

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

Objetivos:

1. Deducir las ecuaciones para la fuerza accionante, para las reacciones en pasadores, y para el torque en embragues y frenos.
2. Discutir algunas consideraciones generales con respecto al aumento de temperatura y al tipo de material a emplear para confeccionar embragues y frenos.
3. Analizar volantes de inercia.

1. Introducción

Estos tipos de elementos están asociados con movimiento rotatorio y tienen en común la función de disipar, transferir, o almacenar energía cinética rotacional.

Los embragues y los frenos realizan la misma función. Estos elementos fuerzan a que dos elementos con velocidad diferentes tengan una misma velocidad (cero en el caso de los frenos) al aplicar una fuerza.

Al analizar el desempeño de embragues y de frenos se debe analizar:

- La fuerza de accionamiento.
- El torque transmitido. Está relacionado a la fuerza de accionamiento, al coeficiente de fricción, y a la geometría del embrague o freno.
- La pérdida de energía.
- El aumento de temperatura. Está relacionado con la pérdida de energía y la geometría de las superficies de disipación de calor.

Los diversos tipos de embragues y frenos que se verán son los siguientes:

1. De aro (tambor) con zapatas internas expandibles.
2. De aro con zapatas externas contráctiles.
3. De banda.
4. De disco o tipo axial.

Los volantes en tanto, son elementos de inercia que almacenan energía. Al absorber energía mecánica aumentan su velocidad angular y al liberarla disminuye dicha velocidad.

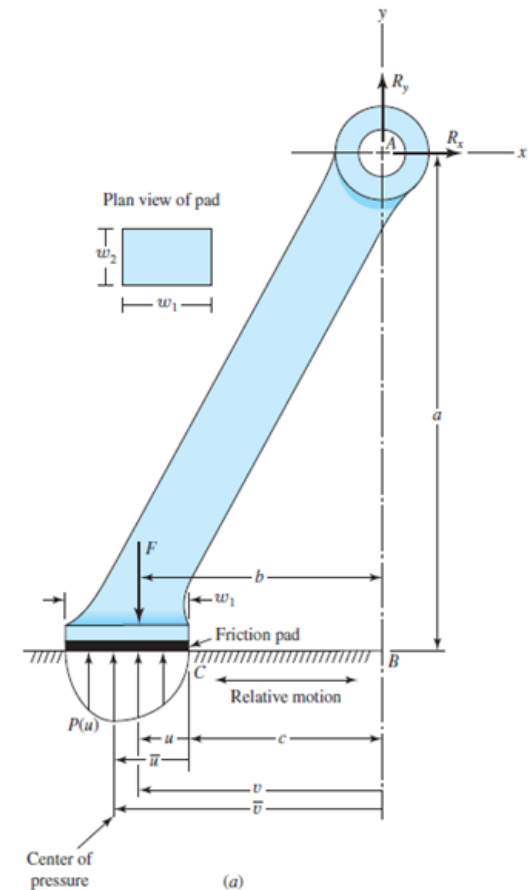
VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

2. Análisis estático de embragues y frenos

Muchos tipos de embragues y frenos pueden ser analizados empleando el siguiente procedimiento general:

- Estime la distribución de presión sobre las superficies de fricción.
- Encuentre una relación entre la mayor presión y la presión en algún punto (donde la mayor presión será la presión máxima permitida para el material de fricción).
- Emplee el análisis estático para encontrar la fuerza de frenado o el par de torsión y las reacciones de los apoyos.

Considere como ejemplo el tope de puerta mostrado en la siguiente figura.



VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

2. Análisis estático de embragues y frenos

El tope se articula en el pasador A. Una distribución normal de presión $p(u)$ se muestra bajo el tope como una función de la posición u , tal como se observa en la figura anterior. De igual forma una distribución similar de cortante producto de la fricción sobre la superficie de intensidad $fp(u)$ se muestra en la imagen. Aquí f es el factor de fricción. El ancho del tope (en dirección hacia afuera de la página) es w_2 .

A continuación se emplearán las ecuaciones de equilibrio para determinar la fuerza de frenado y las reacciones de los apoyos.

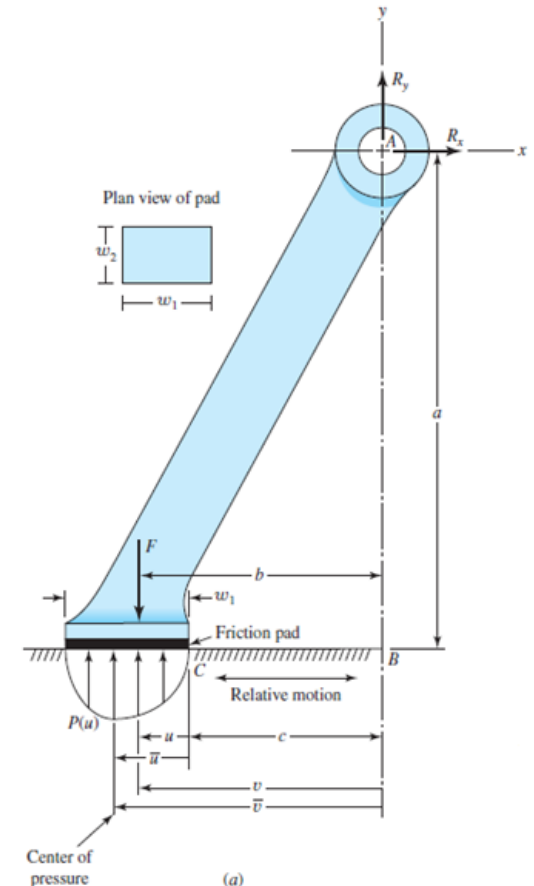
Sumatoria de fuerza en la dirección x :

$$\sum F_x = R_x \mp w_2 \int_0^{w_1} fp(u) du = 0$$

Donde se tendrá - si el movimiento es hacia la derecha y + si es hacia la izquierda.

$$R_x = \pm w_2 \int_0^{w_1} fp(u) du$$

Sumatoria de fuerza en la dirección y :



VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

2. Análisis estático de embragues y frenos

$$\sum F_y = R_y - F + w_2 \int_0^{w_1} p(u) du = 0$$

$$R_y = F - w_2 \int_0^{w_1} p(u) du$$

Momento en torno al punto donde está el pasador A:

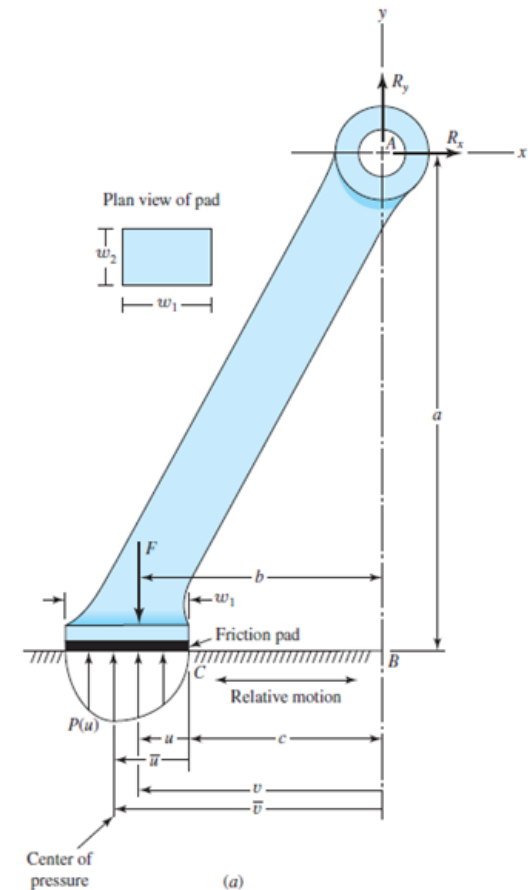
$$\sum M_A = Fb - w_2 \int_0^{w_1} (u + c) \cdot p(u) du \mp w_2 a \int_0^{w_1} f p(u) du$$

$$F = \frac{w_2}{b} \left[\int_0^{w_1} (u + c) \cdot p(u) du \pm w_2 a \int_0^{w_1} f p(u) du \right]$$

En las expresiones anteriores las integrales $\int_0^{w_1} p(u) du$ y $\int_0^{w_1} (u + c) \cdot p(u) du$ pueden ser re escritas en términos de la presión promedio:

$$\int_0^{w_1} p(u) du = p_{promedio} w_1 \quad \int_0^{w_1} p(u) u du = \bar{u} p_{promedio} w_1$$

Donde \bar{u} es la distancia al centro de presión.



VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

2. Análisis estático de embragues y frenos

De las expresiones anteriores se pueden hacer algunas observaciones importantes:

- ✓ La fuerza de accionamiento F es la fuerza máxima que puede ser aplicada sin exceder la presión permitida.
- ✓ El valor del término

$$\left[\int_0^{w_1} (u + c) \cdot p(u) du \pm w_2 a \int_0^{w_1} f p(u) du \right]$$

Debe ser mayor a cero. De ser cero se dice que trata de un freno auto bloqueante (no requiere de fuerza de accionamiento).

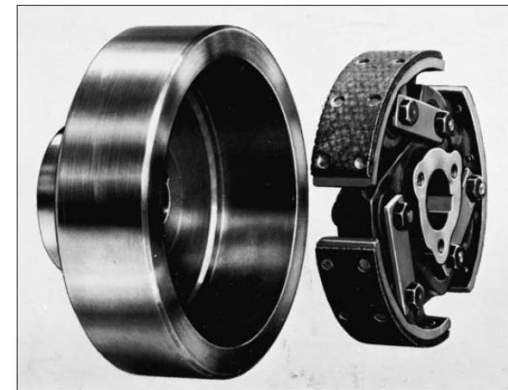
- ✓ Sí la fuerza asociada a la fricción ayuda a reducir a la fuerza actuante se dice que el freno es auto energizante.
- ✓ Sí la fuerza asociada a la fricción aumenta a la fuerza actuante se dice que el freno es auto desenergizante.

3. Algunos tipos de embragues y frenos

Embragues y frenos de tambor de expansión interna

Este tipo de embragues y frenos consisten de tres partes principales:

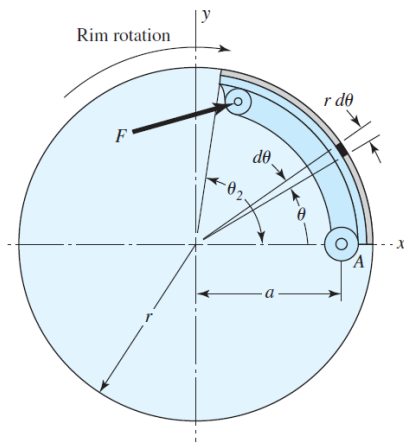
- a) Las superficies de fricción que entrarán en contacto.
- b) El medio de transmisión hacia y desde las superficies en contacto.
- c) El mecanismo actuador (aro expandible, centrifugo, magnético, hidráulico, neumático).



VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

3. Algunos tipos de embragues y frenos

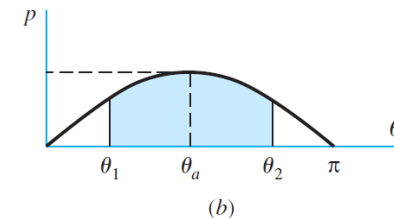
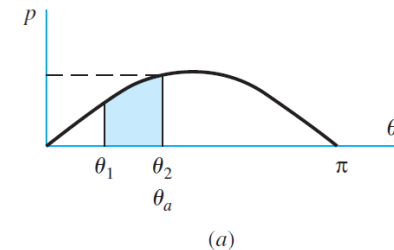
Para analizar el dispositivo de zapata interna considere la siguiente figura en donde se muestra una zapata articulada en el punto A y la fuerza de accionamiento que actúa en el otro extremo de la zapata.



Aquí no se puede suponer que la distribución de presión es uniforme, sino que la misma presentará las siguientes características:

- ✓ La distribución de presión será sinusoidal con respecto al ángulo θ .

- ✓ Para zapatas cortas, la presión máxima ocurrirá al extremo de la zapata a un ángulo θ_2 .
- ✓ Para zapatas largas, la presión máxima ocurrirá a un ángulo de 90° .



Empleando el análisis estático, las ecuaciones para la fuerza accionante y el torque en esta configuración (rotación a favor del reloj) pueden ser determinadas:

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

3. Algunos tipos de embragues y frenos

Sumatoria de momento con respecto al punto pasador A:

Teniendo presente que $dN = prd\theta b$, donde b es el espesor de la cara (perpendicular al plano mostrado), se tendrá que

$$\sum M_A = Fc - \int_{\theta_1}^{\theta_2} (prb \cdot a \sin \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} fprb \cdot (r - a \cos \theta) d\theta = 0$$

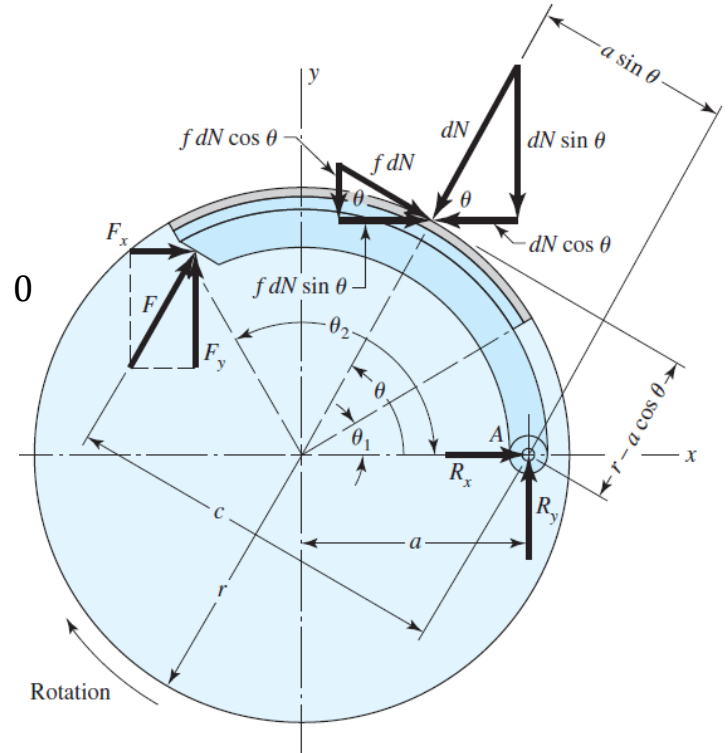
$$F = \frac{rba \int_{\theta_1}^{\theta_2} (p \sin \theta) d\theta - frb \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(r - a \cos \theta) d\theta}{c}$$

La distribución de presión puede ser expresada en términos de la presión máxima p_a y su ángulo respectivo θ_a por medio de la siguiente expresión:

$$p = \left(\frac{p_a}{\sin \theta_a} \right) \sin \theta$$

A partir de la expresión anterior es posible re escribir la ecuación de la fuerza de accionamiento.

$$F = \frac{rba \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\left(\frac{p_a}{\sin \theta_a} \right) \sin \theta \sin \theta \right) d\theta - frb \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{p_a}{\sin \theta_a} \right) \sin \theta (r - a \cos \theta) d\theta}{c}$$



VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

3. Algunos tipos de embragues y frenos

$$F = \frac{\left(\frac{p_a r b a}{\text{sen } \theta_a}\right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\text{sen } \theta)^2 d\theta - \left(\frac{p_a f r b}{\text{sen } \theta_a}\right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{sen } \theta (r - a \cos \theta) d\theta}{c}$$

Sumatoria de fuerza en la dirección x :

$$\sum F_x = R_x + F_x - \int dN \cos \theta + \int f dN \text{sen } \theta = 0$$

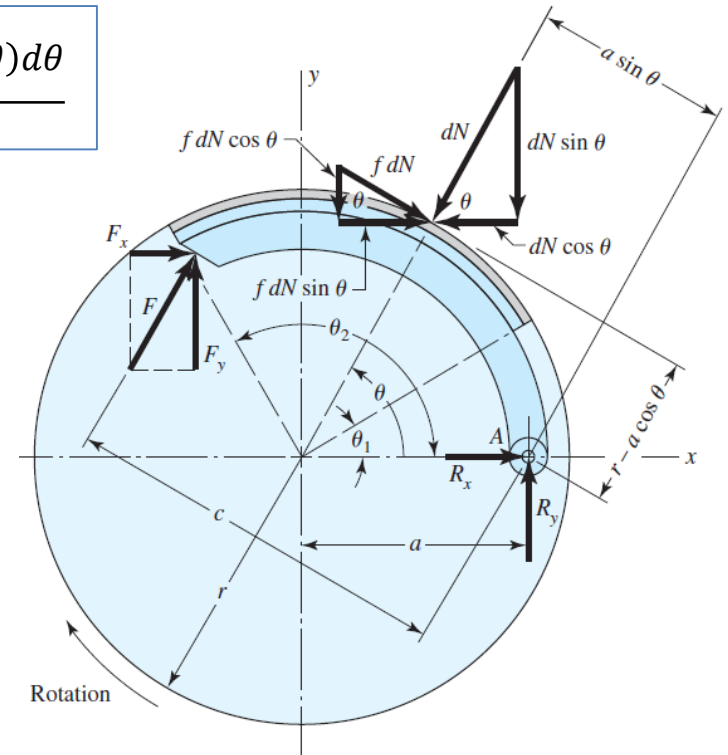
$$R_x = -F_x + \int_{\theta_1}^{\theta_2} p r b \cos \theta d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} f p r b \text{sen } \theta d\theta$$

$$R_x = -F_x + \left(\frac{p_a r b}{\text{sen } \theta_a}\right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\text{sen } \theta)(\cos \theta) d\theta - f \left(\frac{p_a r b}{\text{sen } \theta_a}\right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\text{sen } \theta)^2 d\theta$$

Sumatoria de fuerza en la dirección y :

$$\sum F_y = R_y + F_y - \int dN \text{sen } \theta - \int f dN \cos \theta = 0$$

$$R_y = -F_y + \int dN \text{sen } \theta + \int f dN \cos \theta$$



VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

3. Algunos tipos de embragues y frenos

$$R_y = -F_y + \left(\frac{p_a r b}{\sin \theta_a} \right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sin \theta)^2 d\theta - f \left(\frac{p_a r b}{\sin \theta_a} \right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sin \theta)(\cos \theta) d\theta$$

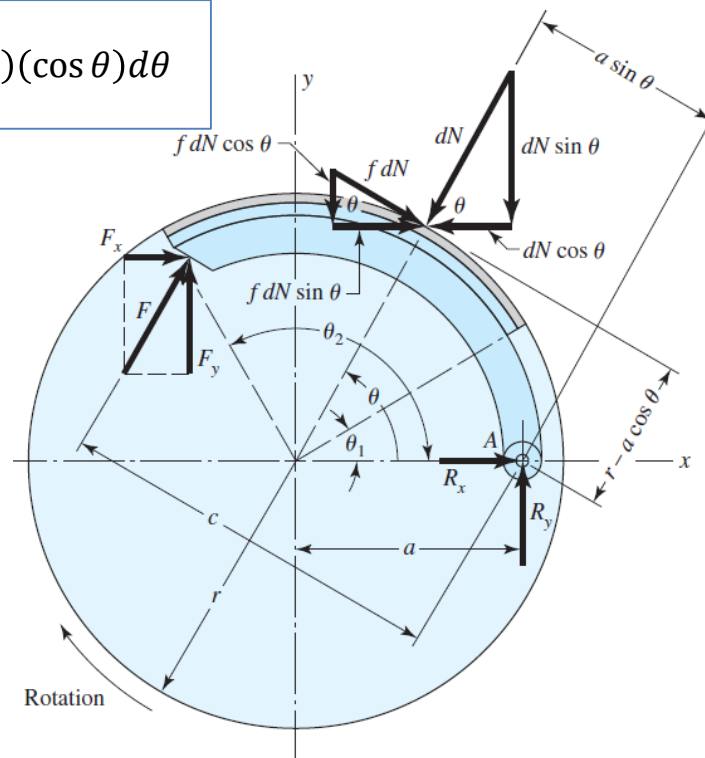
En tanto que el torque T estaría dado por el producto de la fuerza de fricción total por el radio del tambor

$$T = \int f dN r = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f \left(\frac{p_a}{\sin \theta_a} \right) r^2 b \sin \theta d\theta$$

$$T = \left(\frac{f p_a r^2 b}{\sin \theta_a} \right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta$$

En caso tal de que la dirección de la rotación se invierta (rotación en dirección anti horaria) la dirección de la fuerza de fricción también se invertirá y se deberá deducir para este caso las expresiones para F, R_x, R_y (vea las ecuaciones 16-7, f y g del capítulo 16 del libro de texto).

Es importante que observe que las ecuaciones anteriores solo pueden ser usadas cuando el origen del eje está en el centro del tambor, el eje positivo x pasa por el pasador y el eje positivo y está en dirección a la zapata.



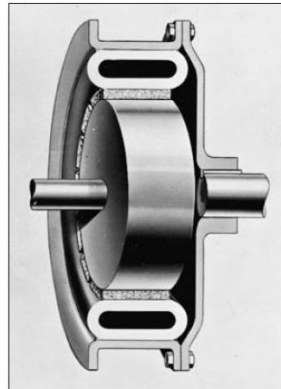
Al final de la sección 16.2 del libro de texto puede ver las suposiciones bajo las cuáles se realizó el análisis anterior.

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

3. Algunos tipos de embragues y frenos

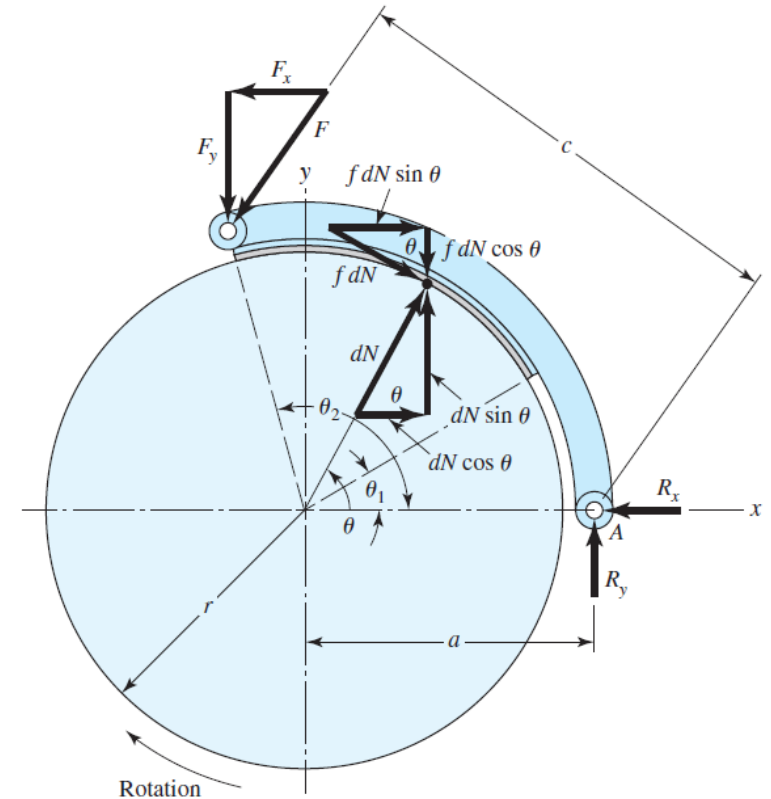
Embragues y frenos de contracción externa

El embrague mostrado en la siguiente figura tiene elementos de fricción externos contráctiles pero el mecanismo actuador es neumático.



Los mecanismos de accionamiento pueden ser solenoides, palancas o eslabonamientos, hidráulicos, y neumáticos.

En esta sección su libro de texto solo considera los frenos y embragues con zapatas externas articuladas. La notación a emplear para este tipo de embragues puede apreciarla en la siguiente figura.



VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

3. Algunos tipos de embragues y frenos

Embragues y frenos de contracción externa

Siguiendo el mismo análisis empleado para los embragues y frenos de expansión interna se deducen las ecuaciones para la fuerza actuante, las reacciones en el pasador, y el torque para la configuración de la figura anterior (rotación en sentido horario):

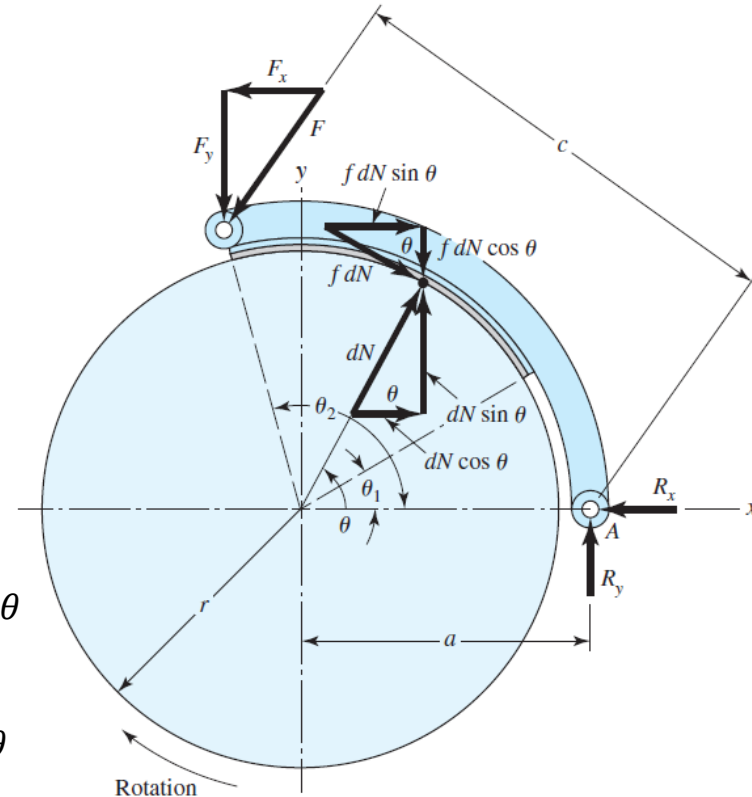
$$F = \frac{\left(\frac{p_a r b a}{\text{sen } \theta_a}\right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\text{sen } \theta)^2 d\theta + \left(\frac{p_a f r b}{\text{sen } \theta_a}\right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{sen } \theta (r - a \cos \theta) d\theta}{c}$$

$$R_x = -F_x + \left(\frac{p_a r b}{\text{sen } \theta_a}\right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\text{sen } \theta)(\cos \theta) d\theta + f \left(\frac{p_a r b}{\text{sen } \theta_a}\right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\text{sen } \theta)^2 d\theta$$

$$R_y = F_y - \left(\frac{p_a r b}{\text{sen } \theta_a}\right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\text{sen } \theta)^2 d\theta + f \left(\frac{p_a r b}{\text{sen } \theta_a}\right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\text{sen } \theta)(\cos \theta) d\theta$$

$$T = \left(\frac{f p_a r^2 b}{\text{sen } \theta_a}\right) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{sen } \theta d\theta$$

De las expresiones anteriores se puede ver que, a diferencia de los frenos y embragues de expansión interna, aquí cuando la rotación es en sentido horario se tendrá una acción auto desenergizante.



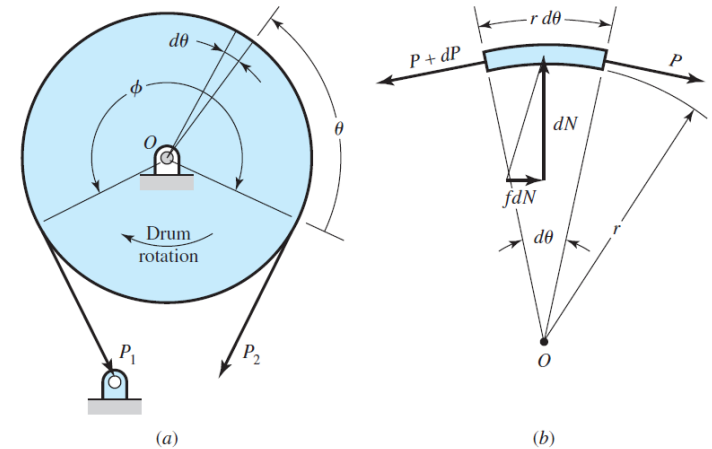
En el caso de que la rotación sea en sentido horario la acción será auto energizante. Las ecuaciones para este último caso puede apreciarlas en la sección 16-3 de su texto.

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

3. Algunos tipos de embragues y frenos

Embragues y frenos de banda

Los embragues y frenos de banda se emplean en una gran variedad de maquinarias desde excavadoras hasta bicicletas.



Haciendo sumatoria de fuerzas en la dirección vertical se tendrá:

$$dN - (P + dP) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - P \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

En vista de que el seno de un ángulo pequeño es aproximadamente igual al ángulo:

$$dN = Pd\theta$$

En la siguiente figura se muestran las fuerzas actuando sobre un freno de banda.

En donde P_2 representa la fuerza accionante y P_1 la reacción en el pin.

Considere ahora un elemento diferencial de banda, tal como se ve en (b).

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

3. Algunos tipos de embragues y frenos

Embragues y frenos de banda

Similarmente, al hacer sumatoria de fuerzas en la dirección horizontal:

$$f dN - (P + dP) \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + P \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

En vista de que el coseno de un ángulo pequeño es aproximadamente igual a uno:

$$f dN = dP$$

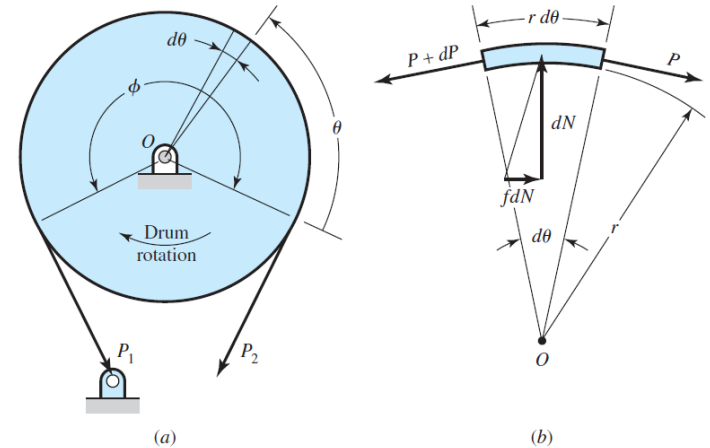
Por lo tanto:

$$dN = P d\theta = \frac{dP}{f}$$

$$\int_0^\phi f d\theta = \int_{P_2}^{P_1} \frac{dP}{P}$$

$$f\theta = \ln P_1 - \ln P_2 = \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

$$e^{f\theta} = \frac{P_1}{P_2}$$



Lo cual permite determinar la reacción en el pin de ser conocida la fuerza accionante.

El torque en tanto puede ser determinado como la diferencia entre la reacción y la fuerza accionante por el radio del tambor:

$$T = (P_1 - P_2)r$$

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

3. Algunos tipos de embragues y frenos

Embragues y frenos de banda

Tenga presente de que de conocerse la presión p actuando sobre la banda:

$$dN = pbrd\theta$$

Donde b sería el ancho de la banda (hacia afuera del plano mostrado en la figura anterior). En vista de que $dN = Pd\theta$, la tensión sobre la banda estaría dada por:

$$P = pbr$$

Y la presión máxima p_a que ocurre en el pasador (ya que $P_1 > P_2$) se relaciona con esta reacción por medio de la siguiente expresión:

$$P_1 = p_a br$$

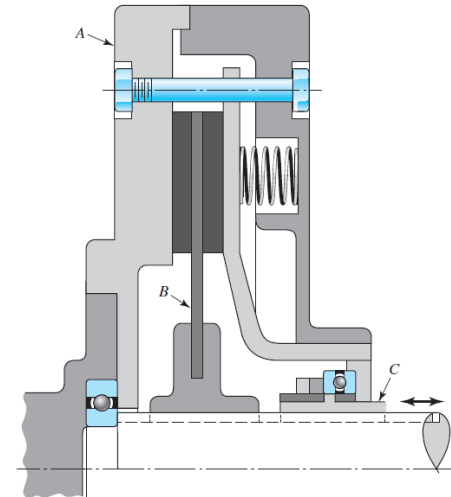
Embragues de contacto axial (discos con superficies de fricción completas)

En embragues axiales los miembros de fricción de contacto se mueven en dirección paralela al eje.

Las ventajas de estos tipos de embragues sobre los de tambor son las siguientes:

- ✓ Libertad de efectos centrífugos.
- ✓ Una mayor área de fricción puede ser instalada en un espacio pequeño.
- ✓ La disipación de calor desde las superficies es más efectiva.
- ✓ La distribución de presión es más uniforme.

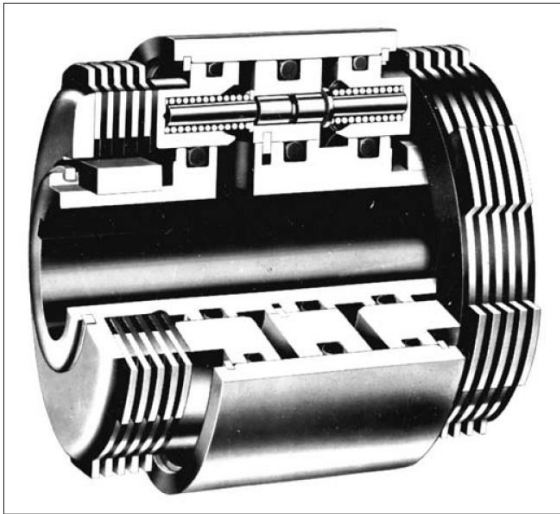
Estos embragues pueden tener un solo disco o múltiples discos.



VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

3. Algunos tipos de embragues y frenos

Embragues de contacto axial (discos con superficies de fricción completas)



Existen dos métodos para analizar a los embragues de discos:

- ✓ Presión uniforme (embragues nuevos). Si el disco es rígido una distribución de presión prácticamente uniforme se aplicará sobre las superficies de fricción. Esto causará más desgaste en las áreas exteriores ya que más trabajo es hecho en estas áreas.

- ✓ Desgaste uniforme. Después de que cierta cantidad de desgaste ha tomado lugar, la distribución de presión cambiará (menor presión en áreas externas) y eso hace que el desgaste se vuelva más uniforme, este es usualmente el caso con embragues viejos.

a) Desgaste uniforme

Después de que cierto desgaste inicial ha tomado lugar y el disco está desgastado a un punto donde desgaste uniforme es establecido, el desgaste en la dirección axial w puede ser expresado como:

$$w = f_1 f_2 K P V t \text{ (vea la sección 12 – 15 del texto)}$$

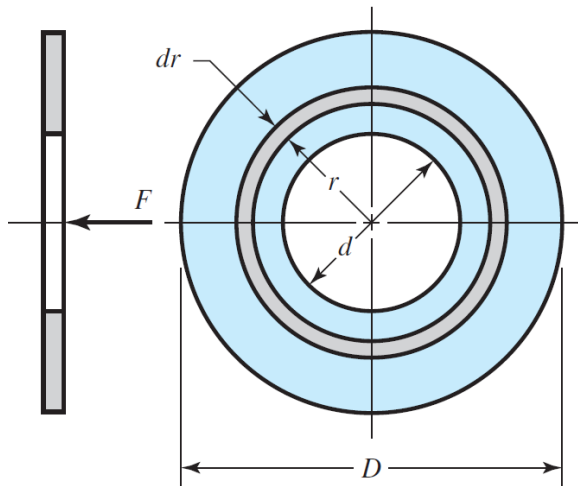
Donde la presión P y la velocidad V pueden variar con el área de desgaste, sin embargo si el desgaste es contante el producto $PV = PR\omega$ también será constante, aquí ω es la velocidad angular rotacional.

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

3. Algunos tipos de embragues y frenos

Embragues de contacto axial (discos con superficies de fricción completas)

a) Desgaste uniforme



Producto de lo anterior se puede encontrar que la presión a un radio r será igual a:

$$Pr = P_{max} \frac{d}{2} \rightarrow P = P_{max} \frac{d}{2r}$$

Tomando ahora un elemento diferencial de espesor dr y radio interior r , la fuerza accionante F (fuerza normal) sobre toda esa área estaría dada por:

$$F = \int dF = \int_{d/2}^{D/2} P(2\pi r dr)$$

$$F = \int_{d/2}^{D/2} P_{max} \frac{d}{2r} (2\pi r dr) = \frac{P_{max} d \pi}{2} (D - d)$$

La expresión anterior da la fuerza actuante requerida para que se alcance la presión máxima permitida P_{max} y es válida para cualquier número de superficies de fricción.

El torque es encontrado al integrar el producto de la fuerza de fricción y el radio:

$$T = \int r f dF = \int_{d/2}^{D/2} r f (P(2\pi r dr))$$

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

3. Algunos tipos de embragues y frenos

Embragues de contacto axial (discos con superficies de fricción completas)

a) Desgaste uniforme

$$T = \int_{d/2}^{D/2} r f \left(P_{max} \frac{d}{2r} (2\pi r dr) \right)$$

$$T = \frac{P_{max} d \pi f}{8} (D^2 - d^2)$$

Al sustituir el valor encontrado para F :

$$T = \frac{P_{max} d \pi f}{8} (D^2 - d^2) = \frac{P_{max} d \pi}{2} (D - d) \cdot \frac{f}{4} (D + d)$$

$$T = \frac{F f}{4} (D + d)$$

La expresión anterior da la capacidad de torque asociado a P_{max} para una sola superficie de fricción.

b) Presión uniforme

Cuando presión uniforme es asumida P_{max} , la fuerza actuante F simplemente es el producto de la presión y el área.

$$F = \int_{d/2}^{D/2} P_{max} (2\pi r dr) = 2\pi P_{max} \int_{d/2}^{D/2} r dr$$

$$F = \pi P_{max} \frac{(D^2 - d^2)}{4}$$

El torque es encontrado al integrar el producto de la fuerza de fricción y el radio:

$$T = \int_{d/2}^{D/2} r f (P_{max} (2\pi r dr))$$

$$T = 2\pi f P_{max} \int_{d/2}^{D/2} r^2 dr$$

$$T = \pi f P_{max} \frac{(D^3 - d^3)}{12}$$

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

3. Algunos tipos de embragues y frenos

Engranajes de contacto axial (discos con superficies de fricción completas)

b) Presión uniforme

$$T = \pi f P_{max} \frac{(D^3 - d^3)}{12} \cdot \frac{(D^2 - d^2)}{(D^2 - d^2)}$$

$$T = \frac{Ff}{3} \cdot \frac{(D^3 - d^3)}{(D^2 - d^2)}$$

Al igual que en el caso de desgaste uniforme, la expresión para la fuerza actuante es válida para cualquier número de discos pero la expresión para el torque de freno solo para una sola superficies de fricción.

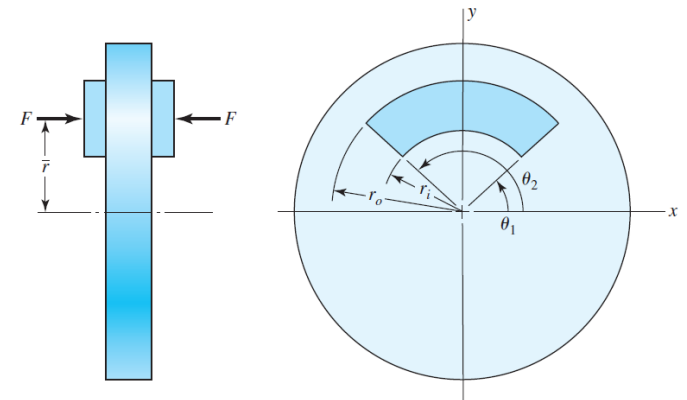
A partir de estas expresiones se puede ver la ventaja de usar discos múltiples.

Ha de decirse que al comparar los resultados obtenidos para desgaste uniforme y presión uniforme (vea la sección 16-5 del texto) se puede ver que no existe gran diferencia, y ya que todo embrague nuevo eventualmente deja de serlo se sugiere siempre se hagan los cálculos suponiendo existe desgaste uniforme.

Frenos de discos (discos con superficies de fricción parciales)

No hay una diferencia fundamental entre los embragues y los frenos de disco. Lo único es que los frenos tienen superficies de fricción parciales.

Considere la siguiente figura:



Un análisis similar a los embragues de disco se sigue a continuación para determinar la fuerza y el torque; aquí de igual forma se puede emplear el método de desgaste uniforme o de presión uniforme.

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

3. Algunos tipos de embragues y frenos

Frenos de discos (discos con superficies de fricción parciales)

a) Desgaste uniforme

$$F = \int dF = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_i}^{r_o} P(r d\theta dr) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_i}^{r_o} P_{max} \frac{r_i}{r} (r d\theta dr)$$

$$F = P_{max} r_i (r_o - r_i) (\theta_1 - \theta_2)$$

El torque en tanto estaría dado por:

$$T = \int r f dF = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_i}^{r_o} r f P_{max} \frac{r_i}{r} (r d\theta dr)$$

$$T = \frac{f P_{max} r_i (r_o^2 - r_i^2) (\theta_1 - \theta_2)}{2} \text{ (una sola superficie de fricción)}$$

b) Presión uniforme P_{max}

$$F = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_i}^{r_o} P_{max} (r d\theta dr)$$

$$F = \frac{P_{max} (r_o^2 - r_i^2) (\theta_1 - \theta_2)}{2}$$

$$T = \int_{d/2}^{D/2} r f (P_{max} (r d\theta dr))$$

$$T = \frac{f P_{max} (r_o^3 - r_i^3) (\theta_1 - \theta_2)}{3}$$

(una sola superficie de fricción)

En el caso de los frenos de discos la condición de desgaste uniforme o de presión uniforme va a estar controlada por la posición radial de la fuerza actuante (ver deducción para \bar{r} en la sección 16-6 del libro de texto).

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

4. Consideraciones de energía en embragues y frenos

Cuando elementos rotantes de una máquina se detienen (en el caso de un freno) o cuando elementos en reposo o una velocidad dada son llevados a una velocidad diferente (en el caso de los embragues), ocurre deslizamiento entre las superficies en contacto lo que causa que parte de la energía cinética se transforme en energía térmica o calor.

La capacidad de un embrague o freno está limitada por dos factores, las características del material (coeficiente de fricción y máxima presión permisible) y la habilidad del embargue para disipar calor.

Las expresiones para determinar la energía disipada por el embargue o freno y para calcular el correspondiente aumento en la temperatura puede encontrarlas en la sección 16-8 y 16-9.

5. Materiales de fricción

Las características más importantes de los materiales de fricción usados en frenos y embragues incluyen:

- ✓ Un coeficiente de fricción alto y reproducible.
- ✓ Resistencia a condiciones ambientales, como la humedad.
- ✓ La habilidad de soportar temperaturas elevadas y presión.
- ✓ Alta resistencia al desgaste.

La tabla 16-3 da las características más relevantes de algunos materiales de fricción usados en frenos y embragues.

6. Volantes de inercia

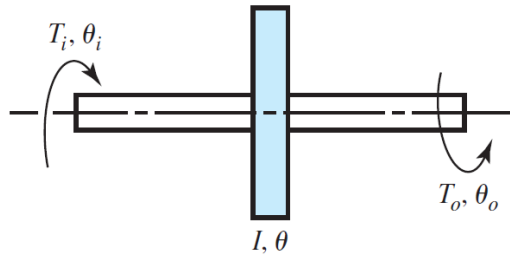
Un volante de inercia es un elemento mecánico que almacena y libera energía cinética.

Los volantes son usados para regular la velocidad rotacional, y consecuentemente el torque, de sistemas que no tienen demanda uniforme. Esto en términos generales ocurre debido a que el volante se resiste a cambios en la energía rotacional.

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

6. Volantes de inercia

Considere el siguiente volante:



La ecuación de movimiento está dada por:

$$\sum M = I\ddot{\theta} \rightarrow T_i(\theta_i, \omega_i) - T_o(\theta_o, \omega_o) = I\ddot{\theta}$$

Donde T es el torque, θ la posición angular, y ω la velocidad angular. Aquí los sub índices i, o denotan entrada y salida respectivamente.

Si se supone que el eje es un elemento rígido, $\theta_i = \theta_o$ y $\omega_i = \omega_o$:

$$T_i(\theta, \omega) - T_o(\theta, \omega) = I\ddot{\theta}$$

De conocerse las funciones para el torque de entrada y para el torque de salida, y de ser especificadas las condiciones de frontera, la expresión anterior podría ser empleada para determinar los valores instantáneos de $\theta, \omega, \ddot{\theta}$.

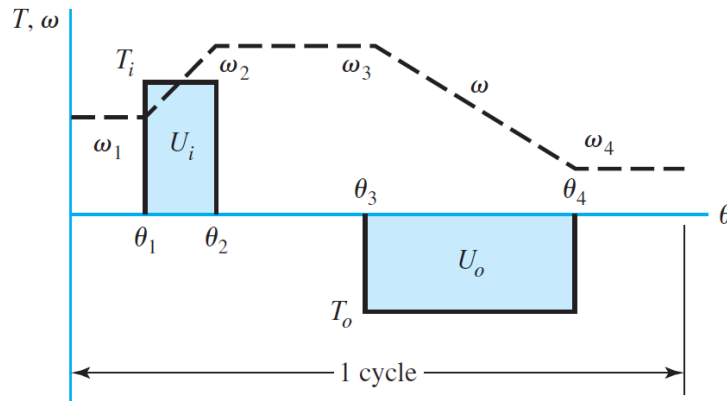
Sin embargo, estos valores no son de interés cuando se diseña un volante de inercia. Aquí lo que interesa es el desempeño total del volante y se busca responder las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Cuál debería ser el momento de inercia?
- ✓ ¿Cómo se puede emparejar la fuente de potencia a la carga?
- ✓ ¿Cuáles son las características de desempeño resultantes del sistema?

La siguiente figura muestra el desempeño de un volante de inercia bajo una situación hipotética, en donde se desprecia la fricción.

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

6. Volantes de inercia



Aquí el volante comienza a una velocidad angular ω_1 , y entre las posiciones angulares θ_1 y θ_2 , la fuente de potencia supe un torque constante T_i que provocar la aceleración del volante de la velocidad ω_1 a ω_2 .

Por otro lado entre las posiciones angulares θ_2 y θ_3 el eje rota con torque cero y consecuentemente no abra aceleración angular ($\omega_3 = \omega_2$).

Finalmente entre las posiciones angulares θ_3 y θ_4 , un torque de salida T_o es aplicado, lo que causa que el volante se desacelere y se pase de una velocidad ω_3 a ω_4 .

El trabajo de entrada al volante U_i es el área debajo del rectángulo entre las posiciones θ_1 y θ_2 , en tanto que el trabajo de salida U_o es el área debajo del rectángulo entre las posiciones θ_3 y θ_4 .

$$U_i = T_i(\theta_2 - \theta_1)$$

$$U_o = T_o(\theta_4 - \theta_3)$$

Aquí sí:

- ✓ $U_o > U_i$ la carga utiliza más energía de la que ha sido proporcionada al volante y consecuentemente $\omega_4 < \omega_1$.
- ✓ $U_o = U_i$ la carga utiliza la misma energía que ha sido proporcionada al volante y consecuentemente $\omega_4 = \omega_1$.
- ✓ $U_o < U_i$ la carga utiliza menos energía de la que ha sido proporcionada al volante y consecuentemente $\omega_4 > \omega_1$.

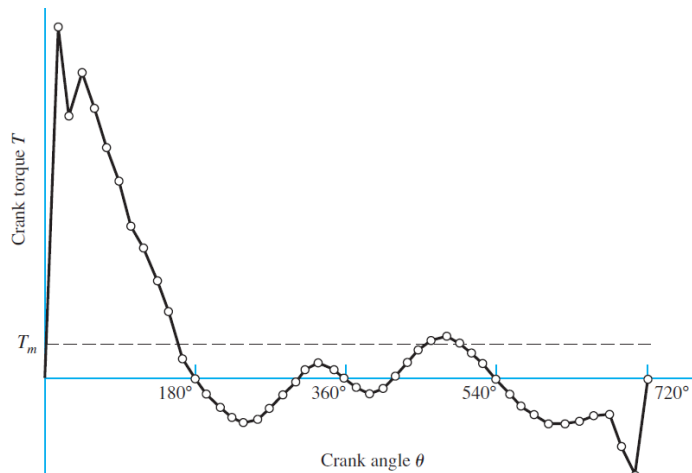
VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

6. Volantes de inercia

El trabajo hecho por el volante entre las posiciones θ_1 y θ_2 puede ser determinado a partir de la diferencia en energía cinética.

$$U_i = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

Muchas de las funciones de torque en términos de posición angular encontradas en aplicaciones ingenieriles son muy complejas y por lo tanto requieren de métodos de integración numérica para determinar el trabajo total.



En muchos casos es conveniente definir un rango permisible para la fluctuación de la velocidad. Para esto último se emplea el coeficiente de velocidad de fluctuación C_s .

$$C_s = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega}$$

Donde $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ es la velocidad angular nominal.

Sustituyendo el coeficiente C_s en la ecuación de energía se obtiene que:

$$E_2 - E_1 = \frac{1}{2}I(\omega_2^2 - \omega_1^2) = \frac{1}{2}I(\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1)$$

$$E_2 - E_1 = \frac{1}{2}I(2\omega)(C_s\omega)$$

$$E_2 - E_1 = IC_s\omega^2$$

La expresión anterior puede ser empleada para obtener el momento de inercia I requerido para satisfacer el cambio de energía $E_2 - E_1$ y el coeficiente de velocidad de fluctuación.

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

7. Ejemplos

1. Considere el freno mostrado en la siguiente figura. Aquí el coeficiente de fricción es de 0.30, el ancho de cara de 2 pulgadas, y la presión límite en la zapata de la izquierda es de 150 psi. Bajo estas condiciones proporcione tanto la fuerza limitante de accionamiento F así como la capacidad del par de torsión T .

Suposiciones: Zapatas largas ($\theta_a = 90^\circ$), la posición inicial θ_1 y final θ_2 del freno de contracción externa se mide con respecto al pasador A o B de forma respectiva.

Ecuaciones básicas:

$$\sum M_A = 0, \sum M_B = 0, T = \int f dNr, p = \left(\frac{p_a}{\sin \theta_a} \right) \sin \theta$$

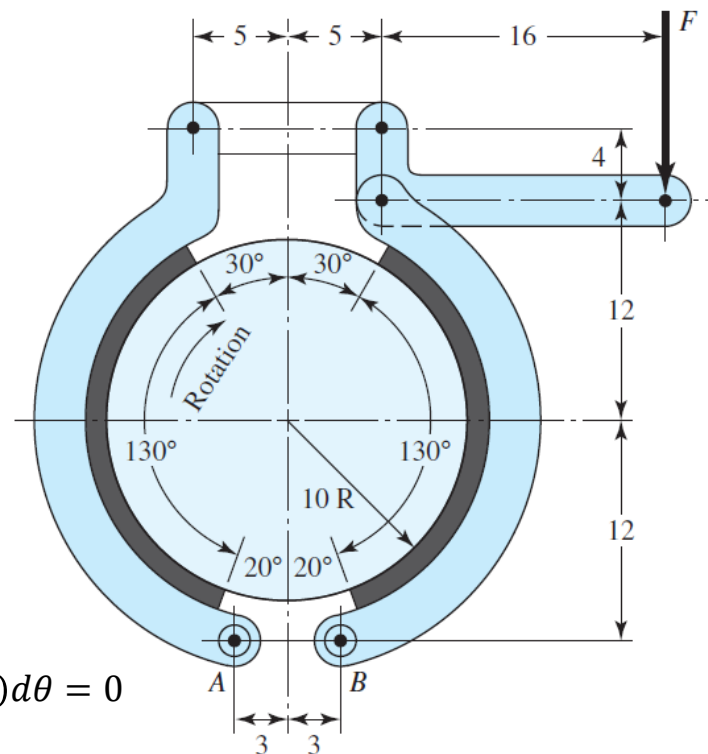
Desarrollo:

Zapata de la izquierda.

$$\sum M_A = 0$$

$$F_{izquierda} C_{izquierda} - \int_{\theta_1}^{\theta_2} (prb \cdot a \sin \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} fprb \cdot (r - a \cos \theta) d\theta = 0$$

$$F_{izquierda} = \frac{rba \int_{\theta_1}^{\theta_2} (p \sin \theta) d\theta - frb \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(r - a \cos \theta) d\theta}{C_{izquierda}}$$



VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

7. Ejemplos

1. Considere el freno mostrado en la siguiente figura. Aquí el coeficiente de fricción es de 0.30, el ancho de cara de 2 pulgadas, y la presión límite en la zapata de la izquierda es de 150 psi. Bajo estas condiciones proporcione tanto la fuerza limitante de accionamiento F así como la capacidad del par de torsión T .

Desarrollo:

Zapata de la izquierda.

Donde de acuerdo a lo observado en la figura y de la información proporcionada por el problema:

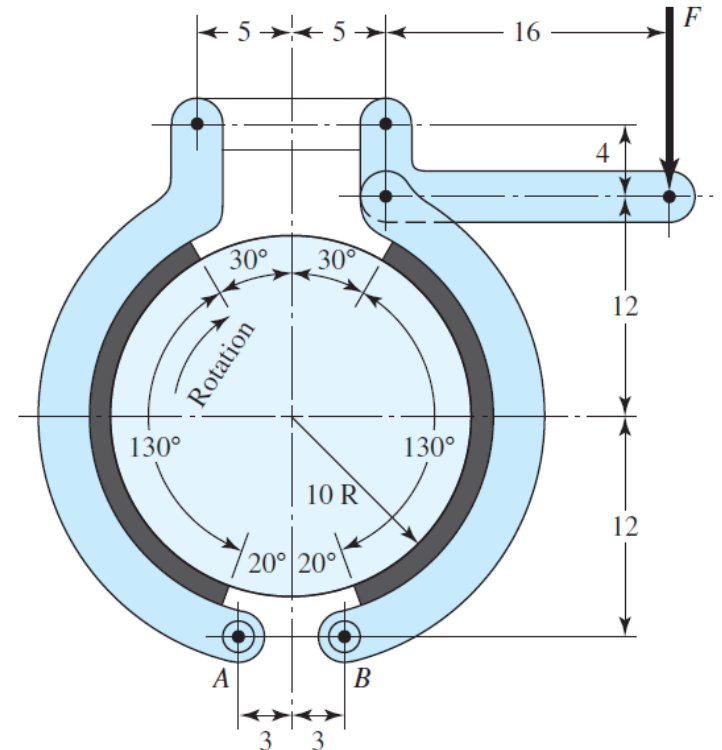
$$r = 10 \text{ in}, b = 2 \text{ in}, a = \sqrt{12^2 + 3^2} \cong 12.37 \text{ in},$$

$$p_{a, \text{izquierda}} = 150 \text{ psi}, \theta_a = 90^\circ,$$

$$\theta_1 = 20^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{3}{12} \right) \cong 5.96^\circ,$$

$$\theta_2 = 130^\circ + 20^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{3}{12} \right) \cong 135.96^\circ$$

$$f = 0.30, c_{\text{izquierda}} = 12 + 12 + 4 = 28$$



VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

7. Ejemplos

1. Considere el freno mostrado en la siguiente figura. Aquí el coeficiente de fricción es de 0.30, el ancho de cara de 2 pulgadas, y la presión límite en la zapata de la izquierda es de 150 psi. Bajo estas condiciones proporcione tanto la fuerza limitante de accionamiento F así como la capacidad del par de torsión T .

Desarrollo:

Zapata de la izquierda.

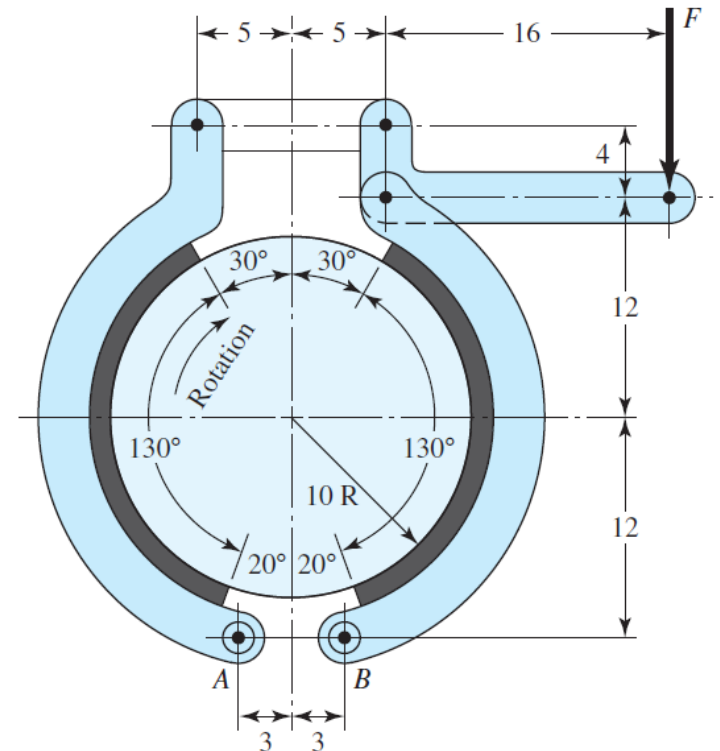
$$F_{izquierda} = \frac{(10)(2)(12.37) \int_{5.96^\circ}^{135.96^\circ} \left(\frac{150}{\sin(90^\circ)} \right) \sin \theta^2 d\theta}{28}$$

$$\frac{(0.3)(10)(2) \int_{5.96^\circ}^{135.96^\circ} \left(\frac{150}{\sin(90^\circ)} \right) \sin \theta (10 - 12.37 \cos \theta) d\theta}{28}$$

$$F_{izquierda} \cong (1903.16 - 456.82) lbf$$

$$F_{izquierda} \cong 1446.34 lbf$$

$$T_{izquierda} = \int f dNr = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f \left(\frac{p_{a,izquierda}}{\sin \theta_a} \right) r^2 b \sin \theta d\theta$$



VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

7. Ejemplos

1. Considere el freno mostrado en la siguiente figura. Aquí el coeficiente de fricción es de 0.30, el ancho de cara de 2 pulgadas, y la presión límite en la zapata de la izquierda es de 150 psi. Bajo estas condiciones proporcione tanto la fuerza limitante de accionamiento F así como la capacidad del par de torsión T .

Desarrollo:

Zapata de la izquierda.

$$T_{izquierda} = \int_{5.96^{\circ}}^{135.96^{\circ}} 0.3 \left(\frac{150}{\sin(90^{\circ})} \right) (10)^2 (2) \sin \theta d\theta$$

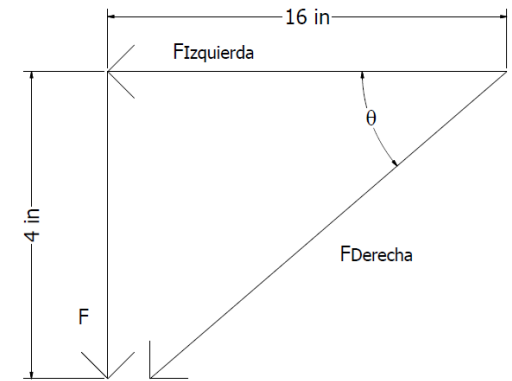
$$T_{izquierda} \cong 15421.04 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

Zapata de la derecha.

A partir de la fuerza horizontal que es aplicada sobre el extremo de la zapata izquierda, y de las dimensiones observadas en la figura, se puede determinar la fuerza que actúa sobre el pasador que conecta la palanca y la zapata de la derecha.

$$\cos(\theta) = \frac{F_{izquierda}}{F_{derecha}} \rightarrow F_{derecha} = \frac{1446.34 \text{ lbf}}{\cos(14.04^{\circ})}$$

$$F_{derecha} \cong 1490.85 \text{ lbf}$$



$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{4}{16} \right) \cong 14.04^{\circ}$$

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

7. Ejemplos

1. Considere el freno mostrado en la siguiente figura. Aquí el coeficiente de fricción es de 0.30, el ancho de cara de 2 pulgadas, y la presión limite en la zapata de la izquierda es de 150 psi. Bajo estas condiciones proporcione tanto la fuerza limitante de accionamiento F así como la capacidad del par de torsión T .

Desarrollo:

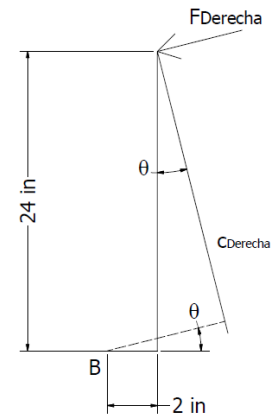
Zapata de la derecha.

$$c_{derecha} = [24 \text{ in} - 2 \tan(14.04^\circ) \text{ in}] \cos(14.04^\circ) \cong 22.80 \text{ in}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-F_{derecha} c_{derecha} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (prb \cdot a \sin \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} fprb \cdot (r - a \cos \theta) d\theta = 0$$

$$F_{derecha} = \frac{rba \int_{\theta_1}^{\theta_2} (p \sin \theta) d\theta + frb \int_{\theta_1}^{\theta_2} p(r - a \cos \theta) d\theta}{c_{derecha}}$$



VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

7. Ejemplos

1. Considere el freno mostrado en la siguiente figura. Aquí el coeficiente de fricción es de 0.30, el ancho de cara de 2 pulgadas, y la presión limite en la zapata de la izquierda es de 150 psi. Bajo estas condiciones proporcione tanto la fuerza limitante de accionamiento F así como la capacidad del par de torsión T .

Desarrollo:

Zapata de la derecha.

$$1490.85 = \frac{(10)(2)(12.37) \int_{5.96^\circ}^{135.96^\circ} \left(\frac{p_{a,derecha}}{\sin(90^\circ)} \right) \sin^2 \theta d\theta}{22.80} +$$

$$\frac{(0.3)(10)(2) \int_{5.96^\circ}^{135.96^\circ} \left(\frac{p_{a,derecha}}{\sin(90^\circ)} \right) \sin \theta (10 - 12.37 \cos \theta) d\theta}{22.80}$$

$$1490.85 = 15.58 p_{a,derecha} + 3.74 p_{a,derecha}$$

$$p_{a,derecha} \cong 77.17 \text{ psi}$$

$$T_{derecha} = \int f dNr = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f \left(\frac{p_{a,derecha}}{\sin \theta_a} \right) r^2 b \sin \theta d\theta$$

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

7. Ejemplos

1. Considere el freno mostrado en la siguiente figura. Aquí el coeficiente de fricción es de 0.30, el ancho de cara de 2 pulgadas, y la presión limite en la zapata de la izquierda es de 150 psi. Bajo estas condiciones proporcione tanto la fuerza limitante de accionamiento F así como la capacidad del par de torsión T .

Desarrollo:

Zapata de la derecha.

$$T_{derecha} = \int_{5.96^{\circ}}^{135.96^{\circ}} 0.3 \left(\frac{77.17}{\sin(90^{\circ})} \right) (10)^2 (2) \sin \theta d\theta$$

$$T_{derecha} \cong 7932.58 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

La fuerza limitante de accionamiento F estaría dada por:

$$F = F_{izquierda} \tan(\theta) = 1446.34 \text{ lbf} \tan(14.04^{\circ})$$

$$F \cong 361.69 \text{ lbf}$$

Y el consecuente torque de frenado T :

$$T = T_{izquierda} + T_{derecha} = 15421.04 \text{ lbf} \cdot \text{in} + 7932.58 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

$$T \cong 23353.62 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

7. Ejemplos

2. Considere un volante de inercia de hierro fundido que tiene un diámetro exterior de 1.5 m y un diámetro interior de 1.4 m. El peso del volante será tal que una fluctuación de energía de 6.75 kJ causará que la velocidad angular no varíe más de 240 a 260 rev/min. Estime el coeficiente de fluctuación de velocidad. Si el volante tiene la geometría observada en la siguiente figura, ¿cuál debe ser el largo (dimensión hacia afuera del papel) del aro del volante?



Suposiciones: El peso y volumen de los rayos del volante es despreciable, el momento de inercia del volante de será el de un tubo cilíndrico con extremos abiertos y de longitud h ($I = \frac{m}{2}(r_i^2 + r_o^2)$), la densidad del hierro fundido se tomará igual a 7200 kg/m^3 .

Ecuaciones básicas:

$$C_s = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega}, \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad E_2 - E_1 = IC_s\omega^2$$

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

7. Ejemplos

2. Considere un volante de inercia de hierro fundido que tiene un diámetro exterior de 1.5 m y un diámetro interior de 1.4 m. El peso del volante será tal que una fluctuación de energía de 6.75 kJ causará que la velocidad angular no varíe más de 240 a 260 rev/min. Estime el coeficiente de fluctuación de velocidad. Si el volante tiene la geometría observada en la siguiente figura, ¿cuál debe ser el largo (dimensión hacia afuera del plano) del aro del volante?

Desarrollo:

En primer lugar se determinará el coeficiente de fluctuación de velocidad.

$$\omega = \frac{(240 + 260)rpm}{2} = 250 rpm$$

$$C_s = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega} = \frac{260 - 240}{250}$$

$$C_s = 0.08$$

Para determinar el ancho del aro del volante, en primer lugar se encontrará el momento de inercia requerido para la fluctuación de energía considerada:

$$E_2 - E_1 = IC_s\omega^2 \rightarrow I = \frac{E_2 - E_1}{C_s\omega^2}$$

$$I = \frac{6.75 \times 10^3 J}{(0.08) \left(250 \frac{rev}{min} \cdot 2\pi rad \cdot \frac{1 min}{60 s} \right)^2} \cong 123.11 kg \cdot m^2$$

VIII. Embragues, frenos, y volantes de inercia

7. Ejemplos

2. Considere un volante de inercia de hierro fundido que tiene un diámetro exterior de 1.5 m y un diámetro interior de 1.4 m. El peso del volante será tal que una fluctuación de energía de 6.75 kJ causará que la velocidad angular no varíe más de 240 a 260 rev/min. Estime el coeficiente de fluctuación de velocidad. Si el volante tiene la geometría observada en la siguiente figura, ¿cuál debe ser el largo (dimensión hacia afuera del plano) del aro del volante?

Desarrollo:

$$I = \frac{m}{2} (r_i^2 + r_o^2) = \frac{m}{8} (d_i^2 + d_o^2) \rightarrow m = \frac{8I}{(d_i^2 + d_o^2)}$$

$$m = \frac{8 (123.11 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)}{(1.4^2 + 1.5^2)\text{m}^2} \cong 233.93 \text{ kg}$$

$$h = \frac{4(233.93 \text{ kg})}{7200 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \pi(1.5^2 - 1.4^2)\text{m}^2}$$

$$h \cong 0.1426 \text{ m}$$

Considerando que el volumen V del volante sea igual a:

$$V = h \cdot \frac{\pi}{4} (d_o^2 - d_i^2)$$

La masa del volante m estaría dada por la siguiente expresión:

$$m = \rho V = \rho h \cdot \frac{\pi}{4} (d_o^2 - d_i^2) \rightarrow h = \frac{4m}{\rho \pi (d_o^2 - d_i^2)}$$