Diseño de experimentos - Experimentos multifactoriales

http://www.academia.utp.ac.pa/humberto-alvarez/diseno-de-experimentos-y-regresion

Introducción

- Los casos anteriores explicaban los diseños en bloques donde sólo se tiene un factor de tratamientos, y el resto son factores de bloques que tienen una importancia secundaria en la investigación experimental.
- El objetivo de un *diseño factorial* es estudiar el efecto de varios factores sobre una o varias respuestas, cuando se tiene el mismo interés sobre todos los factores.

Experimento factorial

- Un **experimento factorial completo**
  - es un experimento cuyo diseño consta de dos o más factores,
  - cada uno de los cuales con distintos valores o *niveles*,
  - cuyas unidades experimentales cubren todas las posibles combinaciones de esos niveles en todo los factores.
- Este tipo de experimentos permiten el estudio del efecto de cada factor sobre la variable respuesta, así como el efecto de las interacciones entre factores sobre dicha variable.

- Permite determinar una combinación de niveles de los factores en la que el desempeño del experimento sea mejor.
- Los *factores* pueden ser de tipo *cualitativo* o de tipo *cuantitativo.*
- La matriz de diseño o *arreglo factorial* es el conjunto de puntos experimentales o tratamientos que pueden formarse considerando todas las posibles combinaciones de los niveles de los factores.
- Para estudiar como influyen los factores sobre la variable de respuesta hay que elegir al menos dos niveles de prueba para cada factor.

- Con el diseño factorial completo se corren aleatoriamente todas las posibles combinaciones que pueden formarse con los niveles de los factores a investigar.
- Para obtener el número de corridas experimentales se multiplica el número de tratamientos por el número de *réplicas*, donde una de éstas se lleva a cabo cada vez que se corre el arreglo completo.
- En general, la familia de diseños factoriales 2^k consiste en k factores, todos con dos niveles de prueba.
- La familia de diseños factoriales 3^k consiste en k factores cada uno con tres niveles de prueba.
- Si los k factores no tienen la misma cantidad de niveles, debe escribirse el producto de manera explícita.

- El *efecto de un factor* se define como el cambio observado en la variable de respuesta debido a un cambio de nivel de dicho factor.
- El *efecto principal* de un factor con dos niveles es la diferencia entre la respuesta media observada cuando dicho factor estuvo en su primer nivel, y la respuesta media observada cuando el factor estuvo en su segundo nivel.
- Los valores absolutos (sin importar el signo) de los efectos principales y del efecto de interacción son una medida de importancia de su efecto sobre la variable de respuesta.
- Para saber si los efectos son estadísticamente significativos (diferentes de cero) se requiere el análisis de varianza (ANOVA).

Modelo estadístico

- Considere los factores A y B con a y b (a, $b \geq 2$) niveles de prueba, respectivamente.
- Se puede construir el arreglo o diseño factorial $a \times b$, el cual consiste en $a \times b$ tratamientos. Algunos casos particulares de uso frecuente son: el factorial 2^2, el factorial 3^2 y el factorial 3×2.
- Se llama *réplica* a cada corrida completa del arreglo factorial. Si se hacen n réplicas, el número total de corridas experimentales es $n(a \times b)$.
- Si hay menos de cuatro factores, se corren replicados para tener la potencia necesaria en las pruebas estadísticas sobre los efectos de interés. Si se hacen n réplicas, el número total de corridas experimentales es $n(a \times b)$.

Modelo estadístico

- El modelo estadístico para este tipo de diseño esta dado por:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk};\ i = 1, 2, \ldots, a;\ j = 1, 2, \ldots, b;\ k = 1, 2, \ldots, n$$

- Donde μ es la media general, α_i es el efecto del i-ésimo nivel del factor A, β_j es el j-ésimo nivel del factor B, $(\alpha\beta)_{ij}$ es el efecto en ij de la interacción entre A y B y ε_{ijk} es el error aleatorio que tiene una distribución de la forma $N(0, \sigma^2)$.
- La hipótesis puede plantearse de la siguiente manera:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n$$

- Otra manera de escribir la hipótesis sería:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_a = 0$$
$$H_A: \alpha_i \neq 0 \text{ para algún } i$$

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_b = 0$$
$$H_A: \beta_j \neq 0 \text{ para algún } i$$

$$H_0: (\alpha\beta)_{ij} = 0 \text{ para todo } ij$$
$$H_A: (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \text{ para algún } ij$$

El ANOVA para el diseño factorial a x b

FV	*SC*	*GL*	*CM*	F_0	Valor-*p*
Efecto A	SC_A	$a-1$	CM_A	CM_A/CM_E	$P(F > F_0^A)$
Efecto B	SC_B	$b-1$	CM_B	CM_B/CM_E	$P(F > F_0^B)$
Efecto AB	SC_{AB}	$(a-1)(b-1)$	CM_{AB}	CM_{AB}/CM_E	$P(F > F_0^{AB})$
Error	SC_E	$ab(n-1)$	CM_E		
Total	SC_T	$abn-1$			

Representación de los efectos principales y la interacción

- El efecto principal de un factor se puede representar de manera gráfica.
- En el eje vertical se pone una escala que represente la magnitud de la variable de respuesta.
- Uno de los factores se representa con sus dos niveles en el eje horizontal y en dirección vertical de cada uno de estos niveles, se anota un punto que represente la respuesta promedio en cada nivel del otro factor.
- Cuando existe interacción las líneas
- obtenidas tienen una pendiente muy diferente.
- Si no hay interacción las líneas tienen pendientes similares, que son aproximadamente paralelas

Representación de los efectos principales y la interacción

- La interpretación de la interacción permite:
  - entender cómo actúan los factores sobre la variable de respuesta,
  - acumular conocimiento sobre el sistema o proceso correspondiente.
- Cuando una interacción doble (de dos factores) tiene un efecto estadísticamente significativo sobre la respuesta, su interpretación *tiene prioridad* sobre los correspondientes efectos principales, aunque éstos también sean significativos.
- Esto se debe a que la interacción termina dominando en el proceso y ayuda a seleccionar la condición en la que debe operarse el proceso para mejorar su desempeño.

Ejemplo

- Supongamos que en un proceso de fermentación, se tienen dos factores *A*: *tipo de levadura* y *B*: *temperatura*, cada uno con dos niveles, denotados por *A*1 = 1, *A*2 = 2 y *B*1 = 22°C, *B*2 = 30°C, respectivamente. Cada tratamiento se corre tres veces, por lo que hay tres réplicas de cada uno. La respuesta de interés es el *rendimiento del proceso de fermentación*. A continuación la información

		Yi: Rendimiento		
A: Levadura	B: temperatura	Y1	Y2	Y3
A1	22	28	25	30
A1	30	63	58	65
A2	22	41	42	43
A2	30	45	45	47

Caso	Levadura	Temperatura	Rendimiento
1	A1	22	28
2	A1	22	25
3	A1	22	30
4	A1	30	63
5	A1	30	58
6	A1	30	65
7	A2	22	41
8	A2	22	42
9	A2	22	43
10	A2	30	45
11	A2	30	45
12	A2	30	47

Cuadro de Análisis de la Varianza (SC tipo III)

F.V.	SC	gl	CM	F	p-valor
Modelo.	1086.00	2	543.00	6.53	0.0177
Levadura	3.00	1	3.00	0.04	0.8536
Temperatura	1083.00	1	1083.00	13.02	0.0057
Error	748.67	9	83.19		
Total	1834.67	11			

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=11.91201

Error: 83.1852 gl: 9

Levadura	Medias	n	E.E.	
A1	44.83	6	3.72	A
A2	43.83	6	3.72	A

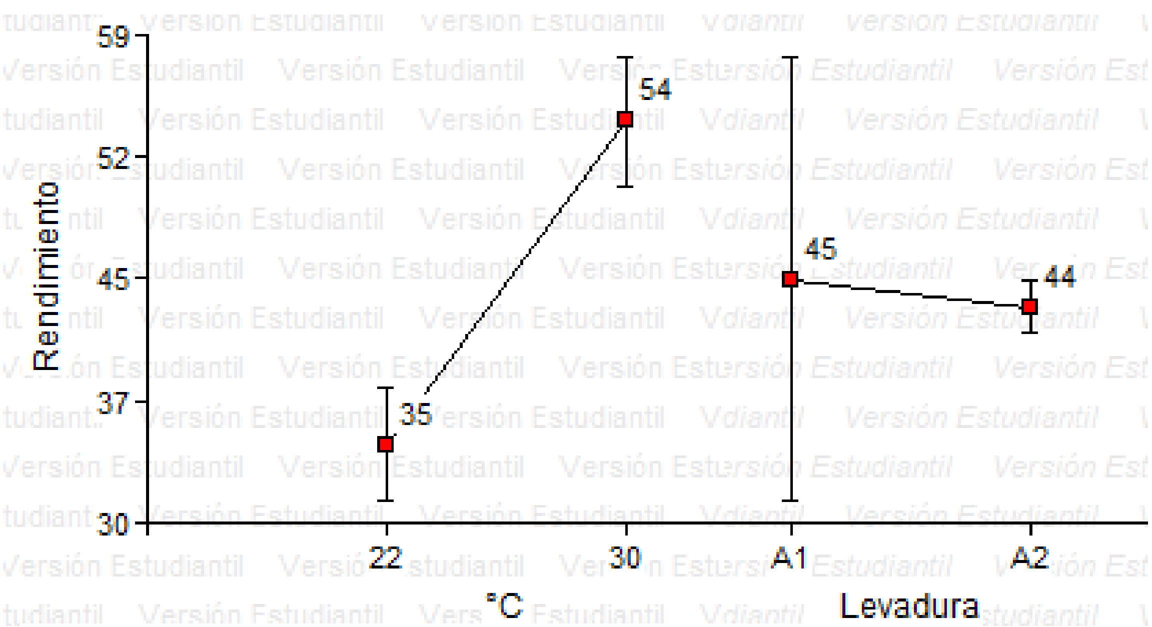
Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

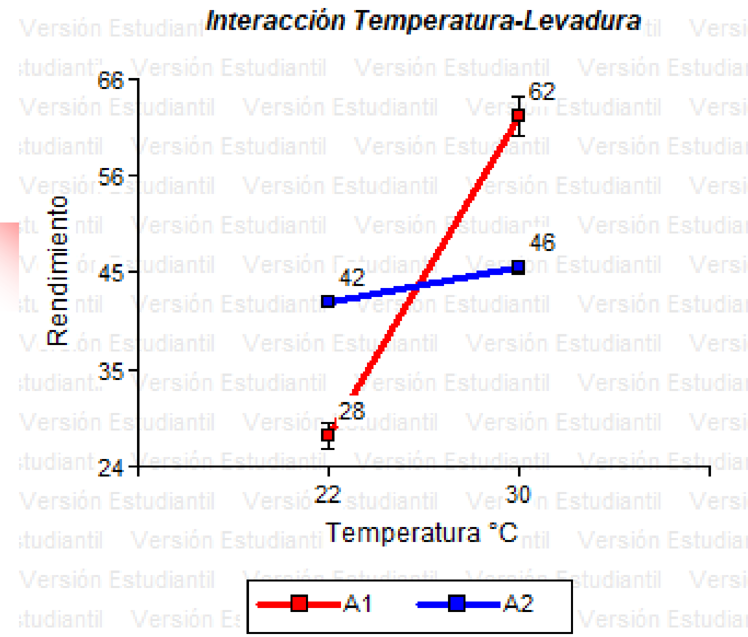
Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=11.91201

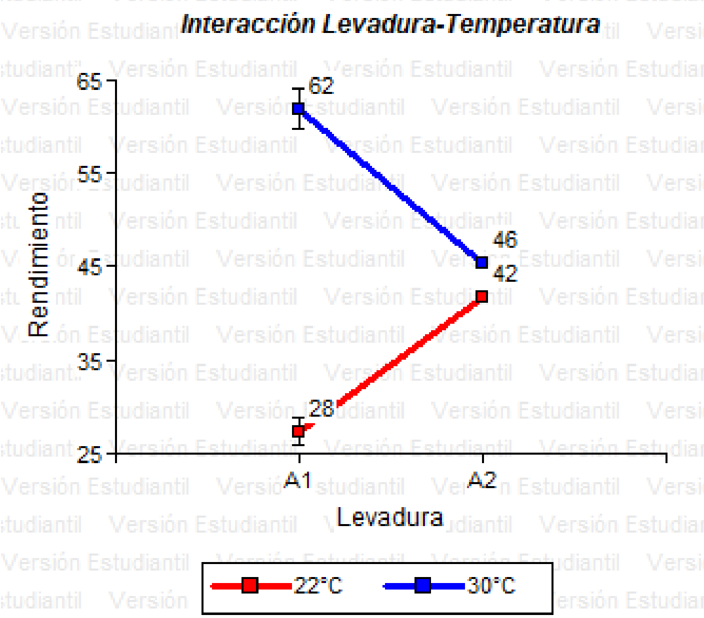
Error: 83.1852 gl: 9

Temperatura	Medias	n	E.E.		
30	53.83	6	3.72	A	
22	34.83	6	3.72		B

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)







Análisis de la varianza

Variable	N	R^2	R^2 Aj	CV
Rendimiento	12	0.98	0.97	5.25

Cuadro de Análisis de la Varianza (SC tipo III)

F.V.	SC	gl	CM	F	p-valor
Modelo.	1791.33	3	597.11	110.24	<0.0001
Levadura	3.00	1	3.00	0.55	0.4780
Temperatura	1083.00	1	1083.00	199.94	<0.0001
Levadura*Temperatura	705.33	1	705.33	130.22	<0.0001
Error	43.33	8	5.42		
Total	1834.67	11			

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=3.09860

Error: 5.4167 gl: 8

Levadura	Medias	n	E.E.	
A1	44.83	6	0.95	A
A2	43.83	6	0.95	A

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=3.09860

Error: 5.4167 gl: 8

Temperatura	Medias	n	E.E.		
30	53.83	6	0.95	A	
22	34.83	6	0.95		B

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=4.38208

Error: 5.4167 gl: 8

Levadura	Temperatura	Medias	n	E.E.			
A1	30	62.00	3	1.34	A		
A2	30	45.67	3	1.34		B	
A2	22	42.00	3	1.34		B	
A1	22	27.67	3	1.34			C

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

Diseño con tres factores

- Se quiere investigar la influencia de tres factores (A, B y C) sobre una o más variables de respuesta.
- El número de niveles de prueba en cada uno de los factores es a, b y c, respectivamente.
- Se puede construir el arreglo factorial $a \times b \times c$, que consiste de $a \times b \times c$ tratamientos o puntos experimentales, considerando una réplica.
- Entre los arreglos de este tipo que se utilizan con frecuencia en aplicaciones diversas se encuentran: el factorial 2^3 y el factorial 3^3.

Modelo estadístico

- En un diseño factorial $a \times b \times c$ se supone que el comportamiento de la respuesta *Y* puede describirse mediante el modelo de efectos dado por:

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl};$$

$$i = 1, 2, \ldots, a;\ j = 1, 2, \ldots, b;\ k = 1, 2, \ldots, c;\ l = 1, 2, \ldots, n$$

- donde μ es la media general, α_i es el efecto del nivel *i*-ésimo del factor *A*, β_j es el efecto del nivel *j* del factor *B* y γ_k es el efecto del nivel *k* en el factor *C*;
- $(\alpha\beta)_{ij}$, $(\alpha\gamma)_{ik}$ y $(\beta\gamma)_{jk}$ representan efectos de interacción dobles (de dos factores) en los niveles *ij*, *ik*, *jk*, respectivamente,
- y $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ es el efecto de interacción triple en la combinación o punto *ijk*;
- ε_{ijkl} representa el error aleatorio en la combinación *ijkl*, donde *l* es el número de repeticiones o réplicas del experimento.

Hipótesis

- El estudio factorial de tres factores (*A*, *B* y *C*) permite investigar los efectos: *A*, *B*, *C*, *AB*, *AC*, *BC* y *ABC*, donde el nivel de desglose o detalle con el que pueden estudiarse depende del número de niveles utilizado en cada factor.
- Se tienen siete efectos de interés sin considerar desglose, y con ellos se pueden plantear las siete hipótesis nulas H_0 : Efecto $A = 0$, H_0 : Efecto $B = 0$, …, H_0 : Efecto $ABC = 0$, cada una aparejada con su correspondiente hipótesis alternativa.
- Así, si un factor se prueba en dos niveles, todo su efecto marginal (individual) es lineal, ya que su efecto individual no se puede descomponer
- Si tuviera tres niveles su efecto marginal se puede descomponer en una parte lineal y otra cuadrática pura.

ANOVA

FV	SC	GL	CM	F_0	Valor-p
Efecto A	SC_A	$a-1$	CM_A	CM_A/CM_E	$P(F > F_0^A)$
Efecto B	SC_B	$b-1$	CM_B	CM_B/CM_E	$P(F > F_0^B)$
Efecto C	SC_C	$c-1$	CM_C	CM_C/CM_E	$P(F > F_0^C)$
Efecto AB	SC_{AB}	$(a-1)(b-1)$	CM_{AB}	CM_{AB}/CM_E	$P(F > F_0^{AB})$
Efecto AC	SC_{AC}	$(a-1)(c-1)$	CM_{AC}	CM_{AC}/CM_E	$P(F > F_0^{AC})$
Efecto BC	SC_{BC}	$(b-1)(c-1)$	CM_{BC}	CM_{BC}/CM_E	$P(F > F_0^{BC})$
Efecto ABC	SC_{ABC}	$(a-1)(b-1)(c-1)$	CM_{ABC}	CM_{ABC}/CM_E	$P(F > F_0^{ABC})$
Error	SC_E	$abc(n-1)$	CM_E		
Total	SC_T	$abcn-1$			

Ejemplo:

- Se desea investigar el efecto del tipo de suspensión (*A*), abertura de malla (*B*) y temperatura de ciclaje (*C*) en el volumen de sedimentación *Y*(%) de una suspensión.
- Para ello se decide correr un experimento factorial 3 × 2 × 2 con seis réplicas.
- Las observaciones obtenidas en las 72 corridas experimentales y los niveles de prueba de cada factor se muestran en las siguientes tablas:

	A_1		A_2		A_3	
	B_1	B_2	B_1	B_2	B_1	B_2
C_1	60, 75, 75 86, 70, 70	67, 73, 73 67, 68, 68	62, 68, 65 76, 65, 65	71, 80, 80 72, 80, 80	76, 71, 75 70, 68, 73	75, 75, 75 75, 75, 77
C_2	55, 53, 53 55, 55, 55	52, 52, 57 52, 54, 54	44, 44, 45 48, 48, 45	60, 60, 60 67, 67, 65	52, 51, 50 52, 48, 54	56, 55, 57 59, 50, 55

Factor	U. originales			U. codificadas		
	Bajo	Medio	Alto	Bajo	Medio	Alto
A: Tipo de suspensión	A_1	A_2	A_3	–1	0	1
B: Abertura de malla	40	–	60	–1	–	1
C: Temperatura	0	–	30	–1	–	1

Caso	Tipo	Apertura	Temp.	Vol. Sedimentacion
1	A1	40	0	60
2	A1	40	0	75
3	A1	40	0	75
4	A1	40	0	86
5	A1	40	0	70
6	A1	40	0	70
7	A1	40	30	55
8	A1	40	30	53
9	A1	40	30	53
10	A1	40	30	55
11	A1	40	30	55
12	A1	40	30	55
13	A1	60	0	67
14	A1	60	0	73
15	A1	60	0	73
16	A1	60	0	67
17	A1	60	0	68
18	A1	60	0	68
19	A1	60	30	52
20	A1	60	30	52
21	A1	60	30	57
22	A1	60	30	52
23	A1	60	30	54
24	A1	60	30	54
25	A2	40	0	62
26	A2	40	0	68

Análisis de la varianza

Variable	N	R^2	R^2 Aj	CV
Vol. Sedimentacion	72	0.90	0.88	6.01

Cuadro de Análisis de la Varianza (SC tipo III)

F.V.	SC	gl	CM	F	p-valor
Modelo.	7666.17	11	696.92	48.55	<0.0001
Tipo	15.75	2	7.88	0.55	0.5806
Apertura	470.22	1	470.22	32.76	<0.0001
Temp.	6234.72	1	6234.72	434.31	<0.0001
Tipo*Apertura	791.36	2	395.68	27.56	<0.0001
Tipo*Temp.	59.53	2	29.76	2.07	0.1347
Apertura*Temp.	72.00	1	72.00	5.02	0.0288
Tipo*Apertura*Temp.	22.58	2	11.29	0.79	0.4600
Error	861.33	60	14.36		
Total	8527.50	71			

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=2.18783

Error: 14.3556 gl: 60

Tipo	Medias	n	E.E.	
A3	63.58	24	0.77	A
A2	63.21	24	0.77	A
A1	62.46	24	0.77	A

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=1.78636

Error: 14.3556 gl: 60

Apertura	Medias	n	E.E.		
60	65.64	36	0.63	A	
40	60.53	36	0.63		B

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=1.78636

Error: 14.3556 gl: 60

Temp.	Medias	n	E.E.		
0	72.39	36	0.63	A	
30	53.78	36	0.63		B

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=3.09406

Error: 14.3556 gl: 60

Tipo	Apertura	Medias	n	E.E.				
A2	60	70.17	12	1.09	A			
A3	60	65.33	12	1.09		B		
A1	40	63.50	12	1.09		B	C	
A3	40	61.83	12	1.09			C	
A1	60	61.42	12	1.09			C	
A2	40	56.25	12	1.09				D

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=3.09406

Error: 14.3556 gl: 60

Tipo	Temp.	Medias	n	E.E.			
A3	0	74.17	12	1.09	A		
A2	0	72.00	12	1.09	A	B	
A1	0	71.00	12	1.09		B	
A2	30	54.42	12	1.09			C
A1	30	53.92	12	1.09			C
A3	30	53.00	12	1.09			C

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=2.52629

Error: 14.3556 gl: 60

Apertura	Temp.	Medias	n	E.E.				
60	0	73.94	18	0.89	A			
40	0	70.83	18	0.89		B		
60	30	57.33	18	0.89			C	
40	30	50.22	18	0.89				D

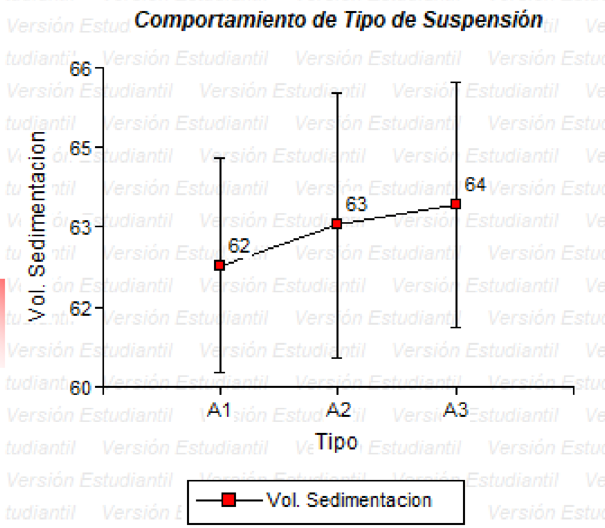
Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

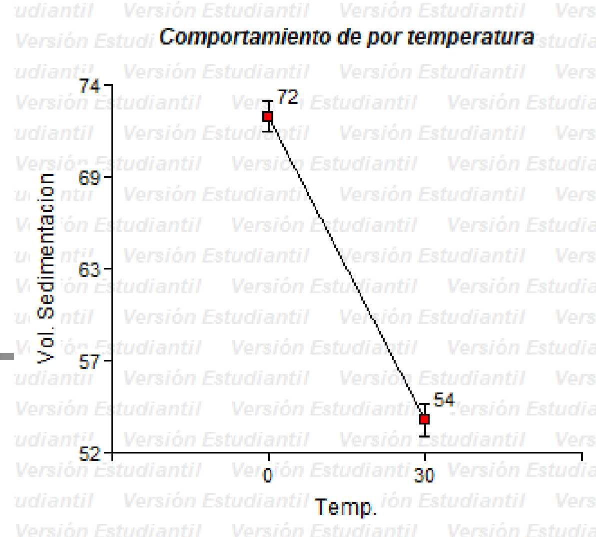
Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=4.37566

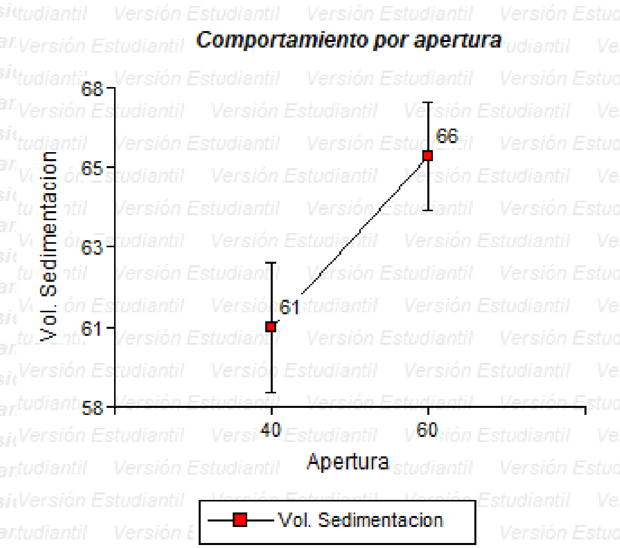
Error: 14.3556 gl: 60

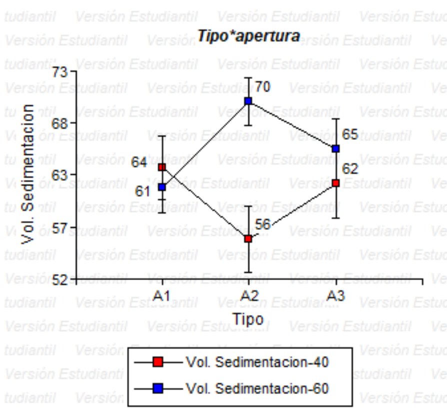
Tipo	Apertura	Temp.	Medias	n	E.E.								
A2	60	0	77.17	6	1.55	A							
A3	60	0	75.33	6	1.55	A	B						
A3	40	0	73.00	6	1.55	A	B	C					
A1	40	0	72.67	6	1.55		B	C					
A1	60	0	69.33	6	1.55			C	D				
A2	40	0	66.83	6	1.55				D	E			
A2	60	30	63.17	6	1.55					E			
A3	60	30	55.33	6	1.55						F		
A1	40	30	54.33	6	1.55						F	G	
A1	60	30	53.50	6	1.55						F	G	
A3	40	30	50.67	6	1.55							G	
A2	40	30	45.67	6	1.55								H

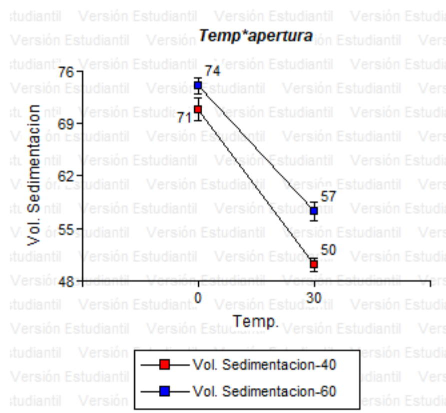
Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

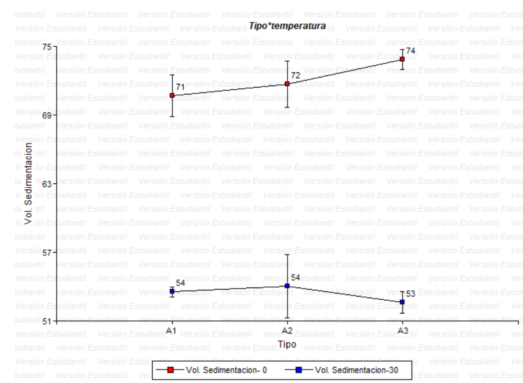

Comportamiento de Tipo de Suspensión
Vol. Sedimentacion
66
65
63
62
60
62
63
64
A1
A2
A3
Tipo
Vol. Sedimentacion

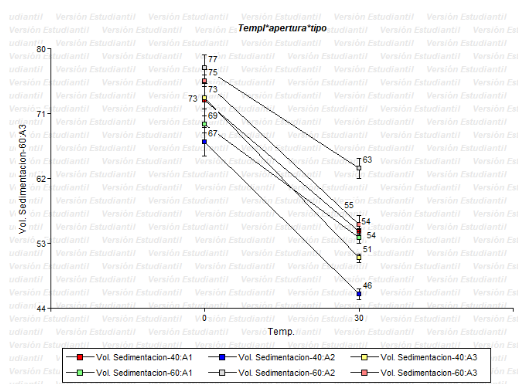

Comportamiento de por temperatura
Vol. Sedimentacion
74
69
63
57
52
72
54
0
30
Temp.


Comportamiento por apertura
Vol. Sedimentacion
68
65
63
61
58
66
61
40
60
Apertura
Vol. Sedimentacion


Tipo*apertura
Vol. Sedimentacion
73
68
63
57
52
64
61
70
56
65
62
A1
A2
A3
Tipo
Vol. Sedimentacion-40
Vol. Sedimentacion-60


Temp*apertura
Vol. Sedimentacion
76
69
62
55
48
74
71
57
50
0
30
Temp.
Vol. Sedimentacion-40
Vol. Sedimentacion-60


Tipo*temperatura
Vol. Sedimentacion
75
69
63
57
51
71
72
74
54
54
53
A1
A2
A3
Tipo
Vol. Sedimentacion- 0
Vol. Sedimentacion-30


Templ*apertura*tipo
Vol. Sedimentacion-60:A3
80
71
62
53
44
77
75
73
73
69
67
63
55
54
54
51
46
0
30
Temp.
Vol. Sedimentacion-40:A1
Vol. Sedimentacion-40:A2
Vol. Sedimentacion-40:A3
Vol. Sedimentacion-60:A1
Vol. Sedimentacion-60:A2
Vol. Sedimentacion-60:A3

Diseño factorial general

- Lo dicho para los dos diseños factoriales con 2 y 3 factores puede extenderse para cuando se tienen más factores.
- Considere *f* factores *A*, *B*, *C*, …, *K* con niveles *a*, *b*, *c*, …, *k*, respectivamente.
- Con estos niveles y factores se puede construir el diseño factorial general $a \times b \times \ldots \times k$, que consiste de $a \times b \times \ldots \times k$ tratamientos o puntos de prueba.
- Con este diseño se pueden estudiar *f* efectos principales, $f(f-1)/2$ interacciones dobles, $f(f-1)(f-2)/(3 \times 2)$ interacciones triples, y así sucesivamente hasta la única interacción de los *f* factores (*ABC … K*).
- El número de interacciones de *m* factores se hace determinando las combinaciones de *f efectos* en *m factores*

$$\left(\binom{f}{m} = \frac{f!}{f!(m!(f-m)!} \right)$$

ANOVA para el diseño factorial general a x b x c x...x k

FV	SC	GL
$Ef.\ A$	SC_A	$a-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Ef.\ K$	SC_K	$k-1$
$Ef.\ AB$	SC_{AB}	$(a-1)(b-1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Ef.\ K(K-1)$	$SC_{(K-1)K}$	$(l-1)(k-1)$
$Ef.\ ABC$	SC_{ABC}	$(a-1)(b-1)(c-1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Ef.\ (K-2)(K-1)K$	$SC_{(K-2)(K-1)K}$	$(m-1)(l-1)(k-1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Ef.\ AB \cdots K$	$SC_{AB \cdots K}$	$(a-1)(b-1) \cdots (k-1)$
Error	SC_E	$abc \cdots k(n-1)$
Total	SC_T	$(abc \cdots kn)-1$

Algunas consideraciones

- Con excepción del factorial 2^2, en un factorial completo prácticamente nunca interesan todos sus posibles efectos, puesto que en términos generales sólo algunos de ellos están activos.
- El *principio de Pareto*, que en este contexto también se llama principio de *esparcidad de efectos*, dice que la mayoría de la variabilidad observada se debe a unos pocos de los efectos posibles; por lo común se debe a algunos efectos principales e interacciones dobles.

Modelos de efectos aleatorios.

- Los modelos de efectos que se han estudiado son *modelos de efectos* o *factores fijos.*
- Los niveles de prueba en un factor son todos los niveles disponibles para éste.
- Con factores fijos, las conclusiones obtenidas sólo son válidas para los niveles de prueba que se estudian en el experimento.
- Cuando los niveles de prueba utilizados en un factor son una muestra aleatoria de la población de niveles para ese factor, se considera que se tienen factores aleatorios.
- Esto conlleva la necesidad de considerar la incertidumbre asociada con la elección aleatoria de los niveles de prueba, es decir, es preciso estimar la varianza del factor aleatorio y probar si su contribución a la variabilidad total es significativa

Dos factores aleatorios

- Sea un experimento de dos factores aleatorios *A* y *B*, de los cuales se prueban *a* y *b* niveles elegidos de una población grande de niveles, entonces si los *a* \ *b* tratamientos se replican *n* veces, el modelo de efectos aleatorios está dado por:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}; \; i = 1, 2, \ldots, a; \; j = 1, 2, \ldots, b; \; k = 1, 2, \ldots, n$$

- En este caso los errores ε_{ijk} pueden suponerse que siguen una distribución normal $N(0, \sigma^2)$ y que son independientes entre sí.
- Aunque el modelo similar al de efectos fijos, el hecho de que los efectos sean aleatorios implica que no tiene sentido probar hipótesis directamente sobre tales efectos (medias), sino que ahora el interés se enfoca en estudiar la varianza de dichos efectos. $\mathrm{Var}(Y_{ijk}) = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2$
- Donde las varianzas corresponden a la contribución de cada efecto a la variación total.
- Las hipótesis de interés son:

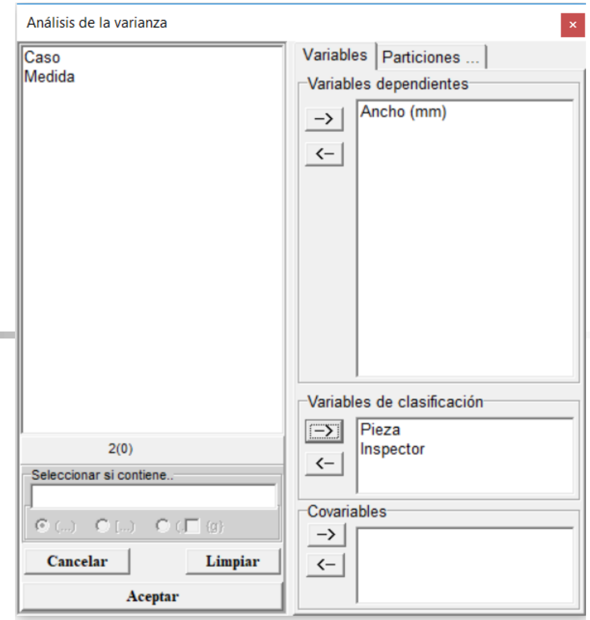
$$H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0, \; H_0 : \sigma_\beta^2 = 0 \text{ y } H_0 : \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0.$$

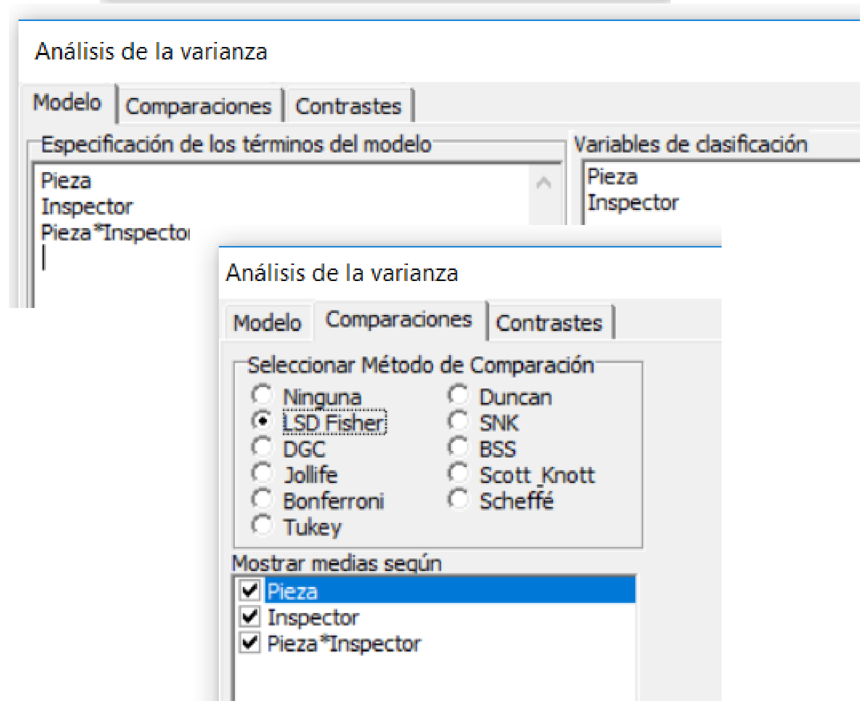
Ejemplo.. Experimento R&R

- En una compañía dedicada a la fabricación de bombas y válvulas, algunos componentes críticos tienen tolerancias muy estrechas que son difíciles de cumplir. De aquí que sea necesario estimar el error de medición con el fin de ver la posibilidad de reducirlo para cumplir con las especificaciones. El ancho de una pieza particular es una característica de calidad crítica, cuyas especificaciones son 69 ± 0.4 mm. Se eligen dos inspectores al azar y siete piezas para correr un experimento, a fin de estimar la contribución de los inspectores, de las piezas y del error aleatorio (repetibilidad) en la variabilidad total observada. Cada inspector mide dos veces cada pieza. Sean los inspectores el factor *A* y las piezas el factor *B*, el primero con dos niveles y el segundo con siete niveles, en ambos casos seleccionados al azar.

Número de piezas	Inspector *Z*		Inspector *W*	
	1	2	1	2
1	69.38	69.60	69.62	69.52
2	39.72	69.80	69.78	69.90
3	69.58	69.70	69.70	69.92
4	69.50	69.50	69.46	69.50
5	69.48	69.40	69.50	69.42
6	69.56	69.40	69.68	69.64
7	69.90	70.02	69.94	69.88

Caso	Pieza	Inspector	Medida	Ancho (mm)
1	1	Inspector Z	1	69.38
2	2	Inspector Z	1	69.72
3	3	Inspector Z	1	69.58
4	4	Inspector Z	1	69.50
5	5	Inspector Z	1	69.48
6	6	Inspector Z	1	69.86
7	7	Inspector Z	1	69.90
8	1	Inspector Z	2	69.60
9	2	Inspector Z	2	69.80
10	3	Inspector Z	2	69.70
11	4	Inspector Z	2	69.50
12	5	Inspector Z	2	69.40
13	6	Inspector Z	2	69.40
14	7	Inspector Z	2	70.02
15	1	Inspector W	1	69.62
16	2	Inspector W	1	69.78
17	3	Inspector W	1	69.70
18	4	Inspector W	1	69.46
19	5	Inspector W	1	69.50
20	6	Inspector W	1	69.68
21	7	Inspector W	1	69.94
22	1	Inspector W	2	69.52
23	2	Inspector W	2	69.90
24	3	Inspector W	2	69.92
25	4	Inspector W	2	69.50
26	5	Inspector W	2	69.42
27	6	Inspector W	2	69.64
28	7	Inspector W	2	69.88





Análisis de la varianza

Variable	N	R²	R² Aj	CV
Ancho (mm)	28	0.81	0.63	0.17

Cuadro de Análisis de la Varianza (SC tipo III)

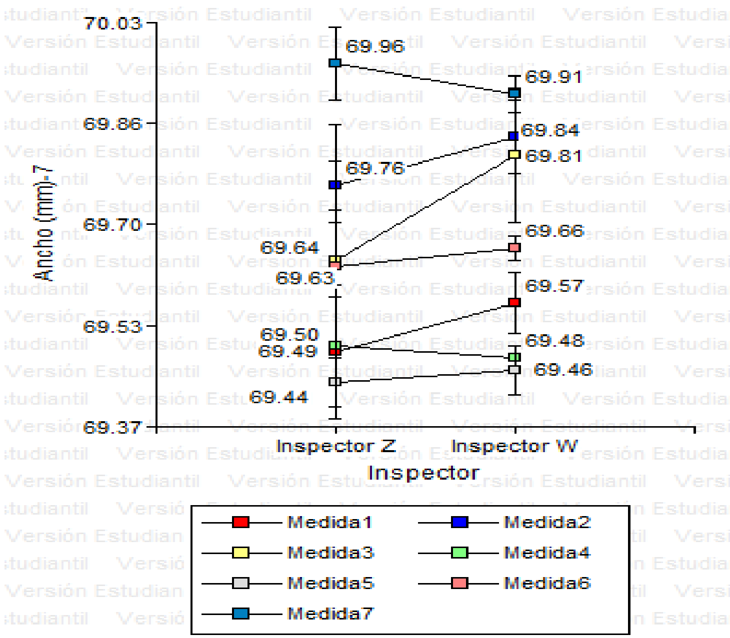
F.V.	SC	gl	CM	F	p-valor
Modelo.	0.80	13	0.06	4.46	0.0045
Pieza	0.76	6	0.13	9.12	0.0004
Inspector	0.01	1	0.01	0.99	0.3362
Pieza*Inspector	0.03	6	0.01	0.39	0.8751
Error	0.19	14	0.01		
Total	1.00	27			

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=0.17844

Error: 0.0138 gl: 14

Pieza	Medias	n	E.E.				
7	69.94	4	0.06	A			
2	69.80	4	0.06	A	B		
3	69.73	4	0.06		B		
6	69.65	4	0.06		B	C	
1	69.53	4	0.06			C	D
4	69.49	4	0.06			C	D
5	69.45	4	0.06				D

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)



Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=0.09538

Error: 0.0138 gl: 14

Inspector	Medias	n	E.E.	
Inspector W	69.68	14	0.03	A
Inspector Z	69.63	14	0.03	A

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=0.25235

Error: 0.0138 gl: 14

Pieza	Inspector	Medias	n	E.E.					
7	Inspector Z	69.96	2	0.08	A				
7	Inspector W	69.91	2	0.08	A	B			
2	Inspector W	69.84	2	0.08	A	B	C		
3	Inspector W	69.81	2	0.08	A	B	C	D	
2	Inspector Z	69.76	2	0.08	A	B	C	D	
6	Inspector W	69.66	2	0.08		B	C	D	E
3	Inspector Z	69.64	2	0.08			C	D	E
6	Inspector Z	69.63	2	0.08			C	D	E
1	Inspector W	69.57	2	0.08				D	E
4	Inspector Z	69.50	2	0.08					E
1	Inspector Z	69.49	2	0.08					E
4	Inspector W	69.48	2	0.08					E
5	Inspector W	69.46	2	0.08					E
5	Inspector Z	69.44	2	0.08					E

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)