



# Modelos y Toma de Decisiones

<http://www.academia.utp.ac.pa/humberto-alvarez/investigacion-de-operaciones-1>



# Toma de decisiones

- Keeney (2004) define decisiones como situaciones donde se reconce que hay que hacer una selección a conciencia de un curso de acción.
- Es la emisión de un juicio referente a lo que se debe hacer en una situación determinada, después de haber deliberado acerca de algunos cursos de acción específicos
  - Exploración: búsqueda y descubrimiento
  - Explotación: refinamiento e institucionalización



# El proceso de toma de decisiones



Exploración

Estar consciente de un problema o acción

Reconocer el problema y su definición

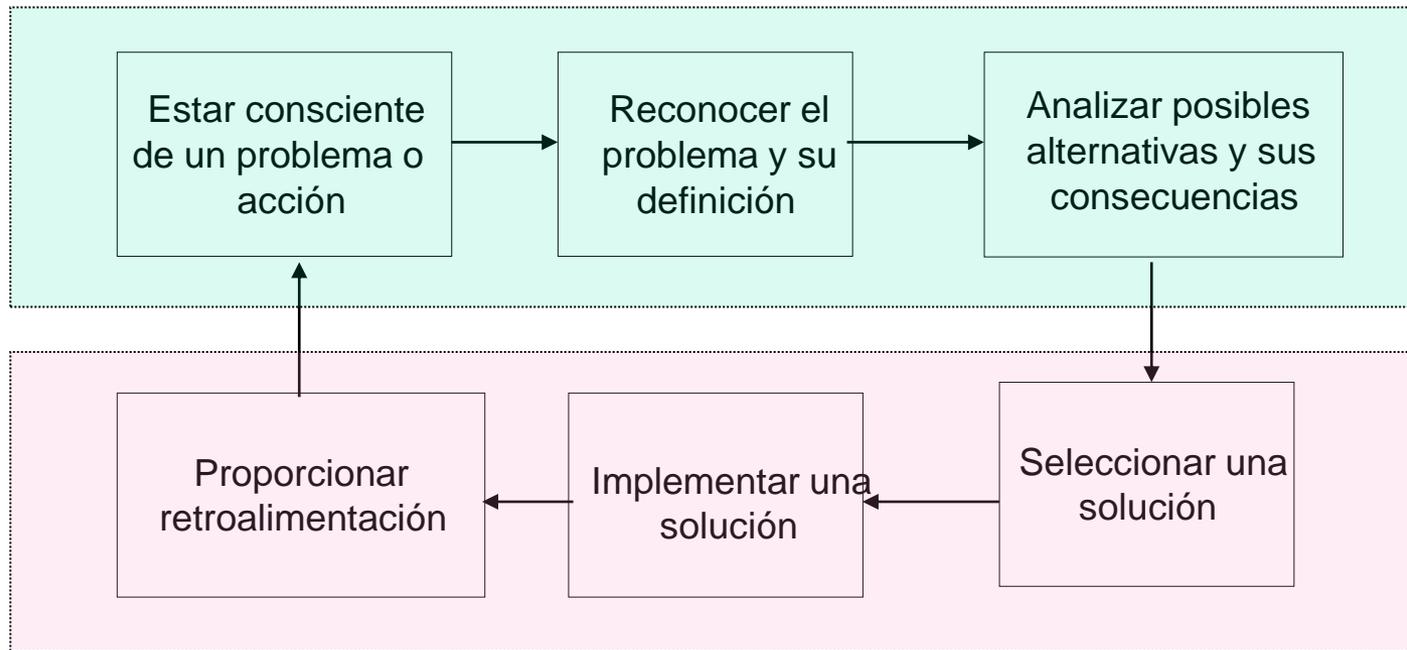
Analizar posibles alternativas y sus consecuencias

Explotación

Proporcionar retroalimentación

Implementar una solución

Seleccionar una solución



# Tipos de decisiones



## Decisiones no programadas. Efecto a largo plazo.

*Son soluciones específicas creadas por medio de un proceso no estructurado con el fin de tratar problemas que no son de rutina.*

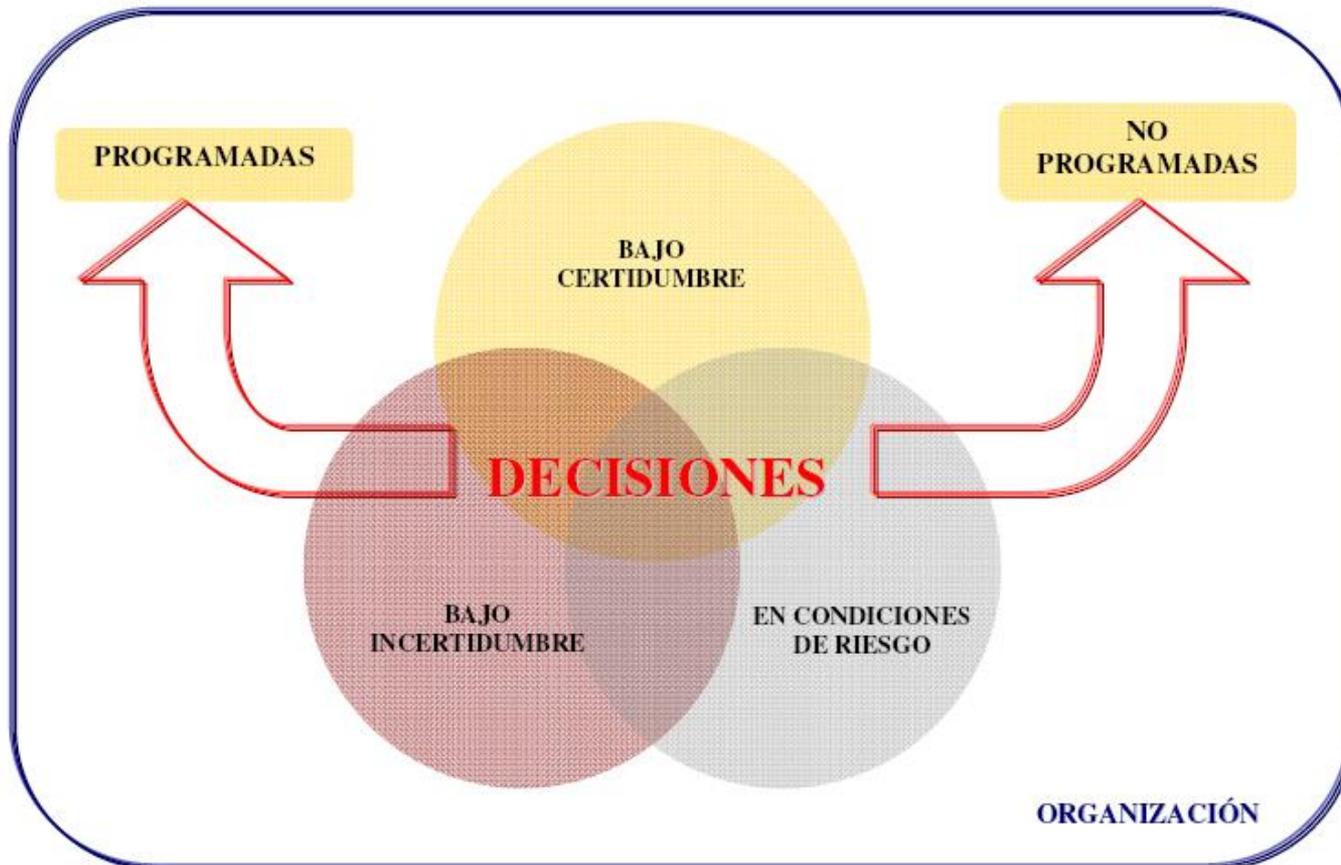


## Decisiones programadas. Efecto a corto plazo.

*Son aquellas tomadas como un hábito, regla o procedimiento; se aplican a problemas estructurados o rutinarios y en algunos casos son repetitivos y es posible definir, prever y analizar sus componentes.*



# Decisiones e incertidumbre



# Teorías que rigen la toma de decisiones



## ■ Teoría racional

- Se conocen las alternativas
- Se conocen las consecuencias
- Reglas para priorizar
- Reglas o criterios de decisión
- Solución óptima



# Teorías que rigen la toma de decisiones



## ■ Teoría de la racionalidad limitada

- Modifica la teoría racional
- Conocimiento limitado de alternativas
- Conocimiento limitado de consecuencias
- Reglas para priorizar
- Reglas o criterios de decisión
- Se busca satisfacer



# Enfoques que rigen la toma de decisiones



## ■ **Toma decisiones basada en reglas**

- Alternativa realista a las anteriores
- Decisiones definidas por procedimientos, estándares, reglas o políticas
- Toma decisiones basadas en los siguientes factores:
  - Identidad: decisiones basadas en situación particular
  - Situación: situaciones están clasificadas en categorías con reglas asociadas a la identidad
  - Relación: acciones específicas para atacar situaciones que estén de acuerdo a sus identidades en dichas situaciones



# Buenas decisiones vs. buenos resultados

- No necesariamente buenas decisiones resultan en buenos resultados
- El efecto de la incertidumbre puede afectar los resultados
- Riesgo vs. Certeza
- Minimizar riesgo minimizando sus elementos:
  - Humano
  - Ambiental



# ¿Qué es un modelo?

- Un modelo es una representación de un grupo de objetos o ideas de alguna manera diferente a la entidad misma
  - Es una abstracción de la realidad
  - Son ideales
  - No son exactos
- Su objetivo es el capacitar al analista para determinar como uno o varios cambios en las variables del sistema pueden afectarlo parcial o globalmente.



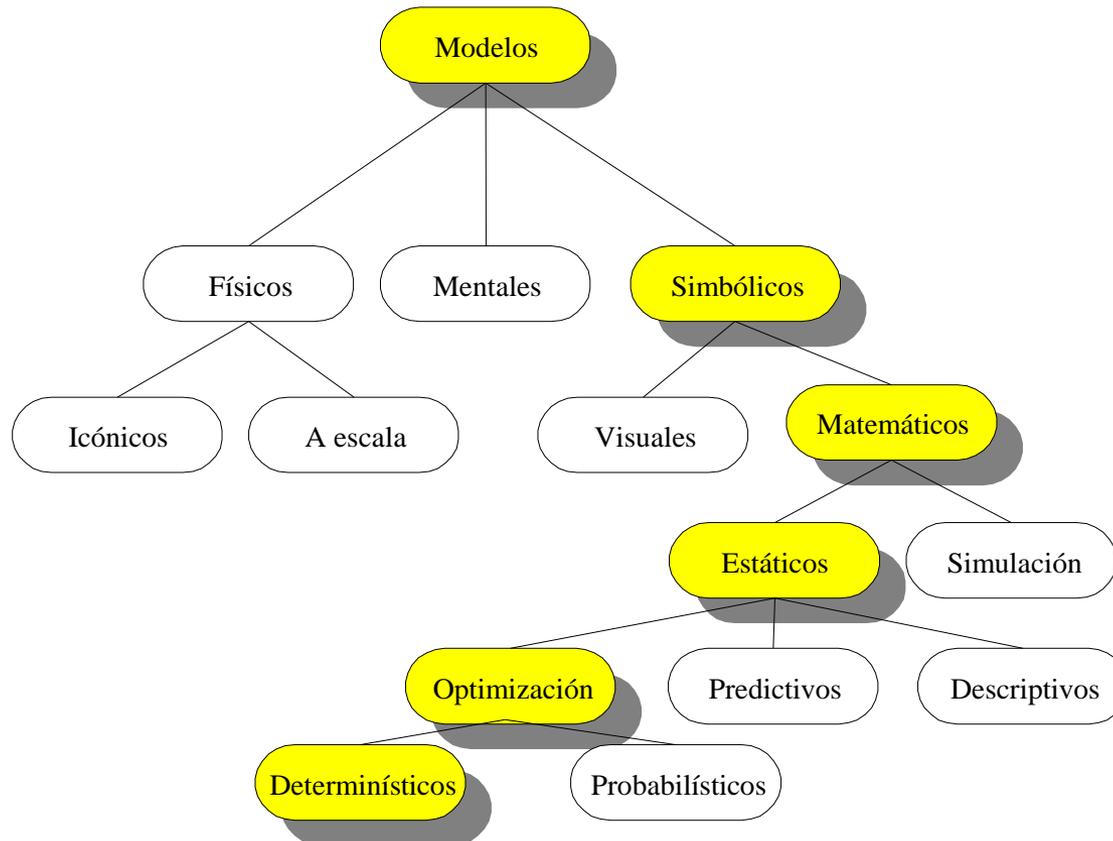
# Modelos y la toma de decisiones



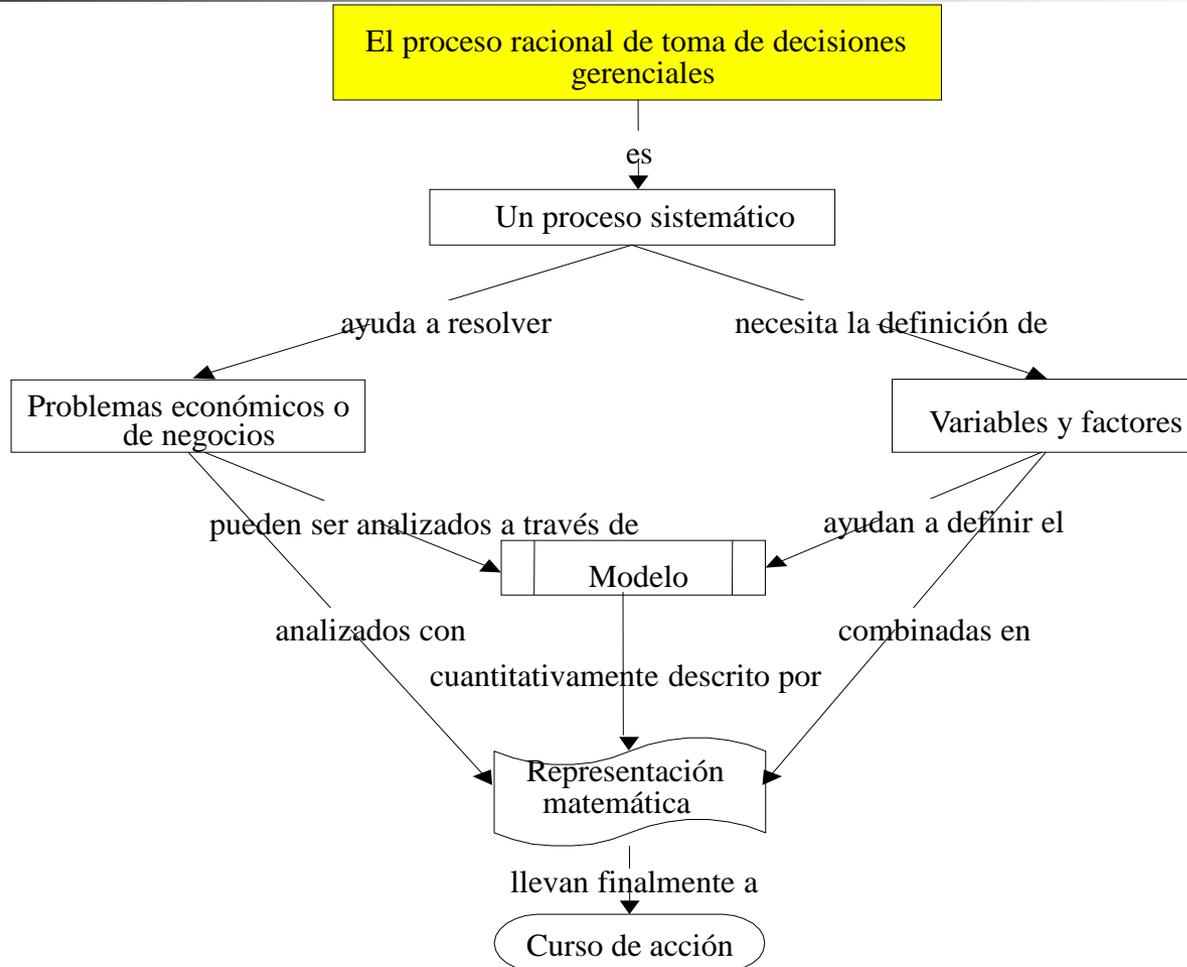
- El proceso racional de toma de decisiones utiliza modelos y reglas matemáticas
- Estos modelos y reglas permiten un proceso sistemático y ordenado de toma de decisiones
- La idea de utilizar modelos no es nueva: mapas, diagramas de flujo, gráficas y ecuaciones básicas apoyan el proceso racional de toma de decisiones



# Taxonomía



# Modelos y la toma de decisiones



# Modelos Matemáticos

- Son expresiones idealizadas expresadas en término de expresiones y símbolos matemáticos (Mckeon, 1980)
- Describen relaciones funcionales de la forma:  $Y = f(.)$



# Categorías de los Modelos



## Características

Categoría	Forma de $f(\cdot)$	Variable independiente	Técnica cuantitativa
Prescriptivo u optimización	Conocida, bien definida	Conocida o bajo el control de tomador de decisiones	Programación lineal, entera o no lineal; Redes; CPM; EOQ
Predictivo	Desconocida, mal definida	Conocida o bajo el control de tomador de decisiones	Regresión, Series de Tiempo, Análisis de Discriminante
Descriptivo	Conocida, bien definida	Desconocida o bajo incertidumbre	Simulación, Colas, PERT, Modelos de Inventarios



# Elementos de un modelo matemático



## ■ Variables

- **Independientes:** definen las condiciones del sistema en un momento dado
  - Endógenas
  - Exógenas
- **Dependientes:** definen la respuesta del modelo

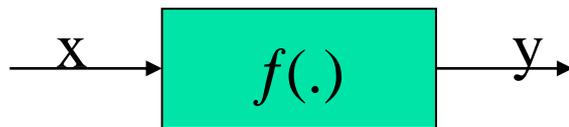
## ■ Relación matemática



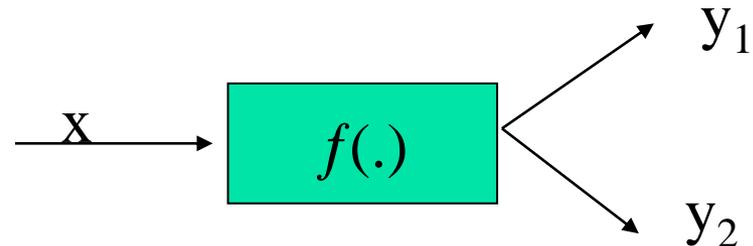
# Tipos de relación

- En función a su relación matemática – lineal o no lineal
- En función a sus resultados:

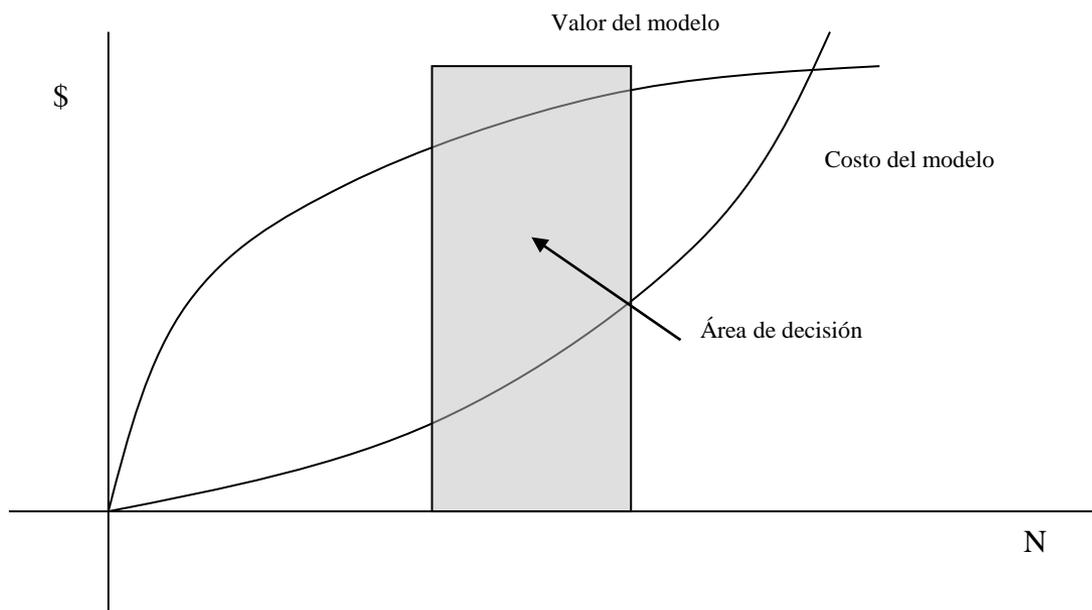
Determinística



Probabilística



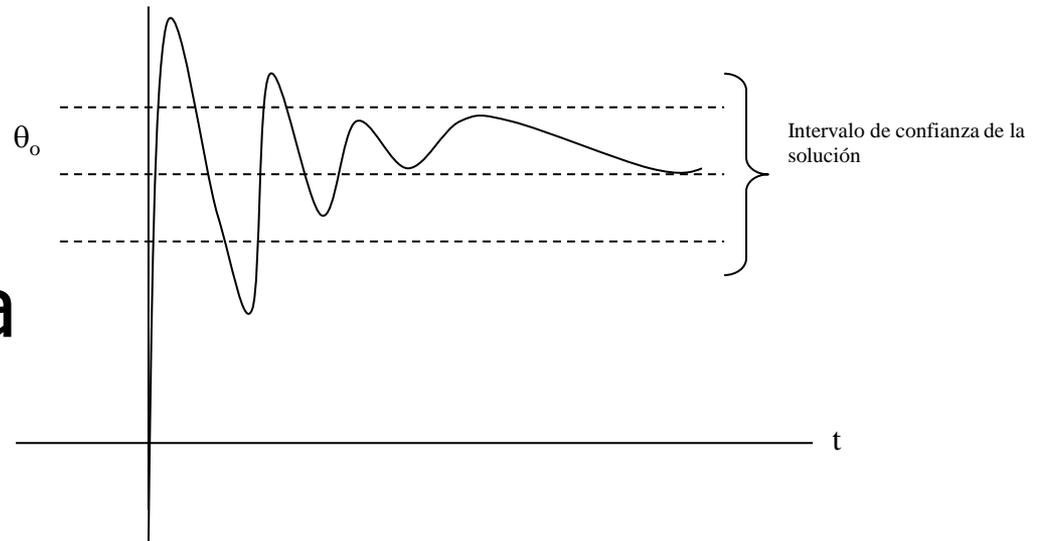
# Costo vs. valor



# Características del modelo



- Tratabilidad
- Trazabilidad
- Factibilidad
- Convergencia





# Investigación de Operaciones



- Es una rama de las Matemáticas consistente en el uso de modelos matemáticos, estadística y algoritmos con objeto de realizar un proceso de toma de decisiones.
- Tiene como campo de acción la Optimización Matemática

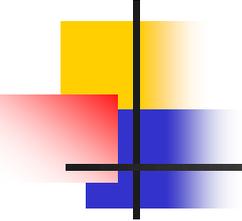


# Antecedentes



- Es difícil precisar el inicio de la investigación de operaciones. Los primeros iniciadores llevaron a cabo trabajos que ahora se considerarían como investigación de operaciones.
- Durante la Primera Guerra Mundial se dio a Thomas Alba Edison la tarea de averiguar las maniobras más eficaces para disminuir las pérdidas de embarques causadas por los submarinos enemigos y emplea un "tablero táctico" para encontrar la solución.





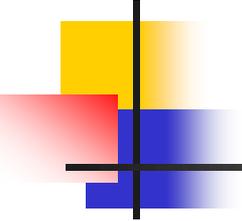
# Antecedentes

---



- A fines de la década de 1910, el danés A. K. Erlang, llevó a cabo experimentos relacionados con las fluctuaciones de la demanda de instalaciones telefónicas en relación con el equipo automático.
- Sus trabajos constituyen la base de muchos modelos matemáticos que se usan actualmente en la teoría de líneas de espera.





# Historia

---



- Las primeras actividades formales se dieron en Inglaterra en la Segunda Guerra Mundial.
- Se encarga a un grupo de científicos ingleses el diseño de herramientas cuantitativas para el apoyo a la toma de decisiones acerca de la mejor utilización de materiales bélicos y radares.
- Se presume que el nombre de Investigación de Operaciones fue dado aparentemente porque el equipo de científicos británicos estaba llevando a cabo la actividad de Investigar Operaciones (militares) y conocido como el Circo de Blackett.
- El Circo de Blackett estaba constituido por tres psicólogos, dos físicos matemáticos, un astrofísico, un oficial del ejército, un topógrafo, un físico y dos matemáticos.





# Tres enfoques principales

- Enfoque de sistemas
- Modelos matemáticos
- Equipos interdisciplinarios





# Modelos de Optimización

---



- Tienen como propósito seleccionar la mejor decisión de un número de posibles alternativas, sin tener que enumerar completamente todas ellas.
- La Teoría de Optimización es una rama de la matemática aplicada que formula y explica estos problemas



# Problemas de optimización

- Seleccionar de un conjunto de objetos cada uno con un "valor", el objeto con "mejor" valor.
- Buscan resolver problemas de optimización combinatoria:
  - Está en función al número de posibles combinaciones que hay que efectuar al momento de tomar una decisión.
- Así, son problemas donde se busca la mejor opción entre un conjunto de un número finito de elementos. Estos elementos pueden ser generados mediante reglas que definen el problema.



## ¿Cuándo se utiliza?

---

- En el dominio combinatorio: métodos secuenciales o heurísticas
- Cuando en los fenómenos estudiados interviene el azar: análisis estocástico
- Cuando se presentan situaciones de concurrencia: decisiones multicriterio
- Cuando los métodos científicos resultan engorrosos: simulación



# Tópicos en optimización: Programación Matemática



- Objetivo:
  - Encontrar el mejor punto que optimice un modelo económico
- Formulación matemática
  - Optimizar  $y(\mathbf{x})$   
Sujeto a  $f(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall i, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- Métodos:
  - Analíticos, Programación Geométrica, P. L., programación combinatoria, métodos heurísticos, métodos matemáticos discretos.



# Tópicos en optimización: Métodos variacionales



- Objetivo:
  - Encontrar la mejor función que optimice el modelo económico
- Formulación matemática
  - Optimizar  $I[y(x)] = \int F[y(x), y'(x)] dx$   
Sujeto a las restricciones algebraicas de integración o matemáticas en general
- Métodos:
  - Cálculo de variaciones, modelos continuos.



# ¿Cómo se resuelven?

- Contando todos los casos y eligiendo el mejor: fuerza bruta  $\frac{(n-1)!}{2}$  posibles soluciones.
- Encontrando una solución “relativamente buena” pero sin tener garantía de que es la mejor.
- Encarando problemas más chicos pero con la certeza de que se encuentra la solución óptima.
- Buscando mediante métodos “inteligentes” encontrar la solución óptima, aún en problemas grandes.

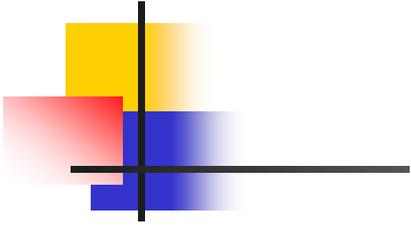


# Métodos de Solución del modelo de optimización

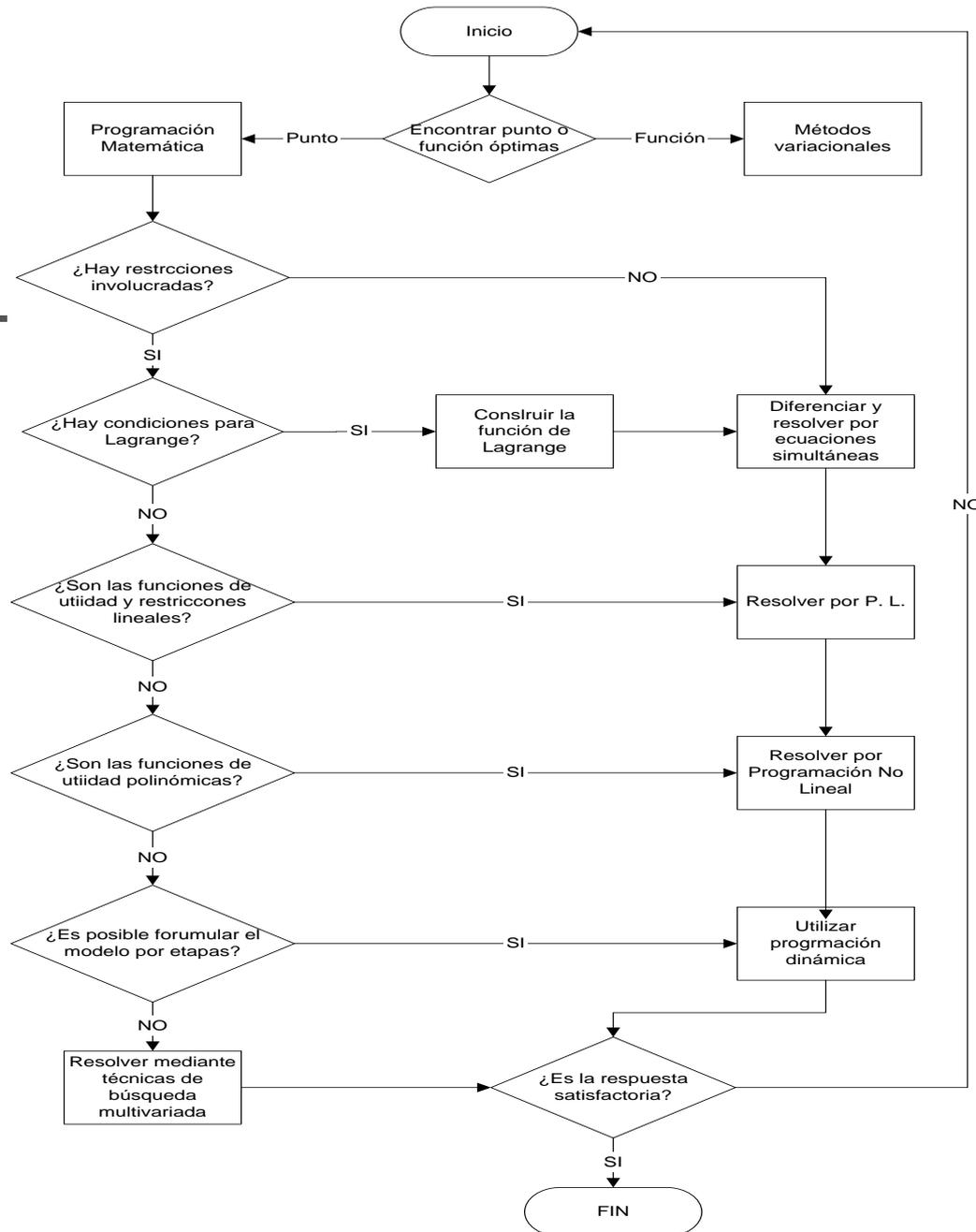


- Enumeración completa
- Analítica
- Métodos numéricos
- Heurísticas
- Simulación
  - Discreta
  - Dinámica





# Métodos de solución

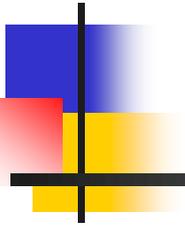


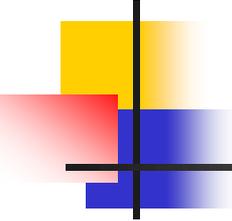
# Ejemplo de problemas

- Ejemplos clásicos: mezclas óptimas, transporte, asignación, etc.
- Ruteo de vehículos.
- Planificación de la producción.
- Asignación de tareas.
- Localización.
- Optimizar servicios.
- Cortes de materia prima.
- Asignación de tripulaciones.
- Planificación de vuelos.
- Licitaciones.



# Principios de modelado matemático





# Introducción

---



- Un **modelo matemático** es la expresión formal (en lenguaje matemático) de las relaciones entre los componentes de un modelo.
- Implica la selección y cuantificación de los componentes, variables y relaciones presentes en el sistema para representarlo con el nivel de detalle requerido.



# Características de un modelo matemático



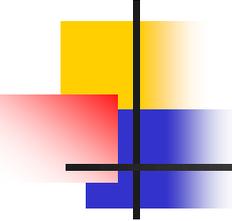
- **Parsimonia**, un modelo no es necesariamente mejor por tener muchos parámetros. La simplicidad es siempre deseable.
- **Modestia**, deben tratar de alcanzarse sólo objetivos asequibles. No debe aspirar a imitar la realidad sino sólo a resaltar aquellos aspectos de interés para su aplicación.
- **Exactitud**, el modelo debe reproducir en la medida de lo posible el funcionamiento del sistema y generar valores para las variables de salida y estado similares a los observados en la realidad.
- **Verificabilidad**, los resultados del modelo deben poder compararse con datos reales y determinar de este modo el grado de exactitud del modelo.



# Clasificación de los modelos

- Estructura, objetivos y restricciones (lineales o no-lineales)
- Características de las Variables (Reales, Discretas - Enteras-, Binarias)
- Certidumbre de los Parámetros (Ciertos e Inciertos)
- Número de Objetivos (Ninguno, Uno o más de Uno)
- Número de Restricciones (Ninguna, Más de Cero)





# El problema



El problema resultante de un modelo matemático tiene cinco elementos

- **El problema:** la pregunta a resolver
- **Elementos:** lista de parámetros, variables y relaciones
- **Instancias:** valores de los parámetros
- **Solución:** valores de las variables de manera que su combinación sea factible.
- **Supuestos:** son limitantes o situaciones bajo las cuales se define la validez del modelo.





# Tipo de problemas

- Problemas decidibles o tractables: existen algoritmos capaces de resolverlos
- Problemas indecidibles o no tractables: no existen algoritmos capaces de resolverlos.

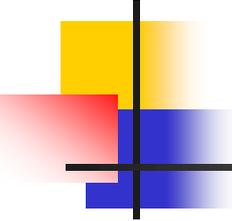




# Tipos de problema

- Conteo
- Estimación
- Ordenamiento
- Estructuración





# Supuestos

---



- Las funciones matemáticas utilizadas describen el sistema
- Las variables son cuantificables
- Las variables están directamente ligadas con el objetivo del problema modelado.



# Ciclo del modelado

- **Etapa 1.** Definir el Problema. Esta fase incluye entender el problema y acordar los resultados a obtener.
- **Etapa 2.** Modelar y Construir la Solución. Esta fase incluye definir el tipo de técnica a utilizar, generar el modelo (implementarlo informáticamente si es el caso) y por último validarlo.
- **Etapa 3.** Utilizar la Solución. Ser capaz de implementar el modelo de tal manera que se utilice, y mantener un sistema de actualización son los dos elementos básicos de esta fase.



# El uso de datos

- El modelo debe requerir datos, no los datos conformar el modelo.
- Hay tres conjuntos básicos de datos necesarios para crear y validar un modelo:
  - Datos que aportan información preliminar y contextual. Permitirán generar el modelo.
  - Datos que se recogen para definir el modelo. Estos datos nos permitirán parametrizar el modelo.
  - Datos que permiten evaluar la bondad del modelo.



# Ejemplo 1:

## ■ Punto de equilibrio

- El problema: encontrar el punto de equilibrio para un producto.
- Elementos: Precio unitario, Costo Variable Unitario, Costo Fijo.
- Instancias: valores que permitirán definir un punto de equilibrio específico.
- Solución: la cantidad de producto a vender que permita operar en el punto de equilibrio.
- Supuestos:
  - Comportamiento lineal de los ingresos y costos
  - Comportamiento constante de los costos fijos para el período
  - No hay inventarios iniciales ni finales
  - Los costos y gastos pueden agruparse en fijos y variables.

El Punto de Equilibrio es el punto donde los costos y los ingresos son iguales, tal que

$$\textit{Ventas} - \textit{Costos} = 0$$

$$pQ - vQ - \textit{Costos fijos} = 0$$

$$Q^* = \frac{\textit{Costos fijos}}{\textit{precio} - \textit{costo variable unitario}} = \frac{CF}{p - v}$$



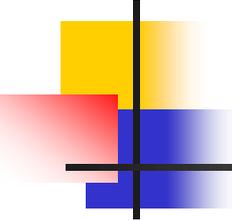
## Ejemplo 2:

- El precio de cierto producto está definido por la siguiente ecuación:

$$p = \frac{80 - q}{4}$$

- donde  $p$  es el precio y  $q$  es la cantidad vendida.
- Si el ingreso es  $pq$ , formular un modelo que permita determinar el valor del mismo para cualquier  $p$  o  $q$ .





# Modelos de Optimización

---



- Tienen como propósito seleccionar la mejor decisión de un número de posibles alternativas, sin tener que enumerar completamente todas ellas.
- La Teoría de Optimización es una rama de la matemática aplicada que formula y explica estos problemas



# Tópicos en optimización: Programación Matemática



- Objetivo:
  - Encontrar el mejor punto que optimice un modelo económico
- Formulación matemática
  - Optimizar  $y(\mathbf{x})$   
Sujeto a  $f(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall i, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- Métodos:
  - Analíticos, Programación Geométrica, P. L., programación combinatoria, métodos heurísticos, métodos matemáticos discretos.



# La teoría general de máximos y mínimos



- Problemas no restringidos
- Está dirigida a encontrar los puntos extremos de una función.
- Teoremas:
  - Una función que es continua en un dominio cerrado posee un valor máximo o mínimo en el interior del intervalo o en sus límites.
  - Una función continua alcanza un máximo o un mínimo en el interior de una región solo en los puntos donde su enésima derivada ya sea se hace cero (puntos estacionarios o de inflexión) o no existe (punto de discontinuidad).



# Óptimos globales y locales

- Será óptimo local si tiene un máximo o mínimo en el intervalo  $[a, b]$
- Será óptimo global si tiene un máximo o mínimo en el intervalo  $[-\infty, \infty]$
- Si el óptimo local es el global, se tiene una función con óptimo exacto.



# Condiciones suficientes para el óptimo en una variable independiente



■ Para una función continua  $f(x)$ , si:

- $f'(x) \exists \forall x \in \mathfrak{R}$
- $x^*$  es crítico si  $f'(x^*) = 0$
- $f''(x^*) = \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{mínimo} \\ < 0 \rightarrow \text{máximo} \\ = 0 \rightarrow \text{no hay definición} \end{cases}$
- Si  $f''(x^*) = 0$ , se examinan  $n$  derivadas de orden superior hasta que  $f^n(x^*) \neq 0$
- Si  $n$  es par:  $f^n(x^*) = \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{mínimo} \\ < 0 \rightarrow \text{máximo} \end{cases}$
- Si es impar: punto de inflexión.



# El problema general de optimización: el problema no lineal con restricciones



- Maximizar  $f(x)$
- Sujeto a:
  - $g_i(x) \leq c_i \quad i = 1, \dots, m$
- Donde  $f$  y  $g_i$  son funciones generales del parámetro  $x \in \mathcal{R}^n \geq 0$
- Cuando  $f$  es convexa,  $g_i$  cóncava, el problema es un problema de programación convexa



# Programación lineal

- Si  $f$  y  $g_i$  son lineales y convexas, se tiene un problema de programación lineal.
- Características:
  - Reduce sus soluciones a un número finito de éstas.
  - Es un problema combinatorio, ya que las posibles soluciones yacen en las intersecciones de un hiperplano convexo definido por las restricciones convexas.



Inecuación

● a :  $x < 4$

● b :  $2y < 12$

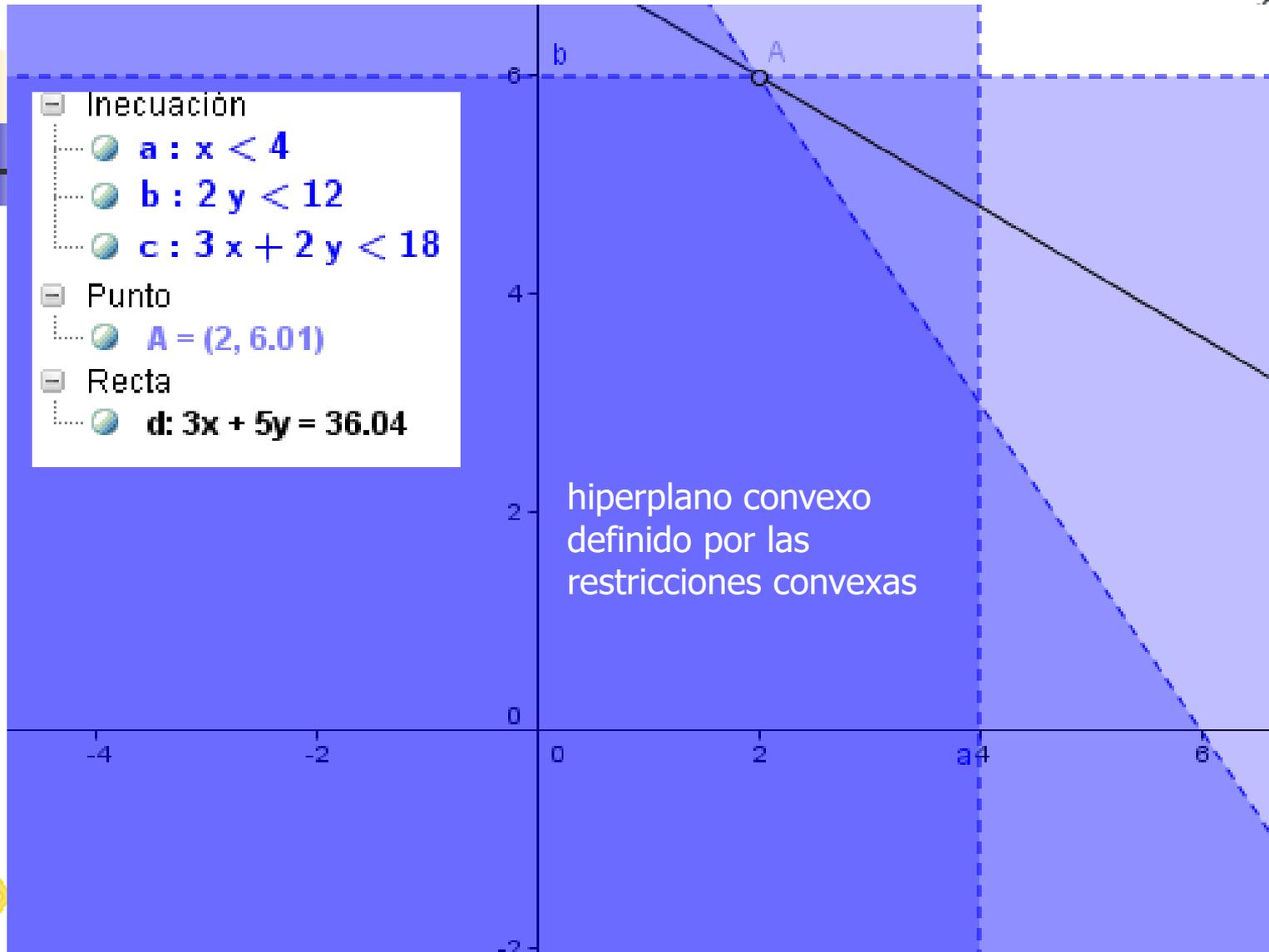
● c :  $3x + 2y < 18$

Punto

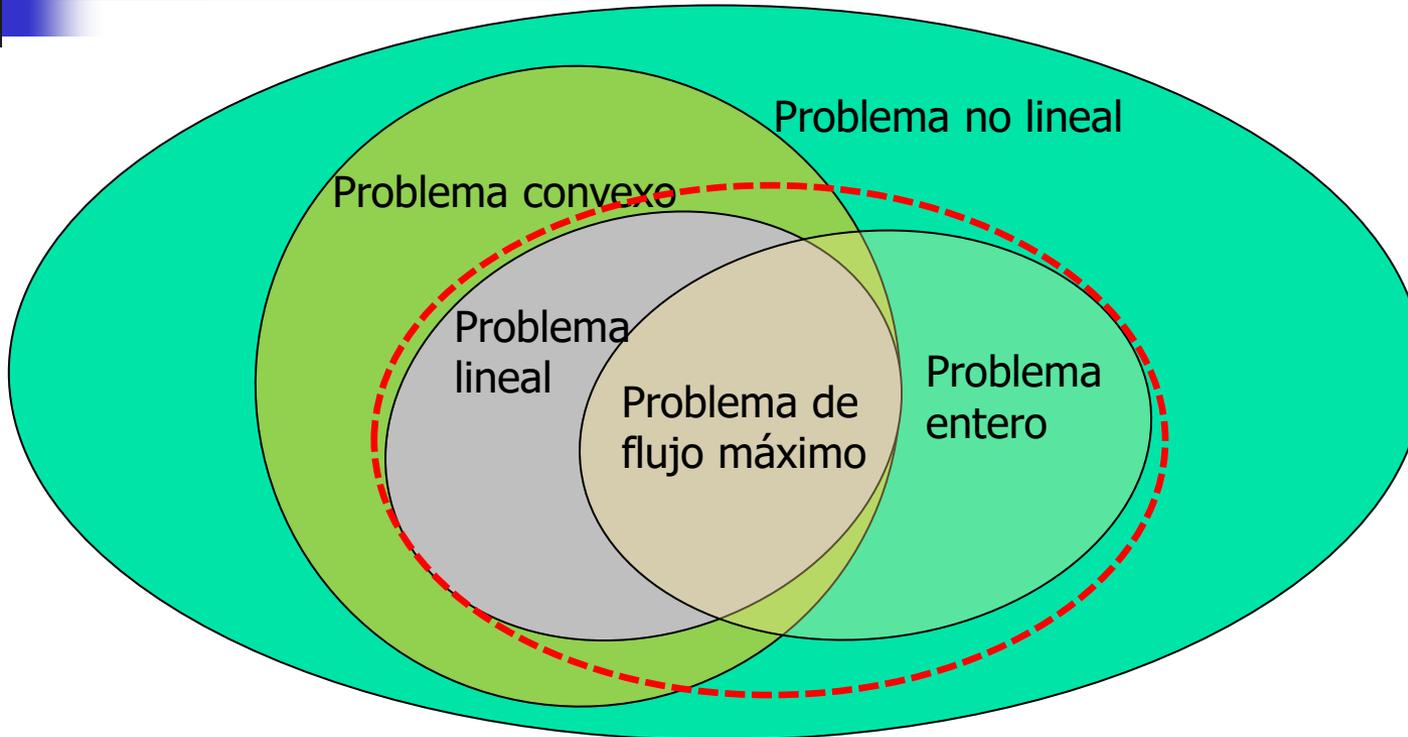
● A = (2, 6.01)

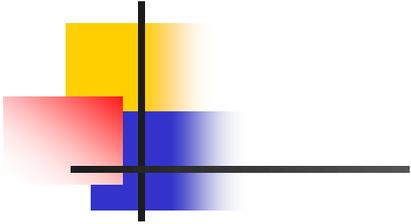
Recta

● d :  $3x + 5y = 36.04$



# Contexto del curso





# Métodos de solución

