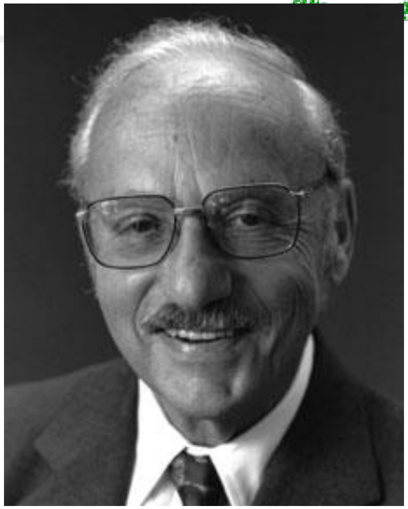
La Programación Lineal

Aspectos generales

- Se considera a George Dantzig el padre de la P. L.
- Su objetivo es el de asignar recursos escasos a actividades que compiten por ellos.



http://www2.informs.org/History/dantzig/

- Técnica matemática que permite seleccionar el mejor curso de acción o programa de un conjunto de soluciones factibles.
- Los modelos que describen las relaciones son funciones lineales.

Formulación típica

- El planteamiento típico se puede suponer como:

  Optimizar alguna variable dependiente, expresada como una función lineal de n variables independientes, sujeta a una serie de restricciones lineales que son a su vez funciones de las n variables independientes.

Formulación típica

- La variable dependiente se conoce como **Función Objetivo**
- Está relacionada a menudo con conceptos económicos tales como ganancias, costos, ingresos, tiempo, distancia, etc.
- Las variables independientes son **variables de decisión**

Formulación estándar

$$\left.\begin{array}{l} \text{Optimizar :} \\ f(x) = Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \end{array}\right\} \text{Función objetivo}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sujeto a :} \\ g(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, m \end{array}\right\} \text{Restricciones}$$

Donde:

- f(.): función objetivo
- x_j : variables de decisión
- c_j : coeficiente de la j-ésima variable de
  decisión en la función objetivo
- $a_{1,j}$: coeficiente de la j-ésima variable de decisión
  en la iésima restricción
- b_i : constante o límite de la i-ésima restricción

Las restricciones:

- En general las restricciones pueden ser de tres tipos:
  - $g(x) \leq b$
  - $g(x) \geq b$, o
  - $g(x) = b$
- La restricción de tipo $\leq$ asegura que el uso de un recurso no exceda cierto límite
- La restricción de tipo $\geq$ asegura que el uso de un recurso satisfaga un mínimo establecido
- La restricción de tipo $=$ asegura que el uso de un recurso esté limitada a una cantidad previamente establecida.

Pasos para formular el modelo

- Entender bien el problema
- Identificar las variables de decisión
- Establecer la función objetivo
- Establecer las restricciones
- Identificar los límites superior e inferior de las variables de decisión

Ejemplo

Una fábrica de ventanas produce artículos de vidrio de alta calidad, incluyendo ventanas y puertas. Tiene tres plantas. Los marcos de aluminio se producen en la planta A, los de madera se producen en la planta B y en la C se corta el vidrio y se ensamblan los productos.

Se ha decidido ampliar la producción en dos artículos adicionales: un tipo especial de puerta y una ventana de seguridad. Se ha determinado que la empresa tiene capacidad suficiente para producir estos artículos sin sacrificar la producción de los otros que tiene, aunque tendrán que competir con la capacidad excedente de la planta C. Adicionalmente se conoce que se podrá vender todo lo que se produce.

Datos del problema

Una fábrica de ventanas produce artículos de vidrio de alta calidad, incluyendo ventanas y puertas. Tiene tres plantas. Los marcos de aluminio se producen en la planta A, los de madera se producen en la planta B y en la C se corta el vidrio y se ensamblan los productos.

Se ha decidido ampliar la producción en dos artículos adicionales: un tipo especial de puerta y una ventana de seguridad. Se ha determinado que la empresa tiene capacidad suficiente para producir estos artículos sin sacrificar la producción de los otros que tiene, aunque tendrán que competir con la capacidad excedente de la planta C. Adicionalmente se conoce que se podrá vender todo lo que se produce.

La empresa está interesada en encontrar una mezcla óptima de puertas especiales y ventanas de seguridad a fin de tener la mayor cantidad de ingresos posible.

Planta	Horas utilizadas por unidad producida		Horas disponibles
	Producto		
	Puertas	Ventanas	
A	1	0	4
B	0	2	12
C	3	2	18
Utilidad por unidad vendida	3	5	

Formulación

- ¿Cuál es el objetivo del problema?
  - Encontrar cuantas puertas y ventanas producir a fin de maximizar la utilidad
- ¿Cuáles son las variables de decisión?
  - La cantidad de puertas (x_1) y ventanas (x_2) a producir
- ¿Cuál es la función objetivo?
  - La utilidad por ventana y puerta vendida
- ¿Cuáles son las restricciones?
  - Las capacidades de las plantas

Formulación estándar

Maximizar:

$Z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad &\leq 4 \\
2x_2 &\leq 12 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\
x_1, \qquad x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Resolviendo el problema

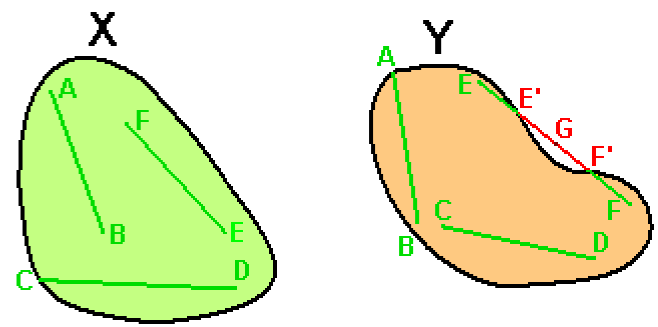
- Método intuitivo
- Enumeración completa
- Solución gráfica
- Métodos matemáticos exactos
  - Simplex
  - Otros
- Heurísticas

La solución gráfica

- Un problema de programación lineal puede representarse como un espacio o polígono convexo
- Formado por la intersección de las diferentes restricciones
- De manera general, se formará un hiperespacio en la región $\Re^n$, formado por la intersección de m hiperplanos, también localizados en $\Re^n$

¿Qué es un polígono convexo?

- U polígono en el cual los ángulos internos son menores a 180 grados y las diagonales que pueden trazarse son todas internas.
- Toda línea recta que atraviese alguno de sus lados, por lo tanto, hace que el polígono quede abarcado por completo en uno de los semiplanos que quedaron marcados a partir de la recta.



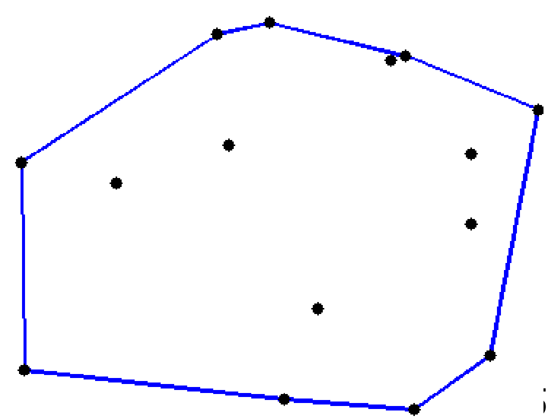
Conjunto convexo   Conjunto no convexo

- **Definición formal**: C es convexo si y solo si para todo $a, b \in C$:

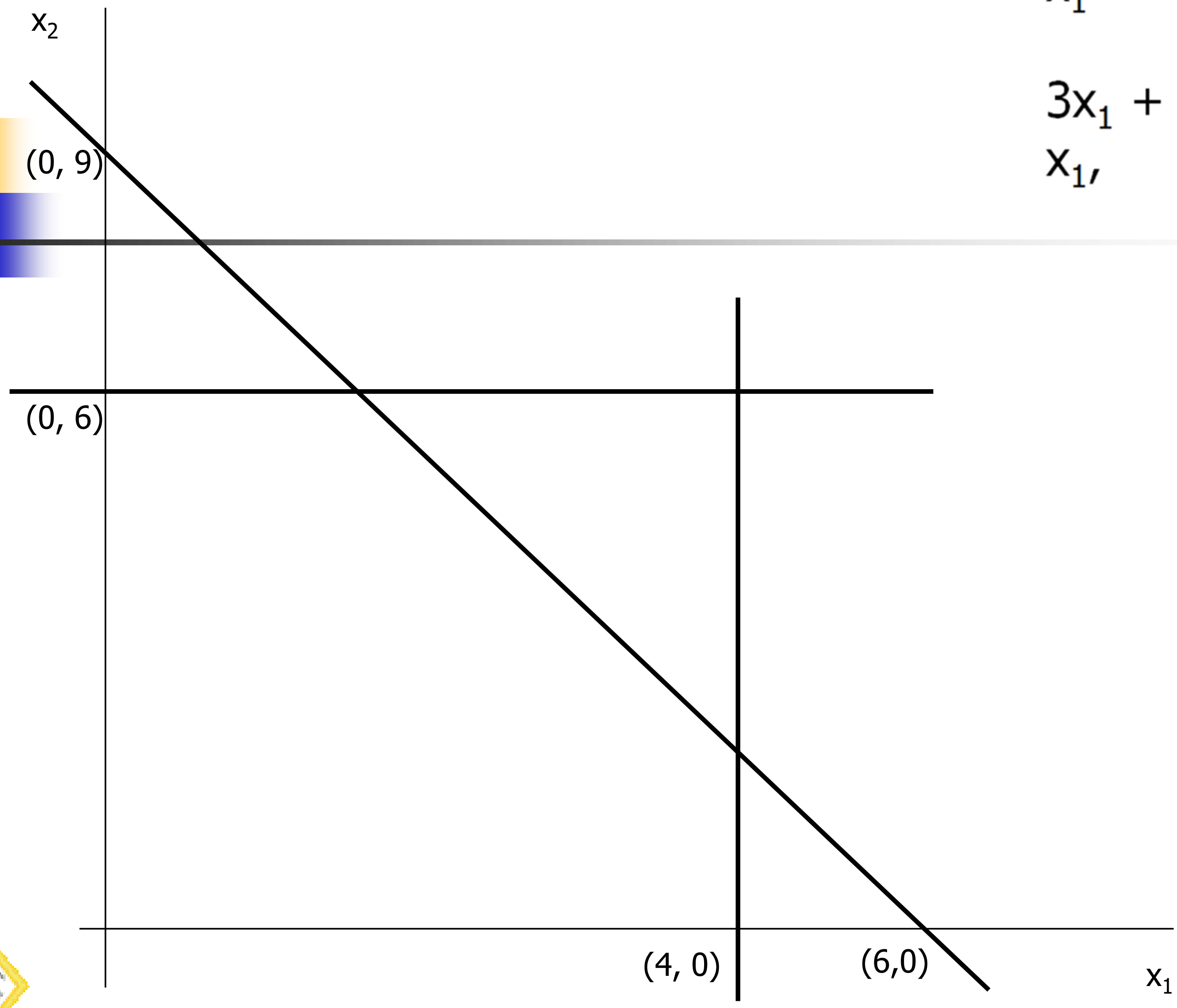
$$[ab] \subset C$$

Es decir, $\forall t \in [0;1]$:

$$(1-t)a + tb \in C$$



$$
\begin{aligned}
x_1 \quad\quad\quad &\leq 4 \\
2x_2 &\leq 12 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\
x_1, \quad x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



La solución óptima

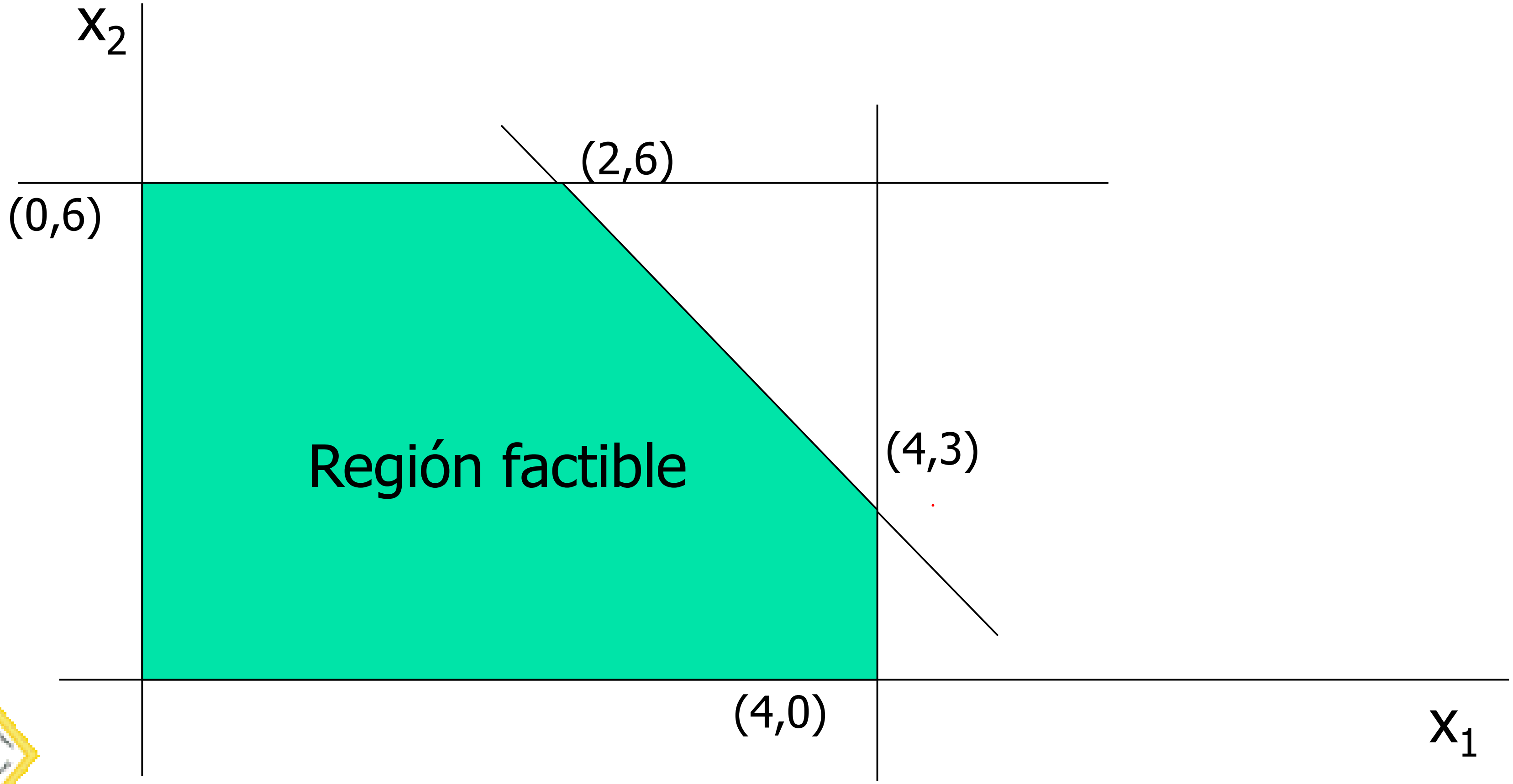
- La región factible es el conjunto de valores que una variable de decisión puede asumir y simultáneamente satisfacer las diferentes restricciones.
- Es una región convexa, por lo tanto sus esquinas son una función ponderada de cualquier combinación de los puntos que la forman.
- Las posibles soluciones están localizadas en las intersecciones o esquinas de los hiperplanos formados por las restricciones.

La solución óptima

- Si existe una solución óptima, ésta deberá estar en una esquina.
- Si hay más de una solución, al menos dos de ellas deberán estar en esquinas adyacentes.
- Existe un número finito de soluciones esquinas.
- Si una esquina proporciona una solución igual o mejor que sus puntos esquinas factibles adyacentes, entonces es óptimo.

Solución gráfica

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad\quad\quad &\leq 4\\
2x_2 &\leq 12\\
3x_1 + 2x_2 &\leq 18\\
x_1, \quad x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



La solución óptima

Esquinas		Función objetivo	
		x_1	x_2
x_1	x_2	3	5
0	6	30	
2	6	36	
4	3	27	
4	0	12	

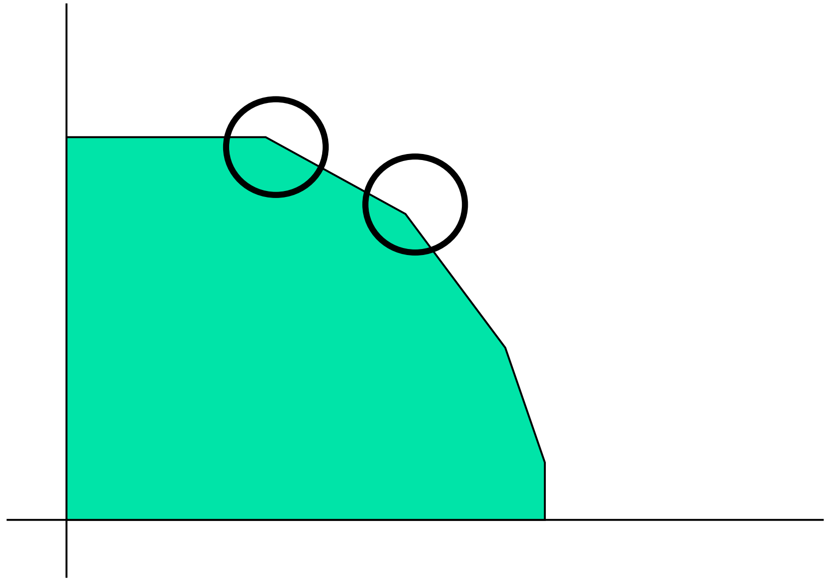
Óptimo

Significado de la solución

- La mezcla óptima de productos será
  - 2 puertas y 6 ventanas
  - Un ingreso o utilidad de 36 unidades monetarias
  - Quedarán disponible recursos en la planta A para poder hacer 2 puertas más ($2 \leq 4$)
  - No quedarán recursos disponibles recursos en la planta B ($2*6 = 12$)
  - No quedarán recursos disponibles en la planta B ($3*2 + 2*6 = 18$)

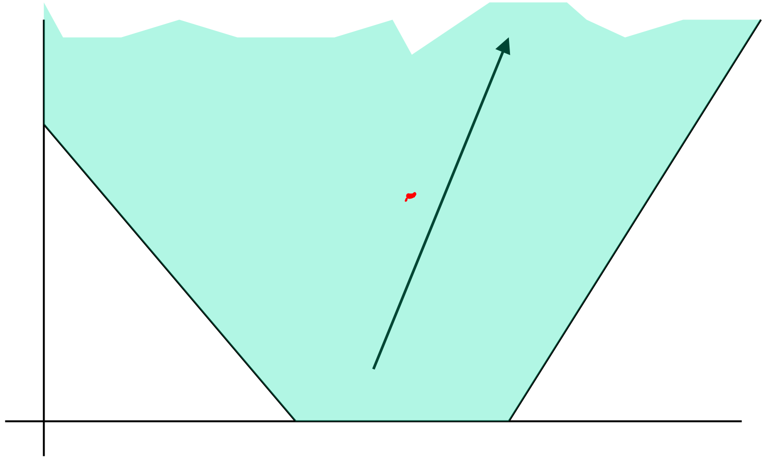
Algunas condiciones especiales

- Soluciones alternas: puede existir más de una solución óptima, pero al menos una de ellas debe estar en una esquina.



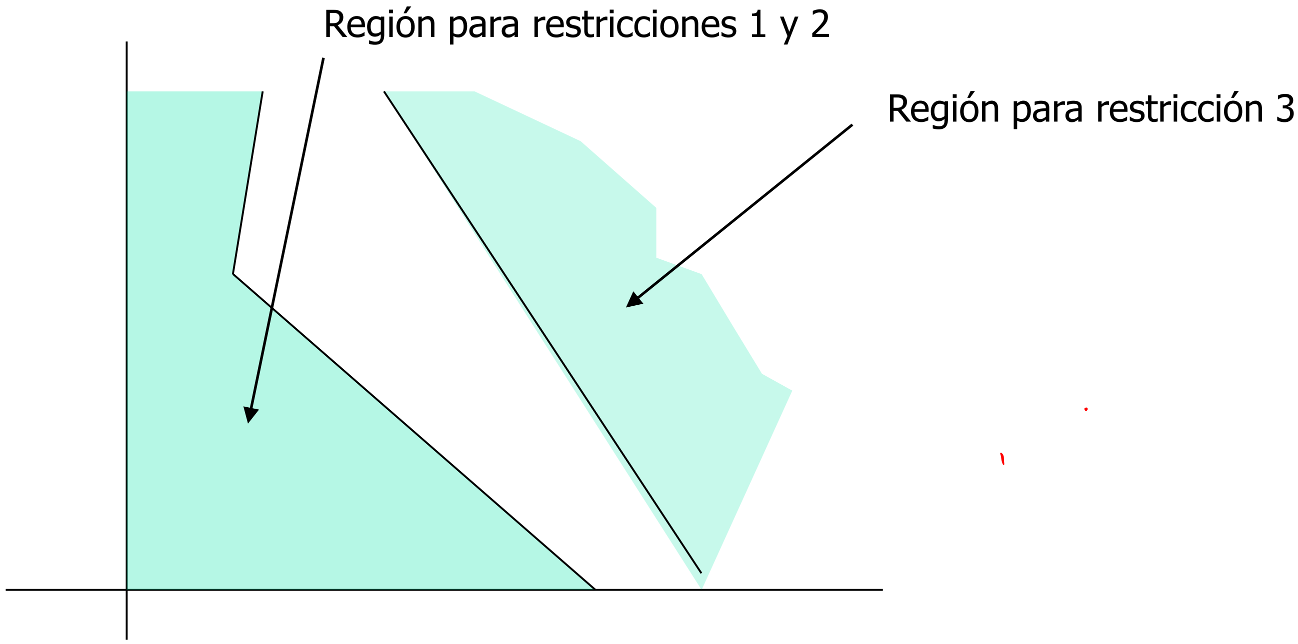
Solución no limitada

- El espacio o región de la solución no está limitado por ninguna restricción, por lo que la solución podrá variar de manera infinita sin límite. Normalmente esto indica un error en la formulación



Problema no factible

- Cuando el conjunto de soluciones es un conjunto vacío, esto es, no hay puntos dentro de la región factible que satisfaga todas las soluciones



Restricciones redundantes o triviales

- Cuando existe más de una restricción que no afecta la región factible, al estar esta última limitada por otras restricciones. Estas restricciones no son necesarias para encontrar la solución del modelo