IX. Vibración de sistemas continuos

Objetivos:

1. Determinar expresiones para la energía cinética y potencial de sistemas continuos: barras y vigas.

2. Emplear métodos variacionales para deducir la ecuación de movimiento para sistemas continuos, vibración unidimensional: barras (axial) y vigas de Bernoulli (lateral).

1. Introducción

Al momento solo se ha lidiado con sistemas discretos en donde la masa, el amortiguamiento, y la elasticidad se asume están presentes solo en un cierto número discreto de puntos en el sistema. Sin embargo, en muchos casos no es posible identificar masas discretas, amortiguadores, y resortes. Aquí debemos considerar distribuciones continuas de las propiedades del sistema y asumir que una cantidad infinita de puntos del sistema puede vibrar. Es por esto último que un sistema continuo también es llamado sistema de infinitos grados de libertad.

Sí un sistema es modelado como uno discreto, las ecuaciones que gobiernan el movimiento son ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales son relativamente fáciles de resolver. Por otra parte, si el sistema es modelado como uno continuo, las ecuaciones que gobiernan el movimiento son ecuaciones diferenciales parciales, las cuáles presentan un mayor grado de dificultad a la hora de ser resueltas.

La elección entre los dos modelos debe ser efectuada de forma cuidadosa, tomando en consideración factores como el propósito del análisis, la influencia del análisis en el diseño, y la capacidad y tiempo computacional disponible.

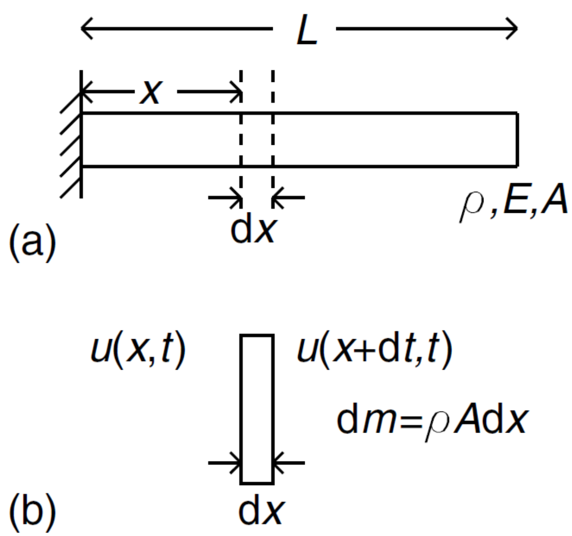
En general, la ecuación de frecuencia de un sistema continuo es una ecuación trascendente que lleva a un número infinito de frecuencias naturales y modos normales.

IX. Vibración de sistemas continuos

2. Deducción de energía potencial y cinética para sistemas continuos: barras y vigas de Bernoulli.

Energía cinética de una barra

La energía cinética de un cuerpo deformable es determinada al integrar sobre todo el cuerpo, la energía cinética calculada para un elemento diferencial. Considere la siguiente barra que sujeta a vibración longitudinal.



Aquí $u(x,t)$es el desplazamiento dependiente del tiempo de una partícula en una sección transversal a una determinada distancia x.

El elemento diferencial de masa dm esta dado entonces por:

$$dm = \rho A dx$$

Donde ρ es la densidad de la barra, A es el área de la sección transversal del elemento, y dx es la longitud diferencial de elemento.

La energía cinética diferencial dT de la barra está dada entonces por:

$$dT = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx$$

Lo que al ser integrado sobre todo el dominio da que:

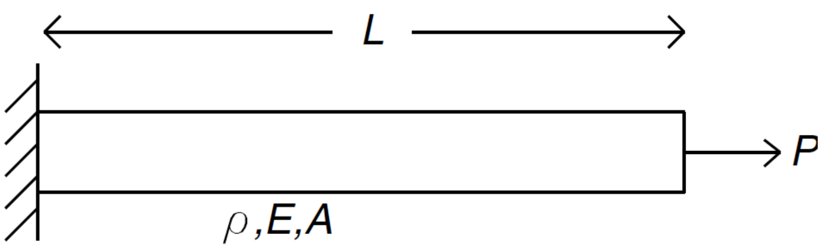
IX. Vibración de sistemas continuos

2. Deducción de energía potencial y cinética para sistemas continuos: barras y vigas de Bernoulli.

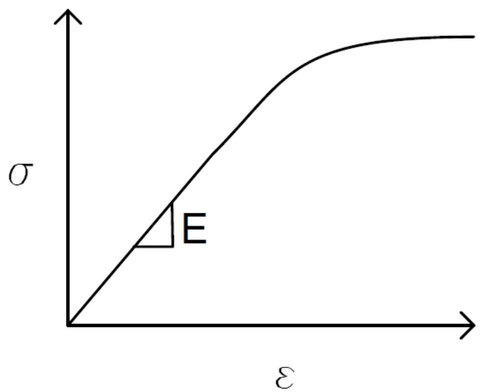
<u>Energía cinética de una barra</u>

$$\boxed{\int dT = T = \int_0^L \frac{1}{2}\rho A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx}$$

<u>Energía potencial de una barra</u>



La energía potencial en forma de energía de deformación es almacenada en todo sistema deformable. Considere el sistema de la figura anterior; una barra de longitud L, área de sección transversal A, que está hecha de un material cuyo módulo de elasticidad es E. Aquí una carga estática P es aplicada en el extremo de la barra en dirección axial. Esto último ocasiona la formación de un esfuerzo normal σ y una deformación normal ε, que en la región lineal (ver el siguiente gráfico), cumple con la ley de Hooke.



$$\sigma = E\varepsilon$$

Cuando el esfuerzo normal máximo es inferior al esfuerzo de cedencia, una vez la fuerza axial es removida, la barra regresará a su estado original. Esto último sugiere que el sistema es conservativo y que una función de energía potencial existe.

IX. Vibración de sistemas continuos

2. Deducción de energía potencial y cinética para sistemas continuos: barras y vigas de Bernoulli.

Energía potencial de una barra

Al ser aplicada la fuerza, una forma de energía potencial, llamada energía de deformación, es desarrollada en la barra. Al remover la fuerza, la energía de deformación se libera. La energía de deformación por unidad de volumen e es el área debajo de la cuerva de esfuerzo-deformación.

$$e = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

Lo cuál puede ser re escrito como:

$$e = \frac{1}{2}E\varepsilon^2$$

Teniendo presente que la deformación normal ε es el cambio en longitud por unidad de longitud. Entonces sí x es la coordenada medida a lo largo del eje axial de la barra y $u(x,t)$ el desplazamiento longitudinal de una partícula desde su posición inicial, la deformación normal estará dada por:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Y consecuentemente:

$$e = \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

La expresión anterior al ser multiplicada por un elemento de volumen diferencial Adx da la energía de deformación o potencial diferencial dV de la barra. Sí dicha expresión es integrada en todo el dominio se encontrará la expresión para la energía de deformación total de la barra.

$$dV = \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 Adx$$

$$\boxed{V = \int_0^L \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 Adx}$$

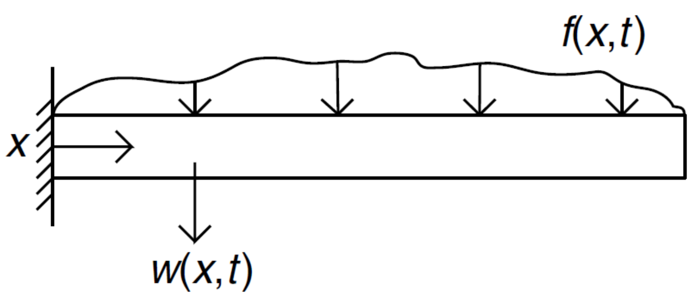
IX. Vibración de sistemas continuos

2. Deducción de energía potencial y cinética para sistemas continuos: barras y vigas de Bernoulli.

Energía cinética de una viga de Bernoulli

Similar al caso de la barra, sí se tiene vibración lateral producto de la aplicación de una carga que ocasiona flexión en la viga, denotando a $w(x,t)$ como el desplazamiento, se tendrá que la energía cinética está dada por:

$$\boxed{T = \int_0^L \frac{1}{2}\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx}$$



Energía potencial de una viga de Bernoulli

Para la viga sujeta a carga lateral, mostrada en la figura anterior, la energía de deformación por unidad de volumen puede ser escrita como:

$$e = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}$$

Esto último claro esta si la viga obedece a la ley de Hooke.

De la teoría clásica de vigas (vigas de Bernoulli) recuerde que el esfuerzo normal en un punto de la sección trasversal varía de forma lineal de acuerdo con:

$$\sigma = \frac{M(x)y}{I}$$

Donde $M(x)$ es el momento flector en esa sección, I es el segundo momento de área de la sección transversal con respecto a su eje neutro, y y es la distancia vertical, desde algún punto en la sección transversal, medida a partir del eje neutro.

IX. Vibración de sistemas continuos

2. Deducción de energía potencial y cinética para sistemas continuos: barras y vigas de Bernoulli.

<u>Energía potencial de una viga de Bernoulli</u>

Asumiendo deflexiones pequeñas, el momento flector está relacionado con el desplazamiento transversal o lateral por:

$$M = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

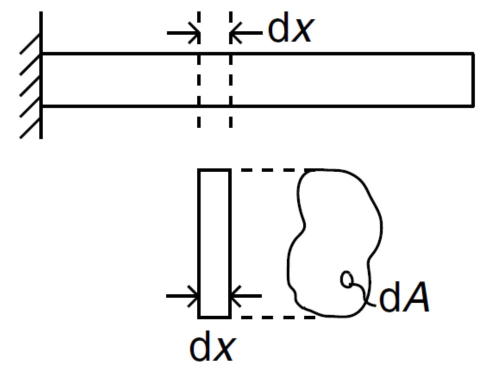
Por lo tanto:

$$e = \frac{1}{2}\frac{\left({}^{M(x)y}/_{I}\right)^2}{E} = \frac{y^2}{2EI^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2$$

$$e = \frac{Ey^2}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2$$

Y consecuentemente:

$$dV = \frac{Ey^2}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dAdx$$



$$V = \int_0^L \int_A \frac{Ey^2}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dA$$

$$\boxed{V = \int_0^L \frac{E}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 \left(\int_A y^2\,dA\right) dx = \int_0^L \frac{E}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 I dx}$$

IX. Vibración de sistemas continuos

3. Deducción de la ecuación diferencial parcial de movimiento para sistemas continuos, vibración unidimensional: barras (axial) y vigas de Bernoulli (lateral).

La respuesta de un sistema continuo es una función de una o más coordenadas espaciales, al igual que del tiempo. En general, considere que $w(\vec{r},t)$ represente a respuesta del sistema continuo, donde $\vec{r}$ es el vector posición, escrito en términos de sus coordenadas espaciales, y definido en una región R. El sistema es unidimensional si $\vec{r}$ es una función que depende de una sola variable espacial (R en este caso es un segmento finito), bidimensional sí $\vec{r}$ depende de dos variables (R es una superficie que puede ser descrita por un vector unitario normal a ella y una curva que delimite esa superficie), y tridimensional si $\vec{r}$ depende de las tres coordenadas espaciales (R es un volumen en el espacio delimitado por una superficie cerrada).

La energía cinética y potencial de un sistema continuo pueden ser escritas como funcionales de la forma:

$$T = \int_R f\left(\vec{r}, w(\vec{r},t), \frac{\partial w}{\partial t}\right) dR$$

$$V = \int_R g(\vec{r}, w(\vec{r},t), \nabla w) dR$$

Donde ∇ es el operador gradiente.

El principio de Hamilton y el principio extendido de Hamilton son usado para derivar el problema matemático que debe ser resuelto para encontrar a $w(\vec{r},t)$.

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} (W_{nc} + L) dt = 0$$

Donde L es el lagraniano y W_{nc} el trabajo producto de las fuerzas no conservativas.

IX. Vibración de sistemas continuos

3. Deducción de la ecuación diferencial parcial de movimiento para sistemas continuos, vibración unidimensional: barras (axial) y vigas de Bernoulli (lateral).

Aquí la variación $w(\vec{r},t)$ es de la forma $\delta w = \varepsilon\eta(\vec{r},t)$, donde $\eta(\vec{r},t_1) = \eta(\vec{r},t_2) = 0$.

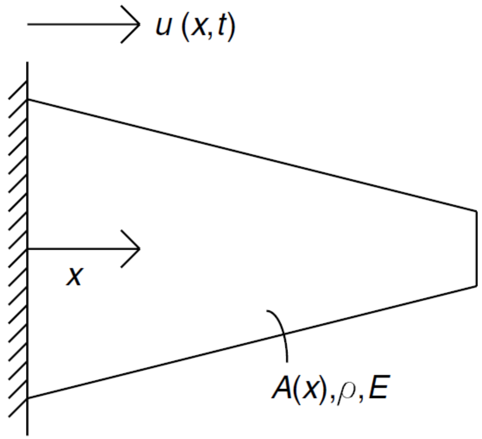
A continuación consideraremos sistemas unidimensionales en donde x, $0 \leq x \leq L$, es la variable espacial. Aquí la energía cinética y potencial presentan la siguiente forma:

$$T = \int_0^L f\left(x, w(x,t), \frac{\partial w}{\partial t}\right) dx$$

$$V = \int_0^L g\left(x, w(x,t), \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx$$

<u>Barras</u>

Considere el sistema mostrado a continuación.



Aplicando el principio de Hamilton se tendrá:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} (L) dt = 0$$

$$L = \int_0^L \frac{1}{2}\rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx - \int_0^L \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 A dx$$

IX. Vibración de sistemas continuos

3. Deducción de la ecuación diferencial parcial de movimiento para sistemas continuos, vibración unidimensional: barras (axial) y vigas de Bernoulli (lateral).

<u>Barras</u>

$$\frac{1}{2}\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L \rho A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx-\int_0^L E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 Adx\right]dt=0$$

Teniendo presente que el orden de variación e integración es intercambiable, y que el orden de variación y diferenciación también es intercambiable, se tendrá al analizar los términos por separado, lo siguiente:

a) Primer término a la izquierda.

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\delta\left[\int_0^L \rho A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\right]dt=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L \rho A\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L 2\rho A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L 2\rho A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\delta u)dx\right]dt$$

Integrando por partes $\int f dg=fg-\int g df, f=\dfrac{\partial u}{\partial t}, dg=\dfrac{\partial}{\partial t}(\delta u)dt$:

$$=\int_0^L \rho A\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\delta u\Big]_{t_1}^{t_2}-\left(\int_{t_1}^{t_2}(\delta u)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dt\right)\right]dx$$

$$=\int_0^L \rho A\left[-\left(\int_{t_1}^{t_2}(\delta u)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dt\right)\right]dx$$

$$=-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\delta u)dx\,dt$$

b) Segundo término a la izquierda.

$$\frac{1}{2}\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 Adx\right]dt=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L E\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 Adx\right]dt$$

IX. Vibración de sistemas continuos

3. Deducción de la ecuación diferencial parcial de movimiento para sistemas continuos, vibración unidimensional: barras (axial) y vigas de Bernoulli (lateral).

Barras

$$= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L 2E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)Adx\right]dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}(\delta u)dx\right]dt$$

Integrando por partes $\int fdg = fg - \int gdf, f = EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), dg = \frac{\partial}{\partial x}(\delta u)dx$:

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(\delta u)\Big]_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right)(\delta u)dx\right]dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\begin{array}{c} E(L)A(L)\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)\delta u(L,t) - E(0)A(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\delta u(0,t) - \\ \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right)(\delta u)dx \end{array}\right]dt$$

Sustituyendo en la expresión original:

$$\frac{1}{2}\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L \rho A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx - \int_0^L E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 Adx\right]dt = 0$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\delta u)dx\,dt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\Big[E(L)A(L)\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)\delta u(L,t)$$

$$-E(0)A(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\delta u(0,t)$$

IX. Vibración de sistemas continuos

3. Deducción de la ecuación diferencial parcial de movimiento para sistemas continuos, vibración unidimensional: barras (axial) y vigas de Bernoulli (lateral).

Barras

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-E(L)A(L)\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)\delta u(L,t)+E(0)A(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\delta u(0,t)\right]dt+$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right](\delta u)dx\,dt=0$$

En vista de que $\delta u=\varepsilon\eta(x,t)$, y que $\eta(x,t)$ es una función arbitraria, para que se cumpla la igualdad anterior se debe garantizar lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

$$E(L)A(L)\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)\delta u(L,t)=0$$

$$E(0)A(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\delta u(0,t)=0$$

Las dos últimas expresiones anteriores llevan a las condiciones de frontera.

Aquí para que la primera se cumpla $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)$ o $\delta u(L,t)$ deben ser iguales a cero (suponiendo que $E(L)\neq 0, A(L)\neq 0$). Para este caso en particular como la barra esta libre en su extremo $\delta u(L,t)$ no puede ser igual a cero y consecuentemente $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$.

En el caso de la segunda expresión al estar empotrada la barra $\delta u(L,t)=0$, ya que $u(L,t)=0$.

IX. Vibración de sistemas continuos

3. Deducción de la ecuación diferencial parcial de movimiento para sistemas continuos, vibración unidimensional: barras (axial) y vigas de Bernoulli (lateral).

<u>Barras</u>

Lo anterior nos permite ver que hay condiciones de frontera producto de que se deben satisfacer las restricciones en las fronteras (condiciones de frontera geométricas) y otras condiciones que ocurren naturalmente producto de la formulación del problema (condiciones de frontera naturales).

<u>Vigas de Bernoulli</u>

Para ejemplificar el uso del principio de Hamilton en la formulación del problema de vibración lateral en vigas, se considerará el caso en donde un extremo esta empotrado y el otro libre.

Aplicando el principio de Hamilton se tendrá:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} (L) dt = 0$$

$$L = \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx - \int_0^L \frac{E}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 I dx$$

$$\frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx - \int_0^L E \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 I dx\right] dt = 0$$

Teniendo presente que el orden de variación e integración es intercambiable, y que el orden de variación y diferenciación también es intercambiable se tendrá al analizar los términos por separado, lo siguiente:

a) Primer término a la izquierda. Análogo al caso de la barra:

$$\boxed{\frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx\right] dt = -\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (\delta w) dx\, dt}$$

IX. Vibración de sistemas continuos

3. Deducción de la ecuación diferencial parcial de movimiento para sistemas continuos, vibración unidimensional: barras (axial) y vigas de Bernoulli (lateral).

Vigas de Bernoulli

b) Segundo término a la izquierda:

$$\frac{1}{2}\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L E\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 I dx\right]dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L EI\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L 2EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx\right]dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2}dx\right]dt$$

Integrando por partes $\int f dg = fg - \int g df$,

$f = EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), dg = \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2}dx$:

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^L - \int_0^L\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx\Bigg]dt$$

Integrando nuevamente por partes $\int f dg = fg - \int g df, f = \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), dg = \left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx$:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^L dt -$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx\right]dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^L - \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(\delta w)\Bigg]_0^L\Bigg]dt +$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(\delta w)dx\right]dt$$

Sustituyendo en la expresión original:

IX. Vibración de sistemas continuos

3. Deducción de la ecuación diferencial parcial de movimiento para sistemas continuos, vibración unidimensional: barras (axial) y vigas de Bernoulli (lateral).

<u>Vigas de Bernoulli</u>

$$\frac{1}{2}\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L \rho A\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx - \int_0^L E\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 I dx\right]dt = 0$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\delta w)dx\,dt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_0^L - \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(\delta w)\Big|_0^L\right]dt +$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(\delta w)dx\right]dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-\left(E(L)I(L)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L,t)\right)\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}(L,t)\right)\right]dt +$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(E(0)I(0)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t)\right)\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)\right)\right]dt +$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(L,t)\right)\delta w(L,t)\right]dt -$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(0,t)\right)\delta w(0,t)\right]dt -$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left[\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right](\delta w)dx\,dt = 0$$

IX. Vibración de sistemas continuos

3. Deducción de la ecuación diferencial parcial de movimiento para sistemas continuos, vibración unidimensional: barras (axial) y vigas de Bernoulli (lateral).

Vigas de Bernoulli

En vista de que $\delta w = \varepsilon\eta(x,t)$, y que $\eta(x,t)$ es una función arbitraria, para que se cumpla la igualdad anterior se debe garantizar lo siguiente:

$$\boxed{\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0}$$

$$\left(E(L)I(L)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L,t)\right)\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}(L,t)\right) = 0$$

$$\left(E(0)I(0)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t)\right)\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(L,t)\right)\delta w(L,t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(0,t)\right)\delta w(0,t) = 0$$

Las cuatro últimas expresiones anteriores llevan a las condiciones de frontera.

Para este caso en particular como la barra esta empotrada en su extremo izquierdo y libre en su extremo derecho:

$$\boxed{\begin{array}{c}\delta w(0,t) = 0 \leftrightarrow w(0,t) = 0\ (desplazamiento\ cero) \\ \left(\delta\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)\right) = 0 \leftrightarrow \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0\ (pendiente\ cero)\end{array}}$$

IX. Vibración de sistemas continuos

3. Deducción de la ecuación diferencial parcial de movimiento para sistemas continuos, vibración unidimensional: barras (axial) y vigas de Bernoulli (lateral).

<u>Vigas de Bernoulli</u>

$$\left(E(L)I(L)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L,t)\right) = 0 \; (momento\ flector\ cero)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)(L,t)\right) = 0 \; (cortante\ cero)$$