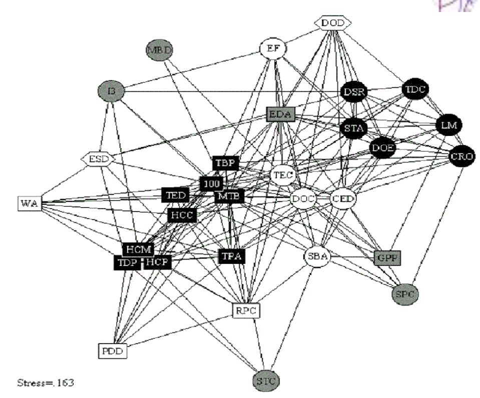
Problemas de Flujo de Costo Mínimo

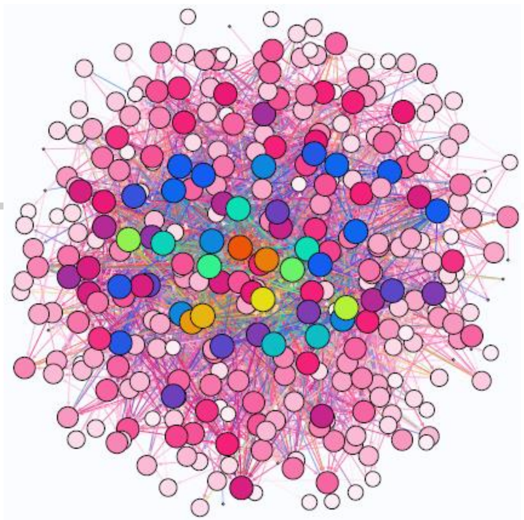
Las redes:

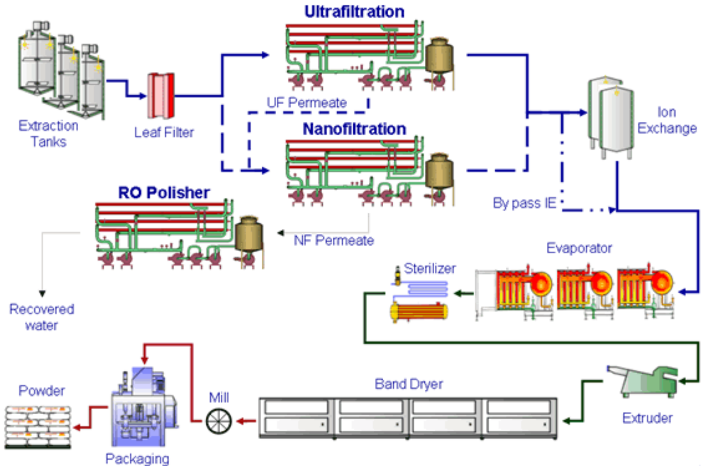
- Las redes están presentes en diferentes lugares en la vida real: redes de transporte, flujo eléctrico y comunicaciones, por ejemplo.



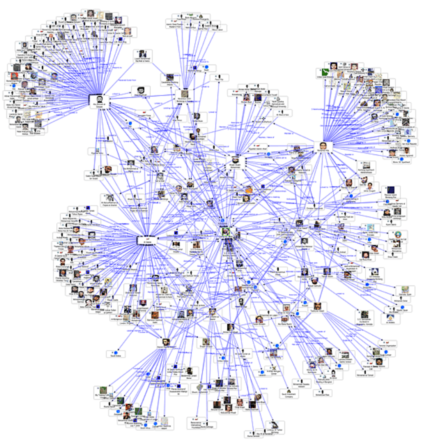
Las redes:

- También son ampliamente utilizadas para representar problemas tales como problemas de producción, distribución, localización de facilidades, etc.

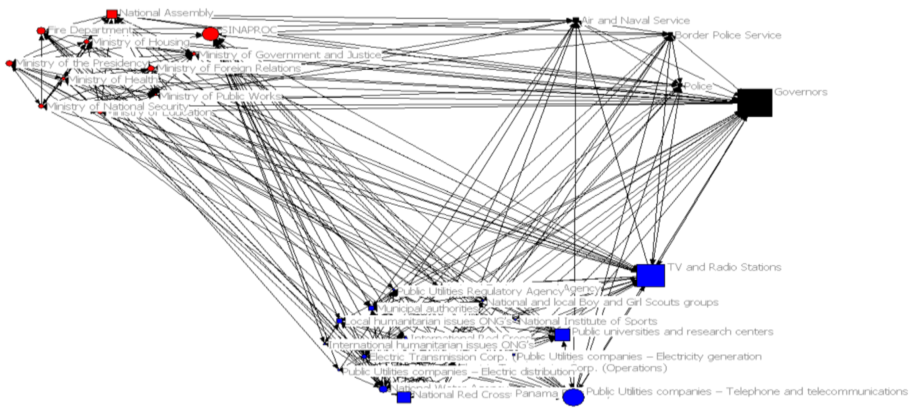


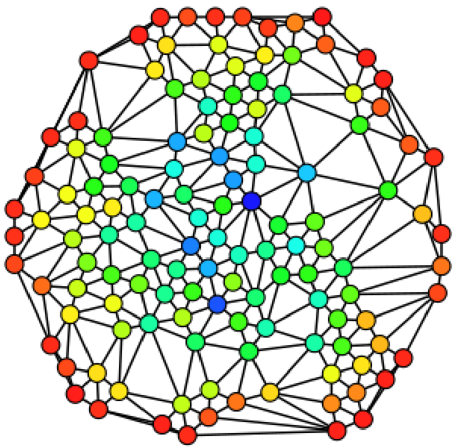


Las redes:



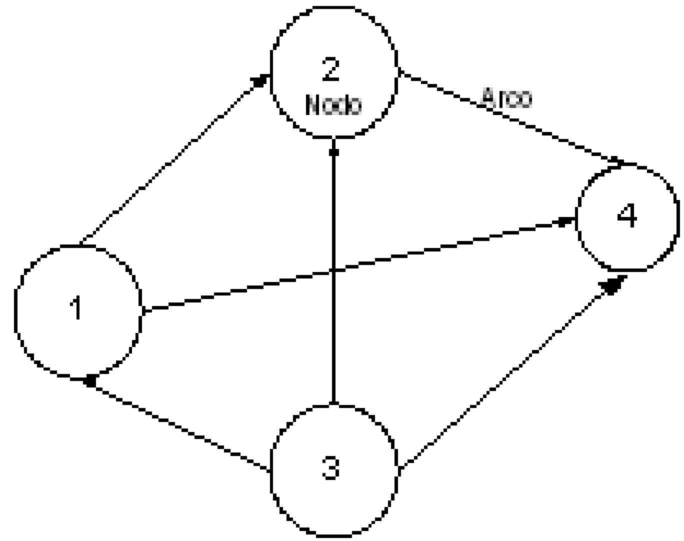
- Las redes proveen una poderosa ayuda visual y conceptual para explicar las diferentes relaciones entre componentes de un sistema.

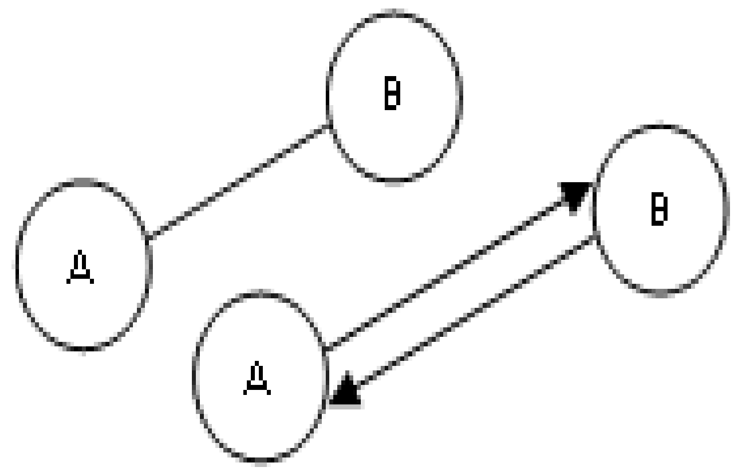




Conceptos básicos

- Una red consiste en conjunto definido de puntos y líneas que unen ciertos pares de puntos.
- Se conoce como **nodos** (vértices) a dichos nudos y como **arcos** a las líneas que los unen.
- Se dice que un arco es **dirigido** si permite flujo en una sola dirección, de lo contrario se conoce como un **arco no dirigido** o **ligadura**. Por convención, el arco se denomina en función a su dirección. Así, en la figura el arco 3-2 indica que su dirección se del nodo 3 al nodo 2 y no viceversa. Una red que tiene solamente arcos dirigidos se conoce como **red dirigida**, de lo contrario se conocerá como una red **no dirigida**.



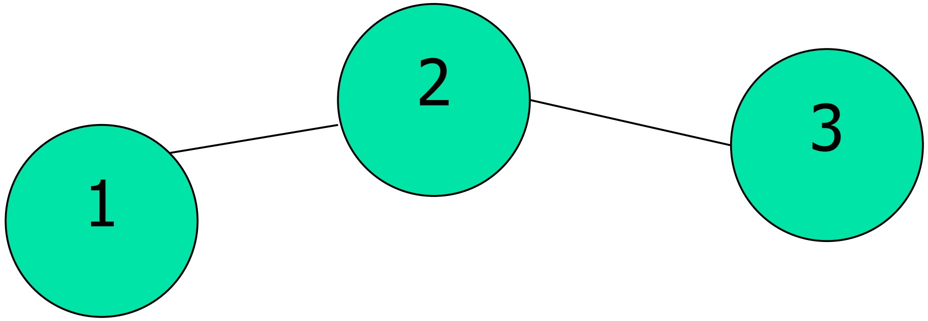


Conceptos básicos

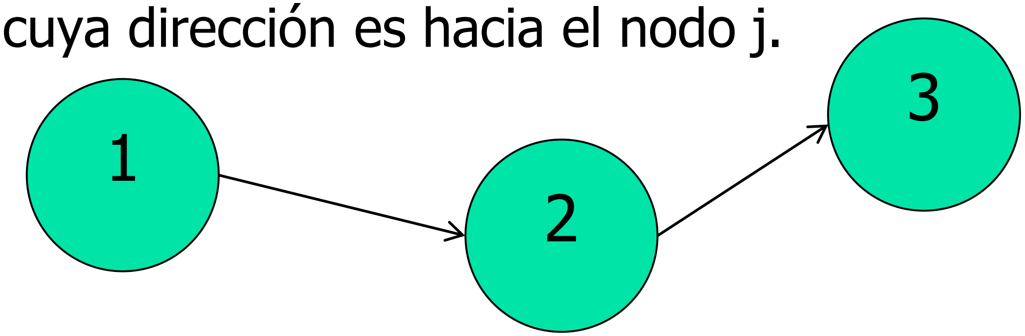
- Una **trayectoria** entre dos nodos es una sucesión de arcos distintos.
- Una **trayectoria dirigida** del nodo i al nodo j es una sucesión de arcos cuya dirección es hacia el nodo j.
- Un **ciclo** es una trayectoria que comienza y termina en el mismo nodo. En una red dirigida, un ciclo puede ser o no dirigido, según la trayectoria en cuestión.
- Se dice que dos nodos están **conectados** si la red contiene al menos una trayectoria no dirigida entre ellos.
- Una **red conectada** es una red en la que cada par de nodos está conectado.

Conceptos básicos

- Una **trayectoria** entre dos nodos es una sucesión de arcos distintos.

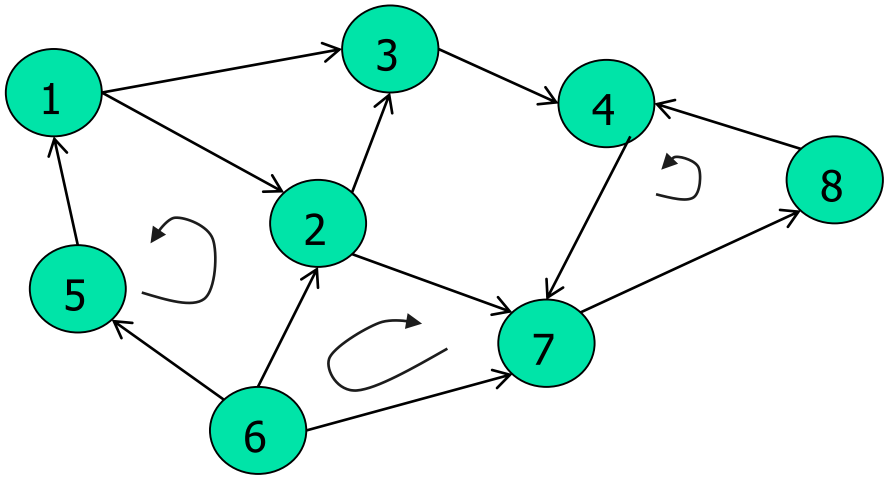


- Una **trayectoria dirigida** del nodo i al nodo j es una sucesión de arcos cuya dirección es hacia el nodo j.



Conceptos básicos

- Un **ciclo** es una trayectoria que comienza y termina en el mismo nodo. En una red dirigida, un ciclo puede ser o no dirigido, según la trayectoria en cuestión.



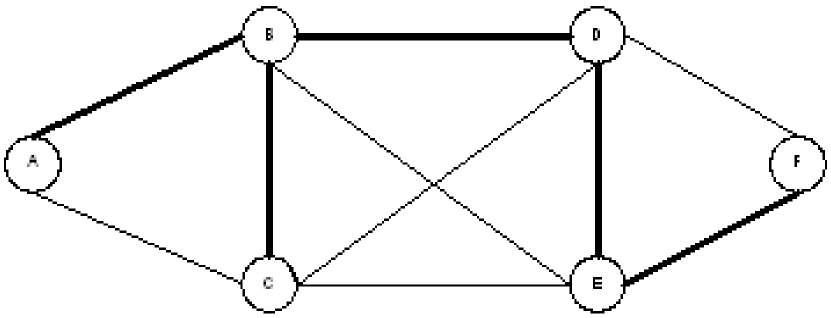
- Se dice que dos nodos están **conectados** si la red contiene al menos una trayectoria no dirigida entre ellos.
- Una **red conectada** es una red en la que cada par de nodos está conectado.

Conceptos básicos

- La **capacidad de un arco** es la cantidad neta máxima de flujo que puede circular en arco dirigido.
- Un nodo generador de flujo se conoce como **nodo fuente u origen**.
- Un nodo fuente tiene la propiedad de que el flujo que sale del nodo supera al que entra e él.
- Un **nodo demanda o destino** es aquel en el que el flujo que llega excede al que sale.
- Un **nodo de trasbordo** o **intermedio** satisface la conservación de flujo, o sea, el flujo que sale es igual al que entra.

Árbol de expansión

- Un **árbol** es una red conectada para algún subconjunto de nodos que no contiene ciclos.
- Un **árbol de expansión**, es una red que conecta los n nodos sin formar ciclos.
- El número mínimo de **ramas** o arcos necesarios para conectar todos los nodos es n-1.



Árbol de expansión mínima

- Dado un grado conectado G = (V,E), con pesos $c_{i,j}$ para todos los ejes en E, encontrar un árbol de expansión G_T = (V_T, E_T) para un mínimo de peso.
- Dados los nodes de una red, se conocen los enlaces potenciales y la distancia o peso positivo de cada uno.
- El problema consiste en diseñar una red con suficientes enlaces de tal manera que exista un camino factible entre cualquier par de nodos.
- El objetivo es encontrar dicho árbol de expansión de tal menera que tenga el mínimo costo.

Formulación

$$\min Z = \sum_i \sum_j c_{i,j} x_{i,j}$$

Subject to:

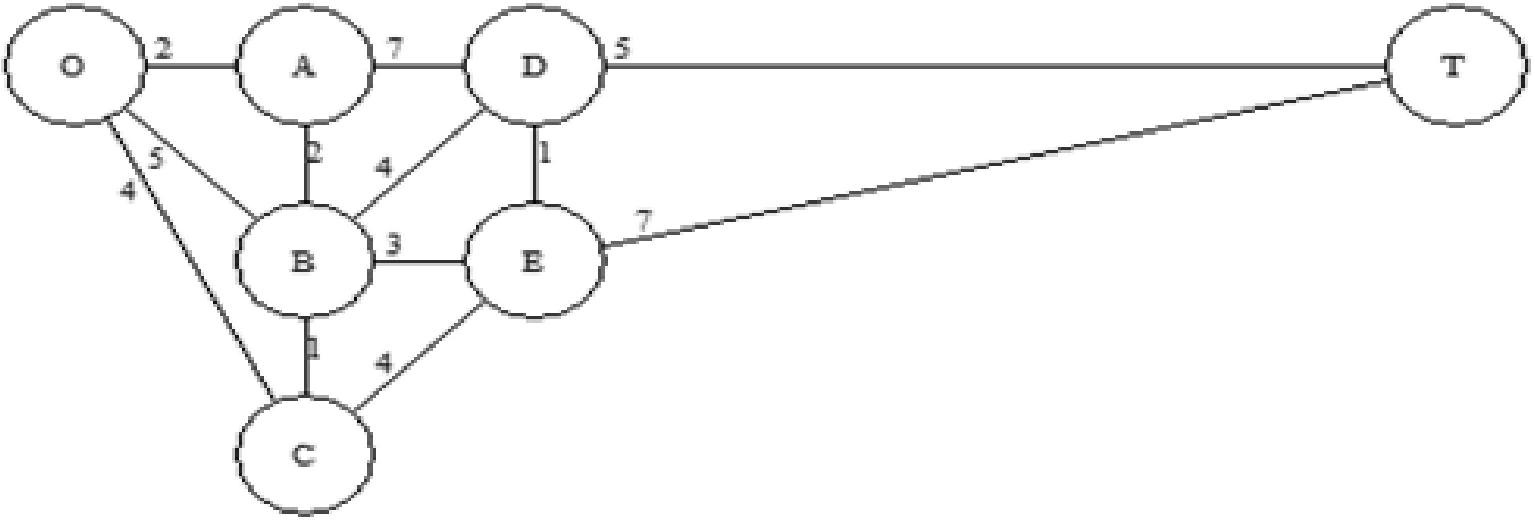
$$\sum_v x_{i,j} = n - 1,\ \forall v \in V$$

$$\sum_{s \in S} x_{ij} \geq 1, \forall S = \textit{set of edges going from nodes in the subset } \bar{V} \in V$$

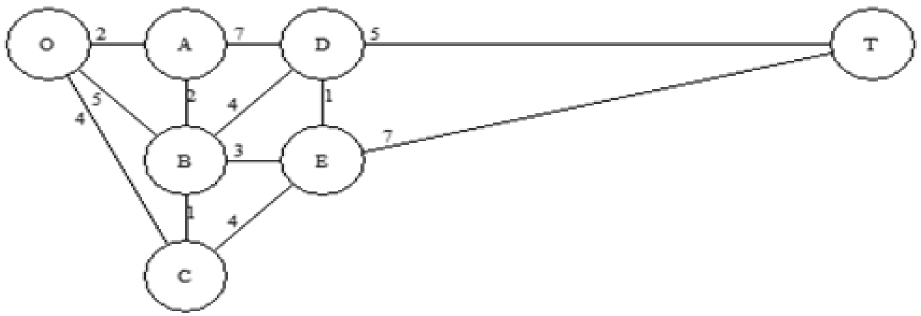
$$x_{i,j} \begin{cases} 1, \textit{if edge from } i \textit{ to } j \textit{ exists} \\ 0 \textit{ otherwise} \end{cases}$$

Ejemplo

- La Administración de una reserva forestal necesita determinar los caminos bajo los cuales se deben tender las líneas telefónicas para conectar las estaciones de los guardaparques con una longitud mínima de cables de acuerdo a la figura siguiente:



Formulación y solución en MPL

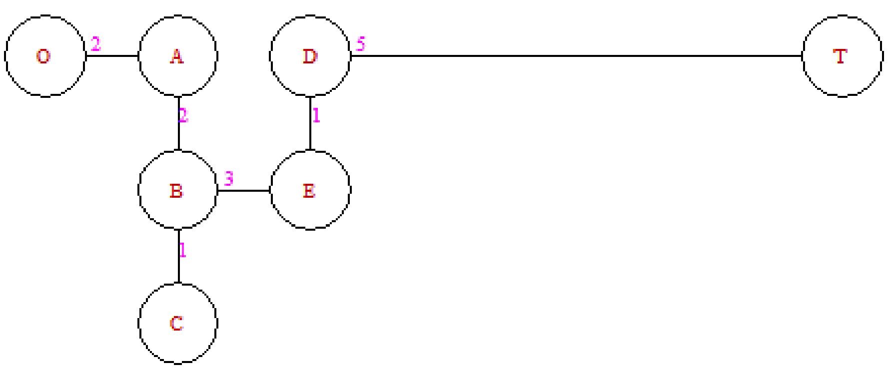



```
        minspanning=2OA+5OB+4OC+2AB+7AD+4BD+3BE+BC+4CE+5DT+7ET+DE;

SUBJECT TO

        OA+OB+OC+AD+AB+BD+BE+BC+CE+DT+ET+DE=6;
        OA+OB+OC>=1;
        OA+AB+AD>=1;
        OB+AB+BD+BE+BC>=1;
        OC+BC+CE>=1;
        AD+BD+DE+DT>=1;
        DE+BE+CE+ET>=1;
        DT+ET>=1;

BINARY
        OA OB OC AD AB BD BE BC CE DT ET DE;
END
```



MIN minspann = 14.0000

DECISION VARIABLES

PLAIN VARIABLES

Variable Name	Activity
OA	1.0000
OB	0.0000
OC	0.0000
AB	1.0000
AD	0.0000
BD	0.0000
BE	1.0000
BC	1.0000
CE	0.0000
DT	1.0000
ET	0.0000
DE	1.0000

Problemas de flujo mínimo

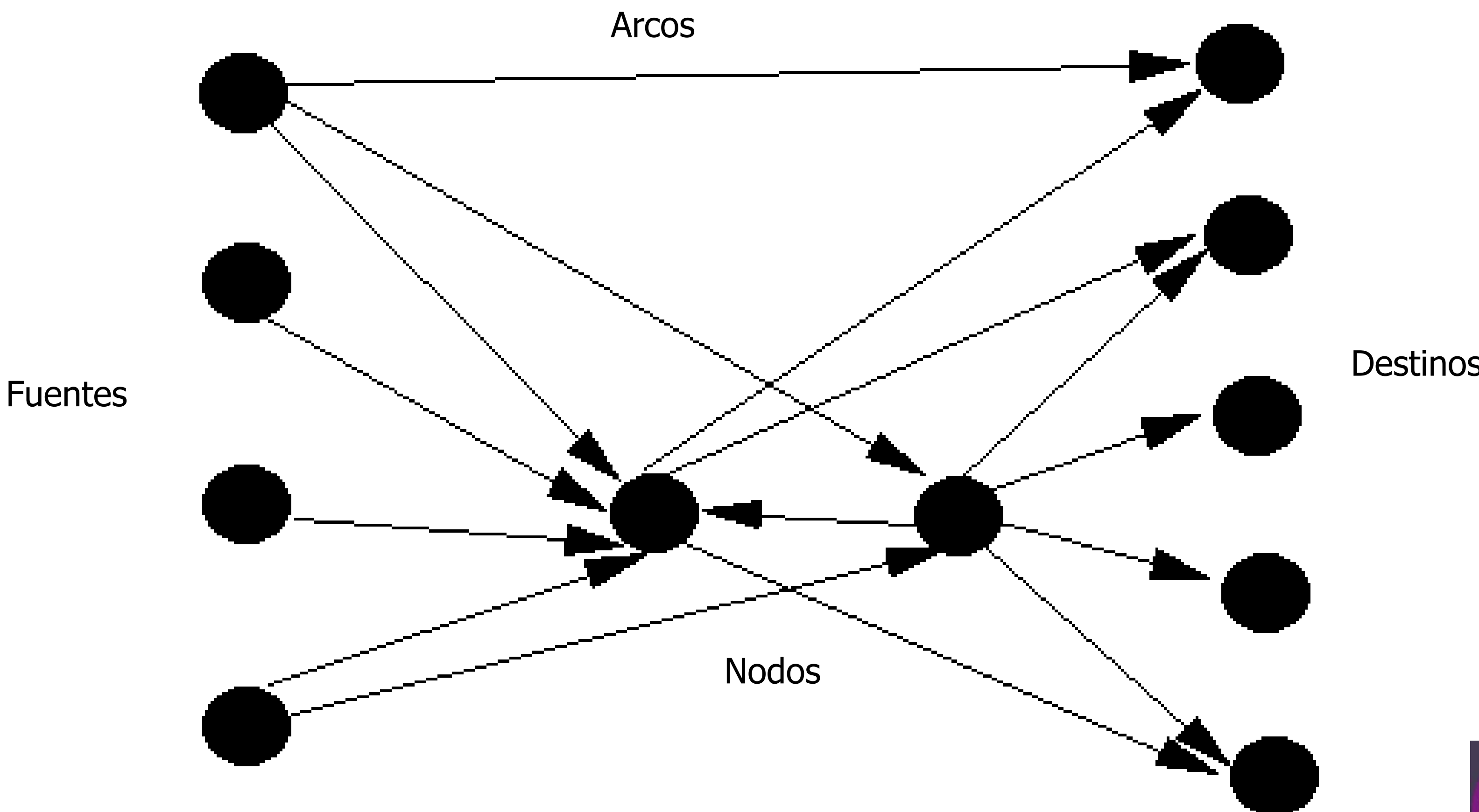
Planteamiento del problema

- Son problemas de programación lineal con ciertas estructuras especiales
- Permiten ser trabajados con algoritmos especiales
- Aprovechan su estructura para aproximarlos a redes
- Su estructura permite la solución de grandes problemas de manera relativamente sencilla

Elementos de un problema de flujo mínimo

- Se tiene un número dado de fuentes y destinos de transacciones
- Cada fuente y destino tiene una capacidad máxima de envío y recibo
- Se pueden tener nodos intermedios
- Se tienen arcos que:
  - Tienen una capacidad máxima de flujo
  - Tienen un costo asociado a una unidad de flujo

Elementos de un problema de flujo mínimo



Problemas típicos

- Costo Mínimo
- Ruta Más Corta
- Flujo máximo
- Asignación
- Transporte
- Trasbordo
- Problema del agente viajero

Formulación del problema de flujo mínimo:

- Considere una red dirigida y conectada, donde esta incluye al menos un nodo de oferta y otro de demanda:
- La variable de decisión será:

x_{ij}: será el flujo a través del arco $i \rightarrow j$

Formulación General:

- Incluye la siguiente información:

  c_{ij}: es el costo de enviar una unidad de $i \rightarrow j$

  u_{ij}: les la capacidad del arco $i \rightarrow j$

  b_i: es el flujo generado en el nodo i

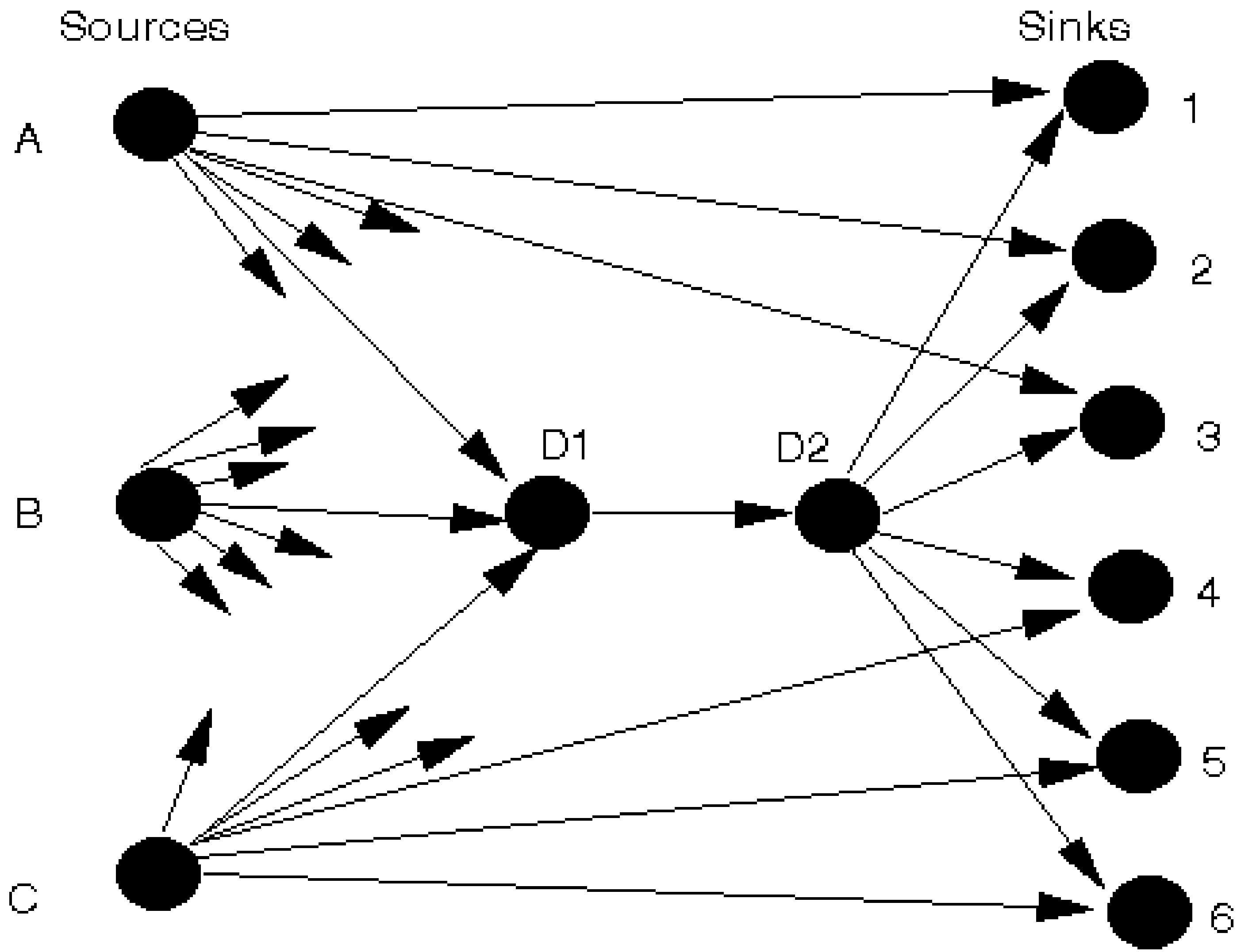
- *El* valor de b_i depende de la naturaleza del nodo :

  $b_i > 0$, si i es un nodo de oferta

  $b_i < 0$, si i es un nodo de demanda

  $b_i = 0$, si i es un nodo de trasbordo

- El objetivo es minimizar el costo total de enviar el suministro disponible a través de la red a fin de satisfacer una demanda dada.
- En una solución factible, el flujo total generado en los nodos de oferta iguala al flujo total consumido por los nodos de demanda.


Sources
Sinks
A
B
C
D1
D2
1
2
3
4
5
6

$$\text{Minimize} \quad Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = b_i, \qquad \text{for each node } i,$$

and

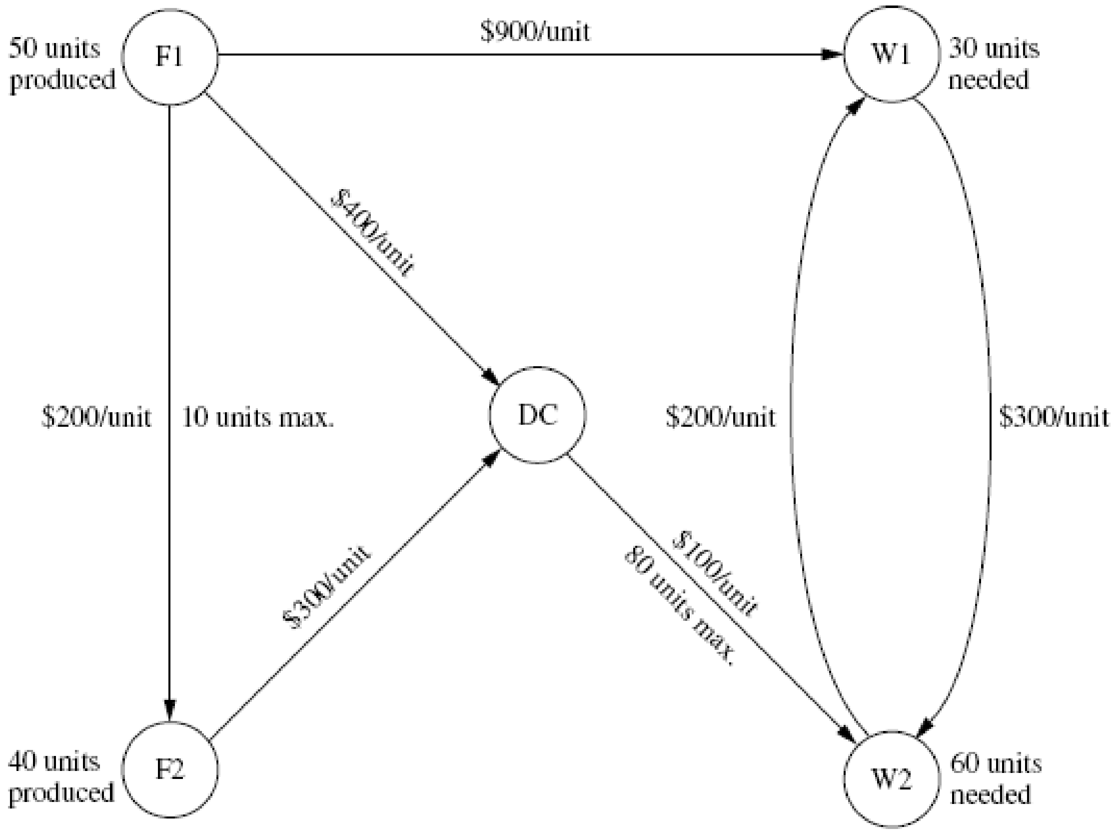
$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \qquad \text{for each arc } i \rightarrow j.$$

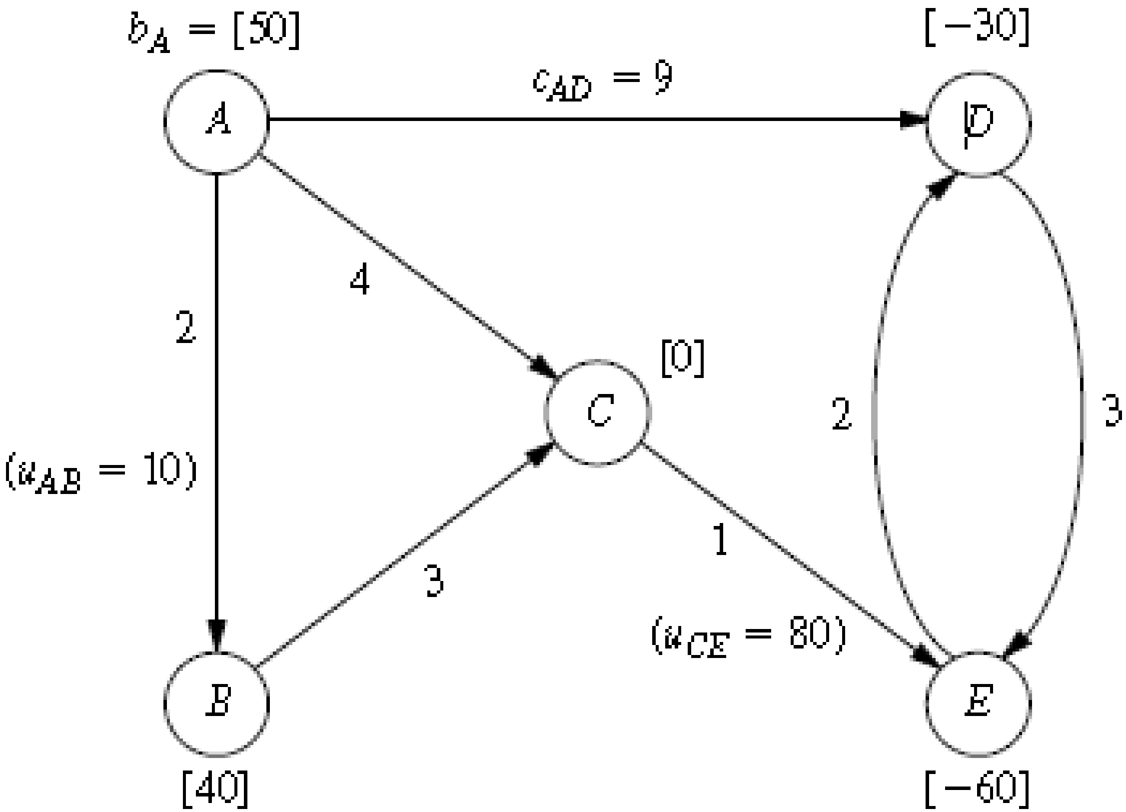
Una condición necesaria para la factibilidad de estos problemas es que:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0.$$

En otras palabras, el flujo total generado en los nodos de suministro debe ser igual a la demanda total

Ejemplo:


50 units produced
F1
$900/unit
W1
30 units needed
$400/unit
$200/unit
10 units max.
DC
$200/unit
$300/unit
$300/unit
$100/unit
80 units max.
40 units produced
F2
W2
60 units needed


$b_A = [50]$
$[-30]$
$c_{AD} = 9$
A
D
4
2
[0]
C
2
3
$(u_{AB} = 10)$
1
3
$(u_{CE} = 80)$
B
E
[40]
$[-60]$

$$\text{Minimize} \quad Z = 2x_{AB} + 4x_{AC} + 9x_{AD} + 3x_{BC} + x_{CE} + 3x_{DE} + 2x_{ED},$$

subject to

$$\begin{array}{rrrrrrrcr}
x_{AB} & + x_{AC} & + x_{AD} & & & & & = & 50 \\
-x_{AB} & & & + x_{BC} & & & & = & 40 \\
& - x_{AC} & & - x_{BC} & + x_{CE} & & & = & 0 \\
& & - x_{AD} & & & + x_{DE} & - x_{ED} & = & -30 \\
& & & & - x_{CE} & - x_{DE} & + x_{ED} & = & -60
\end{array}$$

and

$$x_{AB} \leq 10, \qquad x_{CE} \leq 80, \qquad \text{all } x_{ij} \geq 0.$$

MPL formulation and solution

```
minimize

        Flowcost=2AB+4AC+9AD+3BC+CE+DE+2ED

subject to
        AB+AC+AD = 50;
        -AB + BC = 40;
        -AC-BC+CE = 0;
        -AD+DE-ED = -30;
        -CE-DE+ED=-60;
        AB<=10;
        CE<=80;
integer
        AB AC AD BC CE DE ED;
end
```

Optimal integer solution found

MIN Flowcost = 490.0000

DECISION VARIABLES

PLAIN VARIABLES

Variable Name	Activity	Reduced Cost
AB	0.0000	2.0000
AC	40.0000	4.0000
AD	10.0000	9.0000
BC	40.0000	3.0000
CE	80.0000	1.0000
DE	0.0000	1.0000
ED	20.0000	2.0000

Constraint Name	Slack	Shadow Price
c1	0.0000	0.0000
c2	0.0000	0.0000
c3	0.0000	0.0000
c4	0.0000	0.0000
c5	0.0000	0.0000
c6	10.0000	0.0000
c7	0.0000	0.0000

Row \ Col	ab	ac	ad	bc	ce	cd	ed	de	av	RHS
c1	1	1	1							50
c2	-1	1								40
c3		-1		-1	1					0
c4			-1				-1	1		-30
c5					-1		1	-1		-60
c6									1	10
c7					1					80
Z	2	4	9	3	1	1	2	0	0	

El problema de Asignación

El problema de asignación

- Supóngase que se tienen n centros de trabajo y n posibles asignaciones, cada una de las cuales puede ser realizada por cualquiera de los n centros de trabajo.
- Supóngase además que existe un costo asociado $c_{i,j}$ que resulta de asignar un trabajo i a un centro de trabajo j.
- En este caso, la asignación de cada trabajo se realizará solamente a un solo centro de tal manera que el costo total de la asignación de los trabajos sea mínimo.

Formulación general

$$\min .Z = \sum_{i}\sum_{j} C_{i,j} X_{i,j}$$

s.a. :

$$\sum_{i} X_{i,j} = 1 \quad \forall\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j} X_{i,j} = 1 \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$$

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si trabajo i se asigna a centro j} \\ 0 & \text{otra cosa} \end{cases}$$

Solución

- Método fila columna – o método Húngaro
- Método SIMPLEX o programación entera binaria

Coefficientes de costos del problema

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = C$$

Ejemplo

- La administración de cierto restaurante ha decidido dirigir diferentes clientes a diferentes áreas de servicio. La administración sabe que las diferentes combinaciones de cliente/mesero hacen variar los costos de servicio a causa de las características del cliente y las habilidades de los diferentes meseros. A continuación se tiene la información de costos por cliente y mesero:

Costo por mesero

	Costo de Meseros		
Cliente	1	2	3
1	12.90	11.90	12.10
2	15.30	15.50	14.30
3	11.90	13.90	13.00

One formulation in MPL

```
title assignment;
index
   customer:=1..3;
   server:=1..3;
data
   cost[customer,server]:=(  12.90      11.9    12.1
                             15.3       15.5    14.3
                             11.9       13.9    13 );

variable
        x[customer, server];
macro
        totalcost:=sum(customer, server: cost*x);

model
        min totalcost;
subject to

        customers[customer]:sum(server: x) = 1;
        servers[server]:sum(customer: x) = 1;
binary
        x;
end
```

Solución

View File: assignment_engl.sol

SOLUTION RESULT

Optimal integer solution found

MIN Z = 38.1000

MACROS

Macro Name	Values
totalcost	38.1000

View File: assignment_engl.sol

CONSTRAINTS

CONSTRAINT custservice[customer] :

customer	Slack	Shadow Price
Customer1	0.0000	11.9000
Customer2	0.0000	14.3000
Customer3	0.0000	11.9000

CONSTRAINT custserver[server] :

server	Slack	Shadow Price
Server1	0.0000	0.0000
Server2	0.0000	0.0000
Server3	0.0000	0.0000

View File: assignment_engl.sol

VARIABLE x[customer,server] :

customer	server	Activity	Reduced Cost
Customer1	Server1	0.0000	1.0000
Customer1	Server2	1.0000	0.0000
Customer1	Server3	0.0000	0.2000
Customer2	Server1	0.0000	1.0000
Customer2	Server2	0.0000	1.2000
Customer2	Server3	1.0000	0.0000
Customer3	Server1	1.0000	0.0000
Customer3	Server2	0.0000	2.0000
Customer3	Server3	0.0000	1.1000

Matriz de no-ceros en MPL

Graph of Matrix: Assignment

Matrix Nonzero Elements

Row \ Col	xCusSer	xCusSer	xCusSer	xCusSer	xCusSer	xCusSer	xCusSer	xCusSer	xCusSer	RHS
custsCus	1	1	1							1
custsCus				1	1	1				1
custsCus							1	1	1	1
custsSer	1			1			1			1
custsSer		1			1			1		1
custsSer			1			1			1	1
Z	12.9	11.9	12.1	15.3	15.5	14.3	11.9	13.9	13	

El problema de transporte

El Problema de Transporte

- Busca optimizar la satisfacción de demandas de destinos a través de oferta de orígenes.
- Se optimiza en base a:
  - Distancias
  - Tiempos
  - Costos

Objetivo

- Su objetivo es el de analizar la manera óptima de distribuir un producto desde un grupo de orígenes o centros de suministros a un grupo de centros de recibo o destinos de tal manera que se minimice el costo total de la política.
- Cada fuente tiene cierta capacidad de suministro a ser distribuida, mientras que cada destino tiene cierta capacidad de demanda a ser satisfecha.

Supuestos:

- **El Supuesto de los requerimientos:** debe existir un balance entre todo el suministro **s** de las diferentes fuentes y la demanda total **d** de los destinos.
- **La propiedad de la solución factible:** en el problema de trasnporte habrá una solución factible sí y solo sí $\Sigma s = \Sigma d$
- **El supuesto de costo:** el costo de distribuir unidades de cualquier fuente a cualquier destino es directamente proporcional al número de productos distribuídos.
- **El modelo:** cualquier problema puede ser visto como este caso si puede ser descrito completamente en términos de una tabla de parámetros que satisfaga tanto el supuesto de los requirimientos como el de los costos.

Descripción

- Un conjunto A de m puntos de origen de donde un bien es enviado. El punto *i* puede suministrar hasta s_i unidades.
- Un conjunto de n puntos de demanda donde llega un bien. Los puntos de demanda *j* pueden recibir por lo menos d_j bienes.
- Cada unidad enviada del punto *i* al punto *j* incurre en un costo unitario cij.

Tabla de parámetros.

	Cost per Unit Distributed				
	Destination				
	1	**2**	⋯	***n***	**Supply**
Source 1	c_{11}	c_{12}	⋯	c_{1n}	s_1
2	c_{21}	c_{22}	⋯	c_{2n}	s_2
⋮					⋮
m	c_{m1}	c_{m2}	⋯	c_{mn}	s_m
Demand	d_1	d_2	⋯	d_n	

Formulación general

$$\min \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij} x_{ij}$$

s.t. $$\sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} \le s_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad \text{(Supply constraints)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} \ge d_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{(Demand constraints)}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

If $$\sum_{i=1}^{i=m} s_i = \sum_{j=1}^{j=n} d_j$$ Será un problema balanceado

La formulación general para el problema balanceado

Minimize $$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m,$$

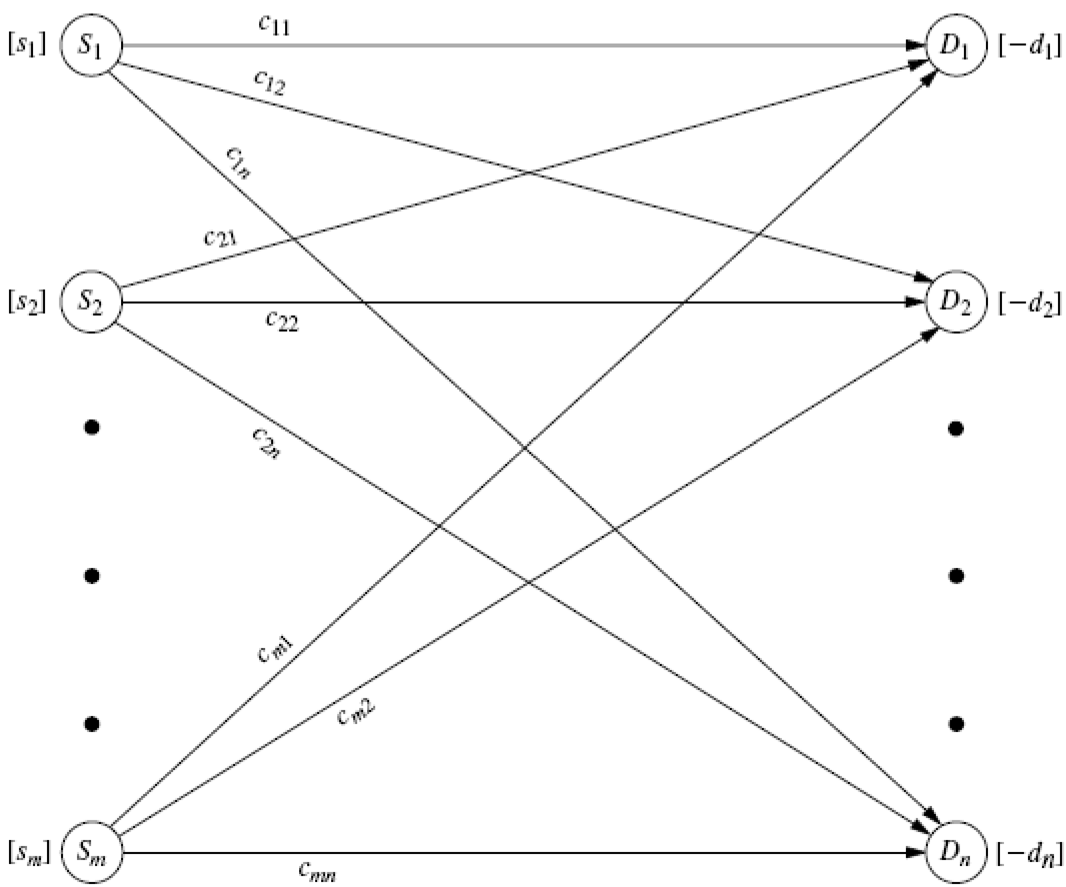
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n,$$

and

$$x_{ij} \geq 0, \qquad \text{for all } i \text{ and } j.$$

El requerimiento es que la demanda sea igual a la oferta. De otra manera habrá que crear puntos de oferta o demanda ficticios.

Representación de la red



Solution

- Método simplex
- Algoritmo de transporte
  - Tableau inicial
  - Solución
  - Prueba de optimalidad
  - Redistribución de envios

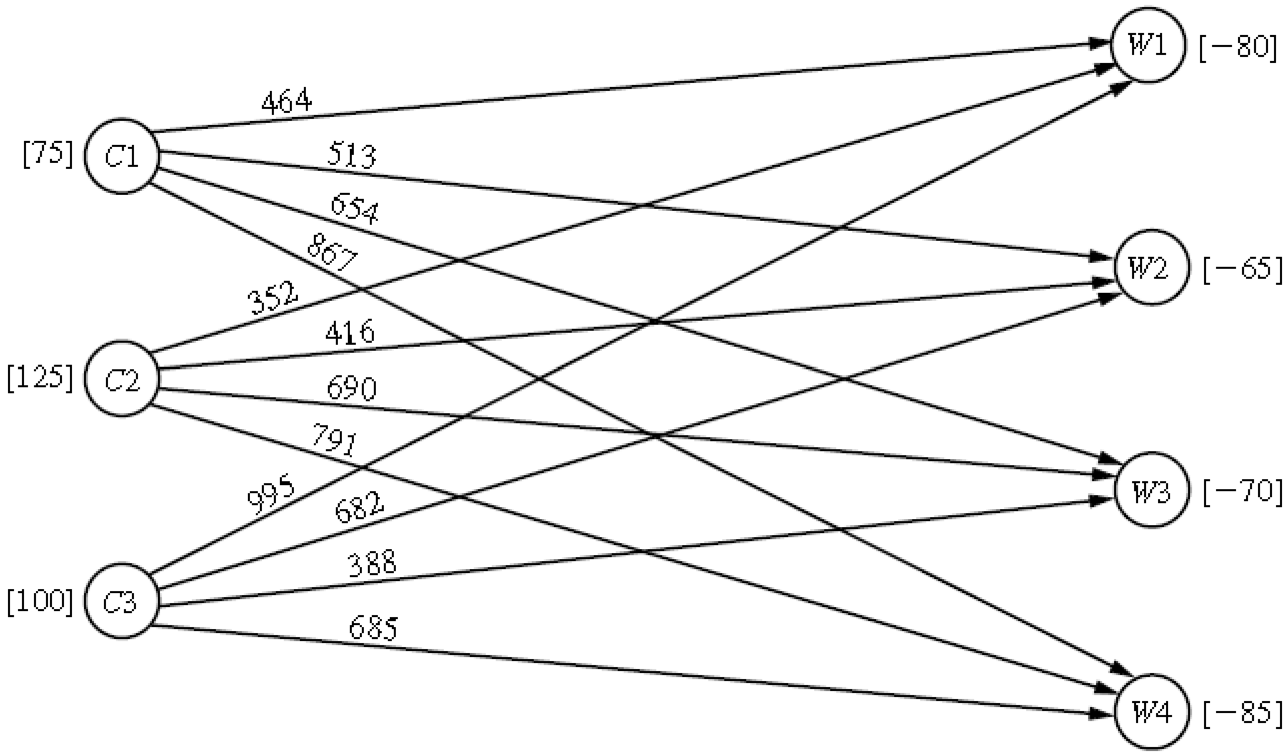
Ejemplo: Se tiene la siguiente red de distribución (Hillier)

		Shipping Cost ($) per Truckload				
		Warehouse				
		1	2	3	4	Output
Cannery	1	464	513	654	867	75
	2	352	416	690	791	125
	3	995	682	388	685	100
Allocation		80	65	70	85	

Es necesario encontrar la política óptima de transporte

Solución

La red del sistema



Las ecuaciones

Minimize $Z = 464x_{11} + 513x_{12} + 654x_{13} + 867x_{14} + 352x_{21} + 416x_{22} + 690x_{23} + 791x_{24} + 995x_{31} + 682x_{32} + 388x_{33} + 685x_{34},$

subject to the constraints

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 75 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 125 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 100 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 80 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 65 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 70 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 85
\end{aligned}
$$

and

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4).$$

Matrix Nonzero Elements

Row \ Col	ShipC1W1	ShipC1W2	ShipC1W3	ShipC1W4	ShipC2W1	ShipC2W2	ShipC2W3	ShipC2W4	ShipC3W1	ShipC3W2	ShipC3W3	ShipC3W4	RHS
OutputC1	1	1	1	1									75
OutputC2					1	1	1	1					125
OutputC3									1	1	1	1	100
AllocaW1	1				1				1				80
AllocaW2		1				1				1			65
AllocaW3			1				1				1		70
AllocaW4				1				1				1	85
TotalCos	464	513	654	867	352	416	690	791	995	682	388	685	

Solución: una formulación MPL

```
{  Exmpl8.1-1_P&TComp.mpl  }

{  Hillier and Lieberman, Introduction to Operations Research, 8th ed.  }

{  Chapter 8.1,  Example 1, Transportation, Size 7x12, Page 321  }


TITLE
   P&TCompany;

INDEX
   cannery := (C1, C2, C3);
   warehouse := (W1, W2, W3, W4);

DATA
   ShipCost[cannery, warehouse] := (464, 513, 654, 867,
                                    352, 416, 690, 791,
                                    995, 682, 388, 685);
   Supply[cannery] := (75,125,100);
   Demand[warehouse] := (80, 65, 70, 85);

VARIABLE
   Ship[cannery, warehouse];

MODEL
   MIN TotalCost = SUM(cannery, warehouse: ShipCost * Ship);

SUBJECT TO
   Output[cannery] : SUM(warehouse: Ship) = Supply;
   Allocation[warehouse] : SUM(cannery : Ship) = Demand;

END
```

Solución: variables

```
SOLUTION RESULT

  Optimal solution found

    MIN TotalCost        =     152535.0000


DECISION VARIABLES

VARIABLE Ship[cannery,warehouse] :
```

cannery	warehouse	Activity	Reduced Cost
C1	W1	0.0000	15.0000
C1	W2	20.0000	0.0000
C1	W3	0.0000	84.0000
C1	W4	55.0000	0.0000
C2	W1	80.0000	0.0000
C2	W2	45.0000	0.0000
C2	W3	0.0000	217.0000
C2	W4	0.0000	21.0000
C3	W1	0.0000	728.0000
C3	W2	0.0000	351.0000
C3	W3	70.0000	0.0000
C3	W4	30.0000	0.0000

Solución: restricciones

```
CONSTRAINTS

CONSTRAINT Output[cannery] :

  cannery                  Slack      Shadow Price
 ------------------------------------------------
  C1                      0.0000        570.0000
  C2                      0.0000        473.0000
  C3                      0.0000        388.0000
 ------------------------------------------------


CONSTRAINT Allocation[warehouse] :

  warehouse                  Slack      Shadow Price
 --------------------------------------------------
  W1                        0.0000       -121.0000
  W2                        0.0000        -57.0000
  W3                        0.0000          0.0000
  W4                        0.0000        297.0000
 --------------------------------------------------
```

El problema de la ruta más corta

- Considera una red NO DIRIGIDA y conectada, con dos nodos llamados origen y destino.
- Asociado con cada arco no dirigido hay una distancia no negativa.
- El objetivo es encontrar la ruta más corta del origen al destino.

Formulación

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij}$$

Subject to

$$\sum_{arcs\ out} x_{ij} - \sum_{arcs\ in} x_{ij} = 1 \ \text{ Origin Node i}$$

$$\sum_{arcs\ out} x_{ij} - \sum_{arcs\ in} x_{ij} = 0 \ \text{Intermediate nodes } \forall \text{i,j}$$

$$\sum_{arcs\ in} x_{ij} - \sum_{arcs\ out} x_{ij} = 1 \ \text{ Destination node j}$$

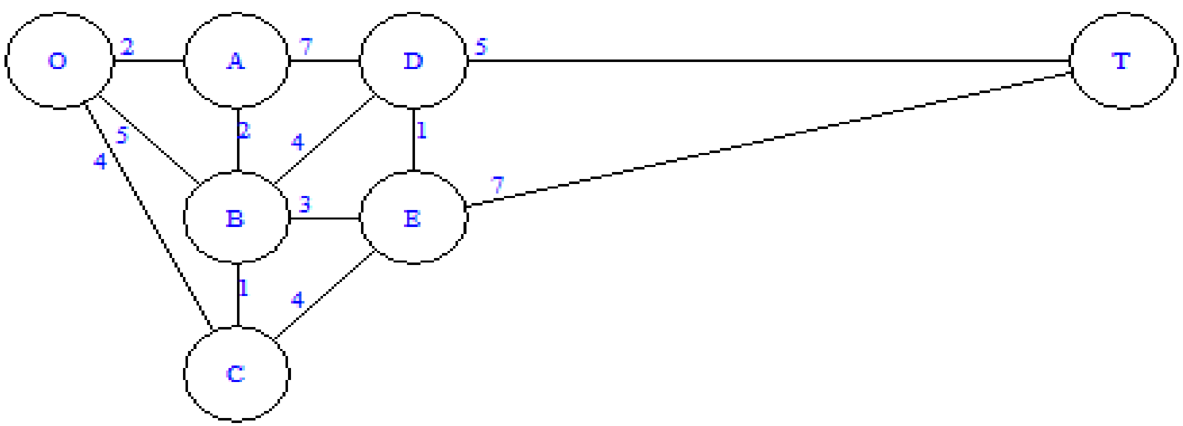
For unacceptable route add a new constraint

$$\sum x_{ij} = 0$$

$$x_{i,j} \begin{cases} 1, if\ edge\ from\ i\ to\ j\ exists \\ 0\ otherwise \end{cases}$$

Ejemplo

From \ To	O	A	B	C	D	E	T
O		2	5	4			
A			2		7		
B				1	4	3	
C						4	
D						1	5
E							7
T							



MPL formulation and solution

```
title short_path;
minimize
        path=2OA+5OB+4OC+2AB+7AD+BC+4BD+3BE+4CE+DE+5DT+7ET;
subject to
        OA+OB+OC = 1;
        AD+AB-OA = 0;
        BC+BD+BE-OB-AB = 0;
        CE-BC-OC = 0;
        DT+DE+-AD-BD = 0;
        ET-BE-CE-DE=0;
        DT+DE = 1;
binary
        OA OB OC AB AD BC BD BE CE DE DT ET;
end
```

```
Optimal integer solution found

  MIN path            =          13.0000
```

```
DECISION VARIABLES

PLAIN VARIABLES
```

Variable Name	Activity	Reduced Cost
OA	1.0000	2.0000
OB	0.0000	5.0000
OC	0.0000	4.0000
AB	1.0000	2.0000
AD	0.0000	7.0000
BC	0.0000	1.0000
BD	1.0000	4.0000
BE	0.0000	3.0000
CE	0.0000	4.0000
DE	0.0000	1.0000
DT	1.0000	5.0000
ET	0.0000	7.0000

```
CONSTRAINTS

PLAIN CONSTRAINTS
```

Constraint Name	Slack	Shadow Price
c1	0.0000	0.0000
c2	0.0000	0.0000
c3	0.0000	0.0000
c4	0.0000	0.0000
c5	0.0000	0.0000
c6	0.0000	0.0000
c7	0.0000	0.0000

From	To	Distance/Cost	Cumulative Distance/Cost
O	A	2	2
A	B	2	4
B	D	4	8
D	T	5	13
From O	To T	=	13

El problema del flujo máximo

- Todo flujo a través de una red dirigida e interconectada se origina en el nuede fuente y termina en el nodo destino.
- Todos los otros nodos serán nodos de trasbordo.
- El flujo a través del arco es permitido en una dirección, donde el máximo flujo permitido está dado por la capacidad del arco.
- En la fuente, todos los arcos salen. En el destino, todos los arcos llegan.
- El objetivo es maximizar el flujo total de la fuente al destino.

LP formulation

$$\max F$$

$$\sum_{arcs\ out} x_{ij} - F = 0 \text{ at Origin}$$

$$\sum_{arcs\ out} x_{ij} - \sum_{arcs\ in} x_{ij} = 0 \text{ Intermediate nodes } \forall\, i$$

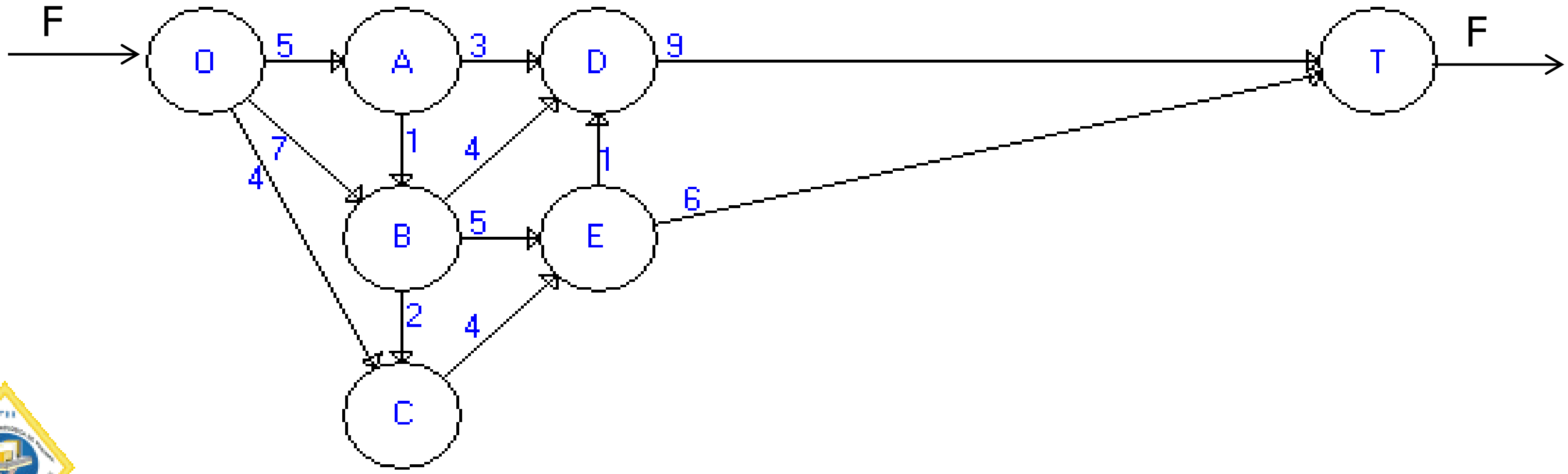
$$\sum_{arcs\ in} x_{ij} - F = 0 \text{ at Destinations}$$

$$x_{ij} \leq f_{ij}\ \forall \text{ nodes}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

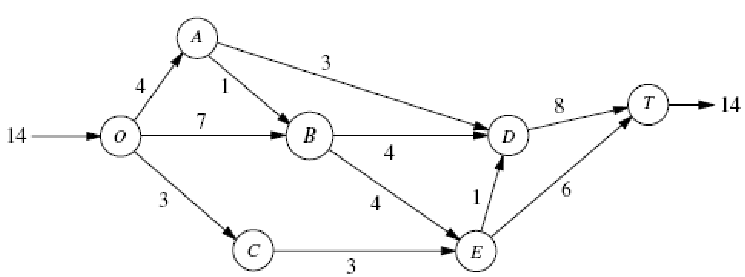
Ejemplo

From \ To	O	A	B	C	D	E	T
O		5	7	4			
A			1		3		
B				2	4	5	
C						4	
D							9
E					1		6
T							



Formulación y solución

```
title max_flow;
maximize
        Flow = F;
subject to
        OA+OB+OC-F=0;
        AD+AB-OA=0;
        BC+BD+BE-OB-AB=0;
        CE-BC-OC=0;
        DT-AD-BD-ED=0;
        ET+ED-CE-BE=0;
        DT+ET-F=0;
        OA<=5;
        OB<=7;
        OC<=4;
        AB<=1;
        BC<=2;
        AD<=3;
        BD<=4;
        BE<=5;
        CE<=4;
        DT<=9;
        ED<=1;
        ET<=6;
integer
```



SOLUTION RESULT

Optimal integer solution found

MAX Flow = 14.0000

DECISION VARIABLES

PLAIN VARIABLES

Variable Name	Activity	Reduced Cost
F	14.0000	0.0000
OA	4.0000	1.0000
OB	7.0000	1.0000
OC	3.0000	1.0000
AD	3.0000	0.0000
AB	1.0000	0.0000
BC	0.0000	0.0000
BD	4.0000	0.0000
BE	4.0000	0.0000
CE	3.0000	0.0000
DT	8.0000	0.0000
ED	1.0000	0.0000
ET	6.0000	0.0000

Proyecto

- Un negocio envia cierto producto agrícola de cuatro áreas de producción a cuatro mercados, incluyendo uno internacional. La información muestra las fuentes, destinos, demandas, oferta y el costo por tonelada de mover este producto.

Proyecto

Fuentes	Tons
Chiriquí	2,500
Azuero	1,250
Darién	850
Coclé	1,000

Destinos	Tons
Panamá	1980
Colón	750
Puerto Balboa	1000
Puerto Cristóbal	1870

Proyecto - Costos

De/A:	Panamá	Colón	Balboa	Cristóbal
Chiriquí	50	55	50	55
Azuero	40	48	39	42
Darién	15	25	18	26
Coclé	22	28	25	29

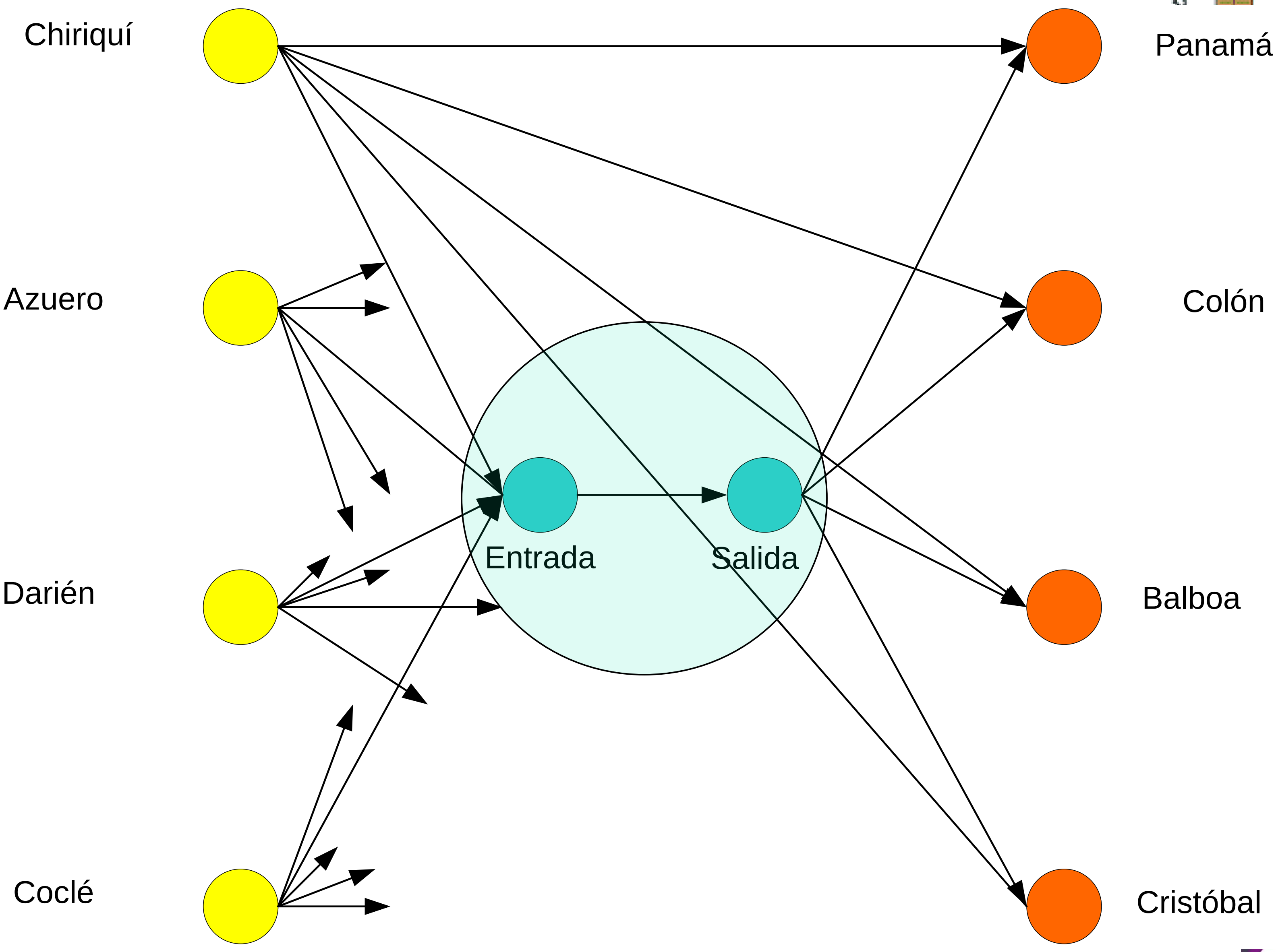
Proyecto: el trasbordo

- Se quiere probar una política de trasbordo complementaria utilizando un punto central del país (Divisa)
- El almacenamiento y manejo del producto tiene un costo de $5 y su capacidad es de 3,500 toneladas.
- El costo de transportar al centro de distribución se muestra a continuación.

Proyecto: Tabla de costos y capacidad.

De/A:	Panamá	Colón	Balboa	Cristóbal	Entrada al centro*	Salida del centro	Capacidad
Chiriquí	50	55	50	55	20		2,500
Azuero	40	48	39	42	18		1,250
Darién	15	25	18	26	30		850
Coclé	22	28	25	29	10		1,000
Entrada al centro*						5	3,500
Salida del centro	15	20	15	20			3,500
Demanda	1,980	750	1,000	1,870	3,500	3,500	

* El manejo de los productos en el centro de distribución se supone como si fuera un crossdocking interno.


Chiriquí
Azuero
Darién
Coclé
Entrada
Salida
Panamá
Colón
Balboa
Cristóbal

Se quiere:

- Formular ambos casos, el de transporte y el de trasbordo.
- Encontrar las soluciones correspondientes.
- Comparar las respuestas y concluir al respecto.