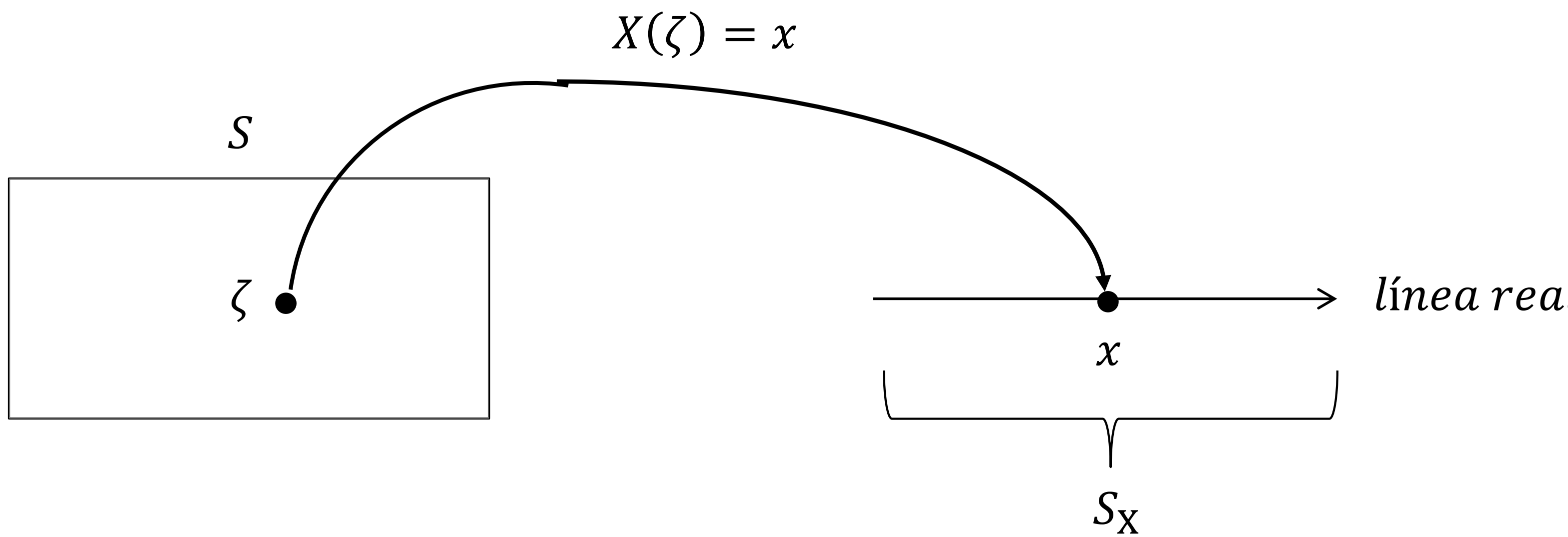
Variables Aleatorias Discretas

Por: Dra. Victoria Serrano

Variables Aleatorias

- Una variable aleatoria es una función que asigna un número real $X(\zeta)$ a cada resultado ζ en el espacio muestral S de un experimento aleatorio



Ejemplo

- Una moneda es lanzada tres veces y se registra la secuencia de caras y sellos. El espacio muestral para este experimento es $S = \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}$. Sea X el número de caras en tres lanzamientos. X asigna a cada resultado ζ en S un número del conjunto $S_X = \{0,1,2,3\}$. La tabla muestra los ocho resultados de S y su correspondiente valor de X.

ζ	CCC	CCS	CSC	SCC	CSS	SCS	SSC	SSS
$X(\zeta)$	3	2	2	2	1	1	1	0

- X es entonces una variable aleatoria que toma valores en el conjunto $S_X = \{0,1,2,3\}$

Ejemplo

- *Un jugador paga $1.50 para participar en el siguiente juego: Una moneda es lanzada tres veces y se registra el número de caras X. El jugador recibe $1 si $X = 2$ y $8 si $X = 3$, pero nada si tiene otro resultado. Sea Y el premio para el jugador.*
- Y es una función de la variable aleatoria X y sus resultados pueden relacionarse al espacio muestral del experimento aleatorio como sigue

ζ	CCC	CCS	CSC	SCC	CSS	SCS	SSC	SSS
$X(\zeta)$	3	2	2	2	1	1	1	0
$Y(\zeta)$	8	1	1	1	0	0	0	0

- Y es entonces una variable aleatoria que toma valores en el conjunto $S_Y = \{0,1,8\}$

Ejemplo…continuación

- Encuentre la probabilidad del evento $\{X = 2\}$
- $P[X = 2] = P\{CCS, CSC, SCC\}$

$$= P\{CCS\} + P\{CSC\} + P\{SCC\}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{8}$$

- Encuentre la probabilidad de que el jugador gane \$8

$$P[Y = 8] = P[\{CCC\}] = \frac{1}{8}$$

Variables Aleatorias Discretas

- Asume valores de un conjunto contable

$$S_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

- Es finito si su rango es finito

$$S_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

- Si S_X es discreto, sólo necesitamos obtener las probabilidades para los eventos

$$A_k = \{\zeta : X(\zeta) = x_k\}$$

Función de Masa de Probabilidad (fmp)

$p_X(x) = P[X = x] = P[\{\zeta : X(\zeta) = x\}]$ para un número real x

La fmp $p_X(x)$ satisface tres propiedades:

i. $p_X(x) \geq 0$ para todo x

ii. $\sum_{x \in S_X} p_X(x) = \sum_{todo\ k} p_X(x_k) = \sum_{todo\ k} P[A_k] = 1$

iii. $P[X\ en\ B] = \sum_{x \in B} p_X(x)$ donde $B \subset S_X$

Ejemplo

- Sea X el número de caras en tres lanzamientos independientes de una moneda. Encuentre la fmp de X.

Ejemplo

- Cuando un jugador de baloncesto lanza dos tiros libres, cada lanzamiento puede ser Bueno (B) o malo (M) y el experiment se considera equiprobable. ¿Cuál es la fmp de X del número de puntos que el jugador anotó?

Ejemplo

- Un jugador recibe \$1 si el número de caras en los tres lanzamientos de una moneda es 2, \$8 si el número es 3 y nada en cualquier otro caso. Encuentre la fmp del premio Y.

Distribución de Bernoulli

- X es una variable aleatoria de Bernoulli si su fmp tiene la forma

$$p_X(x) = \begin{cases} 1 - p\,, & x = 0 \\ p, & x = 1 \\ 0, & de\ otro\ modo \end{cases}$$

Donde el parámetro p está en el rango $0 < p < 1$

Ejemplo

- Sea A el evento de interés en un experimento aleatorio donde un dispositivo no es defectuoso. Decimos que un "éxito" ocurre si A ocurre cuando se realiza el experimento. La variable aleatoria Bernoulli I_A es igual a 1 si A ocurre y 0 de otra manera y está dada por la función indicador para A:

$$I_A(\zeta) = \begin{cases} 0 & si\ \zeta\ no\ está\ en\ A \\ 1 & si\ \zeta está\ en\ A \end{cases}$$

Encuentre la fmp de I_A

Ejemplo

- Sea X el número de veces que un mensaje necesita ser transmitido hasta que llega correctamente a su destino. Encuentre la fmp de X. Encuentre la probabilidad de que X sea un número par.

Ejemplo

- Un canal de comunicación binaria introduce un bit de error en una transmisión con una probabilidad p. Sea X el número de errores en n transmisiones independientes. Encuentre la fmp de X. Encuentre la probabilidad de uno o menos errores.

Distribución Geométrica

- X es una variable aleatoria p con distribución geométrica si la función de masa de probabilidad (fmp) tiene la forma:

$$p_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1}, & x = 1, 2, \ldots \\ 0, & de\ otro\ modo \end{cases}$$

Ejemplo–fmp

- La variable aleatoria N tiene una función de masa de probabilidad:

$$P_N(n) = \begin{cases} \dfrac{c}{n}, & n = 1, 2, 3 \\ 0, & de\ cualquier\ otro\ modo \end{cases}$$

1. ¿Cuál es el valor de la constante c?
2. Encuentre $P[N \geq 2]$.
3. Encuentre $P[N = 1]$.
4. Encuentre $P[N > 3]$.

Ejemplo–fmp

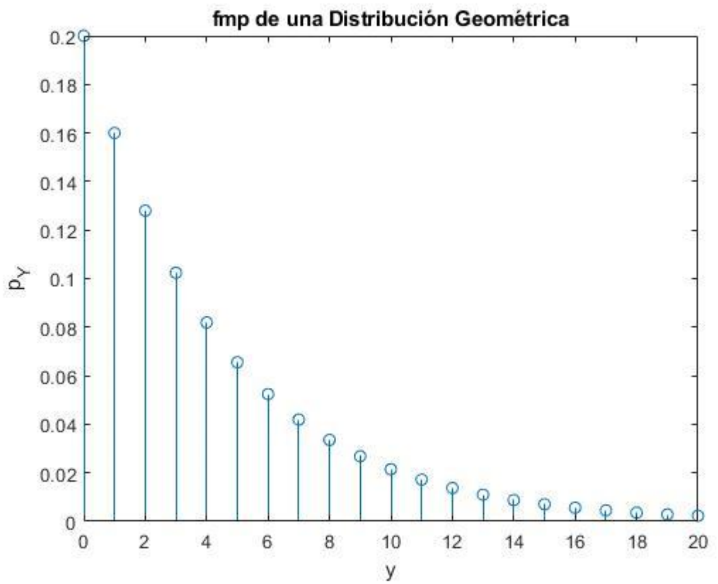
- En un paquete de M&M, Y es el número de M&M Amarillo y está uniformemente distribuído entre 5 y 15.

1. ¿Cuál es la fmp de Y?
2. Encuentre $P[Y < 10]$
3. Encuentre $P[Y > 12]$
4. Encuentre $P[8 \leq Y \leq 12]$

Ejemplo–Distribución Geométrica

- Ejemplo: si existe una probabilidad de 0.2 de rechazo, dibuje la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria geométrica.

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0.2(0.8)^{y-1}, & y = 1, 2, \ldots \\ 0, & de\ otro\ modo \end{cases}$$



Distribución Uniforme

- X es una variable aleatoria (k, l)con distribución uniforme si la función de masa de probabilidad (fmp) tiene la forma:

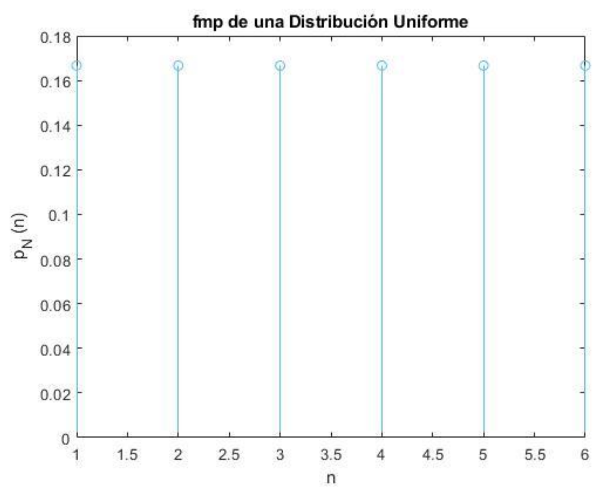
$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{l-k+1}, & x = k, k+1, k+2, \dots, l \\ 0, & de\ otro\ modo \end{cases}$$

Donde los parámetros k y l son enteros de modo tal que $k < l$

Ejemplo–Distribución Uniforme

- Se lanza un dado. La variable aleatoria N es el número que sale en el lado superior. Por lo tanto, N es una variable aleatoria $(1{,}6)$ con distribución uniforme. Dibuje la función de masa de probabilidad (fmp) de N:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6}, & x = 1, 2, 3{,}4, 5{,}6 \\ 0, & de\ otro\ modo \end{cases}$$



Valor Esperado de una Variable Aleatoria

- Valor esperado o media

$$m_X = E[X] = \sum_{x \in S_X} x p_X(x) = \sum_k x_k p_X(x_k)$$

El valor esperado $E[X]$ está definido si la suma anterior converge absolutamente. Esto es:

$$E[|X|] = \sum_k |x_k| p_X(x_k) < \infty$$

Ejemplo: Media de la variable aleatoria Bernoulli

- Encuentre el valor esperado de la variable aleatoria Bernoulli I_A

Ejemplo

- Sea X el número de caras en los tres lanzamientos de una moneda. Encuentre $E[X]$

Ejemplo

- Sea X el número de lanzamientos buenos en los dos tiros libres de un jugador de baloncesto. Encuentre $E[X]$

Ejemplo

- Sea X el número de bytes en un mensaje y suponga que X tiene una distribución geométrica con parámetro p. Encuentre la media de X

Ejemplo

- Una moneda es lanzada repetidamente hasta que sale "sello". Si se necesitan X lanzamientos, entonces el casino paga al jugador $Y = 2^X$ dólares. ¿Cuánto debe el jugador estar dispuesto a pagar para jugar este juego?

Varianza de una Variable Aleatoria

- Para proveer una medida de la variación alrededor de la media (valor esperado).
- La desviación alrededor de la media puede tomar valores positivos o negativos.
- Nuestro interés es sólo en la magnitud de la variación

$$\sigma_X{}^2 = VAR[X] = E[(X - m_x)^2]$$

$$= \sum_{x \in S_X} (x - m_X)^2 \, p_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - m_X)^2 p_X(x_k)$$

Desviación Estándar de la Variable Aleatoria X

$$\sigma_X = STD[X] = VAR[X]^{\frac{1}{2}}$$

Forma alternativa para calcular la varianza:

$$VAR[X] = E[(X - m_x)^2] = E\left[X^2 - 2m_X X + m_X{}^2\right]$$

$$= E[X^2] - 2m_X E[X] + m_X{}^2$$

$$= E[X^2] - m_X{}^2$$

$E[X^2]$ es conocido como el segundo momento de X. El $n - ésimo$ momento de X está definido como $E[X^n]$

Función de Distribución Acumulada (cdf)

- Función de distribución acumulada (cdf) de una variable aleatoria X está definida como la probabilidad del evento $\{X \leq x\}$:
- $F_X(x) = P[X \leq x]$ para $-\infty < x < +\infty$

Propiedades básicas de cdf

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- F_X es una función no-decreciente de x, esto es, si $a < b$, entonces $F_X(a) \leq F_X(b)$
- $F_X(x)$ es continuo desde la derecha, esto es, para $h > 0$, $F_X(b) = \lim_{h \to 0} F_X(b + h) = F_X(b^+)$

Propiedades del cdf para calcular probabilidad de eventos

- $P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$
- $P[X = b] = F_X(b) - F_X(b^-)$
- $P[X > x] = 1 - F_X(x)$
- $P[a \leq X \leq b] = P[X = a] + P[a < X \leq b]$

$$= F_X(a) - F_X(a^-) + F_X(b) - F_X(a)$$

$$= F_X(b) - F_X(a^-)$$

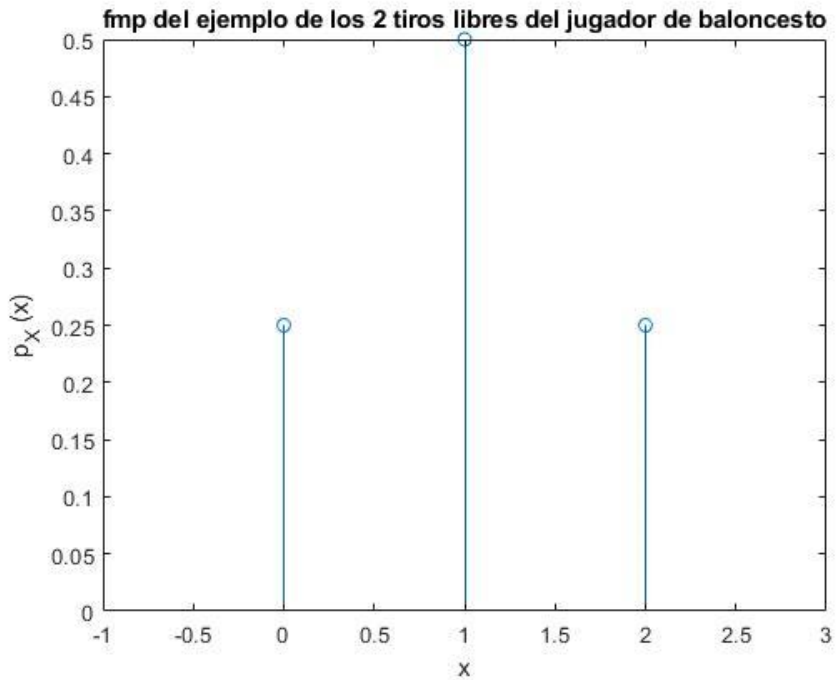
Ejemplo del jugador de baloncesto–cdf

- Cuando un jugador de baloncesto lanza dos tiros libres, cada lanzamiento puede ser Bueno (B) o malo (M) y el experimento se considera equiprobable. Si X representa la variable aleatoria del número de lanzamientos en el que el jugador anotó. Encuentre y dibuje la cdf de la variable aleatoria X.

Resultado	MM	MB	BM	BB
P[·]	1/4	1/4	1/4	1/4
X	0	1	1	2

Ejemplo del jugador de baloncesto–cdf…continuación

Resultado	MM	MB	BM	BB
P[·]	1/4	1/4	1/4	1/4
X	0	1	1	2



$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \frac{1}{4}, & x = 2 \\ 0, & de\ otro\ modo \end{cases}$$

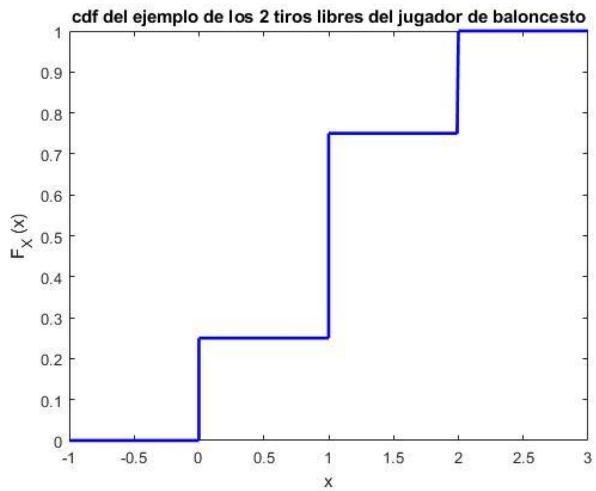
Ejemplo del jugador de baloncesto–cdf…continuación

Resultado	MM	MB	BM	BB
P[·]	1/4	1/4	1/4	1/4
X	0	1	1	2

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \frac{1}{4}, & x = 2 \\ 0, & de\ otro\ modo \end{cases}$$

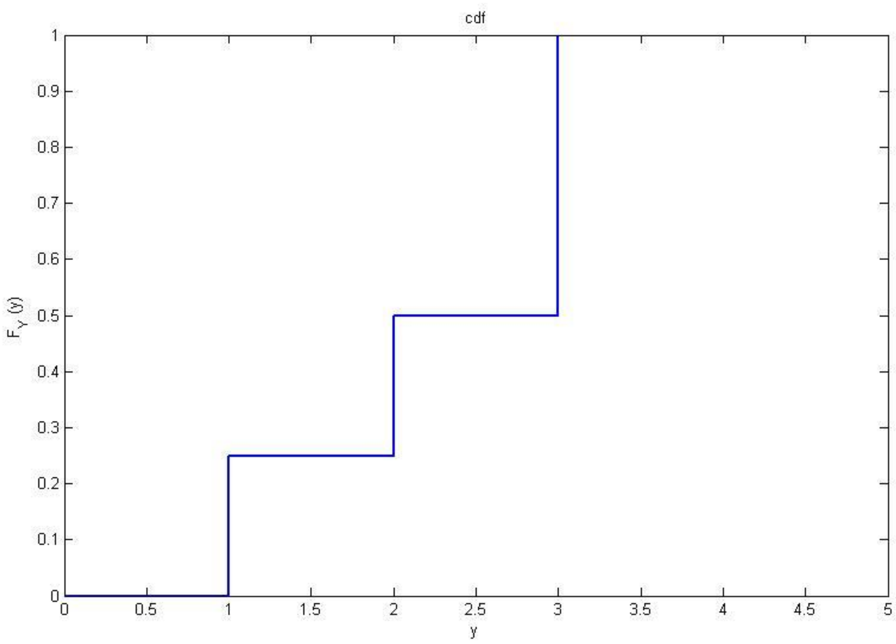
Usando como referencia la fmp, se obtiene la cdf de la variable aleatoria X

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$



Ejemplo–cdf

- La variable aleatoria Y tiene una función de distribución acumulada (cdf) como se muestra en la figura:



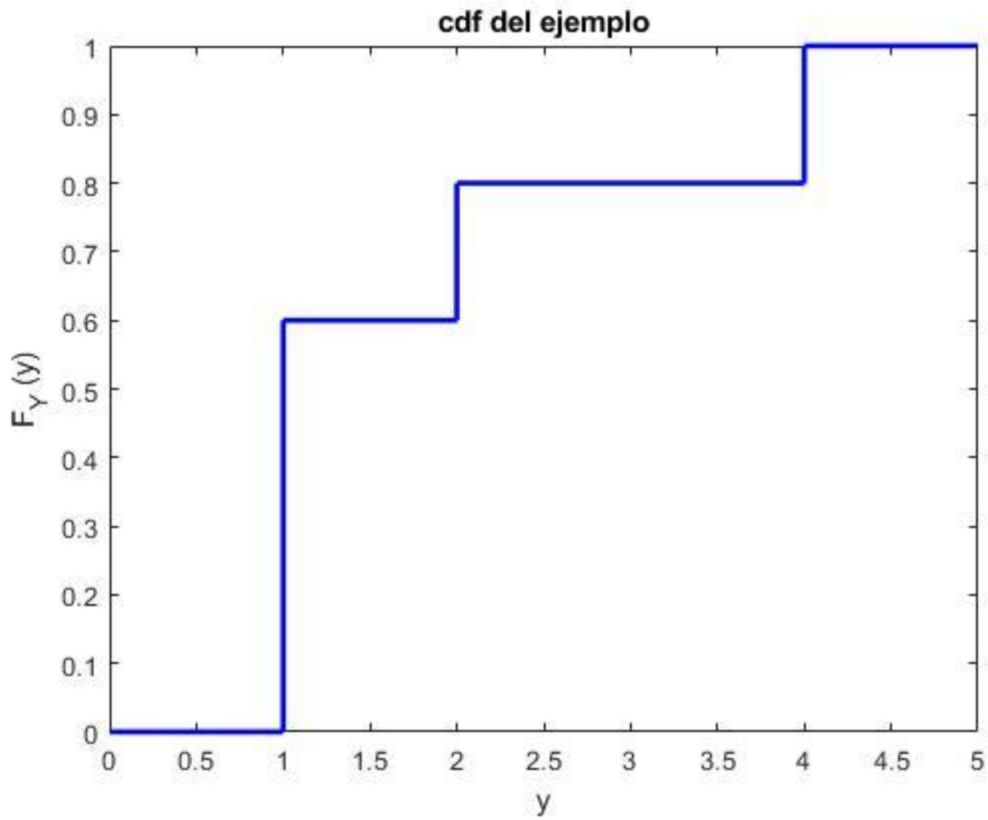
- Utilice la cdf para encontrar las siguientes probabilidades:

1. P[Y<1], P[Y≤1]
2. P[Y>2], P[Y≥2]
3. P[Y=3], P[Y>3]
4. $P_Y(y)$

Ejemplo–cdf

Dada la siguiente función de distribución acumulada (cdf), encuentre las siguientes probabilidades:

1. $P[Y < 1]$
2. $P[Y \leq 1]$
3. $P[Y > 2]$
4. $P[Y \geq 2]$
5. $P[Y = 1]$
6. $P[Y = 3]$
7. $P_Y(y)$
8. $E[Y]$



Ejemplo–cdf

- Una variable aleatoria discreta X tiene cdf:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 3, \\ 0.4, & -3 \leq x < 5, \\ 0.8, & 5 \leq x < 7, \\ 1, & x \geq 7 \end{cases}$$

1. Grafique la cdf de la variable aleatoria X.
2. Escriba la función de masa de probabilidad $P_X(x)$ de la variable aleatoria X.
3. Encuentre el varlor esperado de la variable aleatoria X.

Funciones de una Variable Aleatoria

- Una función $Y = g(X)$ de una variable aleatoria X es otra variable aleatoria

Valor Esperado de Funciones de Variables Aleatorias

Sea X una variable aleatoria discreta y $Z = g(X)$. El valor esperado de Z está dado por:

$$E[Z] = E[g(X)] = \sum_{k} g(x_k) p_X(x_k)$$

Varianza

- Sea $Y = X + c$, entonces la varianza será:

$$VAR[X + c] = E[X + c - (E[X] + c)^2]$$
$$= E[(X - E[X]^2)] = VAR[X]$$

- Agregar una constante a una variable aleatoria no afecta la varianza. Sea $Z = cX$, entonces:

$$VAR[cX] = E[(cX - cE[X])^2]$$
$$= E[c^2(X - E[X])^2]$$
$$= c^2 VAR[X]$$

- Multiplicar una variable aleatoria por c, multiplica la varianza por c^2 y la desviación estándar por $|c|$. Sea $X = c$ una variable aleatoria que es igual a una constante con probabilidad 1, entonces

$$VAR[X] = E[(X - c)^2] = E[0] = 0$$

Ejemplo–función de una variable aleatoria

- La amplitud en Volts (V) de una señal senoidal es una variable aleatoria con fmp

$$P_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{7}, & v = -3, -2, \dots, 3 \\ 0, & de\ cualquier\ otro\ modo \end{cases}$$

Si $Y = V^2/2$ Watts denota la potencia de la señal transmitida. Encuentre:

1. $P_Y(y)$
2. $F_Y(y)$
3. $E[Y]$
4. $VAR[Y]$
5. $STD[Y]$