UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PANAMÁ

VICERRECTORÍA ACADÉMICA

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

MATEMÁTICA BÁSICA

$$ab + ac = a(b + c)$$

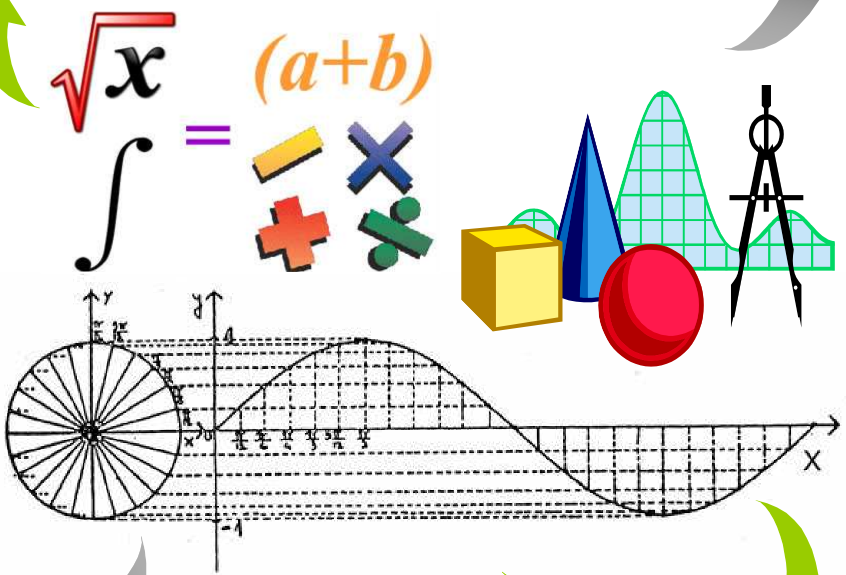
Factorización

Números reales

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in Z \, y \, b \neq 0 \right\}$$

Álgebra

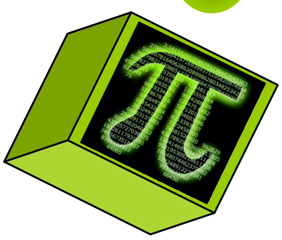
$(x+a)(x+b)$



Trigonometría

$5x+2<0$

Geometría



Elaborado y Recopilado por:

Magístra Alba Castillo de Quiel

CONTENIDO

1. NÚMEROS REALES

El conjunto numérico con el que aprendemos a contar es el Conjunto de Los Números Naturales $N=\{1,2,3,4,...\}$. Cuando se trabaja solamente con este conjunto la sustracción no siempre es posible, por ejemplo 4-4 y 8-12 no tienen respuesta en el conjunto de números naturales. Surge entonces el Conjunto de Números Enteros $Z=\{...-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$. Este conjunto numérico no es cerrado para la división porque no siempre al dividir números enteros obtenemos como cociente un número entero, por ejemplo, al dividir $-14\div 2$ obtenemos -7 que es un número entero, pero $2\div -14$ no tienen solución en este conjunto numérico. Para resolver esta situación surge el Conjunto de Números Racionales $Q=\left\{\frac{a}{b}/\,a,b\in \mathrm{Z}\, y\, b\neq 0\right\}$.

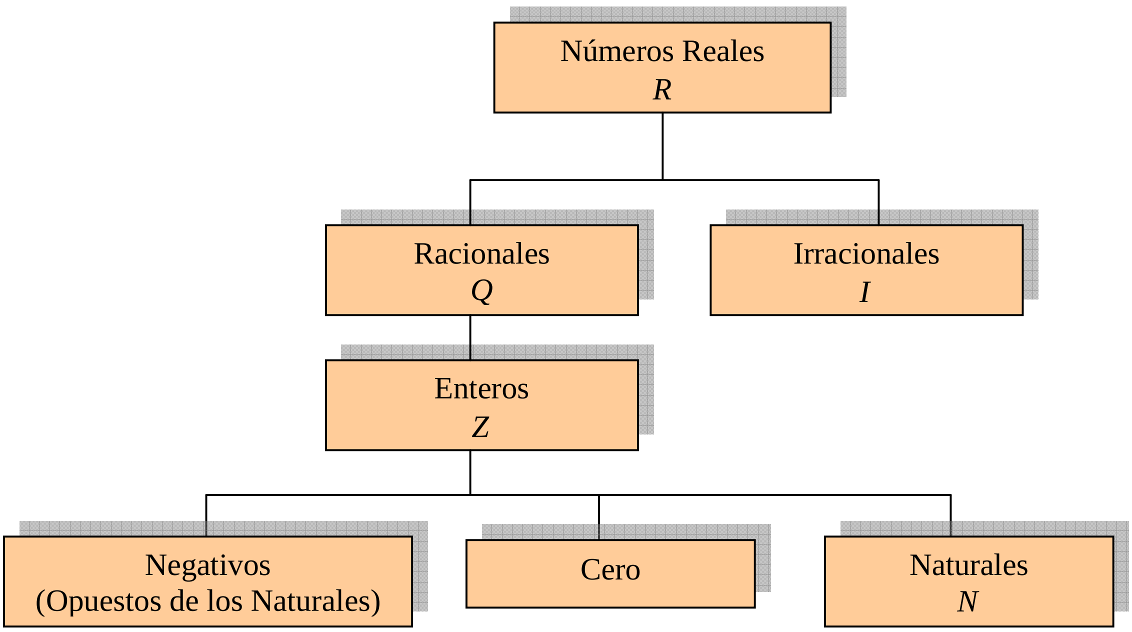
Debemos observar que todo número entero es un número racional, es decir, el conjunto de los números enteros es un subconjunto de los números racionales, ya que todo número entero se puede escribir como un número racional con denominador 1, por la cual $Z\subset Q$.
Todo número racional, se puede representar también como un número decimal finito o un número decimal periódico, que se obtiene al dividir el numerador entre el denominador. Por ejemplo:

$$\frac{8}{1}=8; \qquad \frac{1}{2}=0.5; \qquad \frac{1}{3}=0.333\bar{3}, \qquad \frac{212}{99}=2.1414\overline{14}, \qquad \frac{0}{-5}=0$$

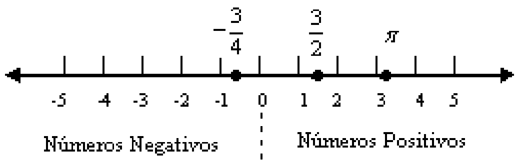
Algunos números no pueden representarse como un cociente de dos números enteros, a ellos se les conoce como el Conjunto de Números Irracionales y se representan simbólicamente por I. Estos números pueden representarse como números decimales infinitos no periódicos, por ejemplo: $\sqrt{2}=1.41421356...$ $-\pi=-3.1415926...$ $e=2.7182818...$

$$-\sqrt{3}=-1.732... \qquad \sqrt[3]{7}=1.912...$$

A la unión del Conjunto de Números Racionales y el Conjunto de Números Irracionales se le denomina Conjunto de Números Reales R, es decir, un número real puede ser natural, entero, racional o irracional; como lo muestra el siguiente esquema.

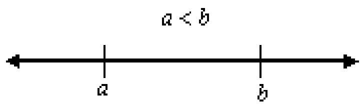


El conjunto de números Reales puede representarse gráficamente sobre los puntos de una recta la cual llamaremos la recta real.



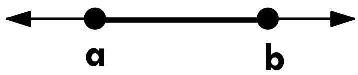
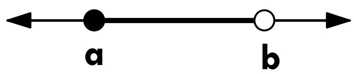
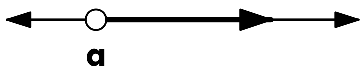
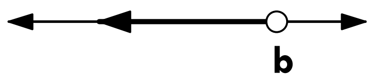
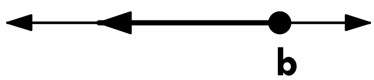
El conjunto de números Reales cumple la relación de orden, la cual establece que dados dos números reales cualesquiera a y b, se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

$$a < b$$
$$a = b$$
$$a > b$$



Es importante observar que en la recta real, todo número que esté a la derecha es mayor que cualquiera que este a su izquierda.

En ocasiones necesitamos trabajar con todo el Conjunto de Números Reales o con un subconjunto de él. Para representar estos conjuntos, utilizamos el concepto de intervalo. Un intervalo es un conjunto continuo de números reales.

Intervalo	Notación de intervalo	Notación de conjunto	Representación gráfica
Abierto	(a,b)	$\{x \in \Re \mid a < x < b\}$	
Cerrado	$[a,b]$	$\{x \in \Re \mid a \le x \le b\}$	
Semiabiertos	$(a,b]$	$\{x \in \Re \mid a < x \le b\}$	
	$[a,b)$	$\{x \in \Re \mid a \le x < b\}$	
Infinitos	(a,∞)	$\{x \in \Re \mid a < x\}$	
	$[a,\infty)$	$\{x \in \Re \mid a \le x\}$	
	$(-\infty,b)$	$\{x \in \Re \mid x < b\}$	
	$(-\infty,b]$	$\{x \in \Re \mid x \le b\}$	
	$(-\infty,\infty)$	$\{x \in \Re \mid -\infty < x < \infty\}$	

PRÁCTICA Nº1

I. Exprese los siguientes intervalos en notación de conjunto y represente gráficamente.

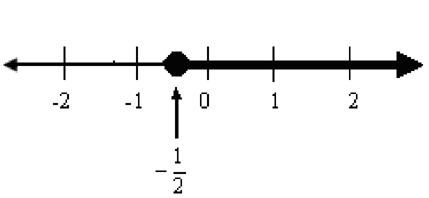
1. $(-5,7]$
2. $[-8,4]$
3. $(-\infty,\infty)$
4. $\left(-\infty,\dfrac{4}{3}\right]$
5. $\left[\dfrac{5}{2},8\right)$
6. $\left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

II. Exprese cada uno de los siguientes conjuntos en notación de intervalo y represente gráficamente.

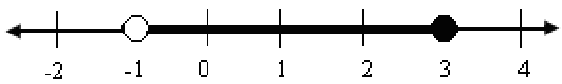
1. $\left\{x\in\Re \mid \dfrac{5}{3}<x\right\}$
2. $\left\{x\in\Re \mid -\dfrac{7}{2}<x\leq\dfrac{2}{3}\right\}$
3. $\left\{x\in\Re \mid x\leq\dfrac{12}{5}\right\}$
4. $\{x\in\Re \mid -4\leq x\leq 4\}$
5. $\left\{x\in\Re \mid \dfrac{3}{2}\leq x<3\right\}$
6. $\{x\in\Re \mid -7<x<8\}$

III. Exprese en notación de conjunto y en forma de intervalo.

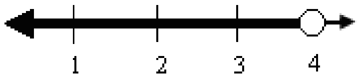
1.



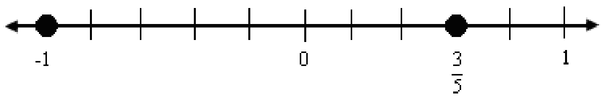
2.



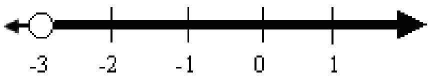
3.



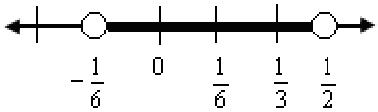
4.



5.



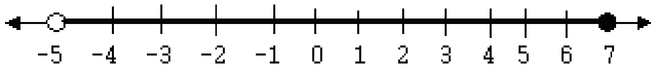
6.



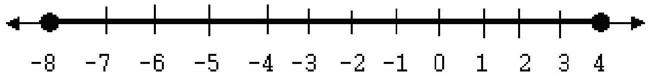
RESPUESTAS

I. Parte

1) $\{x \in \Re \mid -5 < x \leq 7\}$



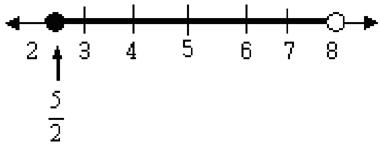
2) $\{x \in \Re \mid -8 \leq x \leq 4\}$



3) $\Re$

4) $\left\{x \in \Re \mid x \leq \frac{4}{3}\right\}$

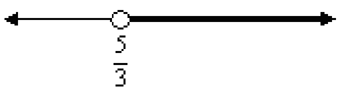
5) $\left\{x \in \Re \mid \frac{5}{2} \leq x < 8\right\}$



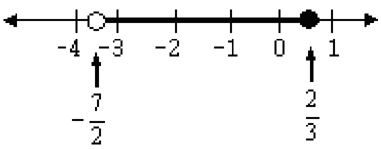
6) $\left\{x \in \Re \mid -\frac{3}{2} \leq x\right\}$

II. Parte

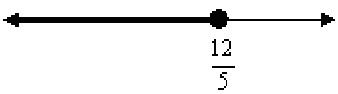
1) $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$



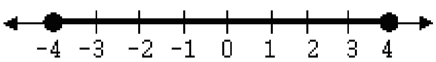
2) $\left(-\frac{7}{2}, \frac{2}{3}\right]$



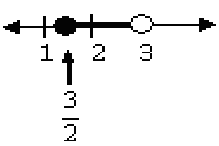
3) $\left(-\infty, \frac{12}{5}\right]$



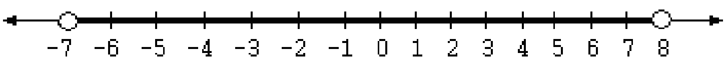
4) $[-4,4]$



5) $\left[\frac{3}{2}, 3\right)$



6) $(-7,8)$



2. EXPONENTES

2.1 Propiedades de los exponentes.

a) Exponentes enteros positivos:
Los exponentes enteros positivos se asocian a un número real para indicar la multiplicación repetida de tal número. Por ejemplo escribimos $x \cdot x \cdot x = x^3$, en donde el entero positivo 3 se llama exponente e indica que el número real x se repite tres veces como factor $x^n = x.x.x.....x \quad n$ factores. El entero positivo n se llama exponente de x y el número real x es la base. La expresión x^n es una potencia y se lee como "x *a la n-ésima potencia*" o "*x a la n*".

Teorema 1: para todo número real x, siendo n un entero positivo:
1. Si, $x > 0$, entonces $x^n > 0$
2. Si x< 0, entonces $x^n > 0$ si n es par
3. Si x<0, entonces $x^n < 0$ si n es impar.
4. Si x=0, entonces $x^n = 0$
5. Si n =0, entonces $x^n = 1$

Las leyes básicas para los exponentes se establecen lo siguiente:

Teorema 2: para cualesquiera, números reales "x" siendo m y n enteros positivos:
1. $x^n \cdot x^m = x^{m+n}$ los exponentes se suman.
2. $[x^m]^n = x^{mn}$ los exponentes se multiplican
3. $[xy]^n = x^n \,.\, y^n$
4. $x^0 = 1$ Todo número real x elevado a 0=1
5. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ ó $x^m \div x^n = x^{m-n}$ Los exponentes se restan
6. Si m<n, entonces: $\dfrac{x^m}{x^n} = \dfrac{1}{x^{n-m}}$
7. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

Estas leyes para los exponentes se pueden extender a reglas que incluyen tres o más potencias. Por ejemplo: $x^m.x^n.x^p = x^{m+n+p}$

Ejemplo 1: Encuentre el producto $(2x^3y^2)(3x^2y^4)$.
Solución:
$(2x^3y^3)(3x^2y^4) = (2.3.x^{3+2}.y^{2+4}) = 6x^5y^6$

Ejemplo 2: Encontrar el producto de $(3x^3y^2z^4)^3$.

Solución:

$$(3^3)(x^3)^3(y^2)^3(z^4)^3 = 27x^9y^6z^{12}$$

Ejemplo 3: Encuentre el producto de $\left(\dfrac{2x^2}{y^3}\right)^2 . \left(\dfrac{y^3}{x^3}\right)^3$.

Solución:

$$\left(\frac{2x^2}{y^3}\right)^2\left(\frac{y^3}{x^3}\right)^3 = \frac{4x^4}{y^6}.\frac{y^9}{x^9} = \frac{4y^3}{x^5}$$

PRÁCTICA Nº2

1. $(3a^2b^3)(5ab^4)$ 2. $(a^4b^2)^3(a^2b^4)^3$ 3. $(3a^2b^3)^4(-2ab^5)^5$ 4. $(6x^2y^3z)^3\left(\dfrac{1}{2}x^2y^4\right)^4$

5. $\dfrac{2^3a^4b^3c^7}{2^2a^9b^8c^4}$ 6. $\dfrac{36x^3y^4z^7}{-12x^7y^2z^6}$ 7. $\dfrac{a^{6n+1}b^{5n-2}}{a^{6n-1}b^{5n+1}}$ 8. $\dfrac{(3a^kb^{4k})^3}{(5a^{k+1}b^{2k+1})^2}$ 9. $\dfrac{\left[(3xy^2)^4.(2x^3y^4)^3\right]^2}{(4x^2y^3)^5}$

10. $\dfrac{\left[(2x^2y)^2(4x^3y^2)\right]^3}{\left[(x^3y)^3(2x^2y)\right]^2}$.

Ejemplo 4: Exprese $(x^{-3}y^{-2}z^0)^{-2}$ sin exponentes negativos y simplificar.

Solución:

$$(x^{-3}y^{-2}z^0)^{-2}=\left[(x^{-3}y^{-2})(1)\right]^{-2}=\left[x^{-3}y^{-2}\right]^{-2}=x^{(-3)(-2)}y^{(-2)(-2)}=x^6y^4$$

Ejemplo 5: Exprese $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(xy)^{-1}}$ sin exponentes negativos y simplifique.

Solución:

$$\frac{x^{-1}+y^{-1}}{(xy)^{-1}}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}}=\frac{y+x}{xy}.\frac{xy}{1}=y+x$$

PRÁCTICA Nº3

1. $(c^2d^3y^{-4})^0(2c^3d^{-2}y^3)$ 2. $(x+y)^0$ 3. $(-2x^{-2})(4x^2)\left(-\dfrac{1}{6}x^{-3}\right)$ 4. $\left(\dfrac{x^{-5}y^4}{x^2y^{-2}}\right)^2.\left(\dfrac{x^4y^{-5}}{x^3y^{-7}}\right)^{-3}$

5. $\dfrac{a^{2n-3}}{a^{3n+1}}.\dfrac{a^{n+5}}{a^{n-3}}$ 6. $\dfrac{(3x^{n+1})^2}{x^{2(n+1)}}.\dfrac{x^{-n}}{(x^{-n})^3}$.

RESPUESTAS

PRÁCTICA Nº2

1). $15a^3b^7$ **; 2).** $a^{18}b^{18}$ **; 3).** $-2592a^{13}b^{37}$ **; 4).** $\frac{27}{2}x^{14}y^{25}z^3$ **; 5).** $\frac{2c^3}{a^5b^5}$ **; 6).** $\frac{-3y^2z}{x^4}$ **;**

7). $\frac{a^2}{b^3}$ **; 8).** $\frac{27a^{k-2}b^{8k-2}}{25}$ **; 9).** $\frac{6561x^6y^{25}}{16}$ **; 10).** $2048x^4y^8$

PRÁCTICA Nº3

1. $\frac{2c^3y^3}{d^2}$; 2. 1; 3. $\frac{4}{3x^3}$; 4. $\frac{y^6}{x^{17}}$; 5. $\frac{1}{a^{n-4}}$; 6. $9x^{2n}$.

3. RADICALES

Raíz es una expresión algebraica que elevada a una potencia reproduce la expresión dada. Así $2a$ es la raíz cuadrada de $4a^2$ por que $(2a)^2 = 4a^2$. Pero $-2a$ también es raíz cuadrada de $4a^2$ porque $(-2a)^2 = 4a^2$.

Así 3x es raíz cúbica de $27x^3$ porque $(3x)^3 = 27x^3$.

El *signo de raíz es* $\sqrt{\ }$, llamado signo radical. Debajo de este signo se coloca la cantidad a la cual se extrae la raíz llamada *cantidad subradical*.

El signo $\sqrt{\ }$ lleva un *índice* que indica la potencia a que hay que elevar la raíz para que reproduzca la cantidad subradical. Por convención el índice 2 se suprime y cuando el signo $\sqrt{\ }$ no lleva índice se entiende que el índice es 2.

✔ *Si una raíz indicada es exacta, tenemos una cantidad racional. Si no tiene raíz exacta, es irracional.*
Así: $25a^2 = +5a$ es una cantidad racional y $\sqrt{3a}$ es una cantidad irracional, este no tiene raíz exacta.

El *grado de un radical* lo indica el índice de la raíz.2. Así: $\sqrt{x}$ es un radical de segundo grado, $\sqrt[3]{3a}$ es una radical de tercer grado.

3.1 Propiedades de los radicales.

3.1.1 Ley distributiva.

✔ *En la radicación no se cumple esta ley con relación a la suma y a la resta; esto es:*

1. $\sqrt{36+64}$ no es igual $\sqrt{36}$ + $\sqrt{64}$.
Observe:
$\sqrt{36+64} \neq \sqrt{36}+\sqrt{64}$

$\sqrt{100} \neq 6+8$

$10 \neq 14$

2. $\sqrt{25-9}$ = $\sqrt{16}$ = 4; pero $\sqrt{25}-\sqrt{9}=5-3=2$ no es igual.

La radicación es distributiva con relación a la multiplicación y a la división:
En efecto si tenemos: $\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c}$ *esto es igual a* $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$.

Ejemplo 1: Simplifique $\sqrt{4a^2x \cdot 25b^2}$.

Solución:
$\sqrt{4a^2x \cdot 25b^2}$ Es igual a $\sqrt{4a^2} \cdot \sqrt{25b^2}$ porque $\sqrt{100a^2b^2} = 10ab$ y $(2a)(5b) = 10ab$.

En el caso de la división podemos aplicar la siguiente relación: si $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ *es lo mismo siempre y cuando* $b \neq 0$.

Ejemplo 2: Simplifique $\sqrt{\dfrac{4a^2}{9b^2}}$.

Solución:
$$\sqrt{\frac{4a^2}{9b^2}} = \frac{\sqrt{4a^2}}{\sqrt{9b^2}} = \frac{+2a}{-3b} .$$

Simplificación de radicales.

Es reducir a su más simple expresión. Un radical está reducido a su más simple expresión, cuando la cantidad subradical es entera y del menor grado posible.
En la simplificación de radicales consideraremos los dos casos siguientes:

Caso 1:
Cuando la cantidad subradical contiene factores cuyo exponente es divisible por el índice.

Ejemplo 3: Simplifique $\sqrt{9a^3} = .$

Solución:

$\sqrt{9a^3}$ Se descompone el 9 y a^3 en dos factores tales que uno de ellos posean raíz cuadrada exacta a la raíz indicada.

Así que $9 = 3^2$ y $a^3 = a^2 \cdot a$.

Entonces $\sqrt{9a^3} = \sqrt{3^2 \cdot a^2 \cdot a} = 3^{\frac{2}{2}} \cdot a^{\frac{2}{2}} \cdot \sqrt{a} = 3a\sqrt{a}$.

Se saca del radical, aquellos factores cuyo exponente sea divisible por el índice (dividiendo su exponente por el índice).

PRÁCTICA Nº4

Simplifique:

1. $3\sqrt{81x^3y^4}$ 2. $\sqrt[3]{160x^7y^9z^{13}}$ 3. $\sqrt[5]{32x^6y^{12}}$ 4. $\sqrt{\dfrac{x^2y^6}{x^6y^4}}$ 5. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^8}}$

CASO 2:

Cuando los factores de la cantidad subradical y el índice tienen un divisor común.

Ejemplo 4: Simplifique $\sqrt[4]{4a^2}$.

Solución:

Se descompone $4 = 2^2$ y se reemplaza $\sqrt[4]{2^2a^2}$ aplicando la tercera regla de los exponentes (teorema 2), a la inversa tenemos: $2^{\frac{2}{4}}\ a^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}\ a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2a}$.

PRÁCTICA Nº5

Simplifique:

1. $\sqrt[8]{25a^2b^2}$ 2. $\sqrt[8]{81x^4y^8}$ 3. $\sqrt[6]{343a^9x^{12}}$ 4. $\sqrt[15]{m^{10}n^{15}x^{20}}$

Reducción de radicales al mínimo común índice.

Esta operación tiene como objeto convertir radicales de distintos índice en radicales equivalentes que tengan el mismo índice. Para ello, se aplica la siguiente regla:

Se encuentra el M. C. M. de los índices, que será el índice común y se eleva cada cantidad subradical a la potencia que resulta de dividir el índice común entre el índice de su radical.

Ejemplo 5: Reduzca al mínimo común índice: $\sqrt{2a}$, $\sqrt[3]{3a^2b}$ y $\sqrt[6]{15a^3x^2}$.

Solución:

El M.C.M. de los índices: 1, 2 y 6 es 6. Dividiendo 6 entre cada índice se obtiene el exponente de la cantidad subradical.

$\sqrt{2a} = \sqrt[6]{(2a)^3} = \sqrt[6]{8a^3}$

$\sqrt[3]{3a^2b} = \sqrt[6]{(3a^2b)^2} = \sqrt[6]{9a^4b^2}$

$\sqrt[6]{15a^3x^2} = \sqrt[6]{15a^3x^2} = \sqrt[6]{15a^3x^2}$

PRÁCTICA Nº6

Reduzca al mínimo común índice:

1. $\sqrt{5x},\ \sqrt[3]{4x^2y},\ \sqrt[6]{7a^3b}$ 2. $\sqrt[3]{2ab},\ \sqrt[5]{3a^2x},\ \sqrt[15]{5a^3x^2}$ 3. $\sqrt[4]{8a^2x^3},\ \sqrt[6]{3a^5m^4}$
4. $\sqrt{2m},\ 3\sqrt[5]{a^3x^4},\ 2\sqrt[10]{x^7y^2}$.

3.2 Operaciones con radicales.

3.2.1 Suma y resta de radicales.

Se descomponen las cantidades subradicales y se extraen aquellas cantidades que se puedan sacar del radical, luego; se reducen los radicales semejantes y a continuación se escriben los radicales no semejantes con sus propios signo.

Ejemplo 6: Reduzca $\sqrt{45a^2} + \sqrt{80x^2}$.

Solución:

$\sqrt{45a^2} + \sqrt{80x^2} = \sqrt{3^2 \cdot 5a^2} + \sqrt{2^4 \cdot 5x^2} = 3a\sqrt{5} + 4x\sqrt{5} = (3a + 4x)\sqrt{5}$

Ejemplo 7: Reduzca $2\sqrt{2ab^2} + \sqrt{18a^3} - (a + 2b)\sqrt{2a}$.

Solución:

$2b\sqrt{2a} + \sqrt{3^2 \cdot 2a^2 \cdot a} - (a + 2b)\sqrt{2a} = 2b\sqrt{2a} + 3a\sqrt{2a} - (a + 2b)\sqrt{2a}$

$= (2b + 3a - a - 2b)\sqrt{2a} = 2a\sqrt{2a}$

PRÁCTICA Nº7

Simplifique:

1. $\sqrt{25ax^2} + \sqrt{49}b - \sqrt{9ax^2}$
2. $2\sqrt{m^2n} - \sqrt{9m^2n} + \sqrt{16mn^2} - \sqrt{4mn^2}$
3. $a\sqrt{320x} - 7\sqrt{5a^2x} - (a - 4b)\sqrt{5x}$
4. $\sqrt{9x - 9} + \sqrt{4x - 4} - 5\sqrt{x - 1}$
5. $2\sqrt{a^4x + 3a^4y} - a^2\sqrt{9x + 27y} + \sqrt{25a^4x + 75a^4y}$

3.2.2 Multiplicación de radicales

Regla:

Se multiplican los coeficientes entre sí y las cantidades subradicales entre sí, colocando este último producto bajo el signo radical común y se simplifica el resultado.
Así que: $a\sqrt[n]{m}\times b\sqrt[n]{x} = ab\sqrt[n]{mx}$.

Ejemplo 8: Multiplique $\sqrt{x+1}+2\sqrt{x}$ por $3\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.
Solución:

$$\left(\sqrt{x+1}+2\sqrt{x}\right)\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$$
$$=3\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{x^2+x}+6\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{x^2}$$
$$=3(x+1)+5\sqrt{x^2+x}-2x$$
$$=3x+3+5\sqrt{x^2+x}-2x$$
$$=(x+3)+5\sqrt{x^2+x}$$

PRÁCTICA Nº8

Simplifique:

1. $\sqrt{a}+\sqrt{a+1}$ por $\sqrt{a}+2\sqrt{a+1}$ 2. $2\sqrt{a}-3\sqrt{a-b}$ por $3\sqrt{a}+\sqrt{a-b}$

3. $2\sqrt{x+2}-2$ por $\sqrt{x+2}-3$ 4. $\dfrac{2}{x}\sqrt{a^2x}\times\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{1}{a^3}}$ 5. $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{x}{y^2}}\times 6\sqrt{\dfrac{2}{y}}$.

3.2.3 Multiplicación de radicales de distintos índice

Se reduce los radicales al mínimo índice, y se multiplican, como radicales del mismo índice.

Ejemplo 9: Multiplique $\sqrt{x}$ por $\sqrt[3]{2x^2}$.
Solución:

$$\sqrt[6]{\left(x^3\right)}.\sqrt[6]{\left(2x^2\right)^2}=\sqrt[6]{x^3}.\sqrt[6]{4x^4}=\sqrt[6]{4x^7}=x\sqrt[6]{4x}\ .$$

PRÁCTICA Nº9

Simplifique:

1. $3\sqrt{2ab}.4\sqrt[6]{8a^3}$ 2. $\sqrt[3]{9x^2y}.\sqrt[6]{81x^5}$ 3. $\sqrt[3]{a^2b^2}.2\sqrt[4]{3a^3b}$ 4. $\sqrt[5]{125x^4y}.\sqrt{5y^5}$

3.2.4 División de radicales

División de radicales del mismo índice.

Regla:
Se dividen los coeficientes entre sí y las cantidades subradicales entre sí, colocando este último cociente, bajo el signo radical común y se simplifica el resultado.

Ejemplo 10: Divida $2\sqrt[3]{81x^7}$ entre $3\sqrt[3]{3x^2}$.
Solución:

Aplicando la propiedad distributiva respecto a la división pero en forma inversa:

$$= \frac{2\sqrt[3]{81x^7}}{3\sqrt[3]{3x^2}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{81x^7}{3x^2}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{27x^5} = \frac{2}{3}\cdot 3\cdot x\sqrt[3]{x^2} = 2x\sqrt[3]{x^2}\ .$$

PRÁCTICA Nº10

Resuelva:

1. $\frac{1}{2}\sqrt{3xy}$ entre $\frac{3}{4}\sqrt{x}$ 2. $\sqrt[3]{8a^3b}$ entre $\sqrt[4]{4a^2}$ 3. $3\sqrt[3]{16a^5}$ entre $4\sqrt[3]{2a^2}$

4. $\sqrt[6]{18x^3y^4z^5}$ entre $\sqrt[4]{3x^2y^2z^3}$

3.3 Racionalización de denominadores

Una fracción que contiene un radical en el denominador se puede expresar siempre por medio de otra fracción equivalente que no contenga ningún radical en el denominador..

Este proceso se llama *Racionalización de Denominadores*. Muchas operaciones que comprenden radicales se facilitan si al principio se racionalizan todos los denominadores. Si el radicando es una fracción cuyo denominador es un monomio, o si el denominador de una fracción tiene un radical como factor, el radical se elimina del denominador, según el método que se ilustra en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 11: Racionalice $\frac{3}{\sqrt{2x}}$.

Solución:

$$\frac{3}{\sqrt{2x}} = \frac{3\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\cdot\sqrt{2x}} = \frac{3\sqrt{2x}}{\sqrt{2^2x^2}} = \frac{3\sqrt{2x}}{2x} = \sqrt{2x}\ .$$

Ejemplo 12: Racionalice $\frac{5}{3\sqrt[4]{2x^2}}$.

Solución:

$$\frac{5}{3\sqrt[4]{2x^2}} = \frac{5\sqrt[4]{2^3x^2}}{3\sqrt[4]{2x^2}\cdot\sqrt[4]{2^3x^2}} = \frac{5\sqrt[4]{8x^2}}{3\sqrt[4]{2^4x^4}} = \frac{5}{6x}\sqrt[4]{8x^2}$$

PRÁCTICA Nº11

Simplifique:

1. $\dfrac{2a}{\sqrt{ax}}$ 2. $\dfrac{5}{\sqrt[3]{4a^2}}$ 3. $\dfrac{x}{\sqrt[4]{27x^2}}$ 4. $\dfrac{5n^2}{3\sqrt{mn}}$.

Al racionalizar el denominador de una fracción, cuando el denominador es un binomio que contiene radicales de segundo grado, se multiplican ambos términos de la fracción por la *conjugada del denominador* y se simplifica el resultado.

La conjugada de una expresión es que defieren en el signo que une sus términos $a\sqrt{b} - \sqrt{c}$ *es* $a\sqrt{b} + \sqrt{c}$.

Ejemplo 13: Racionalice $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{2\sqrt{a}+\sqrt{x}}$.

Solución:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{2\sqrt{a}+\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)\left(2\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)}{\left(2\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)\left(2\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)} = \frac{2\sqrt{a^2}-\sqrt{ax}+2\sqrt{ax}-\sqrt{x^2}}{4\sqrt{a^2}-2\sqrt{ax}+2\sqrt{ax}-\sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{2\mathrm{a}+\sqrt{\mathrm{ax}}-x}{4a-x} = \frac{2\mathrm{a} - \mathrm{x} + \sqrt{\mathrm{ax}}}{4a-x}$$

PRÁCTICA Nº12

Simplifique:

1. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$ 2. $\dfrac{\sqrt{n+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{2}}$ 3. $\dfrac{\sqrt{a+4}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+4}+\sqrt{a}}$ 4. $\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$.

RESPUESTAS

PRÁCTICA Nº4

1. $27xy^2\sqrt{x}$; 2. $2x^2y^3z^4\ \sqrt[3]{20xz}$; 3. $2xy^2\ \sqrt[5]{xy^2}$; 4. $\dfrac{y}{x^2}$; 5. $\dfrac{1}{x^2}$.

PRÁCTICA Nº5

1. $\sqrt[4]{5ab}$ **; 2.** $y\sqrt{3x}$ **; 3.** $ax^2\sqrt{7a}$ **; 4.** $nx\sqrt[3]{m^2x}$ **.**

PRÁCTICA Nº6

1. $\sqrt[6]{125x^3}$, $\sqrt[6]{16x^4y^2}$, $\sqrt[6]{7a^3b}$ **; 2.** $\sqrt[15]{32a^5b^5}$, $\sqrt[15]{27a^6x^3}$, $\sqrt[15]{5a^3x^2}$ **;**

3. $\sqrt[12]{512a^6x^9}$, $\sqrt[12]{9a^{10}m^8}$ **4.** $\sqrt[10]{32m^5}$, $3\ \sqrt[10]{a^6x^8}$, $2\ \sqrt[10]{x^7y^2}$

PRÁCTICA Nº7

1. $2x\sqrt{a}+7\sqrt{b}$ **; 2.** $2n\sqrt{m}-m\sqrt{n}$ **; 3.** $4b\sqrt{5x}$ **; 4.** 0 **; 5.** $4a^2\sqrt{x+3y}$ **.**

PRÁCTICA Nº8

1. $(3a+2)+3\sqrt{a^2+a}$ **; 2.** $(3a+3b)-7\sqrt{a^2-ab}$ **; 3.** $(2x+10)-8\sqrt{x+2}$ **; 4.** $\dfrac{3}{ax}\sqrt{ax}$ **;**

5. $\dfrac{2}{y^2}\sqrt{2xy}$

PRÁCTICA Nº9

1. $24a\sqrt{b}$ **; 2.** $3x\sqrt[6]{9x^3y^2}$ **; 3.** $2a\sqrt[12]{27a^5b^{11}}$ **; 4.** $5y^2\sqrt[10]{5x^8y^7}$

PRÁCTICA Nº10

1. $\dfrac{2}{3}\sqrt{3y}$ **; 2.** $\sqrt[6]{8a^3b^2}$ **; 3.** $\dfrac{3a}{2}$ **; 4.** $\sqrt[12]{12y^2z}$

PRÁCTICA Nº11

1. $\dfrac{2}{x}\sqrt{ax}$ **; 2.** $\dfrac{5}{2a}\sqrt[3]{2a}$ **; 3.** $\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{3x^2}$ **; 4.** $\dfrac{5n}{3m}\sqrt{mn}$

PRÁCTICA Nº12

1. $2x-1-2\sqrt{x^2-x}$ **; 2.** $\dfrac{n+4+2\sqrt{2n+4}}{n}$ **; 3.** $\dfrac{a+2-\sqrt{a^2+4a}}{2}$ **; 4.** $\dfrac{a-\sqrt{(a+b)(a-b)}}{b}$

4. PRODUCTOS NOTABLES

Entre los diversos productos algebraicos, hay algunos que debido a su forma reciben el nombre de **Productos Notables.**
En los casos que veremos a continuación las letras representan números reales.

4.1 Binomio al Cuadrado

$$(x\pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$$

Para calcular el cuadrado de un binomio, se eleva al cuadrado el primer término, más o menos el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término.

Ejemplos:

1. $(3a+4b)^2 = (3a)^2 + 2(3a)(4b) + (4b)^2$
$\qquad = 9a^2 + 24ab + 16b^2$

2. $\left(2x-\frac{1}{2}y\right)^2=(2x)^2-2(2x)\left(\frac{1}{2}y\right)+\left(\frac{1}{2}y\right)^2$

$$=4x^2-2xy+\frac{1}{4}y^2$$

4.2 Trinomio al Cuadrado

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

El cuadrado de un trinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de sus términos más el duplo de las combinaciones binarias que con ellos pueden formarse.
Esta regla se cumple, cualquiera que sea el número de términos del polinomio. Las combinaciones binarias son los productos tomados con el signo que resulte de la multiplicación.
Obsérvese que los cuadrados de todos los términos son positivos.

Ejemplo:

3. $(3x-y-2z)^2=(3x)^2+(y)^2+(2z)^2+2(3x)(-y)+2(3x)(-2z)+2(-y)(-2z)$

$$=9x^2+y^2+4z^2-6xy-12xz+4yz$$

4.3 Binomio al Cubo

$$(a\pm b)^3=(a)^3\pm 3(a)^2(b)+3(a)(b)^2\pm(b)^3$$

El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término más o menos el triple producto del cuadrado del primero por el segundo término más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo término más o menos el cubo del segundo término.

Ejemplos:

4. $(2x+1)^3=(2x)^3+3(2x)^2(1)+3(2x)(1)^2+(1)^3$

$$=8x^3+12x^2+6x+1$$

5. $(3a^2-2b)^3=(3a^2)^3-3(3a^2)^2(2b)+3(3a^2)(2b)^2-(2b)^3$

$$=27a^6-54a^4b+36a^2b^2-8b^3$$

4.4 Suma por Diferencia (Conjugados)

$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$$

El producto de la suma de dos cantidades por su diferencia es igual al cuadrado de la primera cantidad menos el cuadrado de la segunda cantidad.

Ejemplos:

6. $\left(5x^2+11\right)\left(5x^2-11\right)=\left(5x^2\right)^2-\left(11\right)^2$
$$=25x^4-121$$

7. $\left(-\frac{a^2}{2}+5a\right)\left(-\frac{a^2}{2}-5a\right)=\left(-\frac{a^2}{2}\right)^2-\left(5a\right)^2$

$$=\frac{a^4}{4}-25a^2$$

8. $\left(2x^a+3y^{2b}\right)\left(2x^a-3y^{2b}\right)=\left(2x^a\right)^2-\left(3y^{2b}\right)^2$
$$=4x^{2a}-9y^{4b}$$

9. $\left(m^2-m+n\right)\left(n+m+m^2\right)=\left[\left(m^2+n\right)-m\right]\left[\left(m^2+n\right)+m\right]$
$$=\left(m^2+n\right)^2-\left(m\right)^2$$
$$=m^4+2m^2n+n^2-m^2$$

4.5 Producto de la Forma $\left(ax+b\right)\left(cx+d\right)$

$$\left(ax+b\right)\left(cx+d\right)=acx^2+\left(ad+bc\right)x+bd$$

Caso Particular si $a=c=1$
$$\left(x+b\right)\left(x+d\right)=x^2+\left(b+d\right)x+bd$$

Ejemplos:

10. $(y+7)(y+4) = y^2+(7+4)y+(7)(4)$
$$= y^2+11y+28$$

11. $(x-8)(x-11) = x^2+\left[\left(-8\right)+\left(-11\right)\right]x+\left(-8\right)\left(-11\right)$
$$= x^2-19x+88$$

12. $(y^3-7)(y^3+5) = \left(y^3\right)^2+\left[\left(-7\right)+5\right]y^3+\left(-7\right)\left(5\right)$
$$= y^6-2y^3-35$$

13. $\left(3x+4\right)\left(2x+1\right)=\left(3\right)\left(2\right)x^2+\left[\left(3\right)\left(1\right)+\left(4\right)\left(2\right)\right]x+\left(4\right)\left(1\right)$
$$= 6x^2+11x+4$$

14. $\left(2y^6-4\right)\left(3y^6+5\right)=\left(2\right)\left(3\right)\left(y^6\right)^2+\left[\left(2\right)\left(5\right)+\left(-4\right)\left(3\right)\right]y^6+\left(-4\right)\left(5\right)$
$$= 6y^{12}-2y^6-20$$

PRÁCTICA Nº13

I. Resolver los productos indicados:

1) $(6a-4b)^2$ **R:** $36a^2-48ab+16b^2$
2) $(1-y^2)^3$ **R:** $1-3y^2+3y^4-y^6$
3) $(0.3m-1.1n)(0.3m+1.1n)$ **R:** $0.09m^2-1.21n^2$
4) $(a^m+b^n)(a^m-b^n)$ **R:** $a^{2m}-b^{2n}$
5) $(x^2-2x+5)^2$ **R:** $x^4-4x^3+14x^2-20x+25$
6) $(y^2-3y)(y^2+3y)$ **R:** y^4-9y^2
7) $(2x^2+3x)^2$ **R:** $4x^4+12x^3+9x^2$
8) $(x^2-2y)^3$ **R:** $x^6-6x^4y+12x^2y^2-8y^3$
9) $(a-11)(a+10)$ **R:** $a^2-a-110$
10) $(12-xy)^2$ **R:** $144-24xy+x^2y^2$
11) $(7ax-2)(2ax-4)$ **R:** $14a^2x^2-32ax+8$
12) $\left(\frac{2}{3}m-\frac{3}{5}n\right)^2$ **R:** $\frac{4}{9}m^2-\frac{4}{5}mn+\frac{9}{25}n^2$
13) $(x-y+1)(x-y-1)$ **R:** $x^2-2xy+y^2-1$
14) $(x^2-1)(x^2-7)$ **R:** x^4-8x^2+7
15) $(x^2+2xy)^3$ **R:** $x^6+6x^5y+12x^4y^2+8x^3y^3$
16) $(3x-1)(0.5x+6)$ **R:** $1.5x^2+17.5x-6$
17) $(x-2y+z-3r)^2$ **R:** $x^2+4y^2+z^2+9r^2-4xy$
$+2xz-6xr-4yz+12yr-6zr$
18) $\left(\frac{2}{3}x+1\right)\left(\frac{3}{4}x-3\right)$ **R:** $\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x-3$
19) $(x^2y^3+3)(x^2y^3-1)$ **R:** $x^4y^6+2x^2y^3-3$
20) $(2-x+y)(y-x-2)$ **R:** $y^2-2xy+x^2-4$

5. FACTORIZACION

La multiplicación consiste en obtener el producto de dos o más expresiones dadas, los cuales se llaman factores de ese producto. Ahora estudiaremos el caso inverso, que consiste en obtener los factores de un producto dado.
Factorizar un polinomio significa expresarlo como un producto de polinomios irreductibles. Un polinomio con coeficientes en algún conjunto de números es primo o irreducible sobre ese conjunto, si no puede escribirse como producto de dos polinomios con coeficientes en el conjunto de números indicado.

El máximo factor común de una expresión es el producto de los factores que aparecen en cada término, cada uno elevado al exponente menor diferente de cero que aparezca en cualquier término.
Consideremos algunos casos de factorización de polinomios. La mayor parte de estos tipos de factorización tienen su fundamento en las fórmulas de productos notables.

5.1 Factor Común

5.1.1 Factor Común Monomio

Si cada término de una expresión algebraica contiene un monomio que es factor común, ese monomio es un factor de toda la expresión como consecuencia de la propiedad distributiva. La expresión se descompone en dos factores: el factor común y el formado por los términos del polinomio dividido entre el factor común.

$$ab + ac = a(b + c)$$
$$\frac{ab}{a} = b \qquad \frac{ac}{a} = c$$

Ejemplos: Descomponer en factores

1. $2ab^2x^2 - 4ab^2xy + 6ab^2y^2 = 2ab^2(x^2 - 2xy + 3y^2)$

$$\frac{2ab^2x^2}{2ab^2} = x^2 \qquad \frac{-4ab^2xy}{2ab^2} = -2xy \qquad \frac{6ab^2y^2}{2ab^2} = 3y^2$$

2. $3m^2n^3 + 3m^3n^2 - 6mn = 3mn(mn^2 + m^2n - 2)$
3. $7a + 14a^2 = 7a(1 + 2a)$

5.1.2 Factor Común Polinomio

Si los términos de una expresión algebraica tienen un polinomio como factor común, la factorización es el producto de dos factores, el primero es el factor común y el segundo factor se obtiene con un proceso semejante al caso de factor común monomio.

Ejemplos: Factorice

4. $(a + b)x + (a + b)y = (a + b)(x + y)$

5. $(x + 2)y + x + 2 = (x + 2)y + (x + 2)(1)$
$= (x + 2)(y + 1)$

6. $(x + 2)(x - 1) - (x - 1)(x - 3) = (x - 1)[(x + 2) - (x - 3)]$
$= (x - 1)(x + 2 - x + 3)$
$= (x - 1)(5)$
$= 5(x - 1)$

7. $a(x+1)-b(x+1)-x-1 = a(x+1)-b(x+1)-(x+1)$
$$= (x+1)(a-b-1)$$

5.1.3 Factor Común por Agrupación de Términos

Se agrupan los términos que tienen algún factor común y se resuelve como factor común monomio y luego como factor común polinomio.

Ejemplos: Factorice

8. $ax+ay+bx+by = (ax+ay)+(bx+by)$
$$= a(x+y)+b(x+y)$$
$$= (x+y)(a+b)$$

9. $2x^2-3xy-4x+6y = (2x^2-4x)-(3xy-6y)$
$$= 2x(x-2)-3y(x-2)$$
$$= (x-2)(2x-3y)$$

10. $3a^3-3a^2b+9ab^2-a^2+ab-3b^2 = (3a^3-a^2)-(3a^2b-ab)+(9ab^2-3b^2)$
$$= a^2(3a-1)-ab(3a-1)+3b^2(3a-1)$$
$$= (3a-1)(a^2-ab+3b^2)$$

5.2 Trinomio Cuadrado Perfecto

Un trinomio es Cuadrado Perfecto si se tienen dos términos cuadrados y un tercer término expresado como el doble producto de sus raíces.
Para factorizarlo se extrae la raíz cuadrada al primero y tercer términos del trinomio y se separan estas raíces por el signo del segundo término. El binomio formado se eleva al cuadrado.

$$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$$

Ejemplos: Factorice

11. $9x^2-12xy+4y^2 = (3x-2y)^2$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 3x & & 2y \\ & 2(3x)(2y) & \end{array}$$

12. $1+14x^2y+49x^4y^2 = (1+7x^2y)^2$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$

$1 \qquad \qquad 7x^2y$

$2(1)(7x^2y)$

13. $1+\frac{2b}{3}+\frac{b^2}{9} = \left(1+\frac{b}{3}\right)^2$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$1 \qquad \frac{b}{3}$

$2(1)\left(\frac{b}{3}\right)$

14. $(m-n)^2-6(m-n)+9 = (m-n-3)^2$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$

$m-n \qquad \qquad 3$

$2(m-n)(3)$

5.3 Diferencia de Cuadrados

$$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$$

Para factorizarlo se extrae la raíz cuadrada al minuendo y sustraendo y se multiplica la suma de estas raíces cuadradas por su diferencia.

Ejemplos: Factorice

15. $4a^4x^6-25b^6y^4 = (2a^2x^3+5b^3y^2)(2a^2x^3-5b^3y^2)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$2a^2x^3 \qquad 5b^3y^2$

16. $9u^2 - 4v^2 = (3u+2v)(3u-2v)$

$\downarrow \quad \downarrow$

$3u \quad 2v$

17. $81 - x^2y^4 = (9+xy^2)(9-xy^2)$

$\downarrow \quad \downarrow$

$9 \quad xy^2$

18. $16x^2 - (x-y)^2 = [4x+(x-y)] \quad [4x-(x-y)]$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad = (5x-y)(3x+y)$

$4x \quad x-y$

5.4 Trinomio de la Forma $x^2 + bx + c$

Se buscan dos números enteros p y q cuya suma sea b y cuyo producto sea c. La factorización es el producto de los binomios $(x+p)$ y $(x+q)$.

Ejemplos: Factorice

19. $x^2 + 5x + 6$

Buscar dos números enteros p y q tales que

$$p+q=5 \quad \text{y} \quad pq=6$$
$$3+2=5 \qquad (3)(2)=6$$

Los números son 2 y 3

$$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$$

20. $x^2+2x-48=(x+8)(x-6)$

$p+q=2 \qquad pq=\text{-}48$

$8+(-6)=2 \qquad (8)(-6)=-48$

21. $x^2-4x-5=(x-5)(x+1)$

$p+q=-4 \qquad pq=-5$

$\text{-}5+1=\text{-}4 \qquad \text{-}5(1)=\text{-}5$

5.5 Trinomio de la Forma $ax^2 + bx + c$

Para factorizar un trinomio de la forma ax^2+bx+c se multiplica y divide por el coeficiente de x^2 y luego se resuelve como el caso del trinomio de la forma x^2+bx+c.

Ejemplos:

22. Factorice $3x^2+13x+10$

Solución:

$$3x^2+13x+10=\frac{3(3x^2+13x+10)}{3}=\frac{9x^2+13(3x)+30}{3}$$
$$=\frac{(3x+10)(3x+3)}{3}$$
$$=\frac{3(3x+10)(x+1)}{3}$$
$$=(3x+10)(x+1)$$

23. Factorice $2x^2-x-3$

Solución:

$$2x^2-x-3=\frac{2(2x^2-x-3)}{2}=\frac{(2x)^2-(2x)-6}{2}$$
$$=\frac{(2x-3)(2x+2)}{2}$$
$$=\frac{(2x-3)2(x+1)}{2}$$
$$=(2x-3)(x+1)$$

24. Factorice $10x^2-7x-12$

Solución:

$$10x^2-7x-12=\frac{10(10x^2-7x-12)}{10}$$
$$=\frac{(10x)^2-7(10x)-120}{10}$$
$$=\frac{(10x-15)(10x+8)}{10}$$
$$=\frac{5(2x-3)2(5x+4)}{10}$$
$$=(2x-3)(5x+4)$$

Una forma alternativa de factorizar este trinomio es obtener 4 números m, n, p y q tales que m y p sean factores del coeficiente de x^2, n y q sean factores del término constante y la suma de los productos mp y qr sea el coeficiente de x. Estos números se obtienen mediante ensayos.

$$ax^2+bx+c=mnx^2+(mp+qn)x+qp$$

Donde

$$a=mn$$
$$b=mp+qr$$
$$c=qp$$

Ejemplos: Factorice

25. $6x^2-11x-10$

Solución:
Los factores de los coeficientes deben ser: $6=(2)(3)$; $-10=(2)(-5)$
Agrupamos: $(3)(-5)+(2)(2)=-11$
Luego, $6x^2-11x-10=(3x+2)(2x-5)$

$4x$

$-15x$

El término -11x se obtiene resolviendo:
$-15x+4x=-11x$

26. $10x^2+33x-7=(5x-1)(2x+7)$

$-2x$

$35x$

27. $3x^2-5x-2=(x-2)(3x+1)$

$-6x$

x

5.6 Suma y Diferencia de Cubos Perfectos

Suma de cubos perfectos

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

La suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores: El primer factor es la suma de sus raíces cúbicas y el segundo factor se obtiene elevando al cuadrado la primera raíz, menos el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

Diferencia de cubos perfectos

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

La diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores: El primer factor es la diferencia de sus raíces cúbicas y el segundo factor se obtiene elevando al cuadrado la primera raíz, más el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

Ejemplos: Factorice

28. $8x^6 + 27y^3 = \left(2x^2 + 3y\right)\left[\left(2x^2\right)^2 - \left(2x^2\right)(3y) + (3y)^2\right]$

$\downarrow \quad \downarrow \qquad = \left(2x^2 + 3y\right)\left(4x^4 - 6x^2y + 9y^2\right)$

$2x^2 \quad 3y$

29. $512 + 27a^9 = \left(8 + 3a^3\right)\left[(8)^2 - 8\left(3a^3\right) + \left(3a^3\right)^2\right]$

$\downarrow \quad \downarrow \qquad = \left(8 + 3a^3\right)\left(64 - 24a^3 + 9a^6\right)$

$8 \quad 3a^3$

30. $8x^3 - 64y^3 = (2x - 4y)\left[(2x)^2 + (2x)(4y) + (4y)^2\right]$

$\downarrow \quad \downarrow \qquad = (2x - 4y)\left(4x^2 + 8xy + 16y^2\right)$

$2x \quad 4y$

31. $(2a - b)^3 - 27 = (2a - b - 3)\left[(2a - b)^2 + (2a - b)(3) + 3^2\right]$

$\downarrow \quad \downarrow \qquad = (2a - b - 3)\left(4a^2 - 4ab + b^2 + 6a - 3b + 9\right)$

$2a - b \quad 3$

5.7 Polinomio Cubo Perfecto

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$$

Para que un polinomio de 4 términos sea el cubo de un binomio debe cumplir las siguientes condiciones:

1. El primer y el último término sean cubos perfectos.
2. Que el segundo término sea más o menos el triple del cuadrado de la raíz cúbica del primer término multiplicado por la raíz cúbica del último término.
3. Que el tercer término sea más el triple de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del último término.

Si los términos son positivos se refiere al cubo de la suma de las raíces cúbicas de su primero y último término y si son alternados positivos y negativos, la expresión dada es el cubo de la diferencia de dichas raíces.

Ejemplos: Factorice

32. $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3 = (2x - 3y)^3$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$2x \qquad 3y$

$3(2x)^2(3y)$

$3(2x)(3y)^2$

33. $125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3 = (5a+2b)^3$

$\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$

$5a$ $\qquad\qquad$ $2b$

$3(5a)^2(2b)$

$3(5a)(2b)^2$

34. $216 - 756a^2 + 882a^4 - 343a^6 = (6-7a^2)^3$

$\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$

6 $\qquad\qquad$ $7a^2$

$3(6)^2(7a^2)$

$3(6)(7a^2)^2$

PRÁCTICA Nº 14

I. En cada uno de los ejercicios, factorice la expresión dada.

1. $20a^2 + 100ab + 125b^2$ R: $5(2a+5b)^2$
2. $3x^2 - 39x - 42$ R: $3(x-14)(x+1)$
3. $y^2 - 16y - 36$ R: $(y-18)(y+2)$
4. $y^2 + 10y + 21$ R: $(y+7)(y+3)$
5. $8x^3 - y^3$ R: $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$
6. $36x^4 - 84x^2 + 49$ R: $(6x^2-7)^2$
7. $25x^2 - 16y^2$ R: $(5x+4y)(5x-4y)$
8. $y^2 - (5x-3)^2$ R: $(y+5x-3)(y-5x+3)$
9. $9x^4 - 16y^4$ R: $(3x^2+4y^2)(\sqrt{3}x+2y)(\sqrt{3}x-2y)$
10. $27x^3 + 64y^3$ R: $(3x+4y)(9x^2-12xy+16y^2)$
11. $64x^3 - 125$ R: $(4x-5)(16x^2+20x+25)$
12. $a^6 - b^6$ R: $(a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4)$
13. $2x^3y^2 - 6xy^3$ R: $2xy^2(x^2-3y)$
14. $8b^2m^2 + 24b^2mn + 18b^2n^2$ R: $2b^2(2m+3n)^2$
15. $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$ R: $(2x-y)^3$
16. $ax - 2bx - 2ay + 4by$ R: $(x-2y)(a-2b)$
17. $4a^3x - 4a^2b + 3bm - 3amx$ R: $(ax-b)(4a^2-3m)$
18. $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$ R: $(m+n)^3$

19. $1-3a+3a^2-a^3$ R: $(1-a)^3$

20. $64x^3+240x^2y+300xy^2+125y^3$ R: $(4x+5y)^3$

21. $1+14x^2y+49x^4y^2$ R: $(1+7x^2y)^2$

22. $\frac{1}{25}+\frac{25x^4}{36}-\frac{x^2}{3}$ R: $\left(\frac{1}{5}-\frac{5x^2}{6}\right)^2$

23. $2x(n-1)-3y(n-1)$ R: $(n-1)(2x-3y)$

24. $x(2a+b+c)-2a-b-c$ R: $(2a+b+c)(x-1)$

25. $-m-n+x(m+n)$ R: $(m+n)(x-1)$

6. OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

6.1 Reducción.

La expresión se factoriza y si existiera factores comunes en el numerador y denominador de la fracción se cancelan para reducir la fracción a su expresión más simple.

Ejemplo: reduzca cada fracción a su más simple expresión.

1) $\frac{x^2+2ab+b^2}{x^2-ab-2b^2}=\frac{(x+y)(x+y)}{(x+y)(x-2y)}=\frac{x+y}{x-2y}$

2) $\frac{2c^2-2d^2}{10c+10d}=\frac{2(c^2-d^2)}{10(c+d)}=\frac{2(c-d)\cancel{(c+d)}}{10\cancel{(c+d)}}=\frac{c-d}{5}$

3) $\frac{12x^2+31x+20}{18x^2+21x-4}=\frac{\cancel{(3x+4)}(4x+5)}{\cancel{(3x+4)}(6x-1)}=\frac{4x+5}{6x-1}$

6.2 Multiplicación y División.

Las reglas para multiplicar y dividir fracciones algebraicas son los mismos que las reglas aritméticas:

Multiplíquense numeradores y denominadores:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$$

Inviértase y multiplíquense: $\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$ Al igual que en aritmética, primero se cancelan o eliminan los factores comunes que aparecen en el numerador y denominador, antes de multiplicar.

Ejemplos:
Realice las operaciones indicadas:

1) $\frac{m^2-n^2}{4m}\cdot\frac{8m^2}{2m+2n}=\frac{(m-n)\cancel{(m+n)}}{\cancel{4m}}\cdot\frac{8m^{\cancel{2}}}{2\cancel{(m+n)}}=n(m-n)$

2) $\frac{x^2-4xy+4y^2}{x^2+2xy}\cdot\frac{x^2}{x^2-4y^2}=\frac{(x-2y)^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(x+2y)}\cdot\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-2y)}(x+2y)}=\frac{x^2-2xy}{x^2+4xy+4y^2}$

3) $\frac{x^2+2x}{x^2-16}\cdot\frac{x^2-2x-8}{x^3+x^2}\cdot\frac{x^2-2x-8}{x^3+x^2}\cdot\frac{x^2+4x}{x^2+4x+4}=\frac{x(x+2)}{(x-4)/x+4)}\cdot\frac{(x-4)(x+2)}{x^2(x+1)}\cdot\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

$$=\frac{1}{x+1}$$

4) $\frac{x^2-9}{x^2-x-12}\div\frac{x-3}{x^2+3x}=\frac{x^2-9}{x^2-x-12}\cdot\frac{x^2+3x}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-4)(x+3)}\cdot\frac{x(x+3)}{x-3}$

$$=\frac{x(x+3)}{x-4}$$

5) $\frac{x^3-x}{2x^2+6x}\div\frac{5x^2-5x}{2x+6}=\frac{x^3-x}{2x^2+6x}\cdot\frac{2x+6}{5x^2-5x}=\frac{x(x^2-1)}{2x(x+3)}\cdot\frac{2(x+3)}{5x(x-1)}$

$$=\frac{\cancel{x(x-1)}(x+1)}{\cancel{2x(x+3)}}\cdot\frac{\cancel{2(x+3)}}{5\cancel{x(x-1)}}=\frac{x+1}{5x}$$

6.3 Combinación de fracciones

La combinación (adición o sustracción) de fracciones algebraicas requiere del conocimiento de combinación de fracciones aritméticas y de la factorización.
Para simplificar las fracciones algebraicas se obtiene el m.c.d. de las fracciones y se aplica la regla fundamental de las fracciones: “al multiplicar o dividir el numerados y el denominador por el mismo número (diferente de cero) no cambia el valor de una fracción.

Ejemplos:
Simplifique las expresiones siguientes:

1) $\frac{2}{x--3}+\frac{2}{x+2}-\frac{4x-7}{x^2-x-6}=\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{(x-3)(x+2)}$

$$=\frac{2(x+2)+3(x-3)-(4x-7)}{(x-3)(x+2)}$$

$$=\frac{2x+4+3x-9-4x+7}{(x-3)(x+2)}=\frac{x+2}{(x-3)(x+2)}=\frac{1}{x-3}$$

2) $\frac{x+y}{xy}-\frac{x+2y}{xy+y^2}-\frac{y}{x^2+xy}=\frac{x+y}{xy}-\frac{x+2y}{y(x+y)}-\frac{y}{x(x+y)}$

$$= \frac{(x+y)^2 - x(x+2y) - y^2}{xy(x+y)}$$

$$= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - 2xy - y^2}{xy(x+y)} = 0$$

3) $\frac{1}{2x+2} + \frac{2}{1-x} + \frac{7}{4x-4} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{2}{1-x} + \frac{7}{4(x-1)}$

$$= \frac{1}{2(x+1)} - \frac{2}{x-1} + \frac{7}{4(x+1)} = \frac{2(x-1) - 2(4)(x+1) + 7(x+1)}{4(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x - 2 - 8x - 8 + 7x + 7}{4(x+1)(x-1)} = \frac{x-3}{4(x^2-1)}$$

PRÁCTICA N°15

Simplifique:

1) $\frac{a^2+6ab+9b^2}{3a^2+8ab-3b^2}$ R/. $\frac{a+3b}{3a-b}$

2) $\frac{8r^3+R^3}{2r+R}$ R/. $4r^2-2rR+R^2$

3) $\frac{3y-6x}{2mx-my-2nx+ny}$ R/. $\frac{3}{n-m}$

4) $\frac{2x^2-22x+60}{75-3x^2}$ R/. $\frac{2(6-x)}{3(x+5)}$

5) $\frac{x^2+5x+4}{2x+2} \cdot \frac{4x+4}{3x+12}$ R/. $\frac{2(x+1)}{3}$

6) $\frac{3a^2-12ax+12x^2}{2a^2+2a-12} \div \frac{6a^2-24x^2}{8a+24}$ R/. $\frac{2(a-2x)}{(a-2)(a+2x)}$

7) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x+y}{2x-2y}$ R/. $\frac{x-y}{2(x+y)}$

8) $\frac{x^2-x-12}{x^2-49} \cdot \frac{x^2-x-56}{x^2+x-20} \div \frac{x^2-5x-24}{x+5}$ R/. $\frac{1}{x-7}$

9) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} - \frac{1}{a+b} + \frac{3a^2}{a^3+b^3}$ R/. $\frac{3a}{a^2-ab+b^2}$

10) $\frac{a}{3a+6} - \frac{1}{6a+12} + \frac{a+12}{12a+24}$ R/. $\frac{5}{12}$

7. FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS, IDENTIFICACIÓN, CÁLCULO DE PERÍMETRO Y ÁREA.

7.1 Conceptos generales sobre polígonos:

Se llama polígono a la porción de plano limitada por segmentos de recta.

7.1.1 Elementos de los polígonos:

1. *Lados*: Son los segmentos de recta de que está formado el polígono.
2. *Ángulos internos de un polígono:* son los formados por cada dos lados consecutivos.
3. *Ángulos exteriores de un polígono:* son los ángulos adyacentes a los internos, se obtienen prolongando los lados en un mismo sentido.
4. *Vértice*: Es el punto en el cual se cortan dos lados del polígono.
5. *Apotema:* Es el segmento de recta perpendicular a un lado del polígono y trazado desde el centro.
6. *Diagonal:* Se llama diagonal al segmento determinado por dos vértices no consecutivos.
7. *Perímetro:* El perímetro para un polígono es igual a la suma de la longitud de sus lados y se expresa en medidas de longitud (unidades lineales).
8. *Área:* Es la medida de una superficie o sea el tamaño de ésta expresada en unidades cuadradas $(m^2,\ cm^2,\ pu\lg^2)$.
9. *Superficie:* Es la forma de una figura geométrica, tales como, triangulares, cuadradas, circulares, etc.

Ya conocemos que es un perímetro, un área y una superficie. Más adelante definiremos algunas figuras conocidas, y éstas nos servirán para calcular su perímetro. El área de figuras más complicadas es el resultado de la suma de áreas de figuras ya conocidas.
Los polígonos *irregulares* son aquellos que no tienen ángulos ni lados congruentes. Vea figura 1. Los polígonos *regulares* aquellos cuyos lados y ángulos son iguales, es decir son equilátero y equiángulo. Vea figura 2.

Figura 1: Polígono irregular

$$\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{CD} \neq \overline{DE} \neq \overline{EF} \neq \overline{FC} \neq \overline{CB}$$

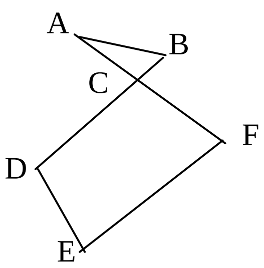
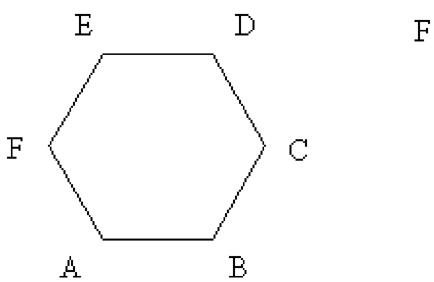


Figura 2: Polígono regular.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$$

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle$$



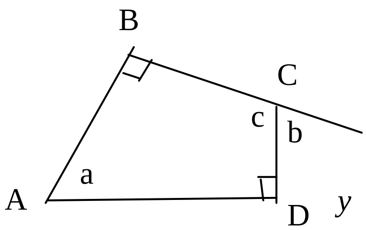
Según el carácter entrante o saliente de sus ángulos reciben el nombre de polígonos convexos cuando todos sus ángulos son menores de 180º y polígonos cóncavos cuando tienen uno o más ángulos interiores mayores a 180º.

Suma de los ángulos externos de un polígono:

Teorema 2:
"La suma de los ángulos exteriores (**Se**) de todo polígono es igual a $360°$". Donde $Se = \angle 1 + \angle 2 + ... = 360°$

Teorema 3:
"Si los lados de un ángulo son respectivamente perpendiculares a los lados del otro, los dos ángulos son iguales o suplementarios". Vea la figura 3.

Figura 3: Polígono regular.



$\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ entonces $\angle a = \angle b$ y $el \angle a$ $y \angle c$ son suplementarios.

7.1.2 Polígonos regulares.

Clasificación según el número de lados:
De acuerdo con el número de lados los *polígonos regulares* reciben nombres especiales. El polígono de menor número de lados es el triángulo.

NUMEROS DE LADOS	***NOMBRES***
Tres	triángulo equilátero
Cuatro	cuadrado
Cinco	pentágono regular
Seis	hexágono "
Siete	heptágono regular
Ocho	octágono "
Nueve	oneágono regular
Diez	decágono "
Once	endecágono regular
Doce	dodecágono "
Quince	pentadecágono regular
Veinte	icoságono "
n-lados	n-ágono regular

Los polígonos de 13, 14, 16, 17, 18, 19, etc. lados, no reciben nombres especiales.

Principios relativos a los polígonos regulares:
Principio 1: A todo polígono regular se le puede circunscribir una circunferencia.
Principio 2: En todo polígono regular se puede inscribir una circunferencia.
Principio 3: El centro de la circunferencia circunscrita a un polígono regular es, también, el centro de su circunferencia inscrita.
Principio 4: Si un polígono inscrito en una circunferencia tiene sus lados iguales, el polígono es regular.
Principio 5: Los radios de un polígono regular son iguales.
Principio 6: Todo radio de un polígono regular es bisectriz del ángulo por cuyo vértice pasa.
Principio 7: Las apotemas de un polígono regular son iguales.
Principio 8: Toda apotema de un polígono regular biseca (por ser mediatriz), el lado correspondiente.
Principio 9: En un polígono regular de n lados:

$$\text{Cada ángulo central "c" es igual a } \frac{360°}{n}.$$

$$\text{Cada ángulo interno" i" es igual a } \frac{(n-2)(180°)}{n}.$$

$$\text{Cada ángulo externo "e" es igual a } \frac{360°}{n}.$$

Números de diagonales que pueden trazarse en un polígono: $D = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Número de diagonales que pueden trazarse desde un vértice de un polígono: d = n - 3.

Polígono inscrito:
Polígono regular es el que tiene todos sus lados y ángulos iguales, es decir es equilátero y equiángulo.
Ver la figura 4.

Polígono circunscrito:
Se llama polígono circunscrito al que tiene todos sus lados tangentes a una circunferencia.
Ver la figura 5.

Figura 4: Polígono inscrito

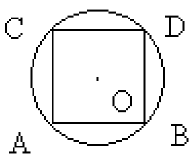
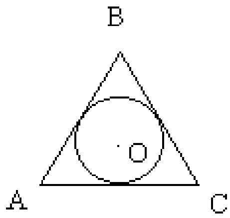


Figura 5: Polígono circunscrito.



1. *Centro del polígono regular:*
Se llama así al centro común de su circunferencia inscrita y circunscrita.

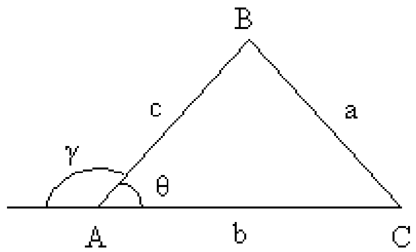
2. *Radio de un polígono regular:*
Es el segmento que une el centro con un vértice del polígono. El radio del polígono equivale al radio de la circunferencia circunscrita.

3. *Ángulo central de un polígono regular:*
Es el ángulo que forman dos radios que pasan por dos vértices consecutivos.
4. *Apotema de un polígono regular:*
Es el segmento perpendicular trazado desde el centro del polígono a uno de sus lados. La apotema es igual al radio de la circunferencia inscrita.

7.2 El Triángulo

El triángulo es una figura plana limitada por tres rectas que se cortan dos a dos. También se puede definir como el polígono o figura geométrica formada por tres lados que forman a su vez, entre sí, tres ángulos. Se puede indicar como ΔABC (se lee triángulo ABC). Vea la figura 6.

Figura 6: El triángulo.



1. *Vértices:* Son los puntos de intersección de los lados del triángulo. En la figura 10, los vértices son A, B y C.
2. *Lados:* Son los segmentos consecutivos del triángulo. En la figura 10, los lados son $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y se denota por letra minúscula a, b, c.
Todo triángulo determina tres ángulos: $\angle ABC$, $\angle BCA$ y $\angle BAC$. Los cuales se pueden nombrar con la letra de los vértices $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ o se puede utilizar otra nomenclatura; siempre y cuando se especifique en el dibujo del triángulo. Todo triángulo tiene 3 lados, 3 vértices y 3 ángulos.

En cada vértice de un triángulo se pueden obtener dos formas de ángulos los cuales son suplementarios entre sí; o sea que entre los dos suman $180°$. *Estos son:*
1. *Ángulos internos*: Son los ángulos que tienen por lo menos un punto interior del triángulo. En la figura 10**,** el ángulo θ es un ángulo interno al triángulo ΔABC.

2. *Ángulos externos*: Son los ángulos adyacentes a cualquier ángulo interno. En la figura 10, el ángulo γ es un ángulo externo del triángulo ΔABC.

Teorema 1:
"La suma de los tres ángulos internos de un triángulo suman $180°$ *".*

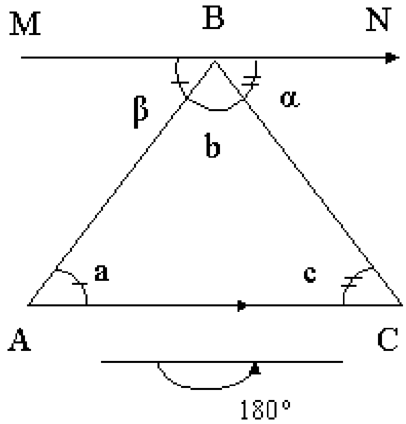
Teorema 2:
"La suma de los tres ángulos externos de un triángulo suman $360°$ *".*

Teorema 3:
"En todo triángulo, un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia".

Suma de los ángulos internos de un triángulo:

Para demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual ha 180°; se traza por uno de los vértices del triángulo la paralela al lado opuesto. Vea la figura 7. La recta $\overline{\mathrm{MN}}$ es paralela a la recta $\overline{\mathrm{AC}}$; $\beta = \mathrm{a}$ porque son alternos internos entre paralelas, $\alpha = \mathrm{c}$ porque son alternos internos entre paralelas. Entonces $\mathrm{a} + b + c = 180^\circ$ porque la suma de los ángulos de una recta es igual a 180° o sea un ángulo llano. Por tanto se demuestra que la suma de los tres ángulos internos de un triángulo es 180°.

Figura 7: Suma de los ángulos internos de un triángulo.



Teorema 1:
"En todo triángulo, un ángulo externo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes a él."

Teorema 2:
"En todo triángulo, un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia."

Clasificación de los triángulos:

Según sus lados:

1. Triángulo isósceles: Es el triángulo que tiene dos lados iguales. También dos de sus ángulos son iguales. En la figura 8, la señal en cada lado significa que el lado c = a.

Teorema 1:
"En todo triángulo isósceles, a lados iguales se oponen ángulos iguales".

2. *Triángulo equilátero*: Es aquel el que tiene sus tres lados y sus tres ángulos iguales. En la figura 9, la señal en los tres lados significa que a =b = c.

Teorema 1:
"Todo triángulo equilátero es equiángulo."

3. *Triángulo escaleno:* Es el que tiene sus tres lados y sus tres ángulos desiguales. Vea figura 10.

Figura 8: Triángulo isósceles.

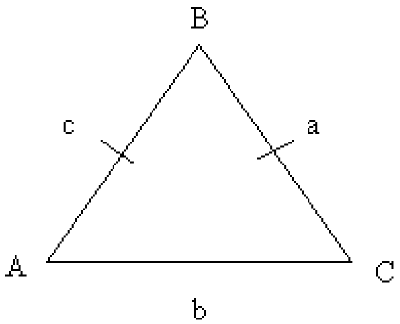


Figura 9: Triángulo equilátero.

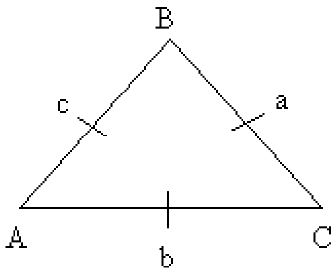
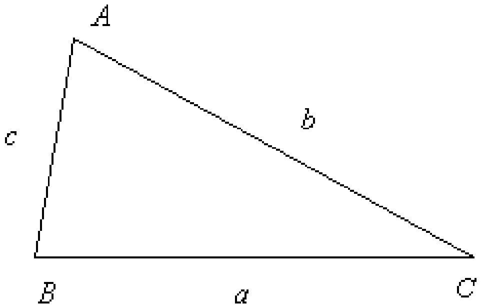


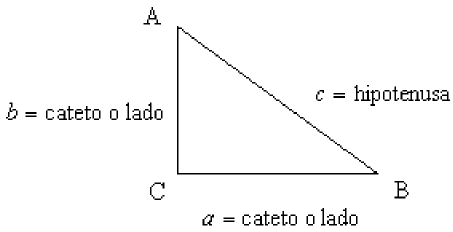
Figura 10: Triángulo escaleno.



Según sus ángulos:
1. *Triángulo acutángulo:* Es el triángulo que tiene sus tres ángulos interiores agudos, o sea, cada uno de sus ángulos es menor de $90°$.
2. *Triángulo obtusángulo*: Es el triángulo que tiene un ángulo obtuso, es decir, uno de sus ángulos es mayor de $90°$.
Los triángulos acutángulos y obtusángulos también reciben el nombre de triángulos oblicuángulos.
3. *Triángulo rectángulo*: Es el triángulo que tiene un ángulo recto, o sea, un ángulo igual a $90°$.

El triángulo más útil es el *triángulo rectángulo*, además de tener un ángulo recto, sus otros dos ángulos son complementarios y sus lados reciben nombres especiales. Vea la figura 11.
Catetos: Son los lados a y b, perpendiculares entre sí que forman el ángulo recto.
Hipotenusa: Es el lado opuesto al ángulo recto y el lado más largo.

Figura 11: El triángulo rectángulo.



7.2.1 Segmentos notables de un triángulo y puntos de intersección:

1. *Mediana:* Es el segmento de recta trazado desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto. Vea la figura 12. Todo triángulo tiene tres medianas. El punto de intersección de las tres medianas se llama *barícentro, gravicentro* o *centroide* del triángulo. El centroide es el centro de gravedad o *"punto de balanceo"* del triángulo y es importante en las aplicaciones a nivel de ingeniería, por ejemplo construcción de estructuras.

Figura 12: La mediana.

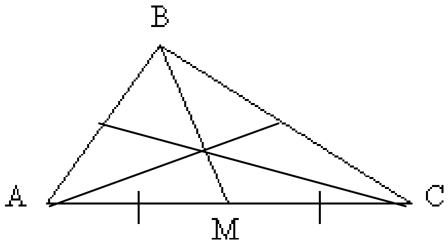
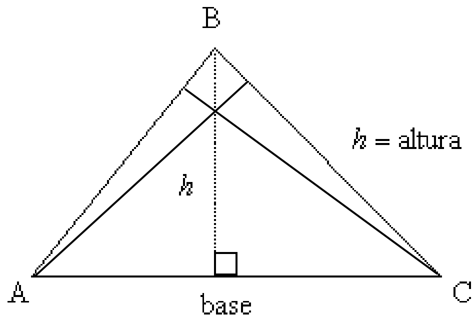


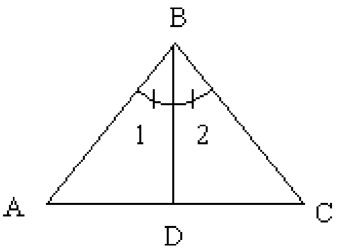
Figura 13: La altura.



$\overline{BM}$ es la mediana correspondiente al lado $\overline{AC}$,
$\overline{BM}$ M es el punto medio de $\overline{AC}$.

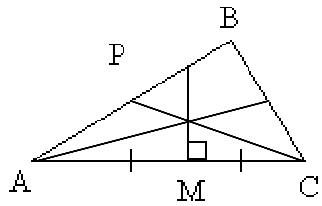
2. *Altura:* Es el segmento perpendicular trazado desde el vértice de un ángulo al lado opuesto o su prolongación. Existen tres alturas en cada triángulo y el punto de intersección de las tres se llama *ortocentro.* Vea la figura 13.
3. *Bisectriz*: Se llama bisectriz de un ángulo interior de un triángulo, al segmento de recta que biseca (divide en dos partes iguales) el ángulo y llega hasta el lado opuesto. Vea la figura 14. Consecuentemente hay tres bisectrices, una para cada ángulo. El punto donde se encuentran las tres bisectrices, se llama *incentro*.

Figura 14: La bisectriz.



$\overline{PM}$ es la mediatriz del lado, $\overline{AC}$ en el triángulo ABC.

Figura 15: La mediatriz.



$\overline{BD}$ es la bisectriz del ángulo B.
El ángulo 1 es igual al ángulo 2.

4. *Mediatriz:* Es la recta perpendicular a un lado en su punto medio, por ejemplo la figura 15.
Se pueden trazar tres mediatrices en un triángulo. Las tres mediatrices concurren en un punto llamado *circuncentro*.

7.2.2 Perímetro de un triángulo

El perímetro es igual a la suma de la longitud de sus lados, o sea $P = a + b + c$. Ver figura 16.

Área de un triángulo

El área de un triángulo es igual a un medio la base por la altura, o sea $A = \frac{1}{2}bh$. Ver figura 17.

Figura 16: Perímetro de un triángulo

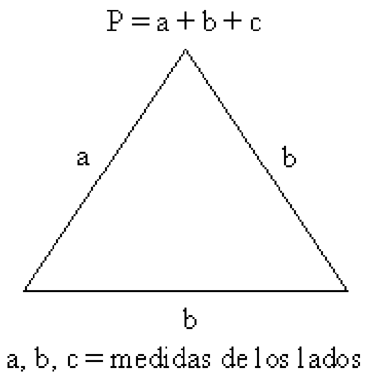
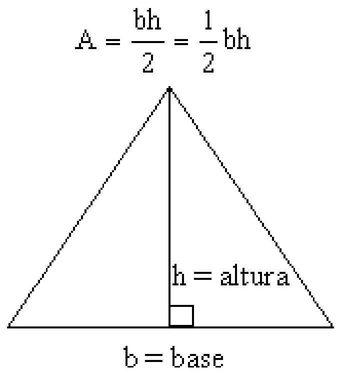


Figura 17: Área de un triángulo.



7.2.3 Teorema de Pitágoras

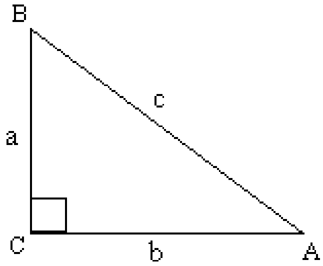
Uno de los teoremas de mayor utilidad en la matemática, es el Teorema de Pitágoras. Este teorema fue empleado desde hace más de 3000 años por los agrimensores de Babilonia y Egipto.

Este teorema dice:

"En un triángulo rectángulo, la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".

Por lo cual $a^2 + b^2 = c^2$ donde a y b son los catetos y c es la hipotenusa. Ver la figura 18.

Figura 18: Teorema de Pitágoras.



Corolario 1:

"En todo triángulo rectángulo, la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos".

De la igualdad $c^2 = a^2 + b^2$; sacando la raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad, obtenemos: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Corolario 2:

"En todo triángulo rectángulo, cada cateto es igual a la raíz cuadrada del cuadrado de la hipotenusa, menos el cuadrado del otro cateto".

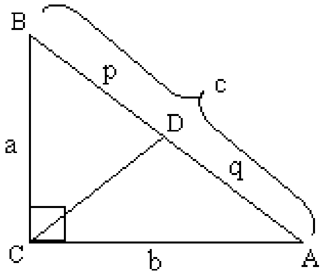
$a^2 = c^2 - b^2 \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}$.

$b^2 = c^2 - a^2 \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Principio:

La mediana correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la hipotenusa. Vea la figura 19.

Figura 19:



$\overline{CD} = \overline{BD} = \overline{BA}$

7.3 Cuadriláteros

Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados y sus elementos son los l*ados opuestos*, aquellos que no tienen ningún vértice común y los l*ados consecutivos*, aquellos que tienen un vértice común son pares de lados consecutivos.
Los cuadriláteros se clasifican atendiendo al paralelismo de los lados opuestos en:

7.3.1 Área de cuadriláteros

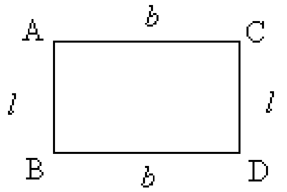
Paralelogramos: Son cuadriláteros que tienen los lados opuestos paralelos.
Entre los paralelogramos más utilizados tenemos:

Rectángulo: *p*aralelogramo que tiene los cuatro ángulos iguales sus lados contiguos desiguales. Ver la figura 20. Su perímetro es igual a la suma de sus lados, $\mathrm{P} = 2\mathrm{b} + 2\mathrm{L}$, y el área es el producto de la base por la altura, $A = \mathrm{b} \times \mathrm{L}$

Propiedades:
Las diagonales de un rectángulo son iguales.
Las diagonales de un rectángulo forman dos pares de triángulos congruentes.

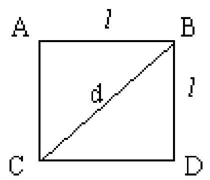
Cuadrado: paralelogramo que tiene los cuatros ángulos iguales y los cuatros lados iguales, es equilátero y equiángulo. Ver la figura 21. Su perímetro es igual a cuatro veces el valor del lado, $\mathrm{P} = 4\mathrm{L}$ y su área es igual a la base por la altura, $\mathrm{A} = \mathrm{L}^2$; como las diagonales son iguales podemos decir que el $A = \frac{d^2}{2}$.
Este conserva todas las propiedades del rectángulo.

Figura 20: Rectángulo.



$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$
$\overline{AC} \neq \overline{AB}$
$\overline{AC} = \overline{BD} = b$
$\overline{AB} = \overline{CD} = l$

Figura 21: Cuadrado.



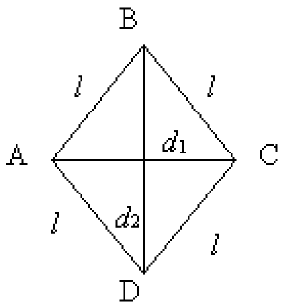
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$
$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BD} = \overline{CD} = l$

El cuadrado conserva todas las propiedades del rectángulo y del rombo.

Rombo: tiene los cuatro lados iguales y los ángulos contiguos desiguales. Su perímetro es la suma de los cuatro lados, $\mathrm{P} = 4\mathrm{L}$ y el área es igual a la multiplicación de las diagonales dividas entre dos, $A = \frac{d_1 \times d_2}{2}$, donde $\mathrm{d}_1 =$ diagonal menor y $\mathrm{d}_2 =$ diagonal mayor. Ver la figura 22.

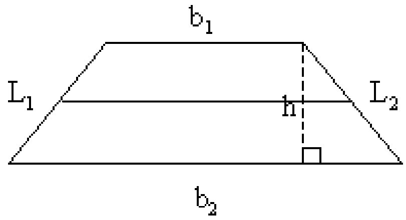
Propiedades:
Las diagonales de un rombo son bisectrices de los ángulos de los vértices que unen.
Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre si y se bisecan mutuamente. (Una es mediatriz de la otra). Ver figura 22.

Figura 22:



$\angle A \neq \angle B$
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = l$

Figura 23:



Trapecio

Los trapecios son cuadriláteros que tienen dos y sólo dos lados paralelos. A los lados que son paralelos se les llama base y como son desiguales se le llama base mayor y base menor. A los lados no paralelos se les llama *piernas* del trapecio y al segmento que une los puntos de las piernas se le denomina *paralela media del trapecio,* $\overline{L_1L_2}$. Ver la figura 23.
La altura del trapecio es la distancia entre las bases, o sea la perpendicular común, (h). Ver figura 23.

El perímetro equivale a la suma de las longitudes de sus lados,
Perímetro $= L_1 + b_1 + b_2 + L_2$ y su área es el producto de la semisuma de las bases por la altura, $A = \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)h$

Clasificación de los trapecios:
1. *Trapecio rectángulo*: Son los que tienen dos ángulos rectos.
2. *Trapecio isósceles*: Son lo que tienen los dos lados no paralelos iguales.
3. *Trapecio escaleno*: Son los que no son rectangulares ni isósceles.

7.4 Conceptos fundamentales sobre la circunferencia y el círculo

Circunferencia: e*s el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de otro punto llamado centro. La figura 24, representa una circunferencia de centro O.*

Círculo: *es el conjunto de todos los puntos de la circunferencia y de los interiores a la misma. En la figura 25, se representa un círculo.*

Figura 24: Circunferencia.

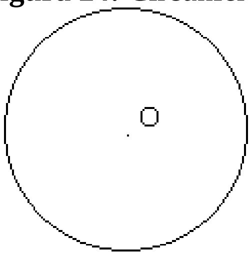
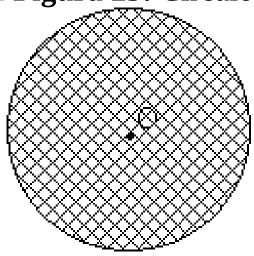


Figura 25: Círculo.



7.4.1 Elementos de la circunferencia y el círculo.

1. *Secante*: es cualquier recta que corta a la circunferencia en dos puntos. Ver la figura 26.

2. *Radio*: Es cualquier segmento que une el centro con un punto de la circunferencia. Ver la figura 26.

3. *Diámetro*: Es toda cuerda que pasa por el centro. Es igual a la suma de dos radios. Ver la figura 26.

4. *Cuerda*: Es el segmento determinado por dos puntos de la circunferencia. Ver la figura 26.

5. *Tangente*: Es una recta que toca a la circunferencia en un solo punto. Ver la figura 26.

6. *Arco de la circunferencia*: Es una porción de circunferencia. Ver la figura 26.

7. *Ángulo central*: Es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia. En la figura 27**,** $<$ AOB, es un ángulo central.

8. *Ángulo inscrito*: Es aquel que tiene su vértice colocado sobre la circunferencia y sus lados son dos cuerdas. Ver la figura 28.

9. *Segmento circular*: Es la parte de círculo limitada entre una cuerda y su arco, ver la figura 29.

10. *Sector circular*: Es la parte de círculo limitada por dos radios y el arco comprendido, ver la figura 30.

11. *Corona circular*: Es la porción de plano limitada por dos circunferencias concéntricas, ver la figura 31.

12. *Trapecio circular*: Es la porción de plano limitada por dos circunferencias concéntricas y dos radios, ver la figura 32.

13. *Semicircunferencia*: Es un arco igual a la mitad de la circunferencia.

14. *Semicírculo*: Es la porción de plano comprendida entre un diámetro y la semicircunferencia.

Figura 26: Elementos de la circunferencia.

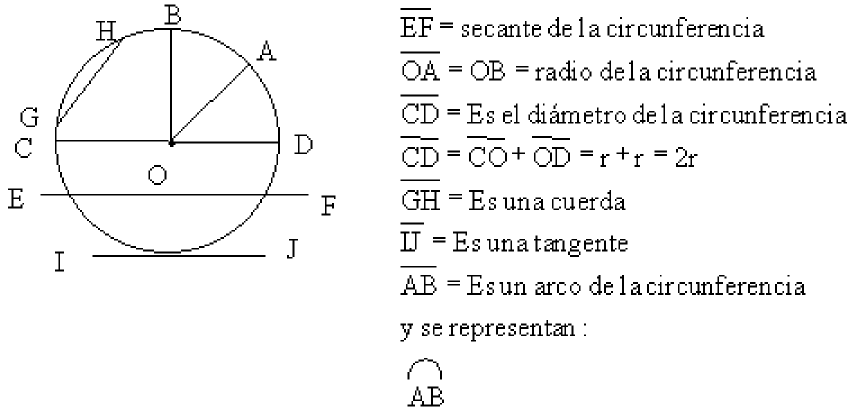


Figura 27: Ángulo central.

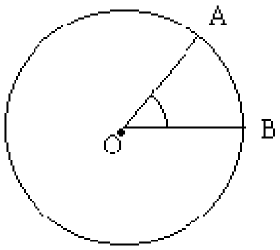


Figura 28: Ángulo inscrito.

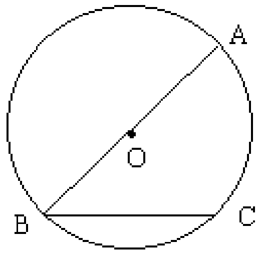


Figura 29: Segmento circular.

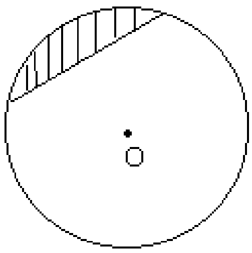


Figura 30: Sector circular.

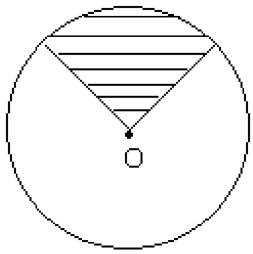


Figura 31: Corona circular.

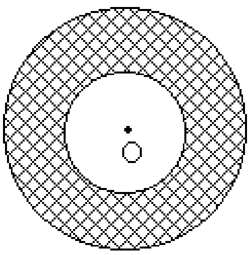
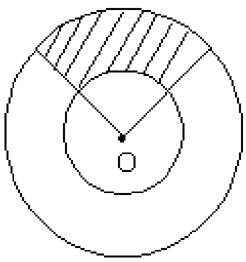


Figura 32: Trapecio circular.



Principios:

1. Toda tangente es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.
2. Si una recta es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia, pasa por el centro de la circunferencia.
3. Las tangentes trazadas desde un punto exterior de la circunferencia son iguales.
4. La recta que une un punto de la circunferencia con un punto exterior es bisectriz del ángulo que forman las tangentes trazadas desde ese punto a la circunferencia.

Ángulos y arcos relacionados con circunferencia:

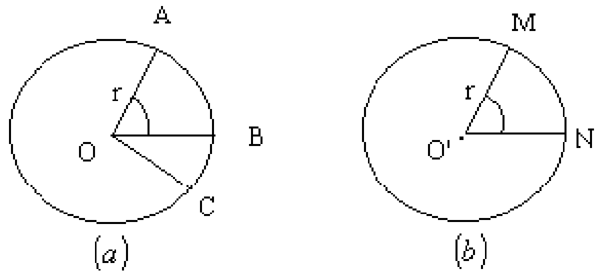
1. *Ángulo central*: Como ya se dijo, es aquel que tiene su vértice en el centro de la circunferencia, tal como el $< \mathrm{AOB}$. Ver la figura 33.

Principio: En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, los ángulos centrales son proporcionales a sus arcos correspondientes siendo O y $\mathrm{O'}$ circunferencias iguales, ver la figura 34, tenemos que:

$$\frac{< \mathrm{AOB}}{< \mathrm{MO'N}} = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}{\overset{\frown}{\mathrm{MN}}}.$$

Medida del ángulo central: La medida de un ángulo central es igual a la medida del arco que abarca, por ejemplo $< \mathrm{AOB} = \overset{\frown}{\mathrm{AB}}$; $< \mathrm{BOC} = \overset{\frown}{\mathrm{BC}}$.

Figura 33: Ángulo central.



1. *Ángulo Inscrito*: Es el ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son cuerdas de la circunferencia. En la figura 34, $< \mathrm{CBA}$ es un ángulo inscrito.

Principio: Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. Ver figura 34

2. *Ángulo Inscrito*: Es el ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son cuerdas de la circunferencia. En la figura 34, $< \mathrm{CBA}$ es un ángulo inscrito.

Principio: Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. Ver figura 34

Medida del ángulo inscrito: La medida de todo ángulo inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados o sea $< CBA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$. Ver la figura 35.

Figura 34: Ángulo inscrito.

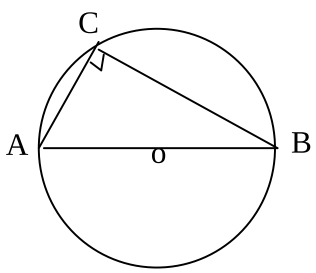
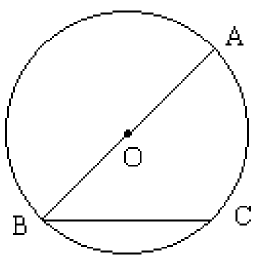
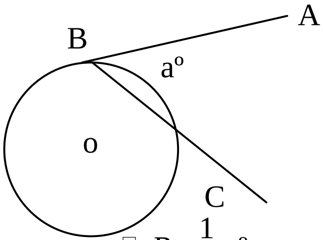


Figura 35: Ángulo inscrito.



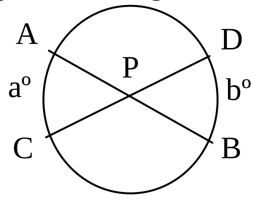
3. *Ángulo semi – inscrito:* es el ángulo formado por una cuerda y una tangente a la circunferencia y es igual a la mitad del arco que forman. Ver figura 36.

Figura 36: Ángulo semi-inscrito.



$$\measuredangle B = \frac{1}{2} a^{o}$$

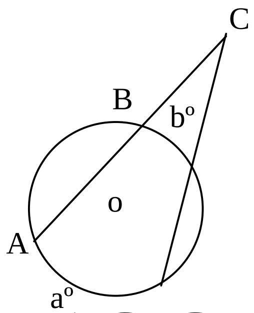
Figura 37: Ángulo interior.



$$\measuredangle P = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DB}\right)$$

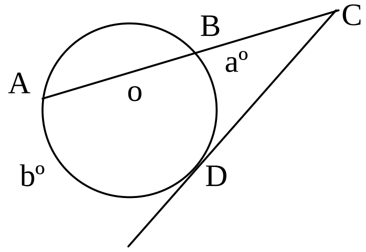
4. Ángulo interior: es el formado por dos cuerdas que se cortan en el interior de la circunferencia. Ver figura 37. Su medida en igual a la semisuma de los arcos que abarcan.
5. Ángulo exterior es el formado por:
a) Dos secantes que se cortan fuera de la circunferencia y tienen medida igual a la semidiferencia de los arcos que abarcan. Ver figura 38. (a)

Figura 38: Ángulo exterior



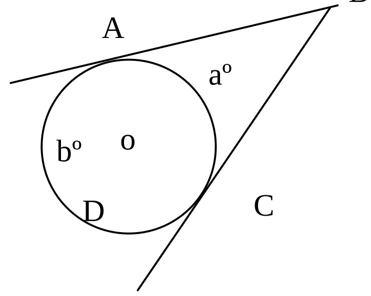
$$\measuredangle C = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DB}\right)$$

(a)



$$\measuredangle C = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{DA} - \overset{\frown}{DB}\right)$$

(b)



$$\measuredangle C = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{CDA} - \overset{\frown}{CA}\right)$$

(c)

b) Una secante y una tangente que se cortan fuera de la circunferencia y su medida es igual a la semidiferencia de los arcos que abarcan. Ver figura 38. (b)

c) Dos tangentes tiene como medida la semidiferencia de los arcos que abarcan. Ver figura 38. (c)

Longitud de la circunferencia:

El número π (pi) es la razón entre la longitud C de la circunferencia de cualquier círculo y su diámetro d; es decir, $\pi = \frac{c}{d}$. De aquí, $C = \pi d$ o sea $C = 2\pi r$. Como valores aproximados de π se tienen 3.1416; 3.14 o sea $\frac{22}{7}$.

Una circunferencia se puede considerar como un polígono regular de un número infinito de lados. Si un cuadrado se inscribe en una circunferencia y se duplica continuamente el número de sus lados (para formar un octágono, un $16-\text{gono}$, etc.); los perímetros de los polígonos resultantes se aproximarán cada vez más a la longitud de la circunferencia.

Área de un círculo.
Es el producto del radio al cuadrado y la constante $\pi\,(\text{pi})$:

$$A=\pi\, r^2$$

Longitud de un arco.
La longitud del arco de es igual a la $\frac{\text{n}^\text{o}}{360^\text{o}}$ parte la longitud de la circunferencia, o sea:

$$\text{L}=\frac{\text{n}^\text{o}}{360^\text{o}}(2\pi\,\text{r})$$

$$\text{L}=\frac{\pi\,\text{n}^\text{o}\,\text{r}}{180^\text{o}}$$

Área de un sector circular.
El área de un sector circular de es igual a la $\frac{\text{n}^\text{o}}{360^\text{o}}$ parte del área del círculo, es decir:

$$\text{k}=\frac{\text{n}^\text{o}}{360^\text{o}}\left(\pi\,\text{r}^2\right)$$

Área de un segmento circular.
Él área de un segmento circular es igual al área del sector correspondiente menos el área del triángulo que forman sus radios y la cuerda que subtienden:

$$\text{Asc}=\frac{\text{n}^\text{o}}{360^\text{o}}\left(\pi\,\text{r}^2\right)-\frac{bh}{2}$$

PRÁCTICA N°16

1. ¿Cómo se llama el segmento que une un vértice de un triángulo y el punto medio del lado opuesto?
2. Un ángulo externo de un triángulo es igual a la:

a) Suma de los ángulos internos b) Suma de los ángulos internos no adyacentes

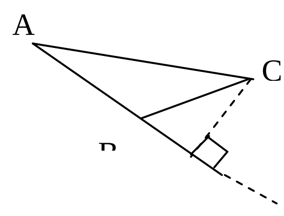
c) Suma de los otros ángulos externos d) Diferencia de los ángulos internos no adyacentes

3. Un polígono tiene:

a) Exactamente tres lados. b) Tres o más lados c) Más de tres lados

d) Menos de diez lados

4. En el triángulo ABC dado a continuación, el segmento $\overline{CD}$ es:

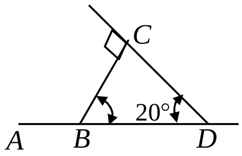


a) mediana b) bisectriz c) altura d) mediatriz e) n.a.

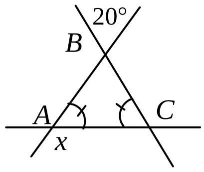
5. ¿Cómo se llama el polígono regular que tiene seis lados?

D

6. En la siguiente figura el valor del ángulo ABC es:



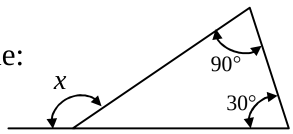
7. ABC es un triángulo isósceles, donde AC es la base. Determine el valor del ángulo $"x"$.



8. En un triángulo equilátero, cuál es el valor del ángulo exterior en cualquier vértice? (utilice π).

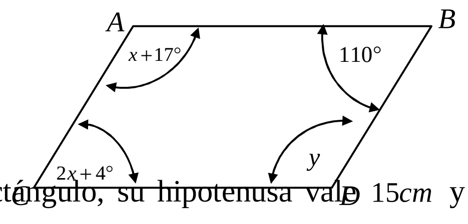
9. ¿Cuál es la medida de la diagonal del cuadrado cuyos lados miden $6cm$?.

10. En la figura dada, el valor del ángulo $"x"$ es de:



11. ¿Cuál es la diagonal del rectángulo cuyos lados miden $6cm$ y $8cm$?.

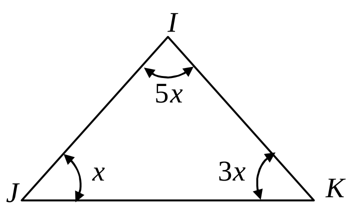
12. En el paralelogramo $ABCD$, el valor de $"x"$ e $"y"$, respectivamente son:



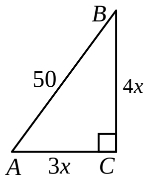
13. En un triángulo rectángulo, su hipotenusa vale $15cm$ y un cateto $9cm$. Determine la longitud del otro cateto.

14. Una escalera de $8.0\,\text{m}$ de longitud se coloca a $4.8\,\text{m}$ de una pared. ¿A qué altura de la pared llega la escalera?.

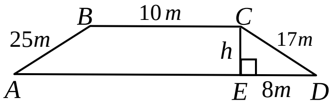
15. En el triángulo IJK el valor del ángulo $"x"$ es de:



16. El valor de "x" en la figura dada es de:

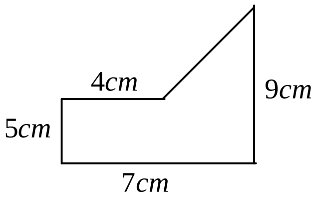


17. El perímetro y área del trapecio de la figura dada es:

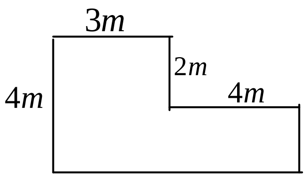


18. ¿Cómo se llama un polígono que sea a la vez equilátero y equiángulo?

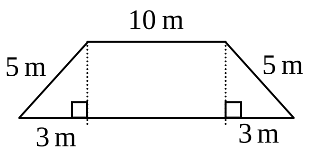
19. El perímetro de la figura es:



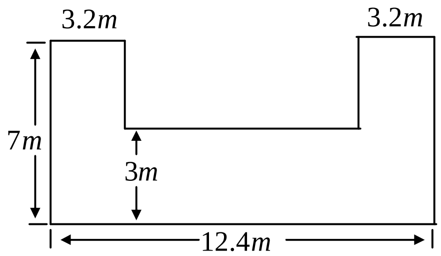
20. El perímetro de la figura dada es de:



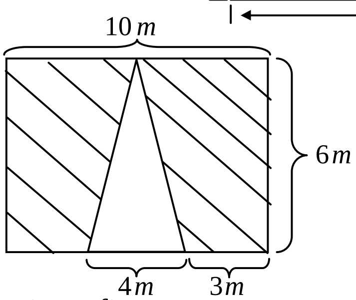
21. El área del trapecio isósceles mostrado en la figura, es de:



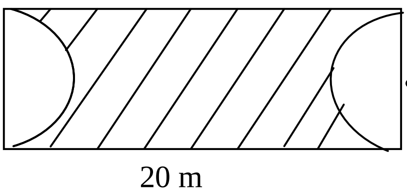
22. El perímetro de la figura dada es de:



23. Determine el área sombreada:



24. Halle el área sombreada de la siguiente figura:

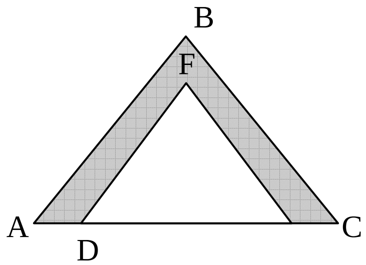


- 10 m

20 m

25. Los triángulos ABC y DEF son equiláteros. El triángulo ABC tiene 81 cm. de perímetro. $\overline{DF} = \frac{2}{3}\overline{AB}$. ¿Cuál es el perímetro de la figura sombreada?.

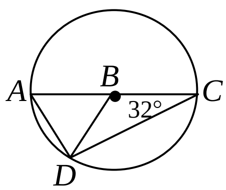
a) 27 cm b) 135 cm c) 63 cm d) 99 cm e) n.a.



26. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de un plano que están a igual distancia de un punto fijo?

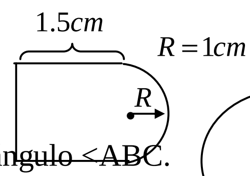
27. Si $\frac{1}{3}$ del diámetro de una circunferencia mide $4\,\text{pulg}$. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia?

28. En la figura dada, el ángulo inscrito BCD mide $28°$. ¿Cuál es el valor del ángulo BAD (también inscrito)?.

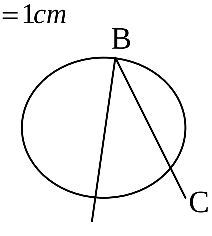


29. ¿Cuál es la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ de la figura mostrada?

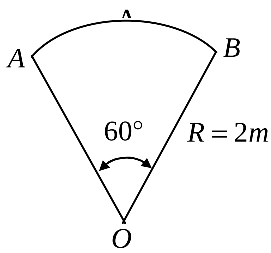
30. ¿Cuál es el área total de la siguiente figura?.



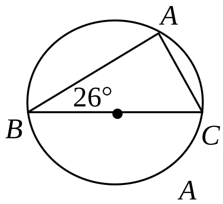
31. En la figura, $\overset{\frown}{AB}$ = 110°, $\overset{\frown}{BC}$ = 90°. Halle El ángulo <ABC.



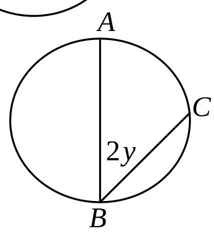
32. ¿Cuál es la longitud del arco AB?. Use $\pi = 3.1416$.



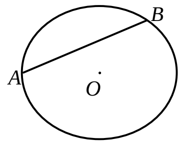
33. Cuando el ángulo inscrito ABC es $26°$. ¿Cuál es el valor del ángulo inscrito BCA si $\overline{BC}$ es el diámetro de la circunferencia?.



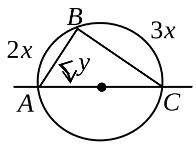
34. Si el arco $AC = 60°$. ¿Cuál es el valor de y?.



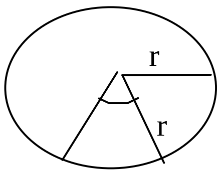
35. En la figura dada, el segmento $\overline{AB}$ es:



36. En la figura mostrada, el valor del ángulo "y" es:



37. La siguiente figura corresponde a una circunferencia de radio 4.5m y el ángulo central entre dos radios es de 60°; ¿Cuánto mide la longitud de su arco?



a) 270° b) 120° c) 1.05° d) 4.71° e) n.a.

RESPUESTAS

1) mediana; 2) b; 3) b; 4) c; 5) hexágono regular; 6) 110°; 7)100°; 8) $\frac{2\pi}{3}\,rad$;

9) 8.48 cm.; 10) 120°; 11) 10 cm.; 12) d; 13) 12 cm; 14) 6.4 cm; 15) 15 m; 16) 70° y 125°; 17) 90 m y 360 m^2; 18) triángulo, equilátero o cuadrado; 19) $30cm$; ; 20) $30cm$;

21) $5\sqrt{3}\ cm$; 22) $22m$; 23) $22m$; 24) hexágono regular, $P = 48cm$; 25) 13 lados;

26) $27cm$; 27) 10 lados; 28) 170 diagonales; 29) 7 diagonales; 30) *circunferencia*;

31) 37.68pulg; 32) 80º; 33) recto; 34) 10.8cm; 35) 64º; 36) cuerda; 37) 15º y 75º .

7.5 Cuerpos geométricos (sólidos), identificación, cálculo del área y volumen.

Un sólido o cuerpo es una posición cerrada de espacio, limitada por superficies planas o alabeadas. Cuando un sólido está limitado por superficies planas se llama *Poliedro.* Por ejemplo la pirámide y el cubo. El cono, el cilindro y la esfera no lo son porque están limitados en parte o totalmente por superficies alabeadas.

Las superficies que limitan un poliedro se llaman *caras*; las intersecciones de las caras se llaman *aristas* y los puntos donde éstas se cortan se denominan *vértices*.

Todos los cuerpos que nos rodean son sólidos tridimensionales por ejemplo: los salones de clases tienen la forma de un sólido rectangular, los tanques de depósito de agua tienen forma cilíndrica, las bolas de béisbol tienen forma esférica, entre algunos ejemplos de sólido. Los sólidos tienen áreas laterales, las cuales se determinan por medio de la suma del área de cada una las caras que forman el sólido. Se da en unidades cuadradas.

Volumen:

Se define como el espacio que ocupa un cuerpo. Y éste se expresa en unidades cúbicas, tales como mt^3, cm^3, pie^3, pulg^3, *etc. También se puede expresar por el área de la base por la altura.*

Cubo: *es un sólido rectangular cuyas caras son cuadrados iguales. Ver la figura 39.*

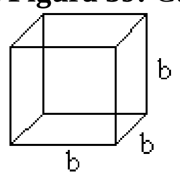
1. *Área lateral del cubo*: Es igual al área de cada uno se sus lados multiplicados por la cantidad de caras que tiene el cual es de 6 caras, $A_L = 6\,\mathrm{b}^2$.

2. *Volumen:*

$$V = b \times b \times b$$

$$V = b^3$$

Figura 39: Cubo.



Paralelepípedo o sólido rectangular: Son rectángulos perpendiculares entre sí e iguales dos a dos. Ver la figura 40.

1. *Área lateral: e*s igual a la suma del área de cada una de sus caras o sea:

$$\text{Área lateral} = 2A_1 + 2A_2 + 2A_3$$
$$= 2ca + 2bc + ba$$

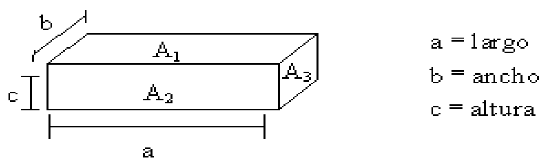
2. *Volumen de un paralelepípedo:*

$$V = a \times b \times c \text{ o área de la base por la altura.}$$

$$\text{Área de la base} = a \times b = \text{largo} \times \text{ancho}$$

$$\text{altura} = c$$

Figura 40.: Paralelepípedo.



Cilindro: *es un cuerpo cuyas bases son círculos paralelos e iguales y cuyas secciones transversales son rectángulos. Los lados del cilindro son perpendiculares a la base. Ver la figura 41.*

Área lateral de un cilindro circular recto: Es el producto de la altura y la longitud de la base, donde la longitud de la base es el perímetro de la circunferencia.

$$A = h(\pi D) = h\,\pi(2\,r)$$
$$A = 2\,\pi\,r\,h$$

Nota: Esta área lateral solo incluye el área de sus lados y no la de sus tapas (circulares).

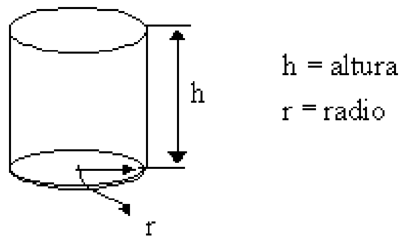
Volumen de un cilindro circular recto: Es el producto del área de la base por la altura.

$V = \text{Área de la base} \times \text{altura}$

$V = \pi r^2 h$

$\text{Área de la base} = \pi\, r^2$.

Figura 41: Cilindro.



Esfera: *Es un cuerpo en el cual todos los puntos de su superficie están a igual distancia de un punto fijo que se llama* centro de la esfera. *La esfera se puede considerar engendrada por el giro completo de una semicircunferencia alrededor de su diámetro como eje y además tiene una forma compacta, ver la figura 42.*

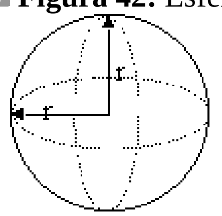
1. *Área lateral*: Es el producto de 4 veces el radio al cuadrado por π:

$$A = 4\,\pi\,r^2 .$$

2. *Volumen de la esfera*: Es el producto de $\frac{4}{3}\pi$ y el radio al cubo:

$$V = \frac{4}{3}\pi\,r^3 .$$

Figura 42: Esfera.



Cono circular: *es el sólido cuya base es un círculo y su superficie lateral termina en un punto. La sección transversal que pasa por el vértice y el centro de la base es un triángulo isósceles cuyos lados iguales son apotemas (o* generatrices g *) del cono. Ver la figura 43.*

1. *Área lateral del cono circular recto*: Es el producto del radio por la generatriz por π.

$$A = \pi\, r\, g$$

Nota: El área lateral solo incluye el área de sus lados y no la de su tapa (o sea su base circular).

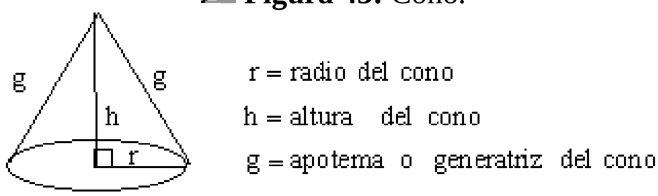
2. *Volumen de cono circular recto*: Es el producto de un tercio del área de la base por la altura.

$$\text{Área de la base} = \pi\, r^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\text{Área de la base} \times \text{altura del cono}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, h$$

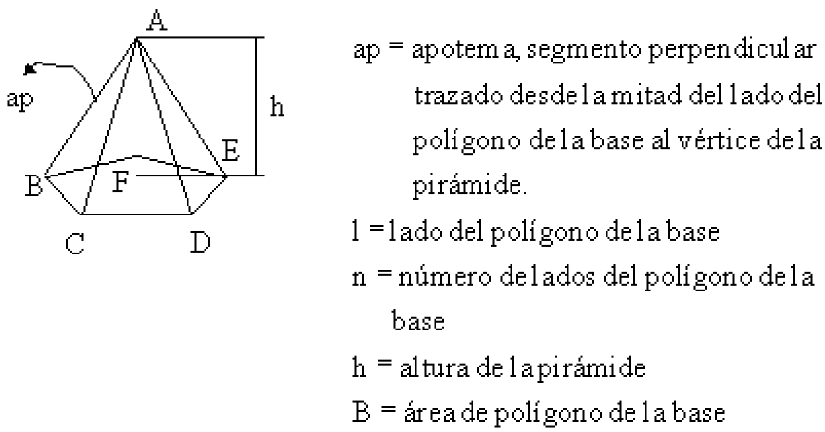
Figura 43: Cono.



Pirámide o prisma:

Es un poliedro cuya base es un polígono de cualquier número de lados, y cuyas caras laterales son triángulos que se encuentran en un punto llamado *vértice de la pirámide*. La altura de la pirámide es el segmento perpendicular (h) trazado desde la base al vértice de la pirámide. Se llama *pirámide regular* a la que tiene por base un polígono regular y por caras laterales triángulos isósceles iguales, y cuya altura además une al vértice con el centro de la base. Ver la figura 44.

Figura 44: Pirámide.



1. *Área lateral de una pirámide:* Es la suma de las áreas de las caras laterales.

$$A = \frac{P \bullet ap}{2}$$; donde P = perímetro y ap = apotema

Apotema del polígono de la base: Segmento trazado desde el centro del polígono de la base hasta uno de sus lados, siendo perpendiculares entre sí. Divide en dos la mitad el lado de la base y la bisectriz del ángulo central del polígono de la base.

2. Volumen de una pirámide: Es igual a un tercio de producto del área de la base por la medida de la altura de la pirámide.

$$V = \frac{1}{3}Bh.$$

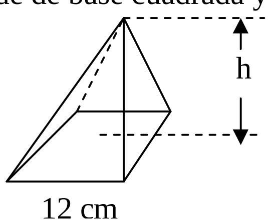
El prisma se compone de tres pirámides iguales.
1. *Área lateral de cualquier prisma* es el producto del perímetro de la base por la altura del prisma.

$$A = Ph$$

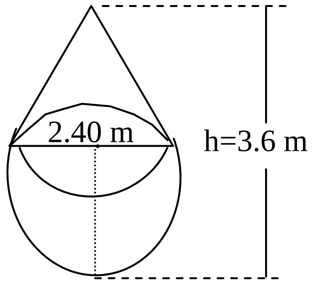
2. *Volumen de un prisma* es igual al producto del área por la altura del prisma.

PRÁCTICA N°17

(Utilice $\pi = 3.1416$)
1. Calcule el área total de un cubo, cuya arista (lado) mide $7.5cm$?
2. Si el volumen de un cono es de $361\pi\ cm^3$, y su altura es de $15cm$. ¿Cuál es la medida del radio de la base?.
3. Calcule el área y el volumen del cubo que tiene por lado 10.28 cm.
4. Si el volumen de un cono es de $85\pi\ cm^3$, y su radio es de 6 *cm* ¿Cuál es la medida de la altura ?.
5. Si el área de un cubo es 1836.42 cm , encuentre el valor de la arista. (lado).
6. Determinar el volumen de un cilindro, cuyo diámetro de la base es $8cm$ y altura $10cm$.
7. ¿Cuál es el volumen un cubo, cuya arista (lado) mide 8.7 pulg.?
8. ¿Si el volumen de un cilindro circular recto es de $760\pi cm^3$ y su altura es $12cm$,¿ Cuál es la medida del radio es?.
9. Calcule la arista de un cubo que tiene volumen 938.6 cm^3.
10. Halle el volumen de un cono cuyo diámetro de la base es 22 cm y su altura 18 cm.
11. ¿ Cuál es el radio de una esfera que tiene un volumen de 723.3 cm^3,.
12. Determine la altura de un cilindro, cuyo diámetro de la base es 13 cm y volumen 2210.85 cm^3.
13. Encuentre el volumen de un paralelepípedo que tiene 5.4 pies de ancho, la longitud excede en 6 pies al ancho y la altura es de 7 pies.
14. Calcule el volumen de la pirámide de base cuadrada y altura 9 cm. Como muestra la figura.



15. ¿Cuál es el volumen de un cilindro con altura 9.3 m, si el perímetro de su base es 27.2 m?.
16. El volumen de una pirámide es 450 m^3 y el área de la base es de 25 mts^2. ¿Cuánto mide la altura?.
17. Una pirámide de base cuadrada tiene una altura igual a la longitud de la diagonal de su base, encuentre el volumen de la pirámide si el lado de la base mide 8 pulg.
18. Calcule el radio de una esfera cuyo volumen es 134.1 cm^3.
19. ¿El volumen de la boya formada por una semiesfera seguida por un cono, es?



20. Determine el volumen y el área total de una pirámide que tiene de altura 2.9 pies y una base cuadrada de 2.5 pies de lado.

RESPUESTAS

1) 384 cm^2 2) 9 cm 3) 875.56 cm^2; 1,762.79 cm^3 4) 5 cm 5)216 $pulg^2$
6) 502.66 cm^3 7) 433.5 $pulg^2$ 8) 8 cm. 9) 486 cm^2 1 0) $72\pi\ cm^3$ 11) 5 cm.
12) 502.66 cm^3 13) 82.72 $pies^3$ 14) 189 cm^3 15) 281.99 cm^3 16) 15 m
17) 102 $pulg^3$ 18) 3 cm. 19) 1.69 m^3 20) 1.5 $pies^3$, 8.65 $pies^2$.

8. CONCEPTOS GENERALES DE LA TRIGONOMETRÍA

La trigonometría, o geometría de los triángulos, se concentra en los triángulos rectángulos ya que estos son la base para entender todas las clases de triángulos.
La trigonometría se ha definido también como la ciencia de la medida indirecta, ya que a través de ella se pueden calcular distancias imposibles de medir directamente. Tal cálculo se hace mediante seis razones que se llaman funciones trigonométricas y cuya definición se dará más adelante.
La definición de las funciones trigonométricas se funda en el sistema de coordenadas rectangulares, con las cuales se calcula distancia, de segmentos rectilíneos dirigidos y de ángulos. A continuación estudiaremos este sistema.

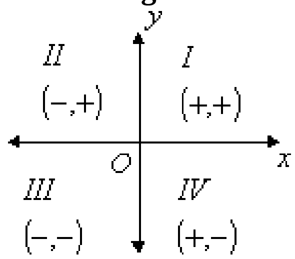
8.1. Sistema De Coordenadas Rectangulares O Plano Cartesiano.

Para construir este sistema de coordenadas rectangulares, se trazan en un plano una recta horizontal y una recta vertical, ambas dirigidas y perpendiculares entre sí. La recta horizontal recibe el nombre de eje de las abscisas o eje de las x; la recta vertical el nombre de las ordenadas o eje de las y; y el punto de intersección de ellas es el origen.

Usando estos ejes como referencia, se localizan puntos situados en el plano, los cuales están determinados por dos números denominados *coordenadas del punto*; representados así P(x, y), la primera coordenada es la coordenada en x (o sea en el eje x) y la segunda coordenada es la coordenada en y (o sea en el eje y).

Es importante destacar que toda coordenada a la derecha del punto llamado origen es positiva y a la izquierda de dicho punto es negativa. Toda coordenada hacia arriba llamado origen es positiva y hacia abajo de dicho punto es negativa.
Los ejes de coordenadas dividen al plano cartesiano en cuatro regiones llamadas cuadrantes, vea la figura 1.

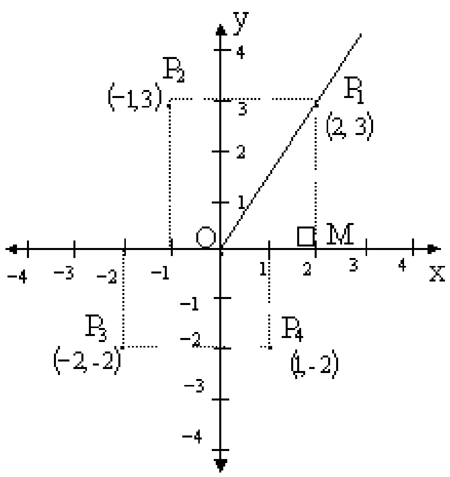
Figura 1:



En la figura 1 son las regiones nombradas por los números romanos I, II, III, IV; además se indican los signos de las coordenadas en los diferentes cuadrantes.
Vea el ejemplo 1.

Ejemplo 1: Trazar el punto $P_1(2,3)$, $P_2(-1,3)$, $P_3(-2,-2)$ y el $P_4(1,-2)$ y encontrar la distancia del origen al punto P_1 o sea $\overline{OP_1}$.

Solución:
Para localizar cada punto, se mide la distancia de la primera coordenada sobre el eje x hacia la derecha (+), hacia la izquierda (-) y la distancia que corresponde a la segunda coordenada se mide sobre el eje y hacia arriba (+) y hacia abajo (-). El punto será la intersección de la medida sobre el eje x y el eje y. En la figura siguiente se muestra:



La distancia $\overline{OP_1}$ se encuentra por el teorema de Pitágoras. Sabiendo que, $\overline{OP_1}$ = r y que es la hipotenusa, "x" e "y" son los catetos, tenemos que $r^2 = x^2 + y^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como se observa OP_1M es un triángulo rectángulo, donde OM = x y $MP_1 = y$ son los catetos los cuales son perpendiculares o sea que forman entre sí un ángulo de 90°. A la distancia $\overline{OP_1}$, también se le llama radio vector, el cual es la distancia del origen al punto localizado y no es más que la magnitud de la distancia, siempre es positivo sin importar en que cuadrante se encuentra.
Vea el ejemplo 2.

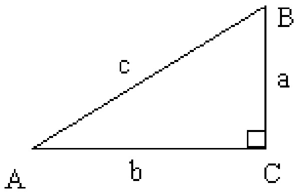
Ejemplo 2: Determine "y" si r =5, x =-4 y el punto se encuentra en el tercer cuadrante.

Solución:
Para encontrar el valor desconocido debemos utilizar el teorema de Pitágoras; $r^2 = x^2 + y^2$; en este caso se despeja el valor desconocido $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, por lo cual $y = \sqrt{(5)^2 - (-4)^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = \pm 3$; como el punto se encuentra en el tercer cuadrante la "y" es negativa o sea que el punto es igual (-4, -3).

8.2 Funciones Trigonométricas Básicas

Las funciones trigonométricas básicas se definen como las razones trigonométricas para un triángulo rectángulo (90°), según coincida su lado terminal con el eje x o con el eje y.
Con la figura 3 se encuentran las funciones trigonométricas básicas para el ángulo **A.**

Figura 3.



Las funciones trigonométricas básicas para el ángulo **A** son:

$$\text{seno de A} = \text{sen}\,A = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{coseno de A} = \cos A = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tangente de A} = \tan A = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}} = \frac{a}{b}$$

Las funciones trigonométricas recíprocas para el ángulo A son:

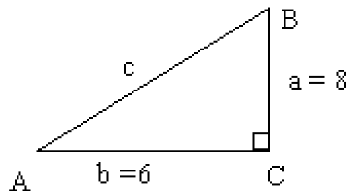
$$\text{Cosecante de A} = \text{cscA} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado opuesto}} = \frac{c}{a} = \frac{1}{\text{senA}}$$

$$\text{Secante de A es} = \sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}} = \frac{\text{c}}{\text{b}} = \frac{1}{\cos\text{A}}$$

$$\text{Cotangente de A} = \cot \text{A} = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{lado opuesto}} = \frac{\text{b}}{\text{a}} = \frac{1}{\tan \text{A}}$$

Vea el ejemplo 3.

Ejemplo 3: Encuentre las tres funciones trigonométricas básicas para el ángulo A y el ángulo B.



Solución:

El lado c se encuentra por el teorema de Pitágoras

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(8)^2 + (6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$.

$$\text{sen}\, A = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \cos\text{A} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad \tan\text{A} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{sen}\, B = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad \cos\text{B} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \tan\text{B} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Como se puede observar en el ejemplo 3; $\text{senA} = \cos\text{B}$, $\cos\text{A} = \text{senB}$, $\tan A = \cot B$ *y la* $\cot A = \tan B$. *Esto sucede cuando dos ángulos son complementarios* $(\text{A} + \text{B} = 90^\circ)$.

El seno de uno de los ángulos es igual al coseno de su complemento y viceversa. Por ejemplo $\text{sen}10^\circ = \cos 80^\circ$ *;* $\text{sen}30^\circ = \cos 60^\circ$ *y* $\text{sen}70^\circ = \cos 20^\circ$. *Esto se verifica con las demás funciones trigonométricas.*

8.3 Funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Por ejemplo $\text{sen}30.5^\circ$. Esta función trigonométrica se encuentra utilizando una calculadora científica, sino se cuenta con una calculadora científica se debe encontrar con una tabla de valores (Este método ya casi no se emplea, porque resulta más largo y menos exacto; no es exacto por que todo los valores no se encuentran en las tablas y al no encontrarse se debe interpolar). Para los efectos de este libro y para este curso, todos los estudiantes deberán utilizar una calculadora científica.

Para encontrar el $\text{sen}30.5^\circ$ en una calculadora científica; como el ángulo esta en decimales de grado, se coloca la calculadora en el modo de grado (DEG) con la tecla $\boxed{\text{DRG}}$ o con una tecla similar. La mayoría de las calculadoras están en el modo de grado (DEG) cuando se encienden y no es necesario oprimir otra tecla. Cuando la calculadora esta en este modo (DEG) se introduce el número 30.5 y se oprime la tecla de la función trigonométrica: 30.5 $[sen]$ 0.5075383630.

Nota: La calculadora, como se puede observar, da mucho más número de los requeridos, sin embargo solamente se trabaja con cuatro cifras de decimales para nuestro caso sería $\text{sen}30.5 = 0.5075$*; cuando la quinta cifra decimal es mayor de 5 se redondea la siguiente cifra anterior o sea la cuarta cifra.* Vea el ejemplo 4

Ejemplo 4: Encuentre el valor de $\cos 46.3º = 0.690882411$.
Solución:
Para este caso la quinta cifra redondea a la cuarta, por tanto el $\cos 46.3º = 0.6909$
Todas las calculadoras científicas proporcionan directamente las tres funciones trigonométricas básicas; o sea *seno, coseno* y *tangente*; las funciones como *la secante, cosecante* y *cotangente* son determinadas a partir de las funciones trigonométricas básicas. Vea el ejemplo 5.

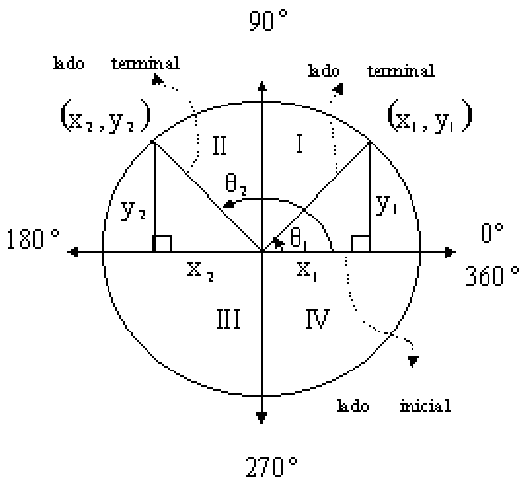
Ejemplo 5: Encuentre el valor de $\csc 30º$.
Solución:

$$\csc 30° = \frac{1}{sen 30°} = \frac{1}{0.5} = 2.$$

8.4 Funciones Trigonométricas De Un Ángulo En Posición Normal

Los ángulos miden rotaciones y se definen más específicamente a partir de círculos.
En la figura 8.4.1 a continuación se muestra el círculo con centro en el origen del sistema de coordenadas rectangulares.

Figura 8.4.1:



El ángulo en posición normal es aquel que tiene su vértice en el origen y su lado inicial coincide con el eje positivo de las abscisas o “x”.

Como se puede observar en la figura 8.4.1, el lado terminal del ángulo puede quedar en cualquiera de los cuadrantes. El ángulo se encuentra en el cuadrante en que esté el lado terminal y gira en contra de las manecillas del reloj (Dirección Positiva).

El ángulo en posición normal puede variar de $0^{\circ} \leq \theta \leq 360^{\circ}$ y si este ángulo es mayor que 360º; significa que el ángulo giró más de una vuelta y se puede expresar en términos de un ángulo en posición normal.

Como puede observar de la figura 8.4.1, el círculo tiene cuatro cuadrantes y un ángulo positivo θ.

Las funciones trigonométricas para un ángulo en posición normal θ, cuyo lado terminal pasa por el punto (x, y) en un círculo de radio r se definen de la siguiente forma:

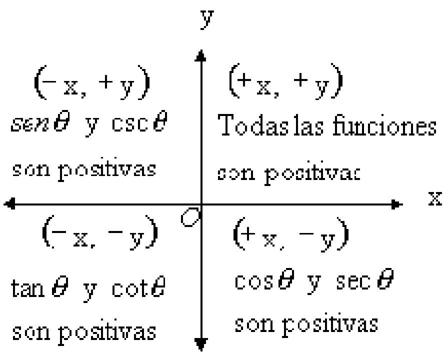
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\theta}$$

El radio vector o hipotenusa siempre es positiva, sin embargo la abscisa (x) y la ordenada (y) pueden ser negativas o positivas dependiendo del cuadrante en que se encuentren. El signo algebraico de una función, se determina mediante los signos del punto (x, y) del lado terminal. Todas las funciones son positivas en el primer cuadrante; solamente dos funciones son positivas en cualquiera de los otros cuadrantes; vea la figura 8.4.2.

Figura 8.4.2:



Vea el ejemplo 8.4.1, el ejemplo 8.4.2 y el ejemplo 8.4.3.

Ejemplo 8.4.1: La $\tan\theta = 1$ y el $sen\theta$ es negativo. Determine el ángulo y los valores de x, y y r.

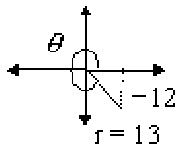
Solución:
Como la $\tan\theta$ es positiva y el $sen\theta$ es negativo, el ángulo se encuentra en el tercer cuadrante. Entonces:

$\tan\theta = \frac{y}{x} = 1$ significa $x = -1$, $y = -1$ y $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ y el $sen\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. El ángulo es $\theta = \tan^{-1}(1) = 45^{\circ}$.

Ejemplo 8.4.2: Calcular $\cos\theta$, $\cot\theta$; sí $sen\theta = \frac{12}{13}$ y θ está en e IV cuadrante.

Solución:

El $sen\theta = \frac{y}{r} = -\frac{12}{13}$ y θ está en el IV cuadrante:



$x = ?$

$x^2 + y^2 = r^2$

$x^2 = r^2 - y^2$

$x = \sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{(13)^2 - (12)^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = \pm 5$

Se toma $x = +5$ porque el θ está en el IV cuadrante y allí las x son positivas $(+)$:

$\cos\theta = \frac{y}{r} = \frac{5}{13}$; $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{5}{-12} = -\frac{5}{12}$.

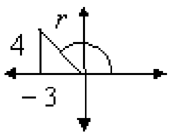
Ejemplo 8.4.3: Calcular $sen\theta$, $\cos\theta$ y $\tan\theta$ para el punto $(-3,4)$.

Solución:

Al ser la x negativa y la y positiva el ángulo se encuentra en el II cuadrante:

$r^2 = x^2 + y^2$

$r = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$



$sen\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$.

$\cos\theta = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$.

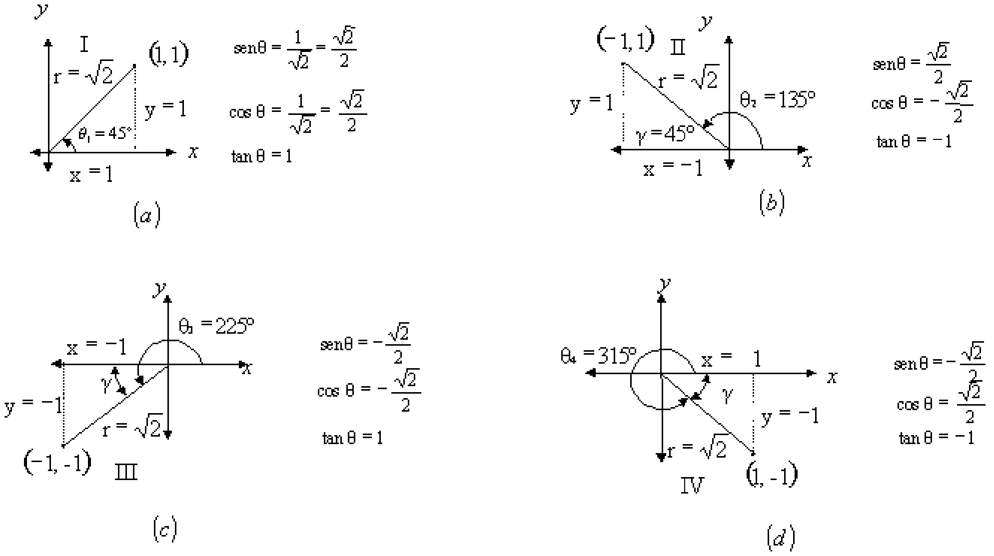
$\tan\theta = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$.

8.5 Funciones Para Cualquier Ángulo En Términos De Funciones De Ángulo Agudo (Ángulos De Referencia O Relacionados).

Todos los ángulos mayores de 90° pueden ser expresados en términos de ángulos agudo positivos o sea un ángulo agudo en el primer cuadrante. Esto se hace mediante la utilización del ángulo de referencia o relacionado, cuya definición es la siguiente:

El ángulo relacionado o de referencia es el ángulo agudo positivo formado por su lado terminal y el eje x, con el cual se puede expresar cualquier ángulo, que no sea múltiplo de 90° y que se encuentre en posición normal. Si el ángulo dado es un múltiplo de 90° y se encuentra en posición normal, entonces su ángulo de referencia o relacionado es 0° ó 90°, según coincida su lado terminal con el eje x. Vea la figura 8.5.1.

Figura 8.5.1



Los valores de las funciones trigonométricas de los cuatros ángulos θ_1, θ_2, θ_3 y θ_4 son iguales o difieren solamente en el signo. Los valores absolutos (o sea positivos) de x, y y r son iguales para cada ángulo. Los triángulos que forman estos ángulos son congruentes y los ángulos agudos de cada uno de los ángulos en los cuadrantes son iguales al ángulo agudo θ_1 que se encuentra en el primer cuadrante.

Como se puede observar el valor absoluto o sea positivo de las funciones trigonométricas de un ángulo en cualquier cuadrante son iguales a las funciones de su ángulo de referencia ó su ángulo relacionado. Vea el ejemplo 8.5.1.

Ejemplo 8.5.1: Obtenga el $sen140^\circ, \cos 250^\circ$, $\tan 315^\circ$ y muestre el ángulo agudo. Encuentre el signo correcto de la función. Obtenga el valor de la función del ángulo agudo o de referencia y coloque el signo correcto.

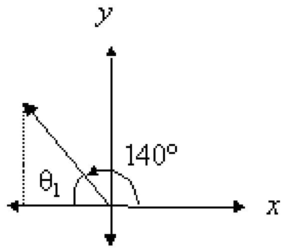
Solución:

1. Ángulo agudo o de referencia $\theta_1 = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$. La función *seno* es positiva en el II cuadrante:

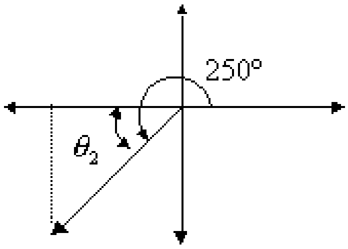
$sen40^\circ = 0.6428$. El valor del $sen40^\circ$ se obtiene utilizando calculadora científica.

$sen140^\circ = sen40^\circ$

$sen140^\circ = 0.6428$. Se puede verificar buscando el $sen140^\circ$ en la calculadora.



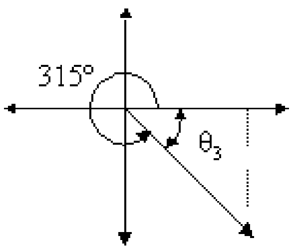
2. $\theta_2 = 250º - 180º = 70º$. La función coseno es negativa en el III cuadrante:
$\cos 70º = 0.3420$. Como el ángulo se encuentra en el III cuadrante $\cos 250º = -\cos 70º = -0.3420$.



3. $\theta_3 = 360º - 315º = 45º$. La función es negativa en el IV cuadrante:
$\tan 45º = 1$. Como el ángulo se encuentra en el IV cuadrante y la tangente es negativa entonces:

$\tan 315º = -\tan 45º$

$\tan 315º = -1$



8.6 Valores De Las Funciones Trigonométricas De Los Ángulos Especiales De $30º$, $45º$, $60º$ Y Sus Múltiplos.

Los ángulos de $30º$, $45º$ y $60º$ se consideran ángulos especiales porque ellos se presentan frecuentemente en problemas, además las funciones trigonométricas de estos ángulos son fáciles de aprender. Es útil recordar los valores de estas funciones para entender la variación de las funciones trigonométricas y verificar resultados.
Estos ángulos se pueden expresar con triángulos rectángulos y con el teorema de Pitágoras. Los lados de cada triángulo se pueden memorizar a partir de estos triángulos. Vea la figura 8.6.1.

Figura 8.6.1:

(a) (b)

Las funciones trigonométricas de ellos son:

$sen30º = \dfrac{1}{2} = 0.5000$ $\qquad$ $sen60º = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$

$\cos 30º = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$ $\qquad$ $\cos 60º = \dfrac{1}{2} = 0.5000$

$\tan 30º = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0.5774$ $\qquad$ $\tan 60º = \sqrt{3} = 1.7320$

$$sen45º = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$$

$$\cos 45º = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$$

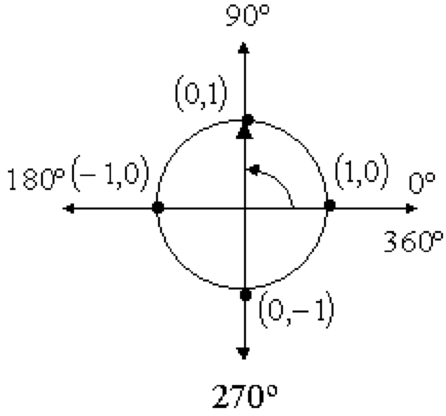
$$\tan 45º = 1$$

Para mayor facilidad se puede memorizar $sen30º = \frac{1}{2}$ *y* $\tan 45º = 1$. *A partir de esto se puede deducir las demás funciones trigonométricas utilizando el triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras.*
Con el ángulo de $30º$ *se pueden deducir las funciones trigonométricas de* $30º$ *y también las de* $60º$ *ya que estos dos ángulos son complementarios uno al otro.*

8.7 Funciones Trigonométricas De Ángulos De Cuadrantes

Debido a que el lado terminal de los ángulos de $0º$, $90º$, $180º$, $270º$ y $360º$ coinciden con los ejes que definen los cuadrantes en un sistema de coordenadas se les llama ángulos especiales. Las funciones trigonométricas de estos ángulo se determinan a partir del *círculo unitario*, donde $r = 1$; las coordenadas de los puntos serán para cada ángulo como se observa en la figura 8.7.1.

Figura 8.7.1:



Las funciones trigonométricas para 0^{o}, 90^{o}, 180^{o} *y* 270^{o}*:*

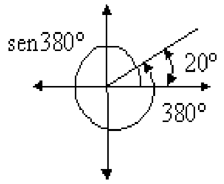
θ	0	90º	180º	270º
$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{-1}{1} = -1$
$\cos\theta = \frac{x}{r}$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{-1}{1} = -1$	$\frac{0}{1} = 0$
$\tan\theta = \frac{y}{x}$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{1}{0} = \infty$	$\frac{0}{-1} = 0$	$\frac{-1}{0} = \infty$
$\cot\theta = \frac{x}{y}$	$\frac{1}{0} = \infty$	$\frac{0}{1} = 0$	$\frac{1}{0} = \infty$	$\frac{0}{-1} = 0$
$\sec\theta = \frac{r}{x}$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{0} = \infty$	$\frac{1}{-1} = -1$	$\frac{1}{0} = \infty$
$\csc\theta = \frac{r}{y}$	$\frac{1}{0} = \infty$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{0} = \infty$	$\frac{1}{-1} = -1$

La $\tan 90^{o} = \frac{1}{0} = \infty$, *la división entre cero no existe o no está definido o sea que es infinito. La tangente no está definida en* 90^{o} *y* 270^{o}, *debido a que no tiene ningún valor en estos ángulos. La* $\sec 90^{o}$, $\sec 270^{o}$, $\csc 0^{o}$ *y* $\csc 180^{o}$ *tampoco están definidas.*

8.8 Ángulos Coterminales.

Para ángulos mayores que 360^{o} o menores que 0^{o} (estos son ángulos negativos), los valores de la funciones trigonométricas son los mismos que los correspondientes al *ángulo coterminal* entre 0^{o} y 360^{o}. Un ángulo coterminal, es aquel que tiene el mismo segmento terminal que el ángulo dado. Por ejemplo $\operatorname{sen}380^{o}$; $\cos 470^{o}$; $\tan(-45^{o})$, vea la figura 8.8.1.

Figura 8.8.1:



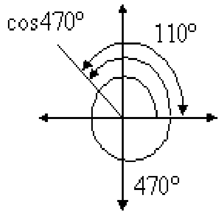
$\text{sen}380° = \text{sen}(360°+20°) = \text{sen}20°$

con la calculadora

$\text{sen}380° = 0.3420$ y $\text{sen}20° = 0.3420$

$\text{sen}380° = \text{sen}20°$

(a)



$\cos 470° = \cos(360°+110°) = \cos 110°$

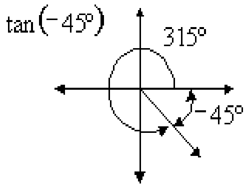
con la calculadora

$\cos 470° = -0.3420$ y

$\cos 110° = -0.3420$

$\cos 470° = \cos 110°$

(b)



$\tan(-45°+360°) = \tan 315°$

con la calculadora

$\tan(-45°) = -1$ y $\tan 315° = -1$

$\tan(-45°) = \tan 315°$

(c)

Nota: Los ángulos negativos giran a favor de la manecilla del reloj, o sea en posición normal se colocan desde el eje positivo de las x *girando a favor de las manecillas del reloj hasta el lado terminal.*

8.9 Funciones Trigonométricas Y Sus Gráficas

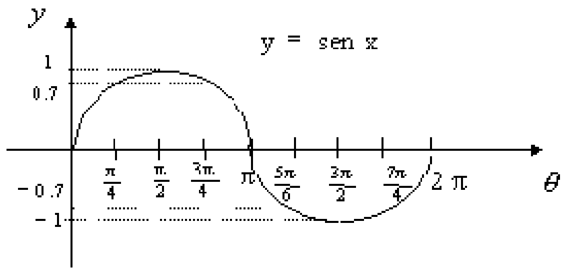
Las funciones trigonométricas son funciones periódicas, esto es que los valores se repiten después de cierto número de grados, a los que se le llama período. El período es el número de grados contenidos en un ciclo de la gráfica de una función. Es importante destacar que muchos fenómenos físicos son períodos por naturaleza y pueden describirse empleando las gráficas de las funciones trigonométricas. Las curvas que forman las funciones senoidal y la cosenoidal son las que tienen más cantidad de aplicaciones. Ellos se presentan en las aplicaciones matemáticas que tienen relación en el movimiento circular, como el que describe la corriente alterna, la onda de la luz, la onda de radio, el movimiento de fluidos (como el agua), el movimiento orbital de la tierra entre otros.

8.10 Gráficas De Las Funciones Trigonométricas

Las gráficas de las funciones trigonométricas se realizan en un sistema de coordenadas rectangulares. En el eje de las abscisas se colocan los ángulos en forma lineal y dados en radianes (para expresarlo numéricamente en grado sería de manera circular) y en el eje de las ordenadas se coloca la variación de la función trigonométrica para el ángulo dado. Cada valor del ángulo le corresponde un valor de la función trigonométrica del ángulo; estos conjuntos de valores se grafican en el sistema de coordenadas y al unir los puntos se obtiene la gráfica de la función trigonométrica.

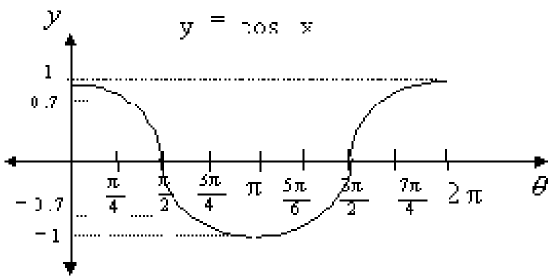
Gráfica de la función seno:

Grados x	0º	45º	90º	135º	180º	225º	270º	315º	360º
Radianes x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y = senx	0	0.7	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7	0



Gráfica de la función coseno:

Grados x	0º	45º	90º	135º	180º	225º	270º	315º	360º
Radianes x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y = cosx	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7	0	0.7	1



Como se puede observar el período o ángulo en que se vuelven a repetir los valores para ambas gráficas es 2π. La *amplitud* o valor máximo de las gráficas es 1, ambas curvas se repiten continuamente en ambas direcciones. Por tanto una manera de expresarla en forma general es:

$y = a\, sen\, bx$ y $y = a \cos bx$.

La amplitud de la curva *senoidal* y *cosenoidal* se puede modificar por medio de un *coeficiente* que multiplique a la función y el *período* se puede cambiar con un *coeficiente* (b) que multiplique al ángulo.

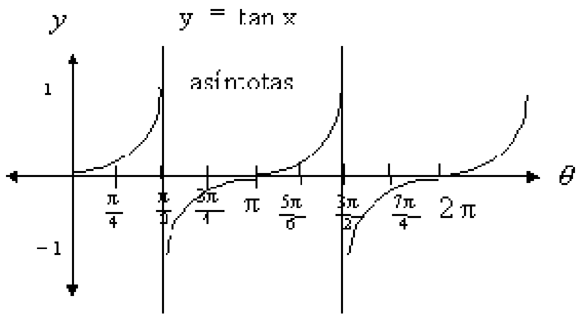
$\text{Amplitud} = |a|$ y el $\text{Período} = \frac{2\pi}{\text{b}}$.

El valor $|a|$ indica el valor positivo de a.

Gráfica de la función tangente:

La gráfica de la tangente tiende al infinito en cierto punto. En estos puntos la gráfica presenta saltos y no tiene continuidad.

Grados x	0º	45º	90º	135º	180º	225º	270º	315º	360º
Radianes x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y = tanx	0	1	∞	-1	0	1	∞	-1	0



Para este caso el período es π como se puede observar cuando x se acerca a $\frac{\pi}{2}$ ó $\frac{3\pi}{2}$, la tangente x tiende a valores muy grande (∞). En estos puntos la curva se acerca a una *línea vertical*. La curva nunca toca esta línea, que se llama *asíntota*, sino que solamente se acerca más a ella. Entonces:

$\text{Amplitud} = |a| = \infty$ y el $\text{Período} = \frac{\pi}{b}$.

PRÁCTICA N°18

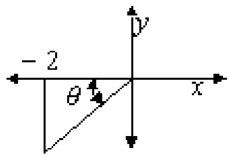
1. Hallar el valor de las funciones $\cot\beta$ y $\sec\beta$ respectivamente, si P es un punto del lado terminal de β y las coordenadas son $P(12,\ -9)$.

2. Si A y B quedan en una línea recta que pasa por el origen y las coordenadas de A son $(-5,-2)$ y la abscisa de B es 8. Encuentre la ordenada de B.

3. Si la ordenada es 4 y el radio vector es 8. Encuentre el valor de la abscisa y el ángulo, si el punto se encuentra en Q_2.

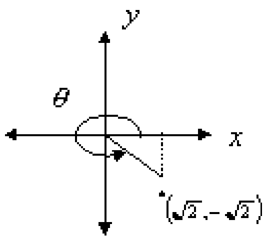
4. Determine las coordenadas del punto final si a partir del punto $P(-3,3)$, trazamos los siguientes segmentos: 4 unidades hacia abajo, 2 unidades hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba.

5. Si la $\cot\theta = \frac{1}{2}$. ¿Cuál es el valor de la $\sec\theta$ en el Q_3?.



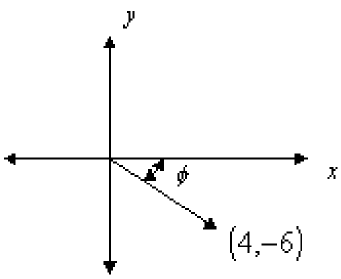
6. Hallar el valor de las funciones $\operatorname{sen}\theta$ y $tan\theta$ respectivamente, si P es un punto del lado terminal de θ y las coordenadas son $P(4,\ -3)$.

7. Encuentre el valor de $\cos\theta$.



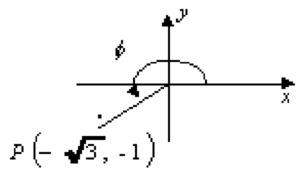
8. Encuentre el valor de $\csc(-240°)$.

9. En la figura mostrada, cuál es el valor de $\cos\phi$.



10. Si el valor de $\operatorname{sen}\theta = -\frac{7}{25}$. Encuentre el valor de $tan\theta$ en Q_4.

11. Encuentre: $\sec\phi$



12. Encuentre el valor de la siguiente expresión: $\dfrac{\tan^2 45° + \sec^2 60°}{\csc^2 30° - 4sen^2 45° - \tan^2 60°}$.

13. Encuentre el valor de la siguiente expresión: $4\sec 180° - 2sen^2 270°$.

14. Halle el valor de las funciones $sen\phi$ y $\tan\phi$ respectivamente, de un punto situado en el Q_2, cuyo radio vector es el doble de su abscisa.

15. Encuentre el valor de la siguiente expresión: $\dfrac{4\cos^2 45^\circ - 3\cos 60^\circ + \tan 60^\circ - \cot 30^\circ}{sen 60^\circ \tan 45^\circ}$.

16. Encuentre el valor de la siguiente expresión: $\dfrac{sen 90^\circ + sen 270^\circ - 2\cot 90^\circ}{\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + \sec 180^\circ}$.

17. Encuentre el valor de la siguiente expresión: $2\csc^2 30^\circ + 2\cot^2 240^\circ - 6 sen^2(-225^\circ)$.

18. Encuentre el valor de la siguiente expresión: $\cos 360^\circ \csc 270^\circ + sen 90^\circ + \tan 180^\circ$.

19. Encuentre el valor de $\cos 225^\circ$.

20. Encuentre el valor del $\cos 135^\circ + \cos 315^\circ$.

21. Calcule el valor de la expresión: $\dfrac{sen 30^\circ \sqrt{2}\csc\frac{\pi}{4}}{\sqrt{3}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right) + \cot 45^\circ}$.

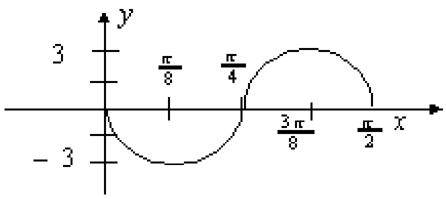
22. Encuentre el valor de la siguiente expresión: $\dfrac{sen 90^\circ + sen 270^\circ - \cot 90^\circ}{\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}$.

23. Encuentre el valor de la siguiente expresión: $\dfrac{\csc 30^\circ - 2\sec 60^\circ + \csc^2 30^\circ}{\left(1 + \cot^2 45^\circ\right)\left(2 sen 60^\circ - 2\cos 45^\circ\right)}$.

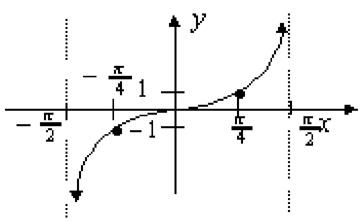
24. Encuentre el valor de la siguiente expresión: $\dfrac{3\cot 90^\circ + 2 sen 270^\circ\left(sen 90^\circ - \cos 180^\circ\right)}{2\sec 180^\circ}$.

25. Dada la función $y = 4 sen \frac{3}{4} x$. Encuentre el valor de A (amplitud) y P (período):

26. Dada la gráfica, encuentre la ecuación.



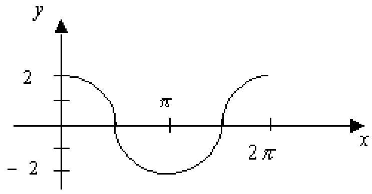
27. Encuentre la ecuación que determina la siguiente gráfica.



28. Cuál es la amplitud de la función $y = 2\cos\frac{1}{3} x$.

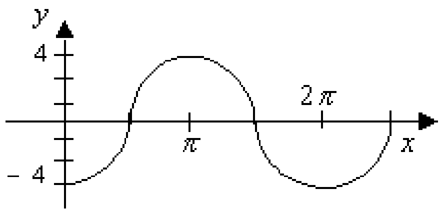
29. Cuál es el período de la función $y = 4sen2x$.

30. Dada la gráfica, encuentre la ecuación.



31. Dada la función trigonométrica $y = 5sen3x$, los valores de la amplitud y el período.

32. Dada la siguiente gráfica, encuentre la ecuación.

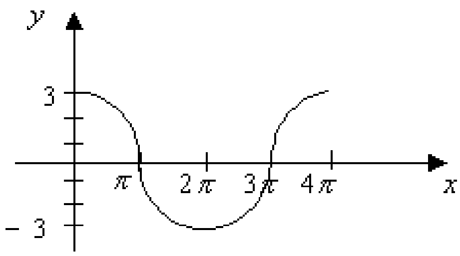


33. Encuentre el período de la función $y = 3\tan 2x$.

34. Determine la amplitud de la siguiente función: $y = 3\cos 2x$.

35. Encuentre el período de la función: $y = 2sen3x$.

36. Dada la siguiente gráfica, encuentre la ecuación.

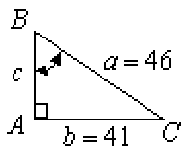


37. Encuentre la amplitud y el período de $y = 9\tan 2\theta$ y de $f(x) = -3\tan\frac{x}{2}$.

38. Encuentre el periodo, amplitud, desfazamiento y trace la gráfica de:

$$F(x) = 3\cos(3x - \pi); \quad f(x) = 2sen\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

39. Dado el triángulo rectángulo que se muestra en la figura dada, encuentre el ángulo B.



RESPUESTAS

1). $\cot B = -\frac{4}{3}$, $\sec B = \frac{5}{4}$; **2).** $y_B = 3.2$; **3).** $-4\sqrt{3}$, 30^o; **4).** $(-5,2)$; **5).** $-\frac{\sqrt{5}}{2}$; **6).** $\text{sen}\,\theta = -\frac{3}{5}, tan\,\theta = -\frac{3}{4}$; **7).** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **8).** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; **9).** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$; **10).** $-\frac{7}{24}$; **11).** $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; **12).** –5; **13).** –6; **14).** $sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}; \tan\theta = -\sqrt{3}$; **15).** $\frac{1}{\sqrt{3}}$; **16).** 0; **17).** $\frac{17}{3}$; **18).** 0; **19).** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; **20).** 0; **21).** $\frac{1}{4}$; **22).** 0; **23).** $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; **24).** 2.; **25).** $A = 4$, $p = \frac{8\pi}{3}$; **26).** $y = -3\,sen\,4x$; **27).** $y = \tan x$; **28).** 2; **29).** π; **30).** $y = 2\cos x$; **31).** $A = 5, P = \frac{2}{3}\pi$; **32).** y=-4cosx; **33).** $\frac{\pi}{2}$; **34).** 3; **35).** $\frac{2}{3}\pi$; **36).** $y = 3\cos\frac{1}{2}x$; **37).** 9, $\frac{\pi}{2}$ **39).** 63°02’; **40).** 13.29 pies; **41).** 34.64; **42).** 58º14'; **43).** 176.65m; **44).** 486.63 pie; **45).** $h = 115.15m$; **46).** 31.46 km; **47).** $1446.59\, {}^{km}\!/_{h}$; **48).** 76.97 km; **49).** 174.96 m; **50).** $S\ 66°01'\,O$; **51).** 77°47’; **52).** 5 cm.

BIBLIOGRAFÍA

Kramer, Arthur.-- **“Fundamentos de Matemáticas. Un Enfoque para Técnicos”**.-- Octava Edición **–** 1983.-- Editorial Mac Graw Hill.

Baldor, Aurelio. **–** **“Algebra”**. – Vigésimo Segunda – 2004.

Tussy, Alan S.- Gustafson, R. David.-- **“Matemáticas Básicas para Universitarios”. –** Tercera Edición **–** Editorial Thomson.

Alemán, Ángela; Camarena, Digna; Quiel, Alba de. – Folleto **“Precalculo” –** Panamá 2009 UTP, Facultad de Ciencias y Tecnología, Departamento de Ciencias Exactas.

Ortega, Zunilda de; y otros – Folleto **“Trigonometría” –** Segunda Edición. Panamá 2001-2002, UTP, Dirección Nacional de Pre - Ingreso.

Ortega, Zunilda de; y otros – Folleto **“Geometría” –** Segunda Edición. Panamá 2001-2002, UTP, Dirección Nacional de Pre - Ingreso.

Ortega, Zunilda de; y otros – Folleto **“Álgebra” –** Segunda Edición. Panamá 2001-2002, UTP, Dirección Nacional de Pre - Ingreso.