La Programación Lineal – El Método Simplex

http://www.academia.utp.ac.pa/humberto-alvarez/investigacion-de-operaciones-1

El Método Simplex

- Desarrollado en 1947 por George Dantzig como parte de un proyecto para el Departamento de Defensa
- Se basa en la propiedad de la solución esquina de P. L.
- Complejidad O(n)
- No se ha desarrollado método más confiable para problemas grandes (n, m > 10,000)

El Método Simplex …

- Es un proceso iterativo
  - Solución inicial en el origen lo que obliga a crea un problema con condiciones iniciales
  - Busca una solución en cada esquina del sistema $\Re^n$, partiendo del origen
  - Prueba de optimalidad

Descripción general

Para la formulación estándar:

$$\text{Max (o Min)} \qquad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

s.t.

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad &= \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \\
x_i &\geq 0 \quad \forall\, i = 1 \ldots n
\end{aligned}$$

Matricial:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \qquad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\max && x_0 = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &\text{subject to} && \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases} \end{aligned}$$

En la forma canónica $[A]\{x\} = \{b\}$

La solución inicial

- El Simplex asume una solución inicial en el origen, por lo que todas las variables iniciales son cero.
- Para poder que exista una solución inicial factible, Simplex se ve obligado a crear una forma aumentada.

La solución aumentada

- Es la solución a un problema de programación lineal expresado originalmente de manera estándar y que ha sido aumentado introduciendo las variables de holgura y artificiales correspondientes.
- Una solución básica es una solución esquina aumentada
- Una solución básica factible es una solución esquina aumentada factible.

Propiedades de la solución

- Grados de libertad del modelo: es la diferencia entre el número de variables en la forma aumentada y el número de restricciones (no considerando la no negatividad)
- A fin de poder resolver un sistema de ecuaciones, habrá que dar valores arbitrarios a las variables que exceden. Simplex asume 0

Expresión aumentada: Convertir todas las restricciones en igualdad

- El caso de ≤
  - Es necesario añadir una variable de holgura

    $x_1 \leq 4;\ x_1 = 4 - x_3;\ x_1 + x_3 = 4$
- El caso de ≥
  - Es necesario añadir una variable de excedente

    $x_1 \geq 5;\ x_1 = 5 + x_4;\ x_1 - x_4 = 5$
  - Es necesario añadir una variable artificial x_5 tal que, $x_1 - x_4 + x_5 = 5$ y no viole la condición de $x_j > 0$ en la solución inicial donde su coeficiente en la solución será M>>0 tal que x_5 tenga que ser cero para que no la variable artificial no aparezca en la solución
- Es caso de =
  - Se añade una variable artificial con coeficiente M en la solución

    $x_1 = 5;\ x_1 + x_6 = 5$

Otra vez el ejemplo Wyndor

Una fábrica de ventanas produce artículos de vidrio de alta calidad, incluyendo ventanas y puertas. Tiene tres plantas. Los marcos de aluminio se producen en la planta A, los de madera se producen en la planta B y en la C se corta el vidrio y se ensamblan los productos.

Se ha decidido ampliar la producción en dos artículos adicionales: un tipo especial de puerta y una ventana de seguridad. Se ha determinado que la empresa tiene capacidad suficiente para producir estos artículos sin sacrificar la producción de los otros que tiene, aunque tendrán que competir con la capacidad excedente de la planta C. Adicionalmente se conoce que se podrá vender todo lo que se produce.

La empresa está interesada en encontrar una mezcla óptima de puertas especiales y ventanas de seguridad a fin de tener la mayor cantidad de ingresos posible.

Planta	Capacidad utilizada por unidad producida		Capacidad disponible
	Producto		
	Puertas	Ventanas	
A	1	0	4
B	0	2	12
C	3	2	18
Utilidad por unidad vendida	3	5	

Formulación estándar

Maximizar:

$Z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad &\le 4 \\
2x_2 &\le 12 \\
3x_1 + 2x_2 &\le 18 \\
x_1, \qquad x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Formulación aumentada del ejemplo

Maximizar Z tal que:

$$Z - 3x_1 - 5x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 0$$
$$x_1 + \quad + s_1 = 4$$
$$2x_2 \quad + s_2 = 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \quad + s_3 = 18$$

En el ejemplo son 2 variables originales, 3 variables de holgura y tres restricciones, por lo tanto el modelo tiene 2 grados de libertad

La solución inicial

- Las variables que se fijan en cero se conocen como variables no básicas
- Las variables que aparecen en la solución se conocen como básicas
- La solución básica factible inicial se hace tal que

  $x_1 = x_2 = 0$ y

  $s_1 = 4$

  $s_2 = 12$

  $s_3 = 18$
- La solución es no óptima porque se puede encontrar otra solución adyacente mejor.

(untitled)

	Puertas	Ventanas		RHS	Equation form
Maximize	3	5			Max 3Puertas + 5Venta...
Planta A	1	0	<=	4	Puertas <= 4
Planta B	0	2	<=	12	2Ventanas <= 12
Planta C	3	2	<=	18	3Puertas + 2Ventanas ...

Linear Programming Results

(untitled) Solution

	Puertas	Ventanas		RHS	Dual
Maximize	3	5			
Planta A	1	0	<=	4	0
Planta B	0	2	<=	12	1.5
Planta C	3	2	<=	18	1
Solution	2	6		36	

(untitled) Solution

Variable	Status	Value
Puertas	Basic	2
Ventanas	Basic	6
slack 1	Basic	2
slack 2	NONBasic	0
slack 3	NONBasic	0
Optimal Value (Z)		36

El Dual

- Todo problema de maximización (minimización) en P. L. tiene un problema equivalente de minimización (maximización).

Primal

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s. a. :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0$$

Dual :

$$\text{Min } Y = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

s. a. :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \geq cj \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$y_i \geq 0$$

Relación Primal - Dual

		Problema primal		
Problema Dual	Coeficientes de y_i	Coeficientes de $x_1 \quad x_2 \ldots \quad x_n$	$\leq b_i$	Coeficientes de la F. O. (Minimizar)
	Y_1	$a_{1,1} \quad a_{1,2} \ldots a_{1,n}$	b_1	
	y_2	$a_{2,1} \quad a_{2,2} \ldots a_{2,n}$	b_2	
	. . .	. . .	. . .	
	y_m	$a_{m,1} \quad a_{m,2} \ldots a_{m,n}$	b_m	
	$\geq c_j$	$c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_n$		

La solución del dual

La solución de las variables y_i representa la contribución a la utilidad por unidad de recurso i que se obtiente cuando el conjunto actual de variables básicas es utilizado para resolver el primal. En otros palabras **LOS PRECIOS SOMBRA**

El precio sombra

- El precio sombra del recurso i mide el valor marginal de dicho recurso, es decir, la tasa en que Z puede cambiar si varia el recurso b_i
- El valor en que se puede “vender” cada unidad de recurso i de tal manera que se indiferente utilizarlo o venderlo.

Original Problem					
Maximize	Puertas	Ventanas			
Planta A	1	0	<=	4	
Planta B	0	2	<=	12	
Planta C	3	2	<=	18	
Dual Problem					
	Planta A	Planta B	Planta C		
Minimize	4	12	18		
Puertas	1	0	3	>=	3
Ventanas	0	2	2	>=	5

	Planta A	Planta B	Planta C		RHS	Equation form
Minimize	4	12	18			Min 4Planta A + 12Planta B + 18Planta C
Constraint 1	1	0	3	>=	3	Planta A + 3Planta C >= 3
Constraint 2	0	2	2	>=	5	2Planta B + 2Planta C >= 5

(untitled) Solution

	Planta A	Planta B	Planta C		RHS	Dual
Minimize	4	12	18			
Constraint 1	1	0	3	>=	3	-2
Constraint 2	0	2	2	>=	5	-6
Solution	0	1.5	1		36	

Linear Programming Results

(untitled) Solution

	Puertas	Ventanas		RHS	Dual
Maximize	3	5			
Planta A	1	0	<=	4	0
Planta B	0	2	<=	12	1.5
Planta C	3	2	<=	18	1
Solution	2	6		36	

Análisis de sensibilidad o post-óptimo

- Estudia las posibles variaciones del problema una vez esta ha sido resuelto.
- Se utiliza para determinar la variación de un coeficiente o de una restricción sin variar la validez de una solución.
- Se hace debido a:
  - El alto costo de desarrollar otro modelo de P. L.
  - Ver la variación de datos aproximados
  - Estudiar diferentes escenarios

Análisis de sensibilidad

- Es una de las partes más importantes en la programación lineal.
- Permite determinar cuando una solución sigue siendo óptima dados algunos cambios en el problema.
- Consiste en determinar que tan sensible es la respuesta óptima al cambio de algunos datos como los coeficientes de la función objetivo) o los términos independientes de las restricciones.

Objetivo

- Establecer un intervalo de números reales en el cual el dato que se analiza puede estar contenido, de tal manera que la solución sigue siendo óptima siempre que el dato pertenezca a dicho intervalo
- Los análisis más importantes son;
  - Los coeficientes de la función objetivo; y
  - Los términos independientes de las restricciones

Cambios paramétricos

- **Cambios en el coeficiente de una variable no básica**: no afectan la solución ya que estas no aparecen en la solución del modelo.
- **Introducción de una nueva variable**: habrá que ver si la nueva restricción afecta la solución del dual
- **Cambios en b_i**: pueden cambiar el problema y los precios sombra
- **Cambios en los coeficientes de la variable básica**: afecta el valor de la función objetivo.

Costo reducido

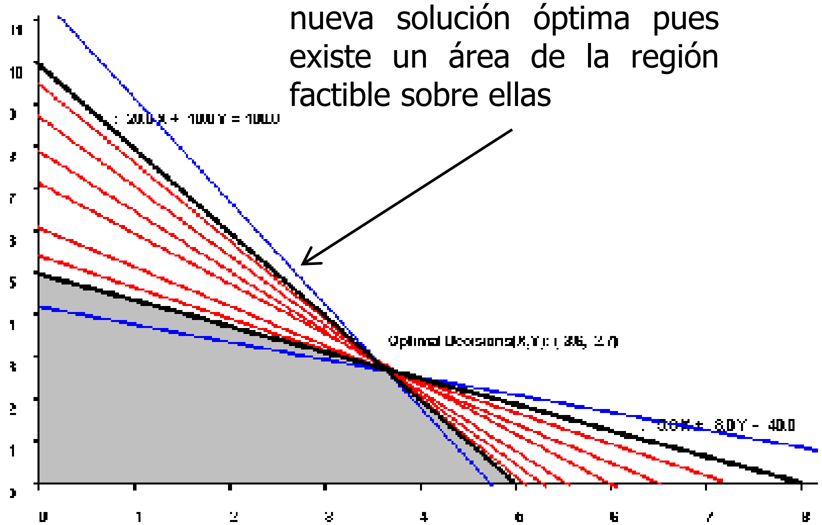
- En las soluciones no degeneradas, el costo reducido de cualquier variable de decisión se define como cuánto tendría que cambiar el coeficiente de dicha variable, en la función objetivo, para tener un valor óptimo positivo.
- Si una variable ya es positiva en la solución óptima, su costo reducido es cero.
- Por el contrario, si el valor óptimo de una variable es cero, entonces, según la definición de costo reducido, dicho costo es el incremento o el decremento permisible que corresponde a dicha variable.

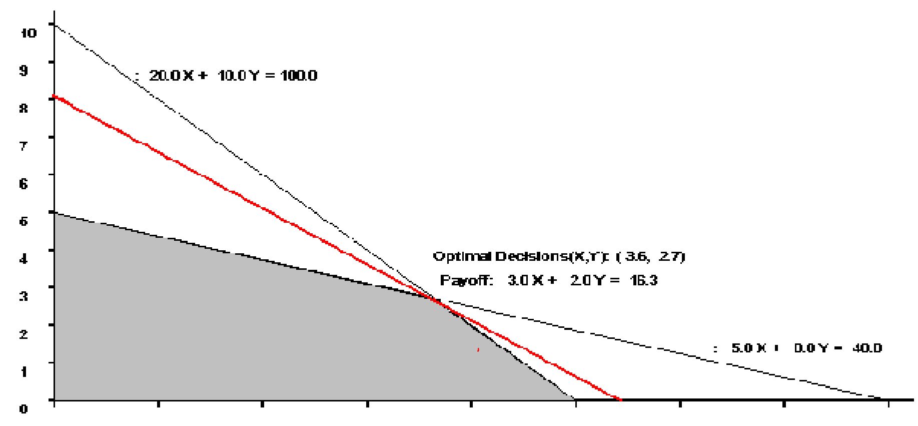
Análisis para los coeficientes de la función objetivo

- El objetivo es encontrar el rango de los coeficientes para que la solución original se mantenga óptima

$$
\begin{aligned}
&Máx \quad Z = 3x + 2y \\
&s/a \quad 5x + 8y \le 40 \\
&\qquad 20x + 10y \le 100 \\
&\qquad x \ge 0 ; y \ge 0
\end{aligned}
$$

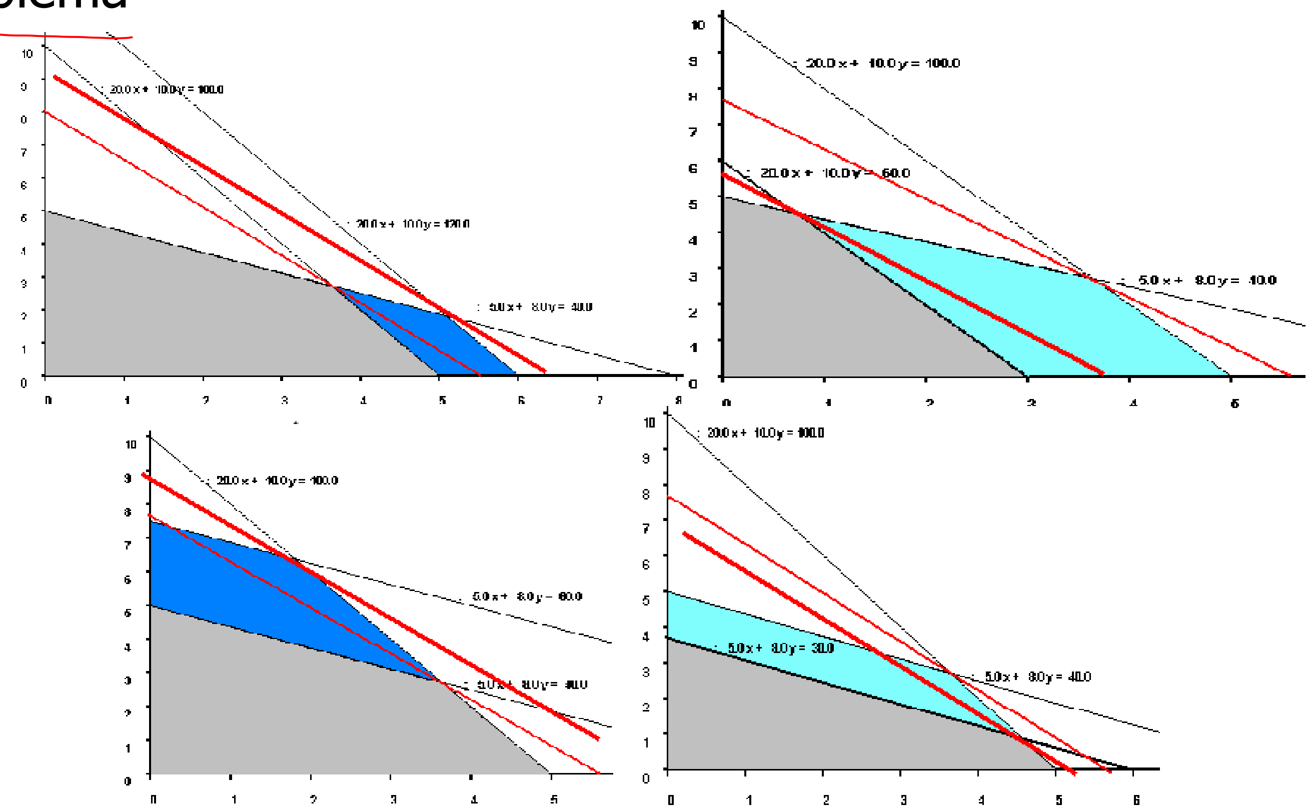
Todas las líneas rojas mantienen la solución óptima. Las líneas azules generan una nueva solución óptima pues existe un área de la región factible sobre ellas





Análisis para los términos independientes de las restricciones

- El objetivo será que las restricciones que le daban solución al problema original, le den también solución al nuevo problema



(untitled) Solution

	Puertas	Ventanas		RHS	Dual
Maximize	3	5			
Planta A	1	0	<=	4	0
Planta B	0	2	<=	12	1.5
Planta C	3	2	<=	18	1
Solution	2	6		36	

Variable	Status	Value
Puertas	Basic	2
Ventanas	Basic	6
slack 1	Basic	2
slack 2	NONB...	0
slack 3	NONB...	0
Optimal Value (Z)		36

Variable	Value	Reduced ...	Original Val	Lower Bou...	Upper Bou...
Puertas	2	0	3	0	7.5
Ventanas	6	0	5	2	Infinity
	Dual Value	Slack/Surp...	Original Val	Lower Bou...	Upper Bou...
Planta A	0	2	4	2	Infinity
Planta B	1.5	0	12	6	18
Planta C	1	0	18	12	24