



# Introducción a la Optimización Matemática





# Modelos de Optimización

---



- Tienen como propósito seleccionar la mejor decisión de un número de posibles alternativas, sin tener que enumerar completamente todas ellas.
- La Teoría de Optimización es una rama de la matemática aplicada que formula y explica estos problemas



# Tópicos en optimización: Programación Matemática



- Objetivo:
  - Encontrar el mejor punto que optimice un modelo económico
- Formulación matemática
  - Optimizar  $y(\mathbf{x})$   
Sujeto a  $f(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall i, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- Métodos:
  - Analíticos, Programación Geométrica, P. L., programación combinatoria, métodos heurísticos, métodos matemáticos discretos.



# Tópicos en optimización: Métodos variacionales



- Objetivo:
  - Encontrar la mejor función que optimice el modelo económico
- Formulación matemática
  - Optimizar  $I[y(x)] = \int F[y(x), y'(x)] dx$   
Sujeto a las restricciones algebraicas de integración o matemáticas en general
- Métodos:
  - Cálculo de variaciones, modelos continuos.



# La teoría general de máximos y mínimos



- Problemas no restringidos
- Está dirigida a encontrar los puntos extremos de una función.
- Teoremas:
  - Una función que es continua en un dominio cerrado posee un valor máximo o mínimo en el interior del intervalo o en sus límites.
  - Una función continua alcanza un máximo o un mínimo en el interior de una región solo en los puntos donde su enésima derivada ya sea se hace cero (puntos estacionarios o de inflexión) o no existe (punto de discontinuidad).



# Óptimos globales y locales



- Será óptimo local si tiene un máximo o mínimo en el intervalo  $[a, b]$
- Será óptimo global si tiene un máximo o mínimo en el intervalo  $[-\infty, \infty]$
- Si el óptimo local es el global, se tiene una función con óptimo exacto.



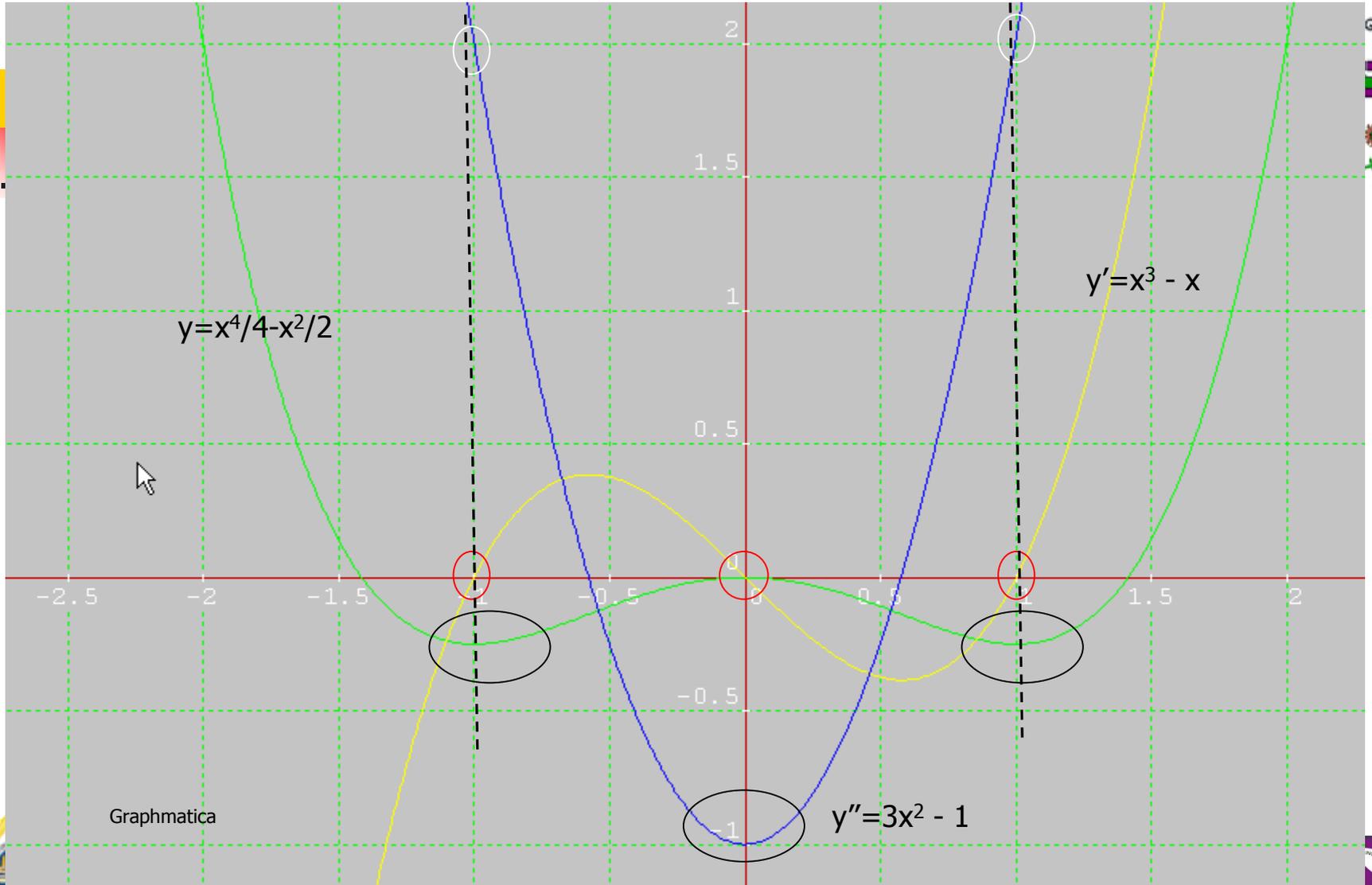
# Condiciones suficientes para el óptimo en una variable independiente



■ Para una función continua  $f(x)$ , si:

- $f'(x) \exists \forall x \in \mathfrak{R}$
- $x^*$  es crítico si  $f'(x^*) = 0$
- $f''(x^*) = \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{mínimo} \\ < 0 \rightarrow \text{máximo} \\ = 0 \rightarrow \text{no hay definición} \end{cases}$
- Si  $f''(x^*) = 0$ , se examinan  $n$  derivadas de orden superior hasta que  $f^n(x^*) \neq 0$
- Si  $n$  es par:  $f^n(x^*) = \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{mínimo} \\ < 0 \rightarrow \text{máximo} \end{cases}$
- Si es impar: punto de inflexión.





maximize  $x^4/4 - x^2/2$



 Examples  Random



Input interpretation:

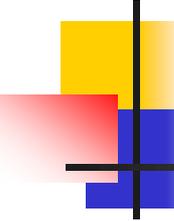
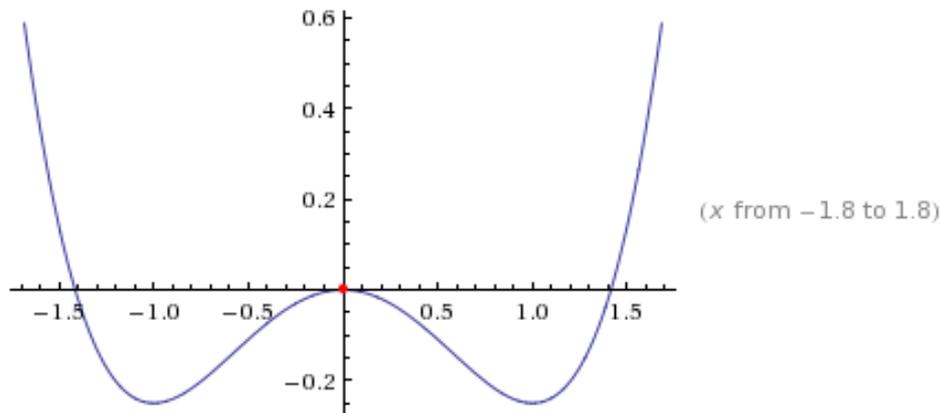
maximize

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

Local maximum:

$$\max\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right\} = 0 \text{ at } x = 0$$

Plot:



minimize  $x^4/4 - x^2/2$



Examples ↗ Random



Input interpretation:

minimize	$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$
----------	---------------------------------

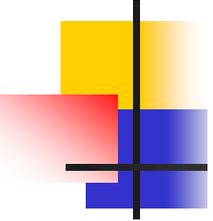
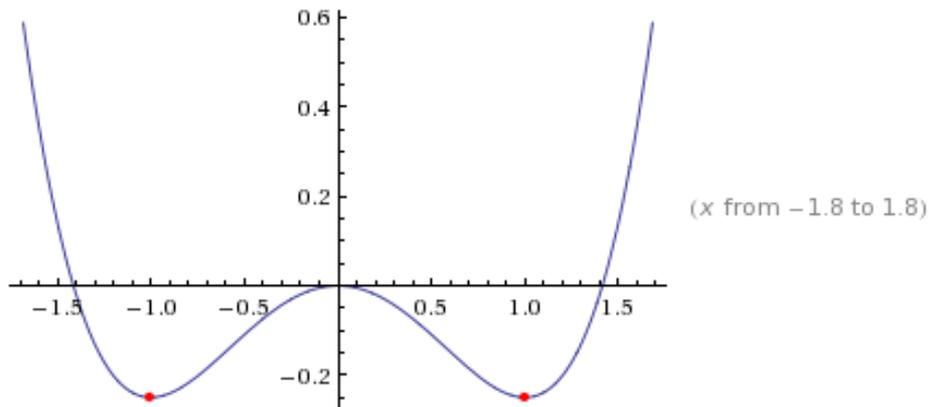
Global minima:

Approximate form

$$\min\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right\} = -\frac{1}{4} \text{ at } x = -1$$

$$\min\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right\} = -\frac{1}{4} \text{ at } x = 1$$

Plot



Input interpretation:

extrema	$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$
---------	---------------------------------

Global maxima:

(no global maxima found)

Global minima:

Approximate form

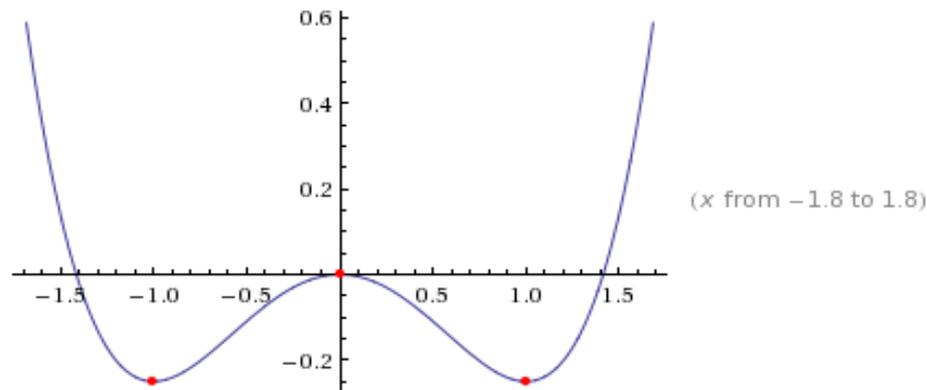
$$\min\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right\} = -\frac{1}{4} \text{ at } x = -1$$

$$\min\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right\} = -\frac{1}{4} \text{ at } x = 1$$

Local maximum:

$$\max\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right\} = 0 \text{ at } x = 0$$

Plot



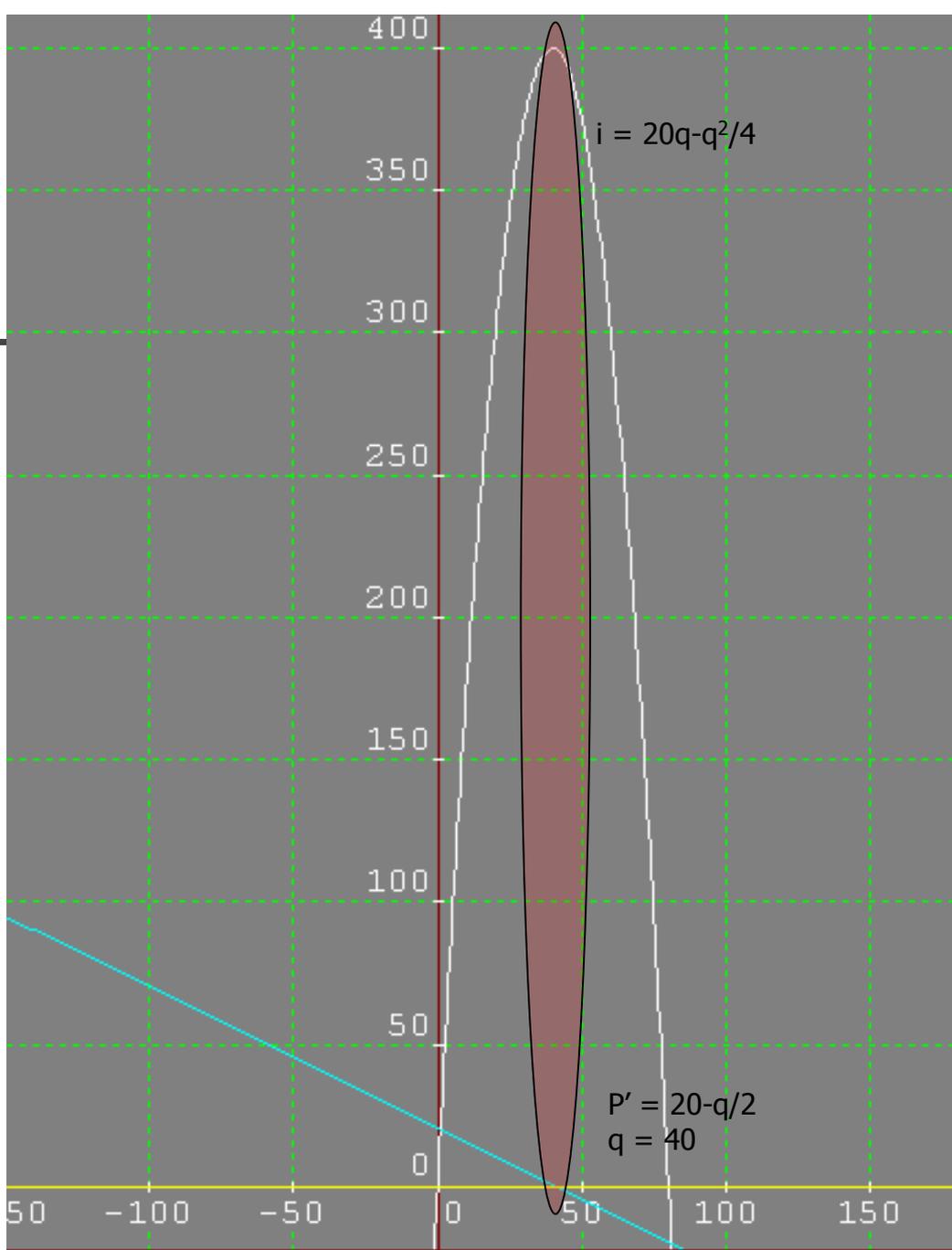
## Ejemplo:

- El precio de cierto producto está definido por la siguiente ecuación:

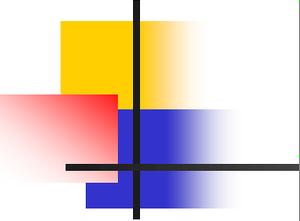
$$p = \frac{80 - q}{4}$$

- donde  $p$  es el precio y  $q$  es la cantidad vendida.
- Encontrar la  $q$  que genera un ingreso máximo, donde el ingreso es  $pq$ .





$P'' = -1/2$   
 $q \rightarrow$  hace que el ingreso sea máximo



maximize  $20x - x^2/4$



[Examples](#) [Random](#)



Input interpretation:

maximize	$20x - \frac{x^2}{4}$
----------	-----------------------

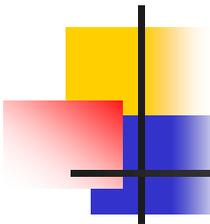
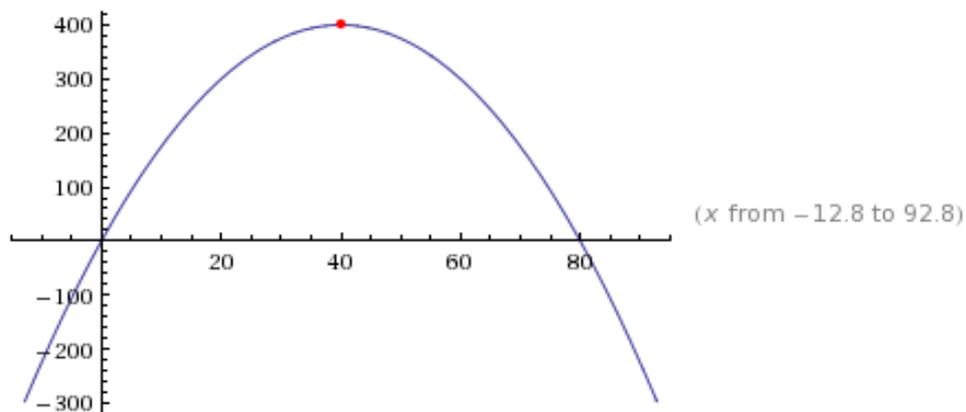
Global maxima:

(no global maxima found)

Local maximum:

$$\max\left\{20x - \frac{x^2}{4}\right\} = 400 \text{ at } x = 40$$

Plot



# En el caso de dos variables

- Si  $z = f(x, y)$  tiene un máximo o mínimo relativo en  $(x^*, y^*)$  y si  $f'_x(x, y)$  y  $f'_y(x, y)$  están definidos en los alrededores de  $(x^*, y^*)$ , entonces

- $(x^*, y^*)$  serán un punto crítico de  $f(x, y)$  si son solución del sistema:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

- Sea  $D(x, y) = f''_x(x, y) f''_y(x, y) - [f'_{xy}(x, y)]^2$
- Entonces si:

$$D(x^*, y^*) = \begin{cases} > 0 \text{ y } f''_x(x^*, y^*) < 0, f(x, y) \text{ tiene un máximo en } x^*, y^* \\ > 0 \text{ y } f''_x(x^*, y^*) > 0, f(x, y) \text{ tiene un mínimo en } x^*, y^* \\ < 0 f(x, y), x^*, y^* \text{ es punto de inflexión} \\ = 0 f(x, y), \text{ hay que hacer un análisis adicional} \end{cases}$$



maximize  $5 + 3x - 4y - x^2 + xy - y^2$



Examples  Random

Input interpretation:

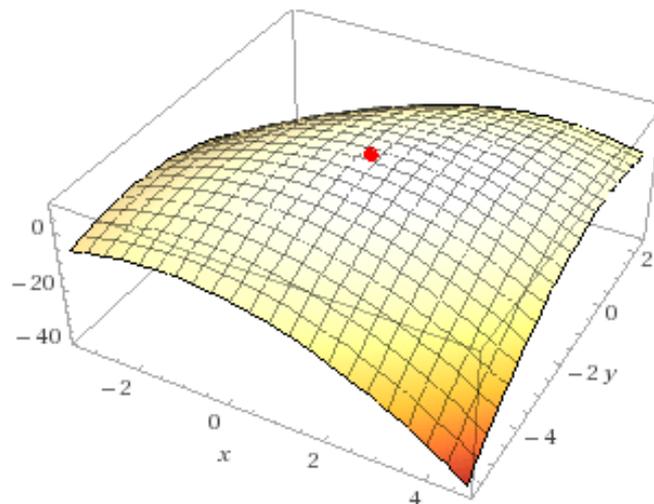
maximize  $5 + 3x - 4y - x^2 + xy - y^2$

Global maximum:

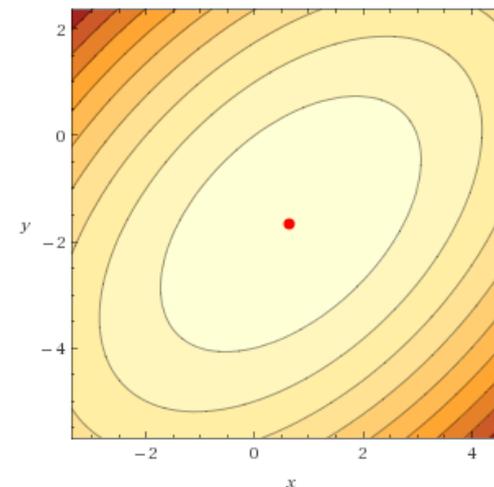
Approximate form

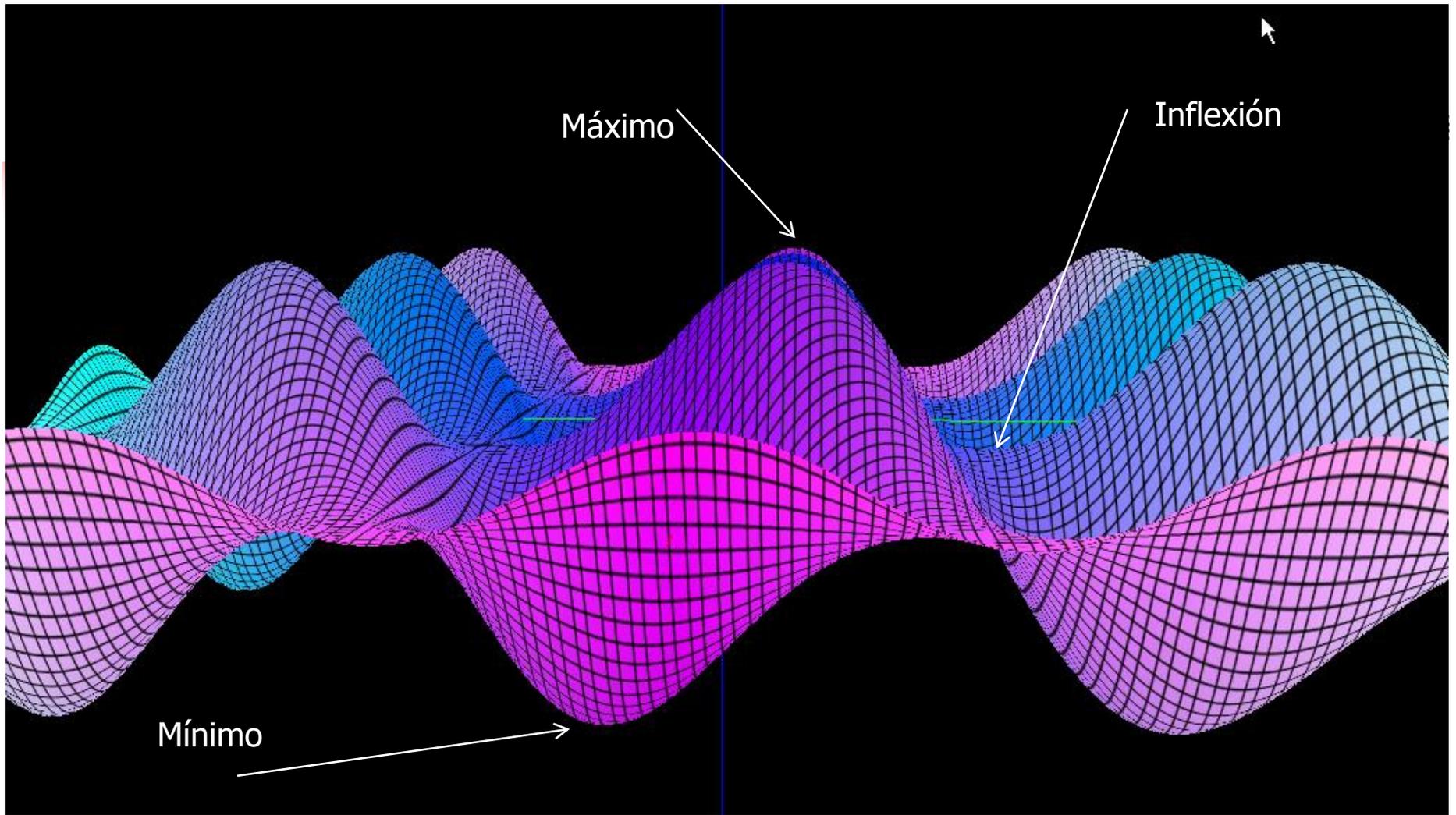
$$\max\{5 + 3x - 4y - x^2 + xy - y^2\} = \frac{28}{3} \text{ at } (x, y) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

3D plot



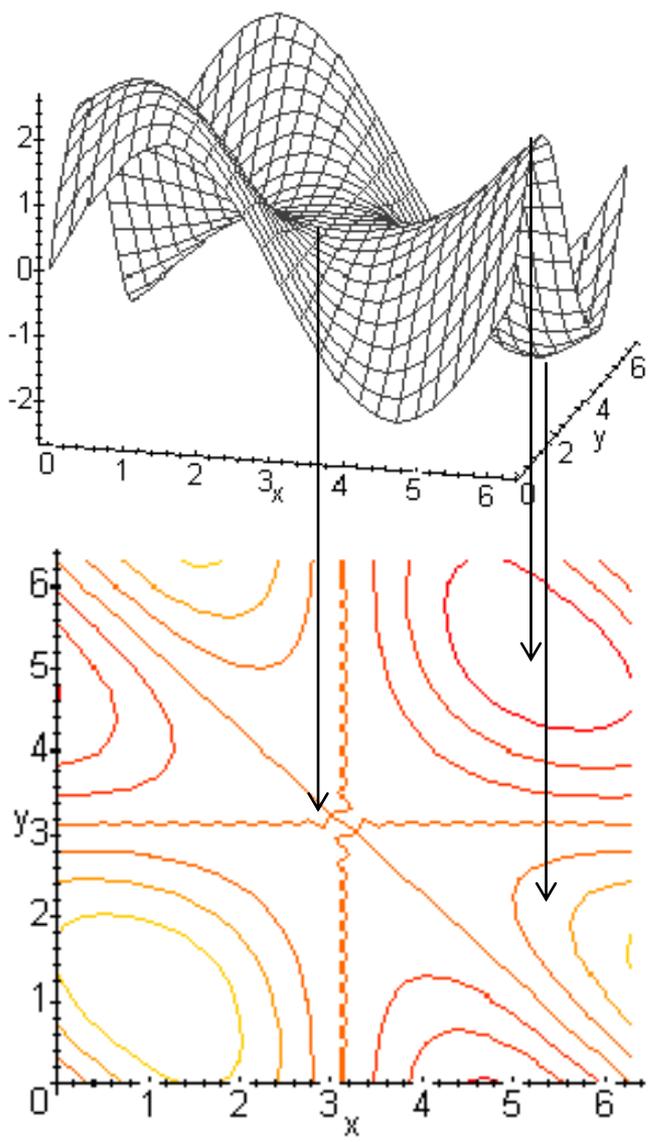
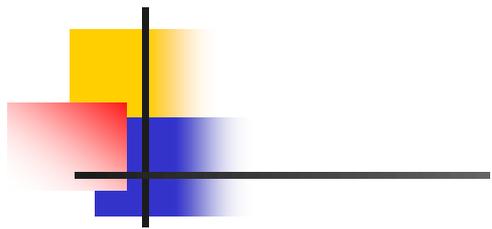
Contour plot





$$f(x, y) = \text{seno}(x) + \text{seno}(y) + \text{seno}(x + y)$$





# El problema general de optimización: el problema no lineal con restricciones



- Maximizar  $f(x)$
- Sujeto a:
  - $g_i(x) \leq c_i \quad i = 1, \dots, m$
- Donde  $f$  y  $g_i$  son funciones generales del parámetro  $x \in \mathcal{R}^n \geq 0$
- Cuando  $f$  es convexa,  $g_i$  cóncava, el problema es un problema de programación convexa



# Condiciones de Kuhn-Tucker

- A fin de que el problema tenga solución óptima, debe cumplir, como condiciones necesarias las Condiciones de Kuhn-Tucker:
- Sea el Lagrangiano de la función de maximización dado por:

$$\mathcal{L} = f(\mathbf{x}) + \lambda_1(c_1 - g_1(\mathbf{x})) + \cdots + \lambda_m(c_m - g_m(\mathbf{x}))$$

- Este debe cumplir con las siguientes condiciones

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \leq 0 & x_i \geq 0 & x_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \\ g_j(\mathbf{x}) \leq c_j & \lambda_j \geq 0 & \lambda_j (c_j - g_j(\mathbf{x})) = 0 \end{array}$$

- Para todo  $i, j$ . En este caso  $\lambda_i$  es conocido como el coeficiente de Lagrange para el lagrangiano  $\mathcal{L}$





# Ejemplo

- $\text{Max } Z = 3x + 5y$

- Sujeto a:

$$x \leq 4$$

$$9x^2 + 5y^2 \leq 216$$

$$x, y \geq 0$$



maximize  $3x + 5y$  in  $x \leq 4, 9x^2 + 5y^2 \leq 216$



Examples Random

Input interpretation:

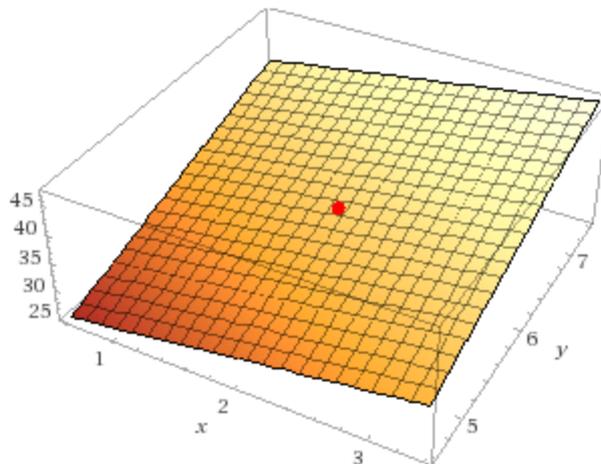
maximize	function	$3x + 5y$
	domain	$x \leq 4 \wedge 9x^2 + 5y^2 \leq 216$

$e_1 \wedge e_2 \wedge \dots$  is the logical AND function

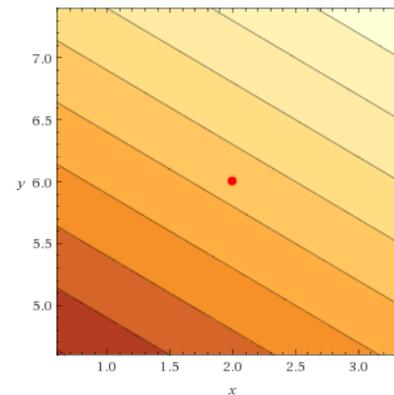
Global maximum:

$$\max\{3x + 5y \mid x \leq 4 \wedge 9x^2 + 5y^2 \leq 216\} = 36 \text{ at } (x, y) = (2, 6)$$

3D plot:



Contour plot:



Enable interactivity



# AMPL

Model E:\models\nonlinear\_a.mod

```
# type your model here...
var x>=0;
var y>=0;
maximize z: 3*x + 5*y;
subject to
c1:x<=4;
c2:9*x^2 + 5*y^2 <= 216;
option solver cplex;
solve;
display z, x, y;
```

```
Command interface
ampl: display z, x, y;data:# Type data here or open a data file... solve;
reset;# type your model here...var x>=0;var y>=0;maximize z: 3
== 9 =====
reset;
# type your model here...
var x>=0;
var y>=0;
maximize z: 3*x + 5*y;
subject to
c1:x<=4;
c2:9*x^2 + 5*y^2 <= 216;
option solver cplex;
solve;
display z, x, y;
data;
# Type data here or open a data file...
solve;

Presolve eliminates 1 constraint.
Adjusted problem:
2 variables, all nonlinear
1 constraint, all nonlinear; 2 linear nonzeros
1 linear objective; 2 nonzeros.
CPLEX 12.6.0.0: *****CPLEX 12.6.0.0: optimal soluti
10 barrier iterations
```



```
Presolve eliminates 1 constraint.
Adjusted problem:
2 variables, all nonlinear
1 constraint, all nonlinear; 2 linear nonzeros
1 linear objective; 2 nonzeros.
CPLEX 12.6.0.0: *****CPLEX 12.6.0.0: optimal solution; objective 35.99999994
10 barrier iterations
No basis.
z = 36
x = 1.99999
y = 6.00001
CPLEX 12.6.0.0: *****CPLEX 12.6.0.0: optimal solution; objective 35.99999994
10 barrier iterations
No basis.
```

.0: optimal soluti



# Ejemplo

- Max  $Z = 126x - 9x^2 + 182y - 13y^2$

- Sujeto a

$$x \leq 4$$

$$2y \leq 12$$

$$3x + 2y \leq 18$$

$$x, y \geq 0$$



Maximize  $126x - 9x^2 + 182y - 13y^2$  in  $x \leq 4, 2y \leq 12, 3x + 2y \leq 18$



Examples Random

Assuming "y" is a variable | Use as a unit instead

Input interpretation:

maximize	function	$126x - 9x^2 + 182y - 13y^2$
	domain	$x \leq 4 \wedge 2y \leq 12 \wedge 3x + 2y \leq 18$

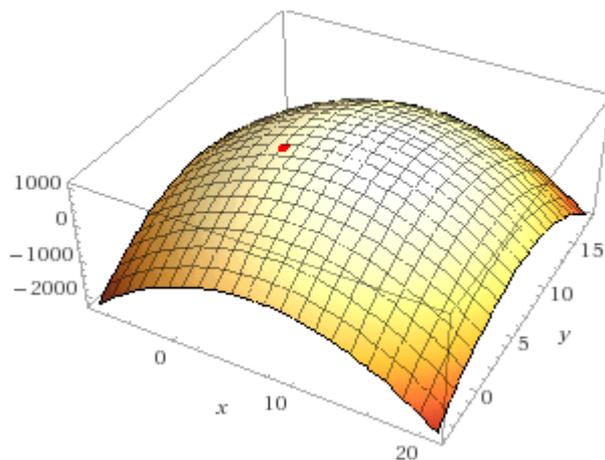
$e_1 \wedge e_2 \wedge \dots$  is the logical AND function

Global maximum:

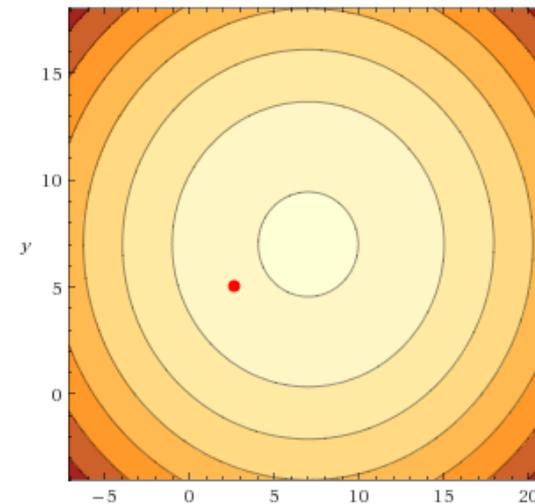
Approximate form

$$\max\{126x - 9x^2 + 182y - 13y^2 \mid x \leq 4 \wedge 2y \leq 12 \wedge 3x + 2y \leq 18\} = 857 \text{ at } (x, y) = \left(\frac{8}{3}, 5\right)$$

3D plot:



Contour plot:



# AMPL

Model E:\models\nonlinear1.mod

```
var x>=0;
var y>=0;
maximize z:126*x - 9*x^2+182*y-13*y^2;
subject to
c1: x <=4;
c2:2*y<=12;
c3: 3*x+2*y <= 18;
option solver minos;
solve;
display z,x,y;
```

```
Presolve eliminates 2 constraints.
Adjusted problem:
2 variables, all nonlinear
1 constraint, all linear; 2 nonzeros
1 nonlinear objective; 2 nonzeros.
MINOS 5.5: *****MINOS 5.5: optimal solution found.
4 iterations, objective 857
Nonlin evals: obj = 10, grad = 9.
z = 857
x = 2.66667
y = 5
MINOS 5.5: *****MINOS 5.5: optimal solution found.
0 iterations, objective 857
Nonlin evals: obj = 3, grad = 2.
```

```
Command interface
ampl: display z,x,y,data;# Type data here or open a data file... solve;
reset;var x>=0;var y>=0;maximize z:126*x - 9*x^2+182*y-13*y^2;

== 1 =====
option show_stats 1; option display_eps .000001; print $version;
AMPL Student Version 19990818 (MS VC++ 6.0)

== 2 =====
reset;
var x>=0;
var y>=0;
maximize z:126*x - 9*x^2+182*y-13*y^2;
subject to
c1: x <=4;
c2:2*y<=12;
c3: 3*x+2*y <= 18;
option solver minos;
solve;
display z,x,y;
data;
# Type data here or open a data file...
solve;
```

transcript of AMPL session

```
solve eliminates 2 constraints.
adjusted problem:
2 variables, all nonlinear
1 constraint, all linear; 2 nonzeros
1 nonlinear objective; 2 nonzeros.
MINOS 5.5: *****MINOS 5.5: optimal solution found.
4 iterations, objective 857
lin evals: obj = 10, grad = 9.
857
2.66667
5
MINOS 5.5: *****MINOS 5.5: optimal solution found.
0 iterations, objective 857
lin evals: obj = 3, grad = 2.
```



## Ejemplo

- Encontrar los puntos críticos

$$f(x, y) = xy$$

Sujeto a:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Aplicando el Lagrangiano

$$L = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$



$$d/dx \ xy + zx^2 + zy^2 - z$$



[Examples](#)
[Random](#)

Derivative:

[Step-by-step solution](#)

$$\frac{\partial}{\partial x} (xy + zx^2 + zy^2 - z) = 2xz + y$$

$$d/dy \ xy + zx^2 + zy^2 - z$$



[Examples](#)
[Random](#)

Derivative:

[Step-by-step solution](#)

$$\frac{\partial}{\partial y} (xy + zx^2 + zy^2 - z) = x + 2yz$$

$$d/dz \ xy + zx^2 + zy^2 - z$$



[Examples](#)
[Random](#)

Derivative:

[Step-by-step solution](#)

$$\frac{\partial}{\partial z} (xy + zx^2 + zy^2 - z) = x^2 + y^2 - 1$$



solve  $2zx+y=0$ ;  $x+2zy=0$ ;  $x^2+y^2-1=0$



[Examples](#) [Random](#)

Input interpretation:

	$2zx + y = 0$
solve	$x + 2zy = 0$
	$x^2 + y^2 - 1 = 0$

Results:

[More digits](#)

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.707107 \text{ and } y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.707107 \text{ and } z = -\frac{1}{2} \approx -0.500000$$

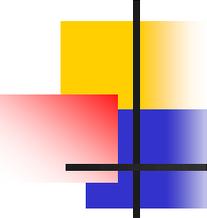
$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.707107 \text{ and } y = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707107 \text{ and } z = \frac{1}{2} \approx 0.500000$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707107 \text{ and } y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.707107 \text{ and } z = \frac{1}{2} \approx 0.500000$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707107 \text{ and } y = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707107 \text{ and } z = -\frac{1}{2} \approx -0.500000$$

 [Download page](#)

POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE



# Ejemplo 3

- Optimizar  $z = xy$

- Sujeto a:

$$x + y \leq 1$$

$$-x + y \leq 1$$

$$-x - y \leq 1$$

$$x - y \leq 1$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$



optimize  $y=xy$  in  $x+y \leq 1, -x+y \leq 1, -x-y \leq 1, x-y \leq 1$



Examples Random

Input interpretation:

extrema	function	$xy$
	domain	$x+y \leq 1 \wedge -x+y \leq 1 \wedge -x-y \leq 1 \wedge x-y \leq 1$

$e_1 \wedge e_2 \wedge \dots$  is the logical AND function

Global maxima:

Approximate form

$$\max\{xy \mid x+y \leq 1 \wedge y-x \leq 1 \wedge -x-y \leq 1 \wedge x-y \leq 1\} = \frac{1}{4} \text{ at } (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\max\{xy \mid x+y \leq 1 \wedge y-x \leq 1 \wedge -x-y \leq 1 \wedge x-y \leq 1\} = \frac{1}{4} \text{ at } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Global minima:

Approximate form

$$\min\{xy \mid x+y \leq 1 \wedge y-x \leq 1 \wedge -x-y \leq 1 \wedge x-y \leq 1\} = -\frac{1}{4} \text{ at } (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

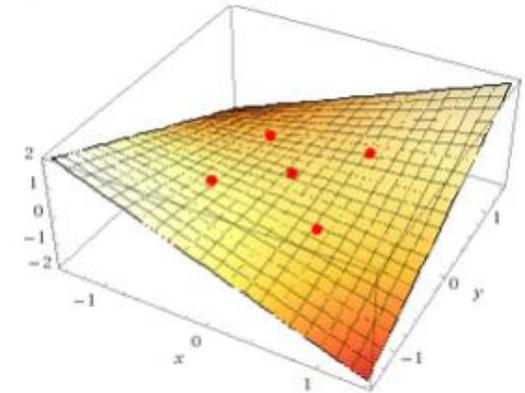
$$\min\{xy \mid x+y \leq 1 \wedge y-x \leq 1 \wedge -x-y \leq 1 \wedge x-y \leq 1\} = -\frac{1}{4} \text{ at } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Local minima:

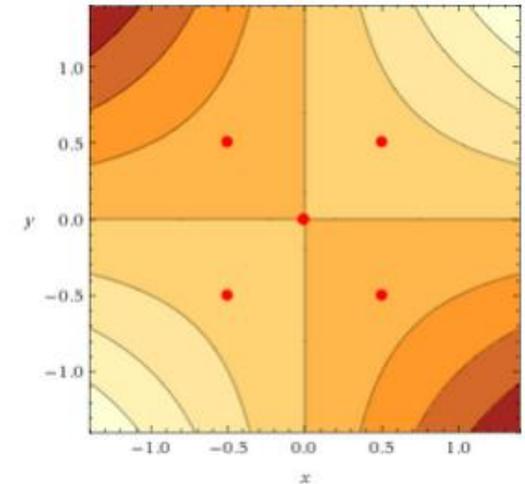
$$\min\{xy \mid x+y \leq 1 \wedge y-x \leq 1 \wedge -x-y \leq 1 \wedge x-y \leq 1\} = 0 \text{ at } (x, y) \approx (2.92876 \times 10^{-6}, 3.12791 \times 10^{-6})$$

$$\min\{xy \mid x+y \leq 1 \wedge y-x \leq 1 \wedge -x-y \leq 1 \wedge x-y \leq 1\} = 0 \text{ at } (x, y) \approx (-4.67435 \times 10^{-6}, -4.67436 \times 10^{-6})$$

3D plot:



Contour plot:



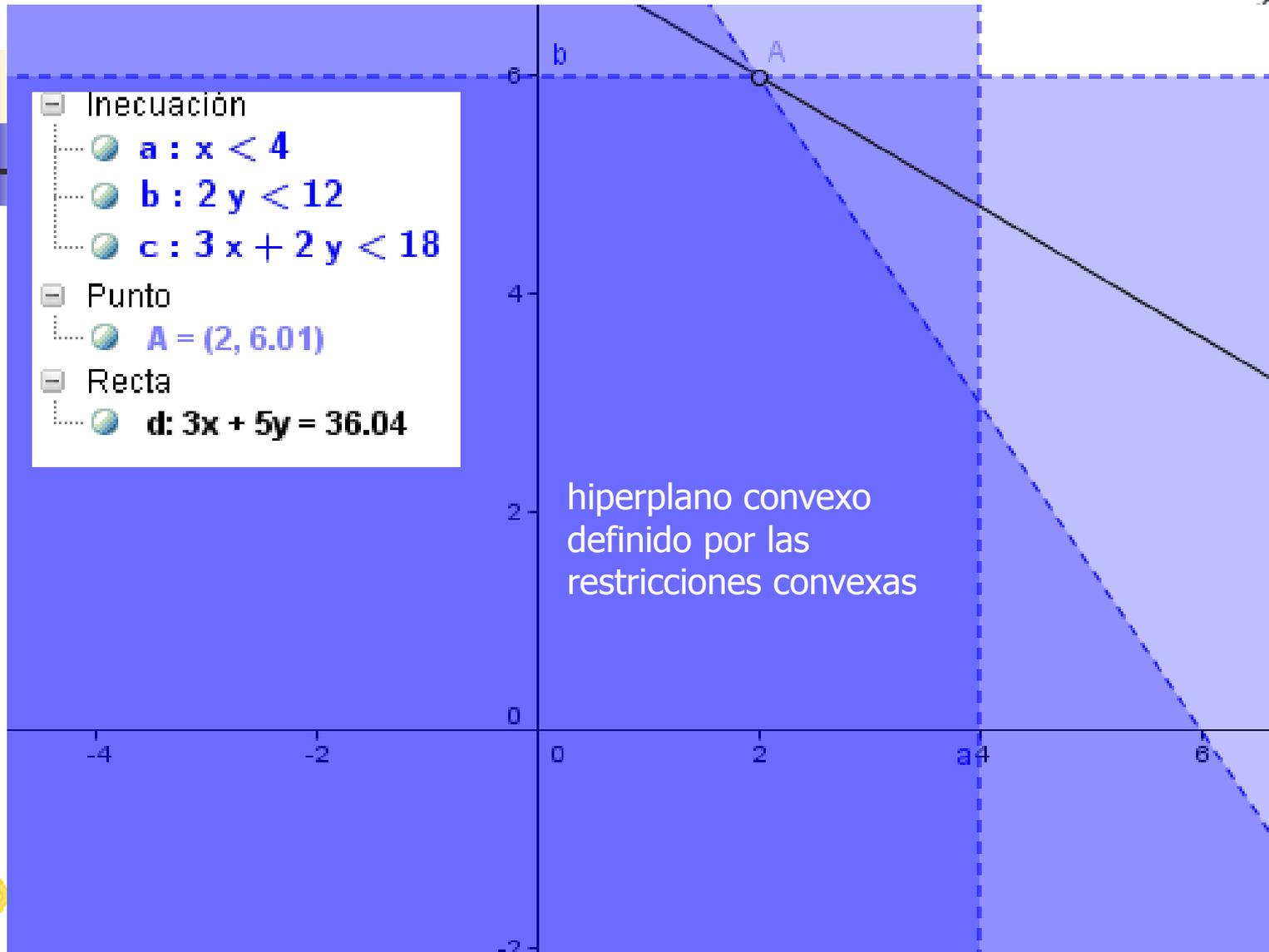


# Programación lineal

- Si  $f$  y  $g_i$  son lineales y convexas, se tiene un problema de programación lineal.
- Características:
  - Reduce sus soluciones a un número finito de éstas.
  - Es un problema combinatorio, ya que las posibles soluciones yacen en las intersecciones de un hiperplano convexo definido por las restricciones convexas.

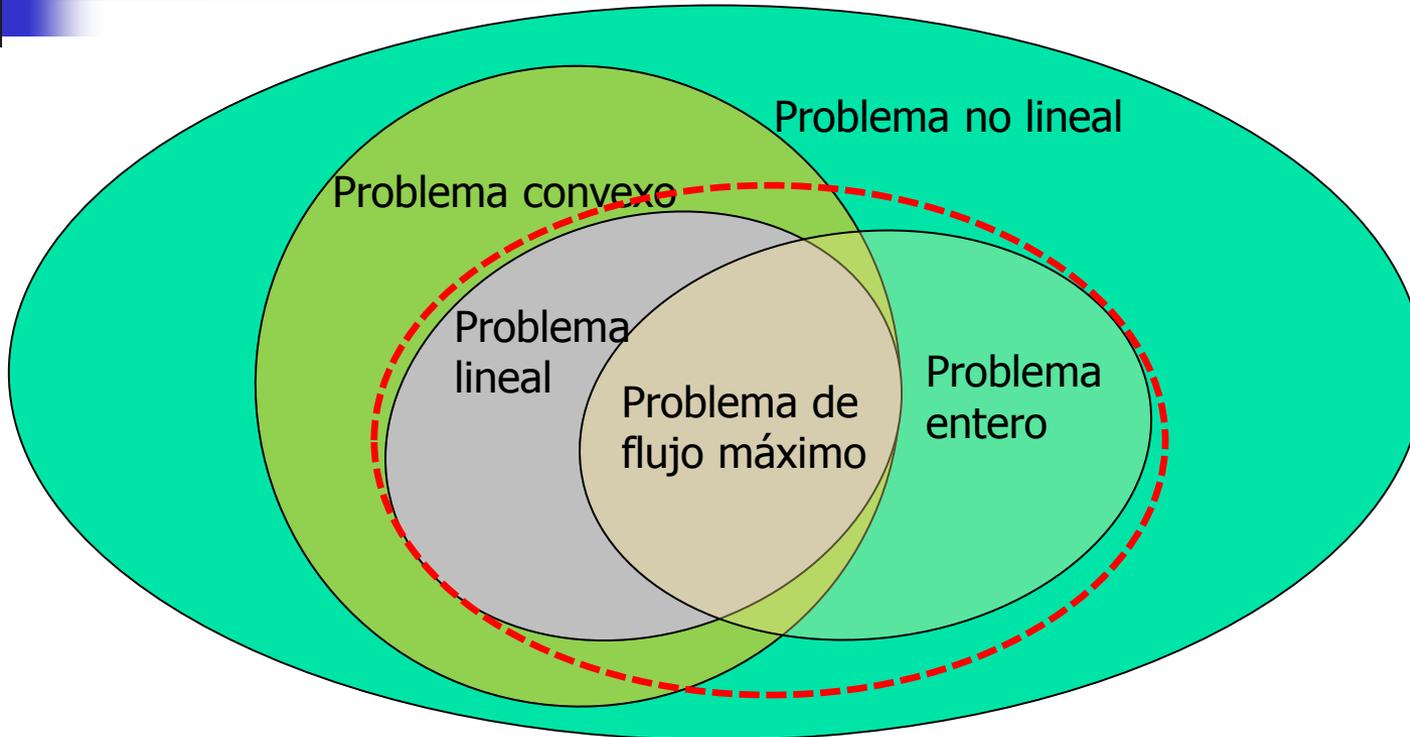


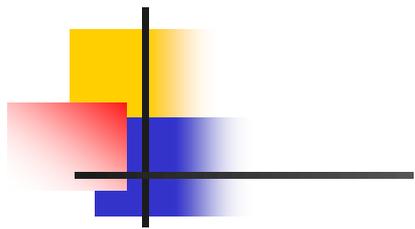
- Inecuación
  - a :  $x < 4$
  - b :  $2y < 12$
  - c :  $3x + 2y < 18$
- Punto
  - A = (2, 6.01)
- Recta
  - d :  $3x + 5y = 36.04$



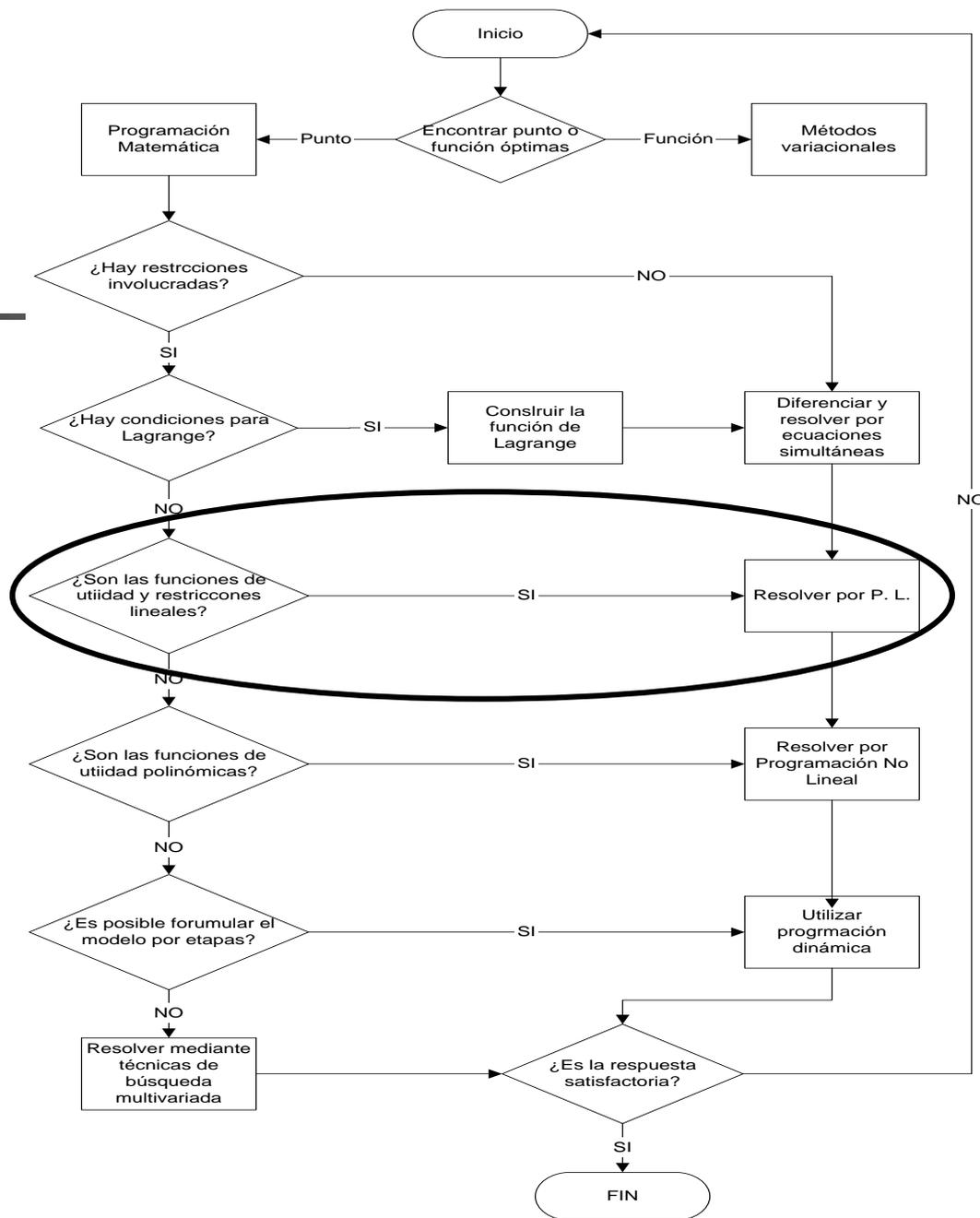
hiperplano convexo  
definido por las  
restricciones convexas

# Contexto del curso





# Métodos de solución



# Solución del modelo de optimización



- Analítica
- Métodos numéricos
- Heurística
- Simulación
  - Discreta
  - Dinámica

