Introducción a la Optimización Matemática

http://www.academia.utp.ac.pa/humberto-alvarez/metodos-de-optimizacion

Modelos de Optimización

- Un problema de optimización es, en general, un problema de decisión.
- Tienen como propósito seleccionar la mejor decisión de un número de posibles alternativas, sin tener que enumerar completamente todas ellas.
- La Teoría de Optimización es una rama de la matemática aplicada que formula y explica estos problemas

Tópicos en optimización: Programación Matemática

- Objetivo:
  - Encontrar el mejor punto que optimice un modelo económico
- Formulación matemática
  - Optimizar $y(\mathbf{x})$

    Sujeto a $f(\mathbf{x}) \geq 0 \ \forall$ i, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- Métodos:
  - Analíticos, Programación Geométrica, P. L., programación combinatoria, métodos heurísticos, métodos matemáticos discretos.

Tópicos en optimización: Métodos variacionales

- Objetivo:
  - Encontrar la mejor función que optimice el modelo económico
- Formulación matemática
  - Optimizar $I[y(x)] = \int F[y(x), y'(x)]dx$

    Sujeto a las restricciones algebraicas de integración o matemáticas en general
- Métodos:
  - Cálculo de variaciones, modelos continuos.

La teoría general de máximos y mínimos

- Problemas no restringidos
- Está dirigida a encontrar los puntos extremos de una función.
- Teoremas:
  - Una función que es continua en un dominio cerrado posee un valor máximo o mínimo en el interior del intervalo o en sus límites.
  - Una función continua alcanza un máximo o un mínimo en el interior de una región solo en los puntos donde su enésima derivada ya sea se hace cero (puntos estacionarios o de inflexión) o no existe (punto de discontinuidad).

Óptimos globales y locales

- Será óptimo local si tiene un máximo o mínimo en el intervalo [a, b]
- Será óptimo global si tiene un máximo o mínimo en el intervalo [-∞, ∞]
- Si el óptimo local es el global, se tiene una función con óptimo exacto.

Condiciones suficientes para el óptimo en una variable independiente

- Para una función continua $f(x)$, si:
  - $f'(x)\ \exists\ \forall\ x \in \Re$
  - X* es crítico si $f'(x^*) = 0$
  - $f''(x^*) = \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{mínimo} \\ < 0 \rightarrow \text{máximo} \\ = 0 \rightarrow \text{no hay definición} \end{cases}$
  - Si $f''(x^*) = 0$, se examinan n derivadas de orden superior hasta que $f^n(x^*) \neq 0$
  - Si n es par: $f^n(x^*) = \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{mínimo} \\ < 0 \rightarrow \text{máximo} \end{cases}$
  - Si es impar: punto de inflexión.

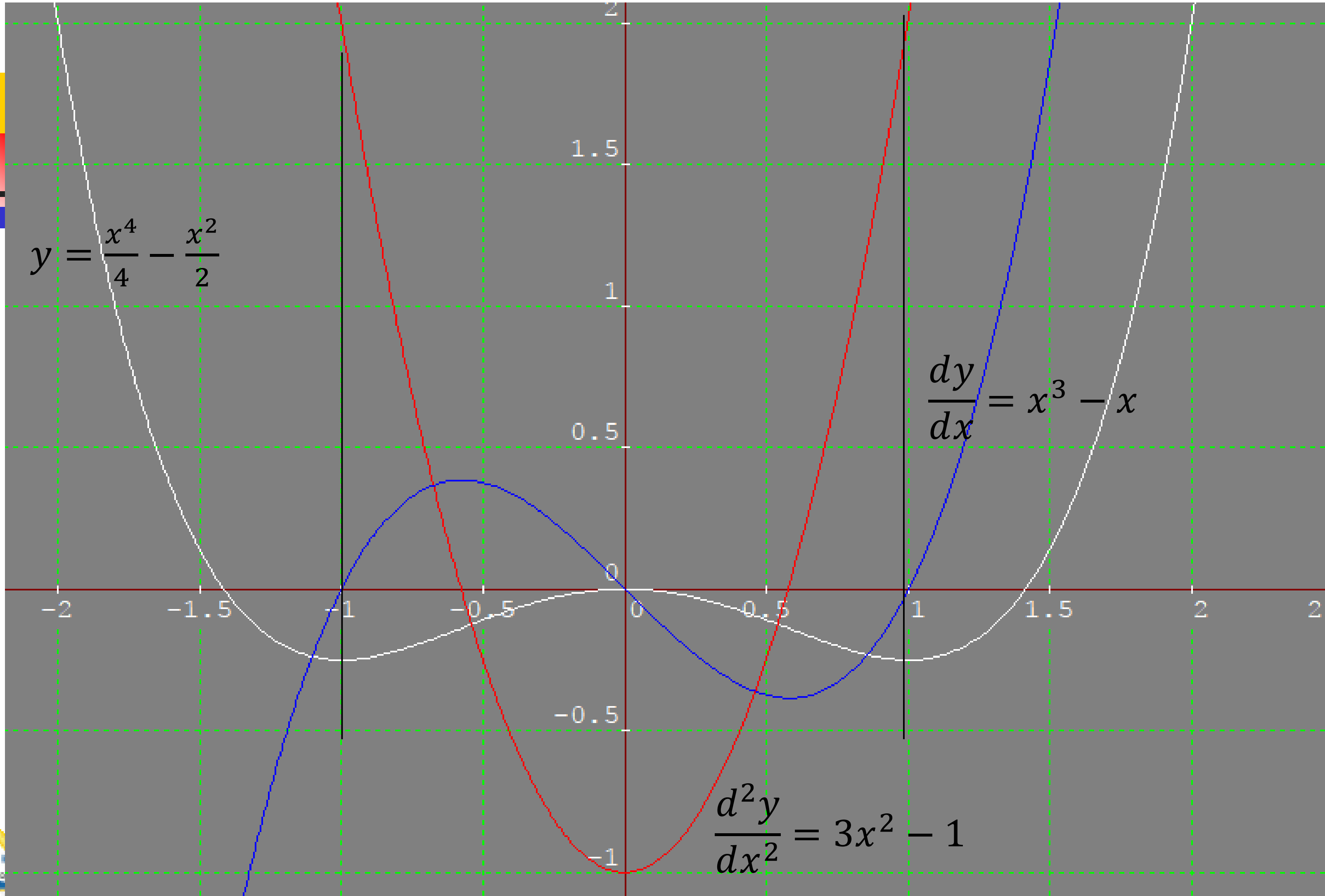
Ejemplo:

$$Maximizar\ y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3 - x = 0\ ; x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0, x = 1, x = -1$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^2 - 1 = 0\ ; x = 0, f''(0)$=-1 es max; $f''(\pm 1)$=2 es min



$y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$
$\frac{dy}{dx} = x^3 - x$
$\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^2 - 1$
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1

WolframAlpha computational knowledge engine

maximize x^4/4-x^2/2

Examples Random

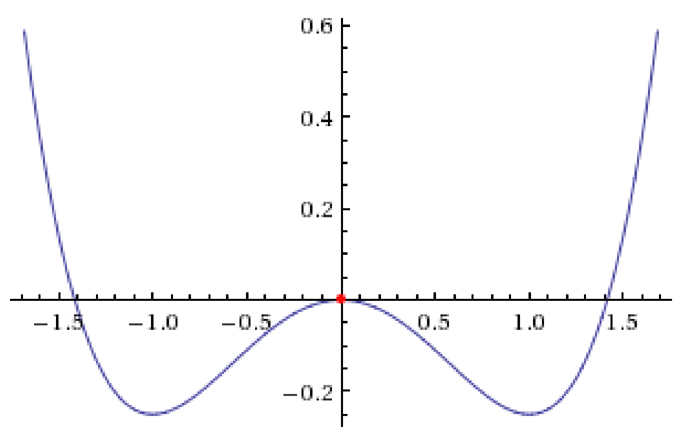
Input interpretation:

maximize	$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$

Local maximum:

$$\max\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right\} = 0 \text{ at } x = 0$$

Plot:



(x from −1.8 to 1.8)

minimize x^4/4-x^2/2

Examples Random

Input interpretation:

minimize	$\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$

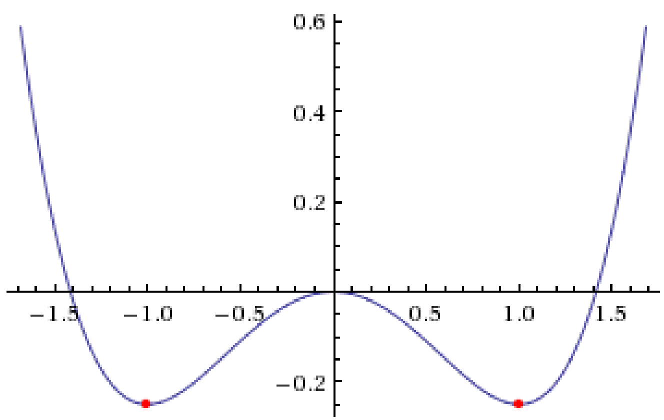
Global minima:

Approximate form

$$\min\left\{\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right\}=-\frac{1}{4} \text{ at } x=-1$$

$$\min\left\{\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right\}=-\frac{1}{4} \text{ at } x=1$$

Plot:



(x from −1.8 to 1.8)

Input interpretation:

extrema	$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$

Global maxima:

(no global maxima found)

Global minima:

Approximate form

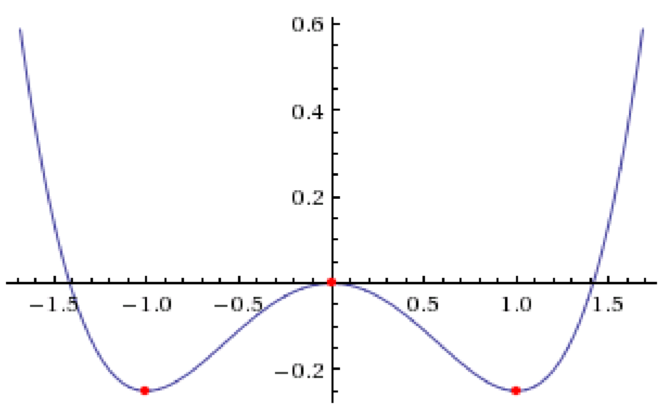
$$\min\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right\} = -\frac{1}{4} \text{ at } x = -1$$

$$\min\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right\} = -\frac{1}{4} \text{ at } x = 1$$

Local maximum:

$$\max\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right\} = 0 \text{ at } x = 0$$

Plot:



(x from −1.8 to 1.8)

Ejemplo:

- El precio de cierto producto está definido por la siguiente ecuación:

$$p = \frac{80 - q}{4}$$

- donde p es el precio y q es la cantidad vendida.
- Encontrar la q que genera un ingreso máximo, donde el ingreso es pq.

P'' = -1/2
q → hace que el ingreso sea máximo

WolframAlpha computational knowledge engine

maximize x^4/4-x^2/2

Examples Random

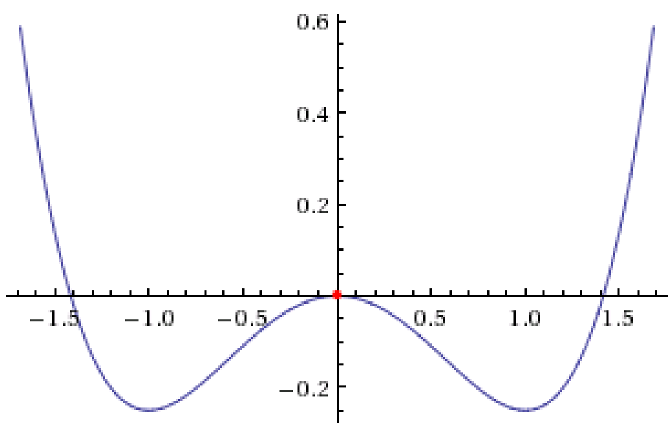
Input interpretation:

maximize	$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$

Local maximum:

$$\max\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right\} = 0 \text{ at } x = 0$$

Plot:



(x from −1.8 to 1.8)

WolframAlpha computational... knowledge engine

minimize x^4/4-x^2/2

Examples Random

Input interpretation:

minimize	$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$

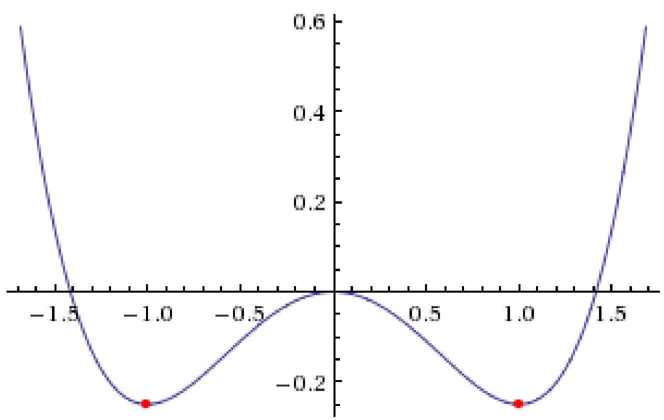
Global minima:

Approximate form

$$\min\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right\} = -\frac{1}{4} \text{ at } x = -1$$

$$\min\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right\} = -\frac{1}{4} \text{ at } x = 1$$

Plot:



(x from −1.8 to 1.8)

Input interpretation:

extrema	$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$

Global maxima:

(no global maxima found)

Global minima:

Approximate form

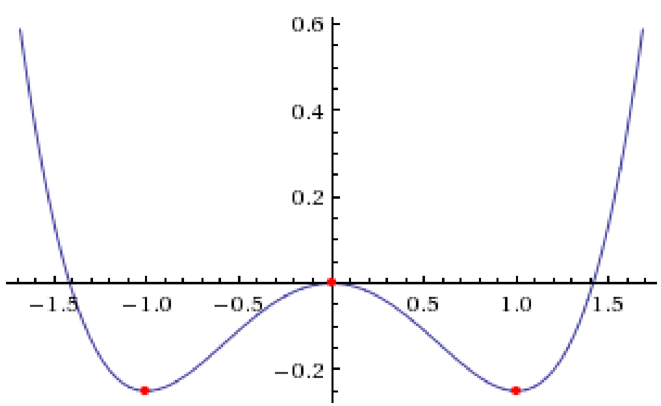
$$\min\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right\} = -\frac{1}{4} \text{ at } x = -1$$

$$\min\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right\} = -\frac{1}{4} \text{ at } x = 1$$

Local maximum:

$$\max\left\{\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right\} = 0 \text{ at } x = 0$$

Plot:



(x from −1.8 to 1.8)

En el caso de dos variables

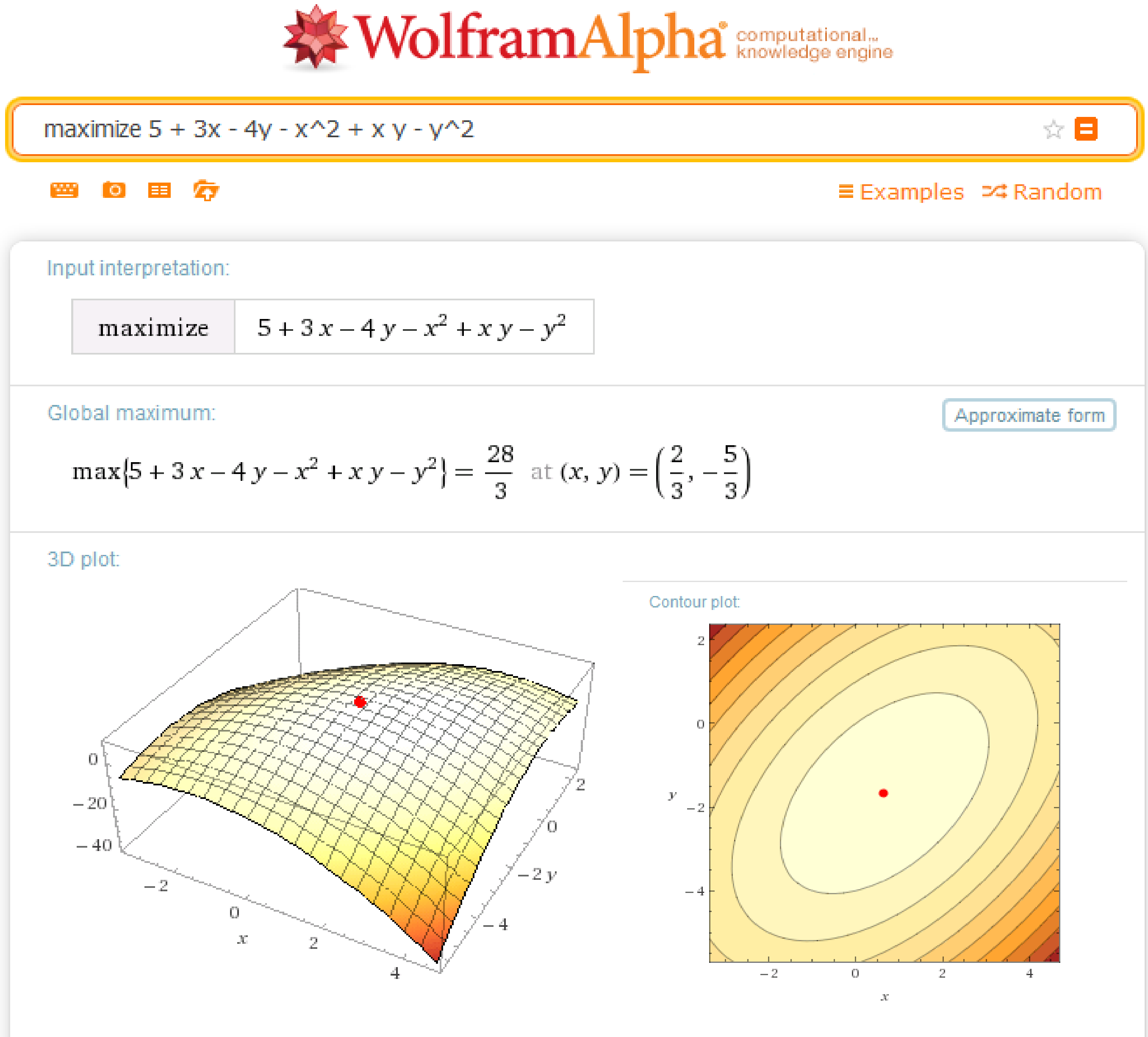
- Si $z = f(x, y)$ tiene un máximo o mínimo relativo en (x^*, y^*) y si $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ están definidos en los alrededores de (x^*, y^*), entonces
- (x^*, y^*) serán un punto crítico de $f(x, y)$ si son solución del sistema:

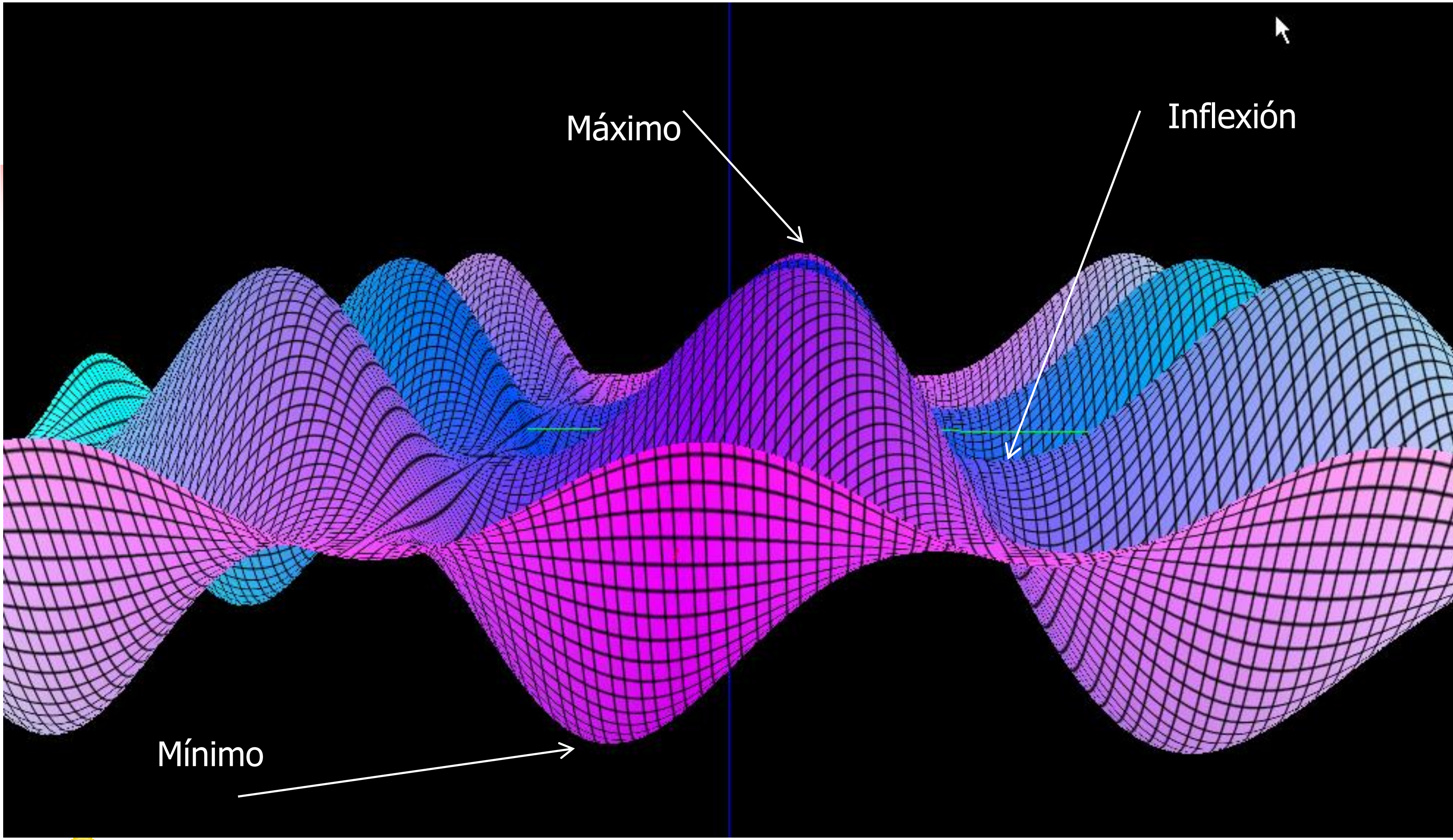
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

- Sea $D(x, y) = f''_x(x, y)\, f''_y(x,y) - [f'_{xy}(x, y)]^2$
- Entonces si:

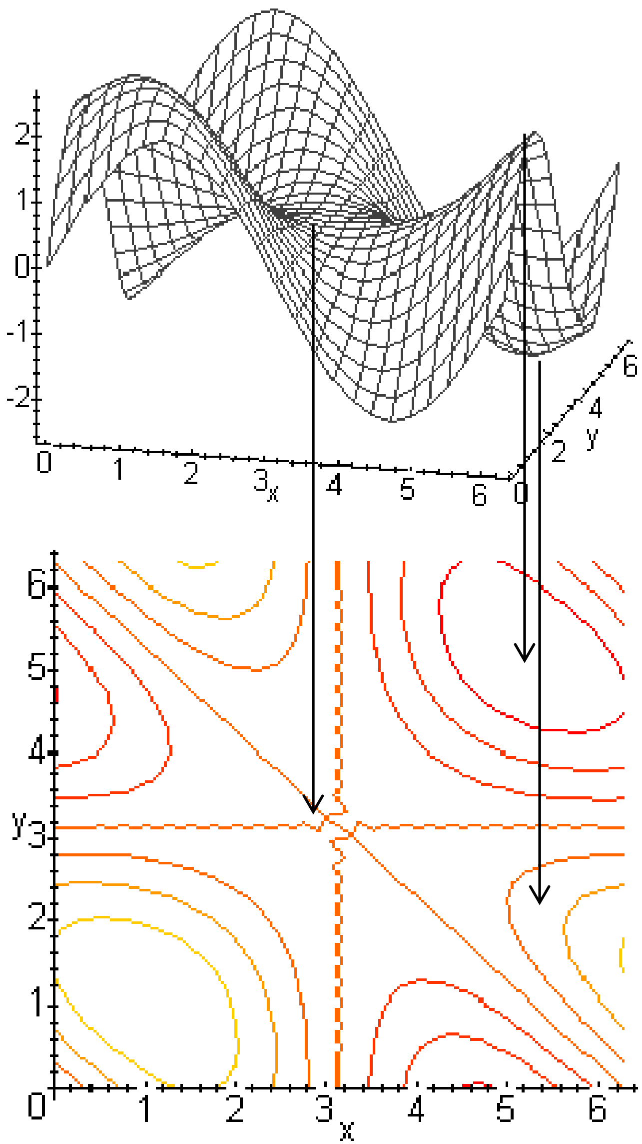
$$D(x^*, y^*) = \begin{cases} > 0 \text{ y } f''_x(x^*, y^*) < 0, f(x, y) \text{ tiene un máximo en } x^*, y^* \\ > 0 \text{ y } f''_x(x^*, y^*) > 0, f(x, y) \text{ tiene un mínimo en } x^*, y^* \\ < 0\ f(x, y), x^*, y^* \text{ es punto de inflexión} \\ = 0\ f(x, y), \text{ hay que hacer un análisis adicional} \end{cases}$$

$$\max y = 5 + 3x - 4y - x^2 + xy - y^2$$





$$f(x,y) = seno(x) + seno(y) + seno(x+y)$$



2
1
0
-1
-2
0
1
2
3
x
4
5
6
0
2
4
y
6
6
5
4
y
3
2
1
0
1
2
3
x
4
5
6

El problema general de optimización: el problema no lineal con restricciones

- Maximizar $f(x)$
- Sujeto a:
  - $g_i(x) \leq c_i \; i = 1, \ldots, m$
- Donde f y g_i son funciones generales del parámetro $x \in \Re^n \geq 0$
- Cuando f es convexa, g_i cóncava, el problema es un problema de programación convexa

Condiciones de Kuhn-Tucker

- A fin de que el problema tenga solución óptima, debe cumplir, como condiciones necesarias las Condiciones de Kuhn-Tucker:
- Sea el Lagrangiano de la función de maximización dado por:

$$\mathcal{L} = f(\mathbf{x}) + \lambda_1(c_1 - g_1(\mathbf{x})) + \cdots + \lambda_m(c_m - g_m(\mathbf{x}))$$

- Este debe cumplir con las siguientes condiciones

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \leq 0 \qquad x_i \geq 0 \qquad x_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$$

$$g_j(\mathbf{x}) \leq c_j \qquad \lambda_j \geq 0 \qquad \lambda_j(c - g_j(\mathbf{x})) = 0$$

- Para todo i, j. En este caso λ_i es conocido como el coeficiente de Lagrange para el lagrangiano $\mathcal{L}$

Ejemplo:

- (Construcción de una caja con volumen máximo)
- Se quiere determinar las dimensiones de una caja rectangular de forma que contenga el mayor volumen posible utilizando para ello una cantidad fija de material.
- El problema en forma abstracta se podría plantear en los siguientes términos
- Sea V el volumen total y A el área total de las caras.
- Sean x, y, z el largo, ancho y espesor de la caja
- Entonces

  Maximizar Volumen de la caja

  sujeto a Área lateral fija

$$
\begin{aligned}
&Max\ V = xyz \\
&\text{sujeto a: } 2(xy + xz + yz) = A \\
&\qquad\qquad \forall x, y, z \geq 0 \\
&Max\ z = xyz - \lambda(A - 2(xy + xz + yz)) \\
&x, y, z \geq 0
\end{aligned}
$$

Si se asume que A = 20 cm^2

maximize xyz in 2(xy+xz+yz)=20, x>=0, y>=0, z>=0

Extended Keyboard Upload Examples Random

Input interpretation:

maximize	function	$x\,y\,z$
	domain	$2\,(x\,y + x\,z + y\,z) = 20 \land x \geq 0 \land y \geq 0 \land z \geq 0$

$e_1 \land e_2 \land \ldots$ is the logical AND function

Open code

Global maximum: Exact form More digits

$\max\{x\,y\,z \mid 2\,(x\,y + x\,z + y\,z) = 20 \land x \geq 0 \land y \geq 0 \land z \geq 0\} \approx 6.08581$ at $(x, y, z) \approx (1.82574, 1.82574, 1.82574)$

Download Page

POWERED BY THE **WOLFRAM LANGUAGE**

Ejemplo

- Max Z $=3x + 5y$
- Sujeto a:

$x \leq 4$

$9x^2 + 5y^2 \leq 216$

$x , y \geq 0$

maximize 3x + 5y in x <= 4, 9x^2 + 5y^2 <=216

Examples Random

Input interpretation:

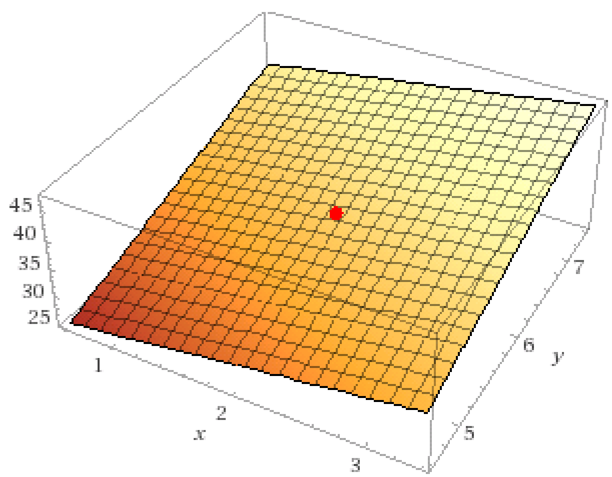
maximize	function	$3x+5y$
	domain	$x \le 4 \bigwedge 9x^2+5y^2 \le 216$

$e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots$ is the logical AND function

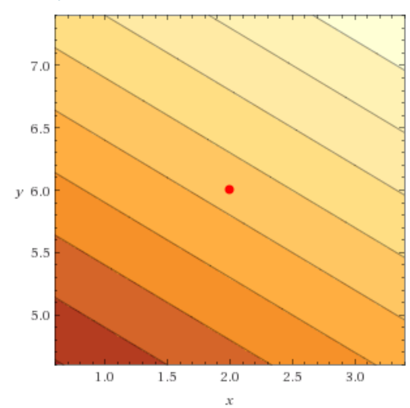
Global maximum:

$$\max\{3x+5y \mid x \le 4 \bigwedge 9x^2+5y^2 \le 216\} = 36 \text{ at } (x, y) = (2, 6)$$

3D plot:



Contour plot:



AMPL

Model E:\models\nonlinear_a.mod

```
# type your model here...
var x>=0;
var y>=0;
maximize z: 3*x + 5*y;
subject to
c1:x<=4;
c2:9*x^2 + 5*y^2 <= 216;
option solver cplex;
solve;
display z, x, y;
```

Command interface

```
ampl: splay z, x, y;data;# Type data here or open a data file...solve;
reset;# type your model here...var x>=0;var y>=0;maximize z: 3

== 9 ================
reset;
# type your model here...
var x>=0;
var y>=0;
maximize z: 3*x + 5*y;
subject to
c1:x<=4;
c2:9*x^2 + 5*y^2 <= 216;
option solver cplex;
solve;
display z, x, y;
data;
# Type data here or open a data file...
solve;


Presolve eliminates 1 constraint.
Adjusted problem:
2 variables, all nonlinear
1 constraint, all nonlinear; 2 linear nonzeros
1 linear objective; 2 nonzeros.
CPLEX 12.6.0.0: ••••••••••••••••CPLEX 12.6.0.0: optimal soluti
10 barrier iterations
```

```
Presolve eliminates 1 constraint.
Adjusted problem:
2 variables, all nonlinear
1 constraint, all nonlinear; 2 linear nonzeros
1 linear objective; 2 nonzeros.
CPLEX 12.6.0.0: ••••••••••••••••••CPLEX 12.6.0.0: optimal solution; objective 35.99999994
10 barrier iterations
No basis.
z = 36
x = 1.99999
y = 6.00001
CPLEX 12.6.0.0: ••••••••••••••••••CPLEX 12.6.0.0: optimal solution; objective 35.99999994
10 barrier iterations
No basis.
```

.0: optimal soluti

Ejemplo

- Max $Z = 126x - 9x^2 + 182y - 13y^2$
- Sujeto a

$$
\begin{aligned}
x \qquad\qquad &\leq 4 \\
2y &\leq 12 \\
3x + 2y &\leq 18 \\
x, y &\geq 0
\end{aligned}
$$

Maximize 126x - 9x^2+ 182y- 13y^2 in x<=4, 2y<=12,3x+2y<=18

Examples Random

Assuming "y" is a variable | Use as a unit instead

Input interpretation:

maximize	function	$126\,x - 9\,x^2 + 182\,y - 13\,y^2$
	domain	$x \le 4 \wedge 2\,y \le 12 \wedge 3\,x + 2\,y \le 18$

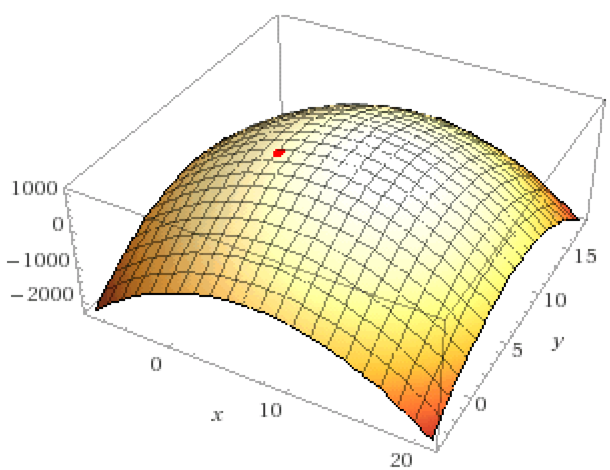
$e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots$ is the logical AND function

Global maximum:

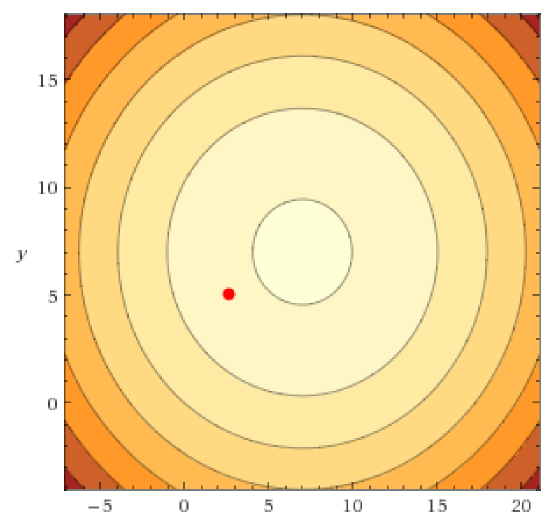
Approximate form

$$\max\{126\,x - 9\,x^2 + 182\,y - 13\,y^2 \mid x \le 4 \wedge 2\,y \le 12 \wedge 3\,x + 2\,y \le 18\} = 857 \text{ at } (x, y) = \left(\frac{8}{3}, 5\right)$$

3D plot:



Contour plot:



AMPL

Command interface

ampl: lisplay z,x,y;data;# Type data here or open a data file...solve;

reset;var x>=0;var y>=0;maximize z:126*x - 9*x^2+182*y-13*y^

Model E:\models\nonlinear1.mod

```
var x>=0;
var y>=0;
maximize z:126*x - 9*x^2+182*y-13*y^2;
subject to
c1: x <=4;
c2:2*y<=12;
c3: 3*x+2*y <= 18;
option solver minos;
solve;
display z,x,y;
```

```
Presolve eliminates 2 constraints.
Adjusted problem:
2 variables, all nonlinear
1 constraint, all linear; 2 nonzeros
1 nonlinear objective; 2 nonzeros.
MINOS 5.5: MINOS 5.5: optimal solution found.
4 iterations, objective 857
Nonlin evals: obj = 10, grad = 9.
z = 857
x = 2.66667
y = 5
MINOS 5.5: MINOS 5.5: optimal solution found.
0 iterations, objective 857
Nonlin evals: obj = 3, grad = 2.
```

```
== 1 ================
option show_stats 1; option display_eps .000001; print $version;
AMPL Student Version 19990818 (MS VC++ 6.0)

== 2 ================
reset;
var x>=0;
var y>=0;
maximize z:126*x - 9*x^2+182*y-13*y^2;
subject to
c1: x <=4;
c2:2*y<=12;
c3: 3*x+2*y <= 18;
option solver minos;
solve;
display z,x,y;
data;
# Type data here or open a data file...
solve;
```

transcript of AMPL session

```
solve eliminates 2 constraints.
usted problem:
ariables, all nonlinear
onstraint, all linear; 2 nonzeros
onlinear objective; 2 nonzeros.
OS 5.5: MINOS 5.5: optimal solution found.
terations, objective 857
lin evals: obj = 10, grad = 9.
 857
 2.66667
 5
OS 5.5: MINOS 5.5: optimal solution found.
terations, objective 857
lin evals: obj = 3, grad = 2.
```

Ejemplo

- Encontrar los puntos críticos

$f(x, y) = xy$

Sujeto a:

$x^2 + y^2 = 1$

Aplicando el Lagrangiano

$L = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

WolframAlpha computational knowledge engine

d/dx xy + zx^2+zy^2-z

Examples Random

Derivative: Step-by-step solution

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,y + z\,x^2 + z\,y^2 - z\right) = 2\,x\,z + y$$

d/dy xy + zx^2+zy^2-z

Examples Random

Derivative: Step-by-step solution

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x\,y + z\,x^2 + z\,y^2 - z\right) = x + 2\,y\,z$$

d/dz xy + zx^2+zy^2-z

Examples Random

Derivative: Step-by-step solution

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(x\,y + z\,x^2 + z\,y^2 - z\right) = x^2 + y^2 - 1$$

WolframAlpha computational knowledge engine

solve 2zx+y=0; x+2zy=0; x^2+y^2-1=0

Examples Random

Input interpretation:

	$2zx + y = 0$
solve	$x + 2zy = 0$
	$x^2 + y^2 - 1 = 0$

Results: More digits

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.707107 \text{ and } y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.707107 \text{ and } z = -\frac{1}{2} \approx -0.500000$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.707107 \text{ and } y = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707107 \text{ and } z = \frac{1}{2} \approx 0.500000$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707107 \text{ and } y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.707107 \text{ and } z = \frac{1}{2} \approx 0.500000$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707107 \text{ and } y = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707107 \text{ and } z = -\frac{1}{2} \approx -0.500000$$

Download page

POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE

Ejemplo 3

- Optimizar $z = xy$
- Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
x + y &\le 1 \\
-x + y &\le 1 \\
-x - y &\le 1 \\
x - y &\le 1 \\
x, y &\in \Re
\end{aligned}
$$

optimize y=xy in x+y<=1, -x+y<=1,-x-y<=1,x-y<=1

Examples Random

Input interpretation:

extrema	function	$x\,y$
	domain	$x+y\le 1 \land -x+y\le 1 \land -x-y\le 1 \land x-y\le 1$

$e_1 \land e_2 \land \ldots$ is the logical AND function

Global maxima:

Approximate form

$$\max\{x\,y \mid x+y\le 1 \land y-x\le 1 \land -x-y\le 1 \land x-y\le 1\} = \frac{1}{4} \text{ at } (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\max\{x\,y \mid x+y\le 1 \land y-x\le 1 \land -x-y\le 1 \land x-y\le 1\} = \frac{1}{4} \text{ at } (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Global minima:

Approximate form

$$\min\{x\,y \mid x+y\le 1 \land y-x\le 1 \land -x-y\le 1 \land x-y\le 1\} = -\frac{1}{4} \text{ at } (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

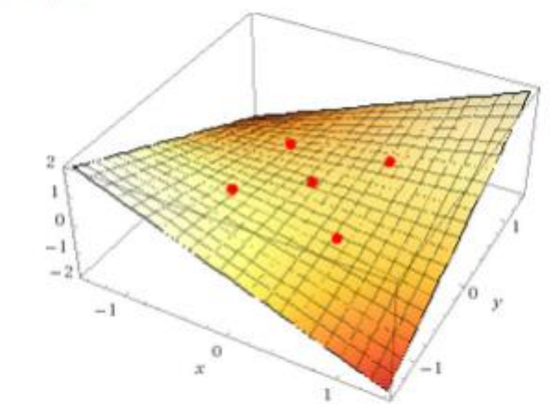
$$\min\{x\,y \mid x+y\le 1 \land y-x\le 1 \land -x-y\le 1 \land x-y\le 1\} = -\frac{1}{4} \text{ at } (x,y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Local minima:

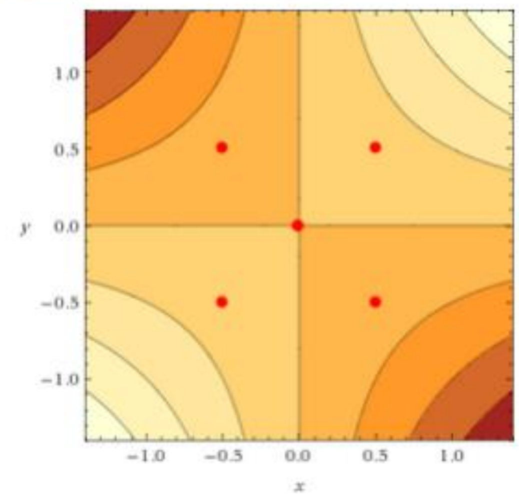
$$\min\{x\,y \mid x+y\le 1 \land y-x\le 1 \land -x-y\le 1 \land x-y\le 1\} = 0 \text{ at } (x,y) \approx (2.92876\times 10^{-6}, 3.12791\times 10^{-6})$$

$$\min\{x\,y \mid x+y\le 1 \land y-x\le 1 \land -x-y\le 1 \land x-y\le 1\} = 0 \text{ at } (x,y) \approx (-4.67435\times 10^{-6}, -4.67436\times 10^{-6})$$

3D plot:

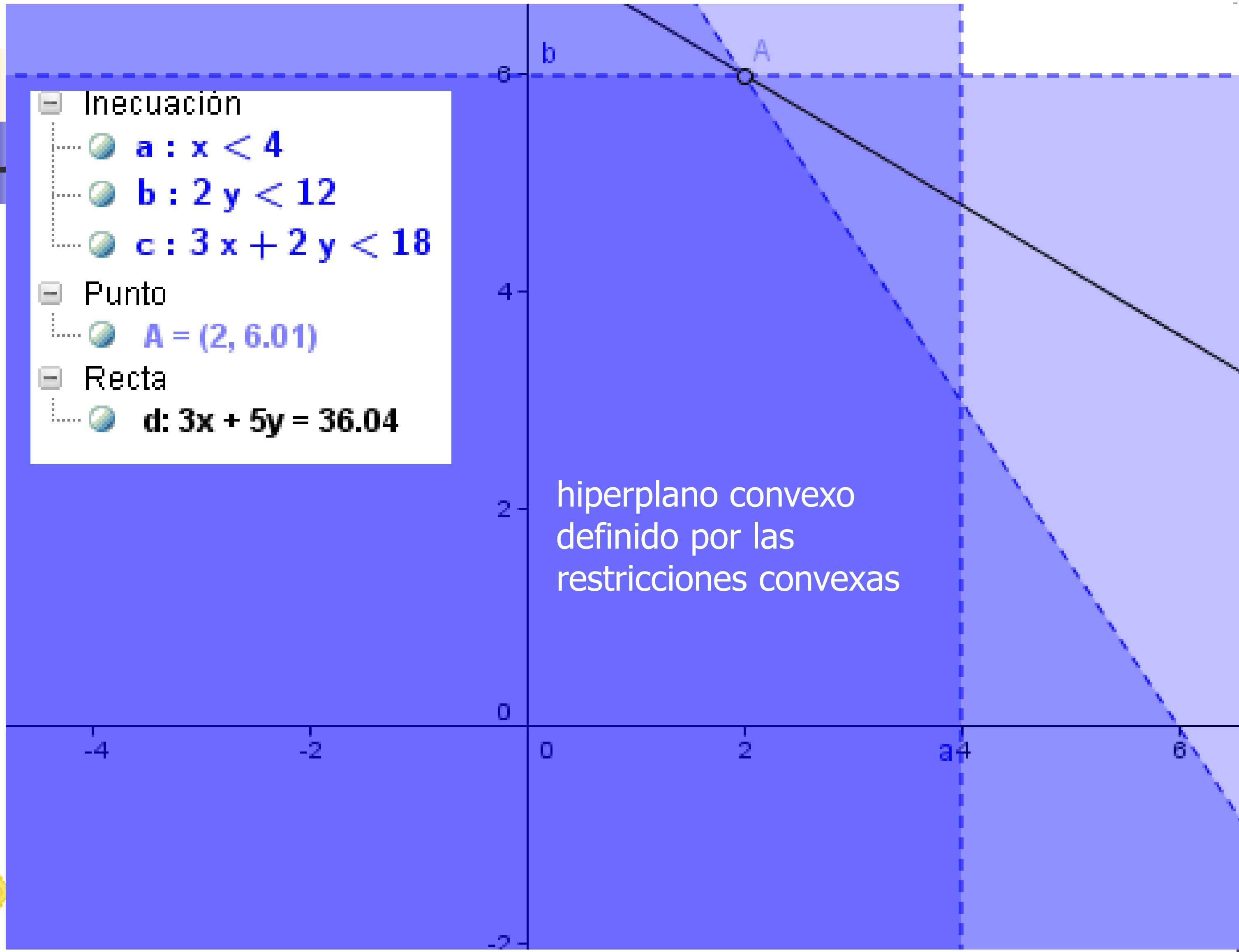


Contour plot:

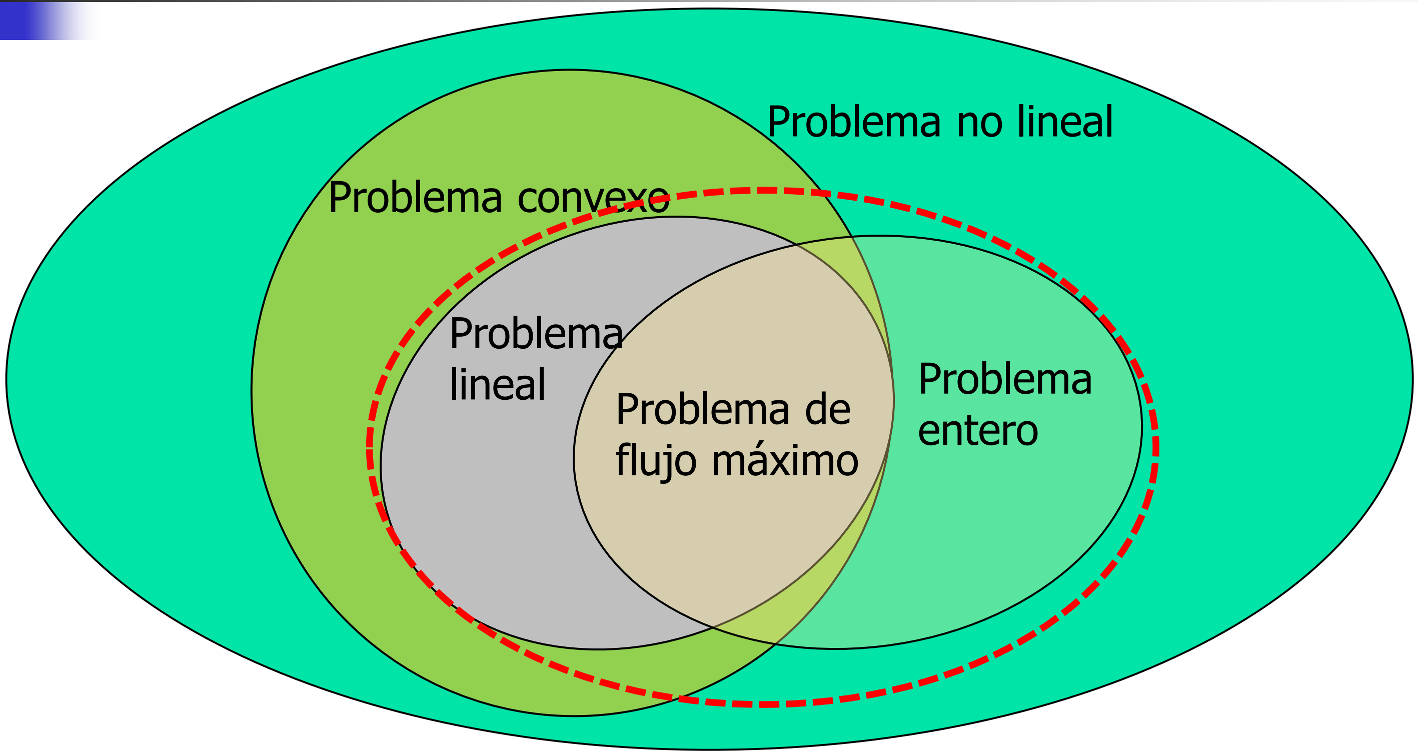


Programación lineal

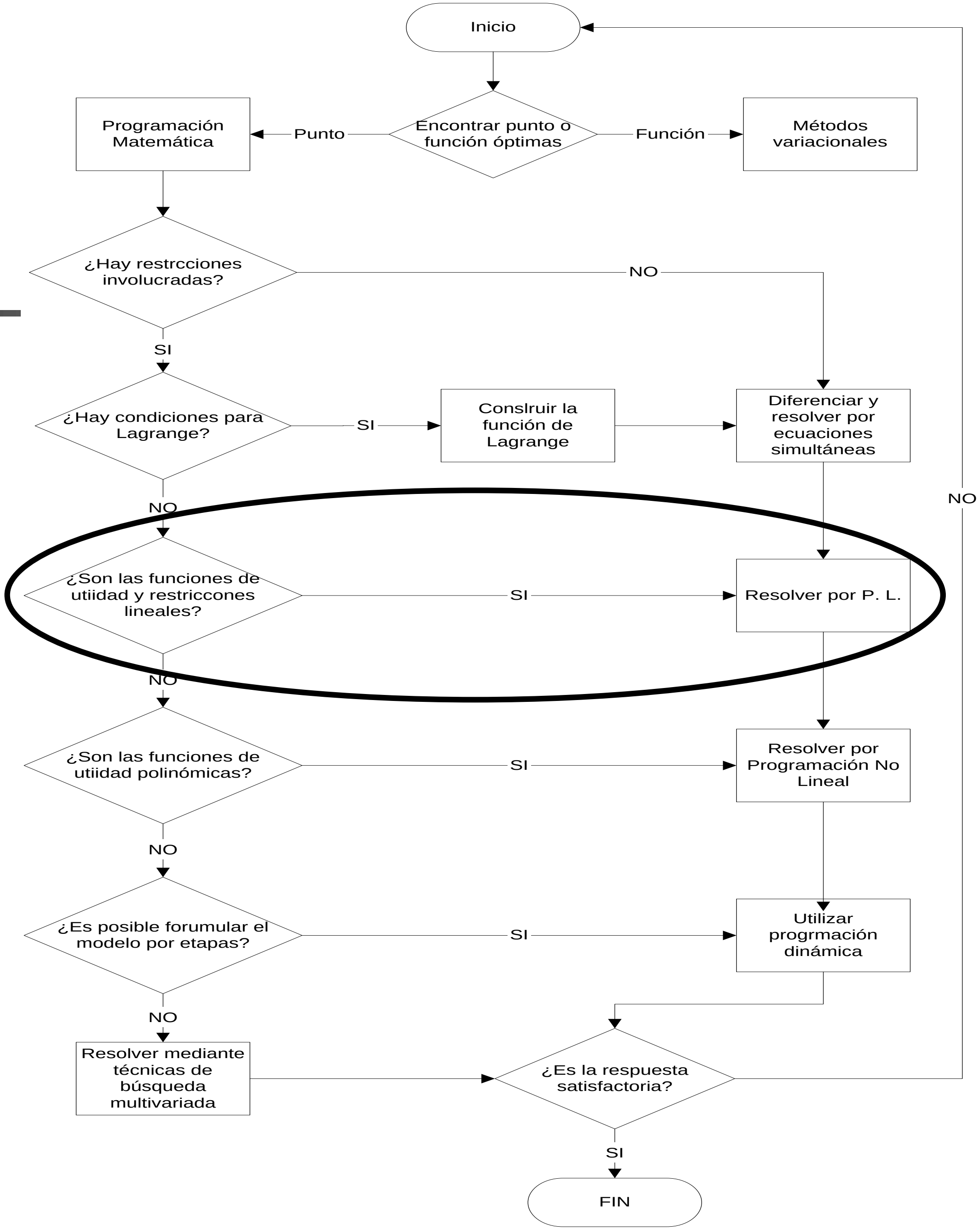
- Si f y g_i son lineales y convexas, se tiene un problema de programación lineal.
- Características:
  - Reduce sus soluciones a un número finito de éstas.
  - Es un problema combinatorio, ya que las posibles soluciones yacen en las intersecciones de un hiperplano convexo definido por las restricciones convexas.


Inecuación
a : x < 4
b : 2 y < 12
c : 3 x + 2 y < 18
Punto
A = (2, 6.01)
Recta
d: 3x + 5y = 36.04
A
b
a
-4
-2
0
2
4
6
-2
hiperplano convexo definido por las restricciones convexas

Contexto del curso



Métodos de solución



Solución del modelo de optimización

- Analítica
- Métodos numéricos
- Heurística
- Simulación
  - Discreta
  - Dinámica