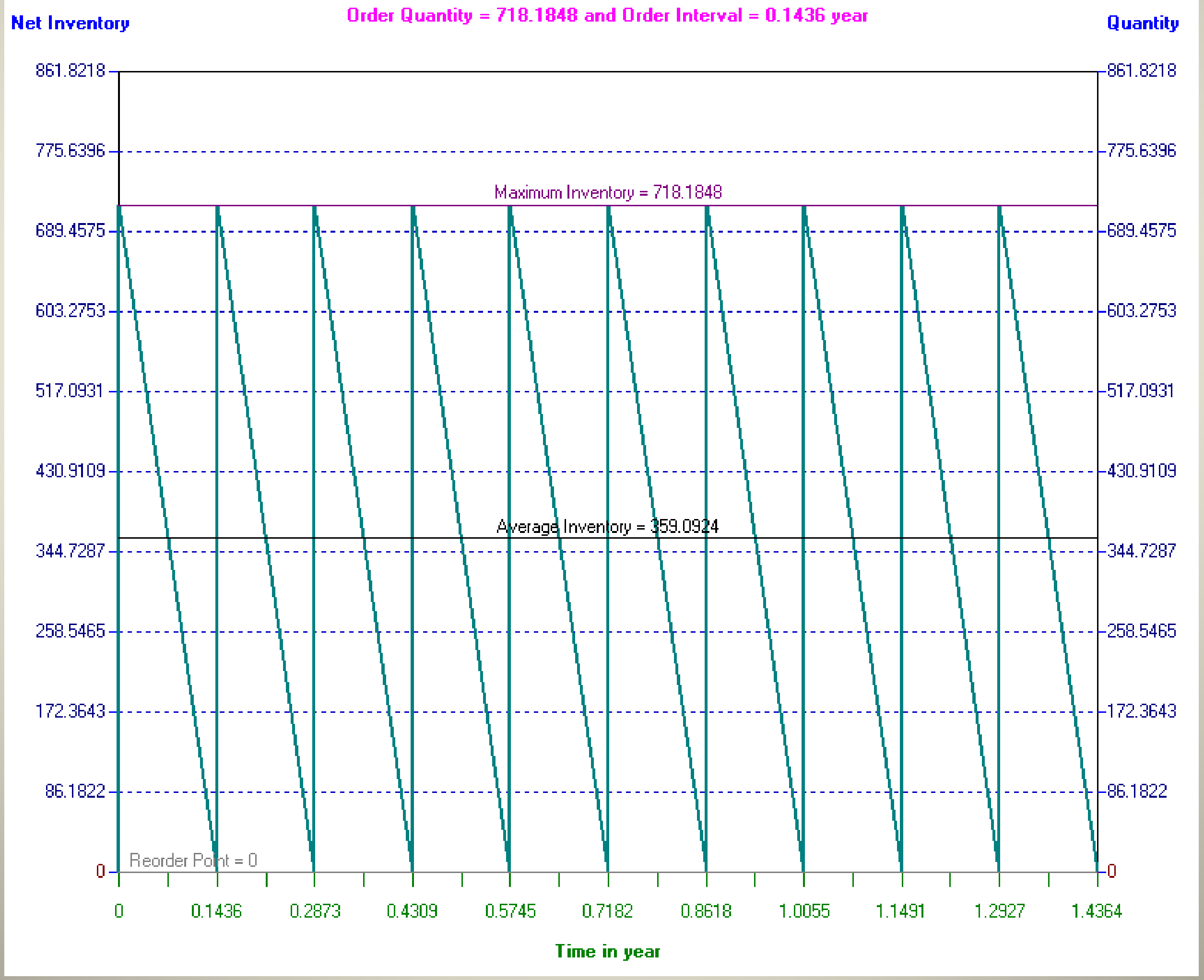
Categoría	Tamaño del lote	Descuento (%)	Costo unitario
1	0 a 999	0	5.00
2	1,000 a 2,499	3	4.85
3	2500 o más	5	4.75

Solución

Categoría	Tamaño del lote	Descuento (%)	Costo unitario	Q*d	Q	C(D)	C(P)	C(H)	CT(Q)
1	0 a 999	0	5	700	700	25,000.00	350.00	350.00	25,700.00
2	1,000 a 2,4999	3	4.85	711	1000	24,250.00	245.00	485.00	24,980.00
3	2500 o más	5	4.75	718	2500	23,750.00	98.00	1,187.50	25,035.50

Política óptima, ordenar 1,000 unidades a un costo total de $24,800 anuales

10-10-2009	Break Qty.	Discount %	EOQ	EOQ Cost	Feasibility	Order Qty.	Total Cost
0	0	0	700	$25700.0000	Yes	700	$25700.0000
1	1000	3	710.7423	$24939.4200	No	1000	$24980.0000
2	2500	5	718.1848	$24432.2800	No	2500	$25035.5000
**	Recommended	Order Qty. =	1000	Discount =	3%	Total Cost =	$24980.0000



EOQ con limitación de espacio de almacenamiento

- El modelo se aplica para el caso de n > 1 artículos con comportamiento típico con abastecimiento instantáneo sin faltante.
- Sean:

D_i: la demanda del producto i, para i = 1, 2, ..., n

P_i: el costo de procesar un pedido para el proudcto i

H_i: Costo unitario de almacenamiento por unidad de tiempo del producto i

Q^*_i: cantidad óptima de pedido de producto i

a_i: área de almacenamiento necesaria para una unidad de producto i

A: Área total disponible para el almacenamiento de los productos

- El costo total de la política se puede expresar como:

$$C_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K_i D_i}{Q_i^*} + \frac{H_i Q_i^*}{2} \right)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i Q_i^* \leq A$$

- Optimizando a través de multiplicadores de Lagrange:

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2P_iD_i}{H_i - 2\lambda a_i}}$$

- Donde el multiplicador de Lagrange λ < 0 en caso de minimizar
- La minimización debe cumplir que:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i Q_i^* \leq A$$

- EOQ se determina a través de un proceso de ensayo y error.

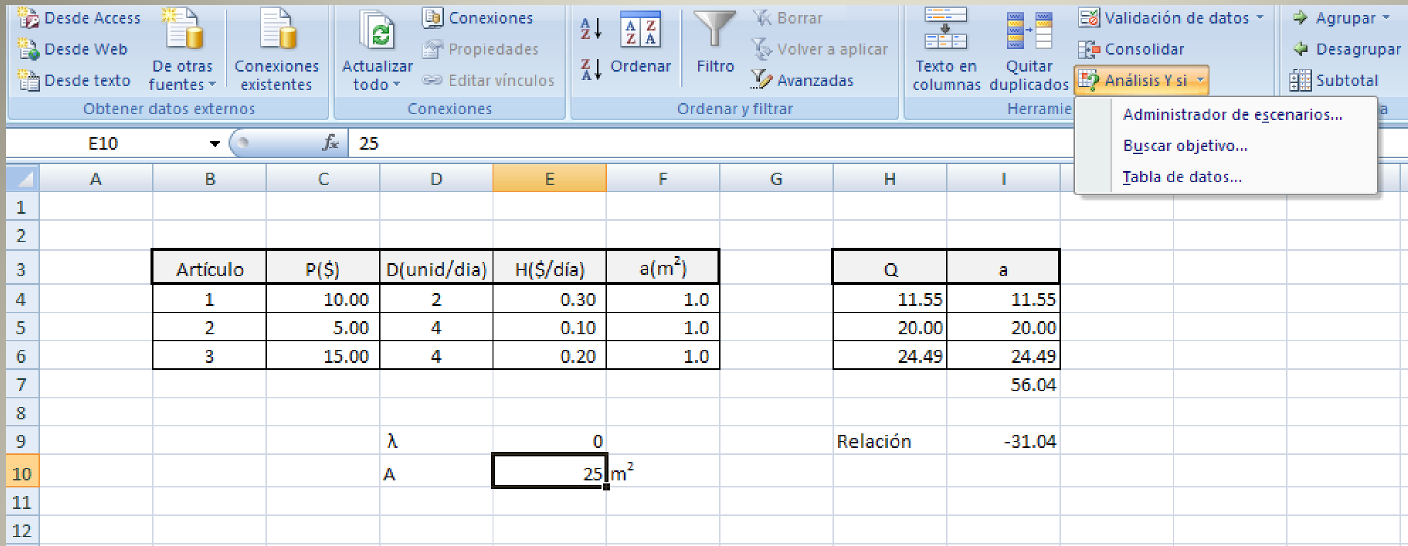
Ejemplo

- Se tiene la siguiente información, donde el área máxima disponible es de $25m^2$. Se requiere encontrar el tamaño óptimo de lote de tal manera que se satisfaga la restricción de área disponible.

Artículo	P($)	D(unid/dia)	H($/día)	$a(m^2)$
1	10.00	2	0.30	1.0
2	5.00	4	0.10	1.0
3	15.00	4	0.20	1.0

- Po

Q	a
6.34	6.34
7.09	7.09
11.57	11.57

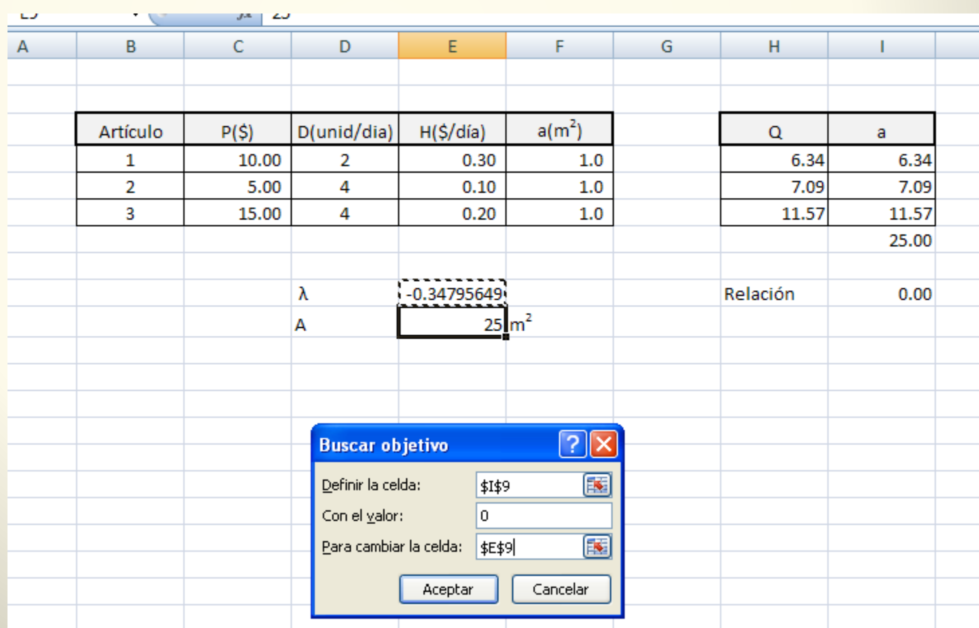


Artículo	P($)	D(unid/día)	H($/día)	a(m^2)
1	10.00	2	0.30	1.0
2	5.00	4	0.10	1.0
3	15.00	4	0.20	1.0

Q	a
11.55	11.55
20.00	20.00
24.49	24.49
	56.04

λ	0
A	25 m^2

Relación	-31.04



Artículo	P($)	D(unid/día)	H($/día)	a(m^2)
1	10.00	2	0.30	1.0
2	5.00	4	0.10	1.0
3	15.00	4	0.20	1.0

Q	a
6.34	6.34
7.09	7.09
11.57	11.57
	25.00

λ	-0.34795649
A	25 m^2

Relación	0.00

Modelo estocástico de un solo período

- También conocido como el problema del vendedor de periódico
- La demanda es incierta, con distribución f(X), tal que X es una variable aleatoria representando la demanda donde D=E(X)
- Si $Q > E(X)$, hay un costo unitario por excedente c(o), de lo contrario hay un costo unitario c(u) de faltante.
- El objetivo es encontrar $P(X \leq Q)$ y la utilidad de la política correspondiente

Modelo estocástico de un solo período

- Sean
  - Q: cantidad a pedir
  - P: precio de venta
  - C: el costo unitario
  - S: el costo de salvamento
  - B: el costo de déficit
  - c(o): costo unitario incremental del excedente = C – S
  - c(u): costo unitario incremental del faltante = P – C + B

$$P(Q \le X) = \frac{c(u)}{c(o)+c(u)}$$

$$Q = F^{-1}(X)$$

$$Q = -\lambda \ln\left(1 - \frac{c(u)}{c(o)+c(u)}\right) \text{distr. exponencial}$$

$$Q = \mu \pm z\sigma, \text{ para } z = f\left(\frac{\mathrm{c(u)}}{\mathrm{c(o)+c(u)}}\right) \text{distr. normal}$$

$$\mathrm{Q = a + (b - a)}\left(\frac{\mathrm{c(u)}}{\mathrm{c(o)+c(u)}}\right) \text{distr. uniforme}$$

$$Utilidad \begin{cases} PX - CQ + S(Q - X) \text{ si } \mathrm{X \le Q} \\ \mathrm{PX - CQ} + B(X - Q) \text{ si } \mathrm{X < Q} \end{cases}$$

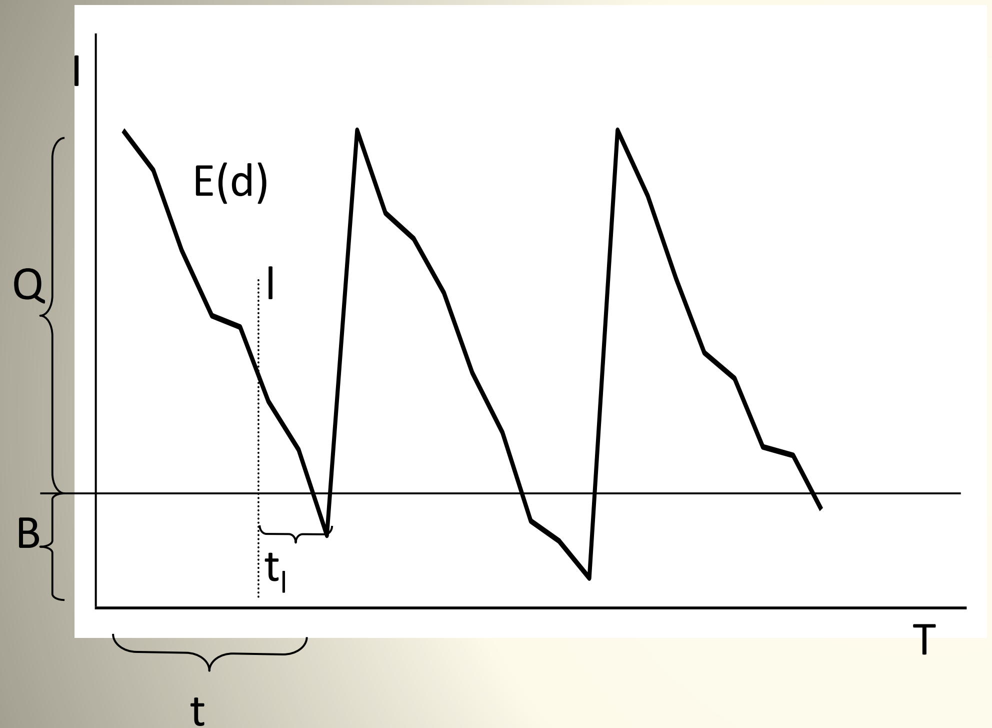
Ejemplo

- Una tienda de zapatos tiene una demanda uniforme de cierto modelo con intervalo entre 350 y 650
- Precio de cada par de zapato 30
- Costo de cada par de zapato 20
- Costo de faltante 10
- Valor de salvamento 10
- Costo de hacer un pedido 30

Reemplazando

- c(o)=10
- c(u)=20
- Distribución uniforme: inventario promedio es de 500 unidades
- $P(X \leq Q) = 0.6667$
- Q = 350 + (650 – 350)*0.6667 = 550

Modelos probabilísticos



- Dos enfoques: el inventario se revisa continuamente, o se asignan cantidades constantes en intervalos de tiempo
- Sea E(**D**) el valor esperado de la demanda total, **E(d)** el valor esperado de la demanda por unidad de tiempo y $\boldsymbol{\sigma_d}$ su desviación estándar.
- Al ser la demanda variable, hay que considerar que la tasa de agotamiento del inventario varía de tal manera que el consumo del mismo no puede modelarse linealmente.
- Para minimizar la incertidumbre, se incluye un inventario de seguridad **B.**

$$Q^* = \sqrt{\frac{2CE(D)}{H}}$$

$l = B + d_l$

$d_l = E(d)t_l$

$$B = z_\alpha \sigma_d \sqrt{t_l}$$

Ejemplo

- Demanda diaria: normalmente distribuida con media 1,000 y σ de 200
- C_p:100
- C_h: 1
- Días de trabajo 300
- t_l :15 dias
- α=95%

Enfoques heurísticos para períodos múltiples

- Programación dinámica para encontrar el tamaño del lote
- Basados en la formulación:

$$Min \quad \sum_{t=1}^{m} \left(vc_t x_t + sc_t y_t + hc_t s_t \right)$$

$$s.t. \quad s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \qquad \forall t \in T$$

$$x_t \leq sd_{tm} y_t \qquad \forall t \in T$$

$$x_t, s_t \geq 0; y_t \in \{0,1\} \qquad \forall t \in T$$

Donde, para cualquier período t:
d_t : demanda
x_t : nivel de producción
y_t : nueva tanda o pedido
s_t : nivel de inventario
vc_t: es el costo unitario
sc_t: costo de pedir o de iniciar la tanda
hc_t: costo promedio de mantener
sd_t: inventario acumulado en t
T : horizonte de planeación.
T = 1, 2, …, t, t+1, t+2, …, m

Enfoques heurísticos para períodos múltiples

- Fue resuelto por primera vez por Wagner y Whitin en 1958
- Utiliza un enfoque de programación dinámica buscando un balance del costo óptimo por período.
- Existen diferentes heurísticas, WinQSB presenta 10 de ellas.