VIII. Determinación de frecuencias naturales y formas modales

Objetivos:

1. Comprender como emplear el método de Rayleigh para estimar la frecuencia natural fundamental de un sistema de múltiples grados de libertad.

2. Presentar el problema estándar de eigen valores para cuando la matriz $[D]$ es simétrica.

1. Introducción

En la clase anterior, las frecuencias naturales (eigen valores) de un sistema de múltiples grados de libertad fueron encontradas al igualar a cero el determinante de la ecuación característica. Aunque este es un método exacto, la expansión del determinante de la ecuación característica y la solución de dicho polinomio de grado n, para obtener las frecuencias naturales, puede convertirse en un proceso tedioso para valores grandes de n.

Existen varios métodos numéricos y analíticos que han sido desarrollados para determinar las frecuencias naturales y los modos de sistemas de múltiples grados de libertad.

Aquí consideraremos el método de Rayleigh para estimar la frecuencia natural fundamental.

2. Método Rayleigh

El método de Rayleigh se basa en el principio de Rayleigh: *"La frecuencia de vibración de un sistema vibratorio conservativo sobre una posición de equilibrio tiene un valor estacionario en el vecindario de un modo natural. Este valor estacionario, es de hecho, un valor mínimo en el vecindario del modo natural fundamental.*

Considere las expresiones de energía cinética y potencial de un sistema discreto de n grados de libertad en forma matricial:

$$V = \frac{1}{2}\vec{x}^T[k]\vec{x}$$

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T[m]\dot{\vec{x}}$$

VIII. Determinación de frecuencias naturales y formas modales

2. Método Rayleigh

Para encontrar las frecuencias naturales del sistema conservativo, asumiremos movimiento harmónico:

$$\vec{x} = \vec{X}\cos\omega t$$

Donde $\vec{X}$ denota al vector de amplitudes (modos de amplitudes) y ω representa la frecuencia natural de vibración. Al ser el sistema conservativo:

$$\frac{d(E.C.+E.P.)}{dt} = 0 \rightarrow E.C.+E.P. = constante$$

Consecuentemente:

$$V_{Max} = T_{Max}$$

$$\frac{1}{2}\vec{x}^T[k]\vec{x} = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T[m]\dot{\vec{x}}$$

$$\vec{X}^T[k]\vec{X} = \omega^2\vec{X}^T[m]\vec{X}$$

$$\omega^2 = \frac{\vec{X}^T[k]\vec{X}}{\vec{X}^T[m]\vec{X}}$$

Aquí el término de la derecha se conoce como coeficiente de Rayleigh y es denotado como $R(\vec{X})$.

<u>Propiedades del coeficiente de Rayleigh</u>

$R(\vec{X})$ tiene un valor estacionario cuando el vector arbitrario $\vec{X}$ está en el vecindario de cualquier eigen valor $\vec{X}^{(r)}$. Para probar esto, expresaremos el vector arbitrario $\vec{X}$ en términos de los modos normales del sistema $\vec{X}^{(i)}$:

$$\vec{X} = c_1\vec{X}^{(1)} + c_2\vec{X}^{(2)} + \cdots + c_n\vec{X}^{(n)}$$

Por lo tanto:

$$\vec{X}^T[k]\vec{X} = {c_1}^2{\vec{X}^{(1)}}^T[k]\vec{X}^{(1)} + {c_2}^2{\vec{X}^{(2)}}^T[k]\vec{X}^{(2)} + \cdots$$

Ya que producto de la ortogonalidad de los modos, cuando $i \neq j$:

$${\vec{X}^{(i)}}^T[k]\vec{X}^{(j)} = {\vec{X}^{(j)}}^T[k]\vec{X}^{(i)} = 0$$

De igual forma:

$$\vec{X}^T[m]\vec{X} = {c_1}^2{\vec{X}^{(1)}}^T[m]\vec{X}^{(1)} + {c_2}^2{\vec{X}^{(2)}}^T[m]\vec{X}^{(2)} + \cdots$$

VIII. Determinación de frecuencias naturales y formas modales

2. Método Rayleigh

Propiedades del coeficiente de Rayleigh

Consecuentemente:

$$\omega_1{}^2 c_1{}^2 \vec{X}^{(1)^T}[m]\vec{X}^{(1)} + \omega_2{}^2 c_2{}^2 \vec{X}^{(2)^T}[m]\vec{X}^{(2)} + \cdots$$
$$= c_1{}^2 \vec{X}^{(1)^T}[k]\vec{X}^{(1)} + c_2{}^2 \vec{X}^{(2)^T}[k]\vec{X}^{(2)} + \cdots$$

Lo que puede ser remplazado en el coeficiente de Rayleigh

$$\omega^2 = R(\vec{X}) = \frac{\omega_1{}^2 c_1{}^2 \vec{X}^{(1)^T}[m]\vec{X}^{(1)} + \omega_2{}^2 c_2{}^2 \vec{X}^{(2)^T}[m]\vec{X}^{(2)} + \cdots}{c_1{}^2 \vec{X}^{(1)^T}[m]\vec{X}^{(1)} + c_2{}^2 \vec{X}^{(2)^T}[m]\vec{X}^{(2)} + \cdots}$$

Si lo modos normales son normalizados $\vec{X}^{(i)^T}[m]\vec{X}^{(i)} = [I]$:

$$\boxed{\omega^2 = R(\vec{X}) = \frac{\omega_1{}^2 c_1{}^2 + \omega_2{}^2 c_2{}^2 + \cdots}{c_1{}^2 + c_2{}^2 + \cdots}}$$

Sí el vector arbitrario $\vec{X}$ difiere poco del eigen vector $\vec{X}^{(r)}$, el coeficiente c_r será mucho mayor que el resto de los coeficientes c_i $(i \neq r)$ y la expresión anterior podría ser re escrita como:

$$\omega^2 = R(\vec{X}) = \frac{\omega_r{}^2 c_r{}^2 + c_r{}^2 \sum_{\substack{i=1,2,..\\ i\neq r}} \left(\frac{c_i{}^2}{c_r{}^2}\right) \omega_i{}^2}{c_r{}^2 + c_r{}^2 \sum_{\substack{i=1,2,..\\ i\neq r}} \left(\frac{c_i{}^2}{c_r{}^2}\right)}$$

$$\omega^2 = R(\vec{X}) = \frac{\omega_r{}^2 + \sum_{\substack{i=1,2,..\\ i\neq r}} \left(\frac{c_i{}^2}{c_r{}^2}\right) \omega_i{}^2}{1 + \sum_{\substack{i=1,2,..\\ i\neq r}} \left(\frac{c_i{}^2}{c_r{}^2}\right)}$$

En vista de que $|c_i/\ c_r| = \varepsilon_i \ll 1$, donde ε_i es un número pequeño para todo $i \neq r$ se tendrá que:

$$\omega^2 = R(\vec{X}) \cong \omega_r{}^2 \left[1 + \sum_{\substack{i=1,2,..\\ i\neq r}} \left(\frac{c_i{}^2}{c_r{}^2}\right) \frac{\omega_i{}^2}{\omega_r{}^2}\right]$$

Sí se define que:

$$\sum_{\substack{i=1,2,..\\ i\neq r}} \left(\frac{c_i{}^2}{c_r{}^2}\right) \frac{\omega_i{}^2}{\omega_r{}^2} = 0(\varepsilon^2)$$

VIII. Determinación de frecuencias naturales y formas modales

2. Método Rayleigh

Propiedades del coeficiente de Rayleigh

En donde $0(\varepsilon^2)$ representa una expresión en ε de segundo orden; y el coeficiente de Rayleigh será entonces aproximadamente igual a:

$$\boxed{R(\vec{X}) \cong {\omega_r}^2[1 + 0(\varepsilon^2)]}$$

Esta ecuación indica que si un vector arbitrario $\vec{X}$ difiere del eigen vector $\vec{X}^{(r)}$ por una pequeña cantidad de primer orden, $R(\vec{X})$ difiere del eigen valor ${\omega_r}^2$ por una pequeña cantidad de segundo orden. Esto significa que el coeficiente de Rayleigh tiene un valor estacionario en el vecindario de un eigen vector.

Este valor estacionario es un mínimo del valor en el vecindario del modo fundamental, de acuerdo con el principio de Rayleigh.

El coeficiente de Rayleigh se puede emplear para encontrar el valor aproximado de la primera frecuencia natural ω_1 del sistema.

Para esto, se selecciona un vector de prueba $\vec{X}$ que represente el primer modo natural $\vec{X}^{(1)}$ y se sustituye en el coeficiente de Rayleigh lo que dará un valor aproximado de ${\omega_1}^2$. Producto de que este coeficiente es estacionario, muy buenas estimaciones para ${\omega_1}^2$ se pueden obtener incluso si el vector de prueba difiere considerablemente de $\vec{X}^{(1)}$.

Vea el ejemplo 7.2 del libro de texto.

Frecuencia fundamental de vigas y ejes

Aunque el procedimiento mostrado previamente es aplicable a todos los sistemas discretos, una ecuación más simple puede ser derivada para la frecuencia fundamental de la vibración lateral de la viga o del eje que soporta varias masas como poleas o engranes.

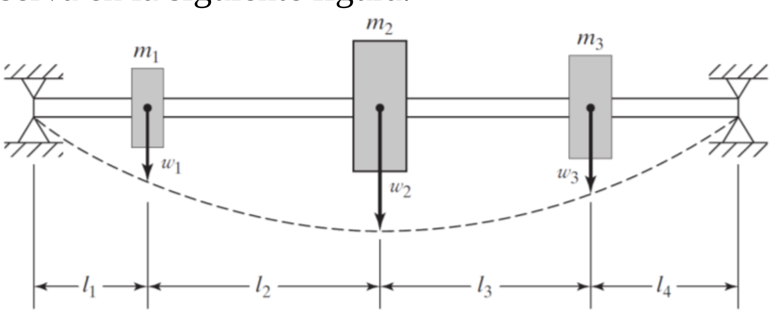
VIII. Determinación de frecuencias naturales y formas modales

2. Método Rayleigh

<u>Frecuencia fundamental de vigas y ejes</u>

En estos casos, la curva de deflexión estática es usada como una aproximación de la curva de deflexión dinámica.

Considere un eje cargando varias masas tal como se observa en la siguiente figura.



El eje se asume tiene masa despreciable.

La energía potencial del sistema es la energía de deformación del eje que se está flexionando, la cual será igual al trabajo hecho por las cargas estáticas $m_i g$:

$$V_{Max} = \frac{1}{2}(m_1 g w_1 + m_2 g w_2 + \cdots)$$

Donde w_i es la deflexión estática total de la masa producto de las cargas $m_1 g$. Para sistemas conservativos en vibración libre, la energía cinética máxima producto de las masas está dada por:

$$T_{Max} = \frac{\omega^2}{2}(m_1 {w_1}^2 + m_2 {w_2}^2 + \cdots)$$

Donde ω es la frecuencia de oscilación. Al igualar la energía cinética y potencial máxima se obtiene que:

$$\boxed{\omega = \left[\frac{g(m_1 w_1 + m_2 w_2 + \cdots)}{(m_1 {w_1}^2 + m_2 {w_2}^2 + \cdots)}\right]^{1/2}}$$

Vea el ejemplo 7.3 del libro de texto.

VIII. Determinación de frecuencias naturales y formas modales

3. Problema estándar de eigen valores

En la clase anterior, el problema de valores característicos fue expresado como:

$$\left[[k] - \omega^2[m]\right]\vec{X} = 0$$

Lo cuál puede ser re escrito en la forma estándar del problema de eigen valores:

$$\boxed{\lambda[I]\vec{X} = [D]\vec{X}}$$

Donde $[I]$ es la matriz identidad, $\lambda = {}^{1}/_{\omega^2}$, y $[D] = [k]^{-1}[m] = [a][m]$ es la matriz dinámica.

En general, la matriz $[D]$ es no simétrica, a pesar de que las matrices $[k]$ y $[m]$ sí son simétricas. Producto de esto, el método de Jacobi (ver sección 7.6 del libro de texto) no es aplicable a menos de que se logre derivar una matriz simétrica $[D]$.

Asumiendo que la matriz $[k]$ es simétrica y positiva, se puede emplear la descomposición de Choleski y expresar $[k]$ como:

$$[k] = [U]^T[U]$$

Donde $[U]$ es una matriz triangular superior. Utilizando esta relación, el problema de eigen valores puede ser expresado como:

$$\lambda[U]^T[U]\vec{X} = [m]\vec{X}$$

Multiplicando a ambos lados por $([U]^T)^{-1}$:

$$\lambda[U]^T[U]\vec{X}([U]^T)^{-1} = [m]\vec{X}([U]^T)^{-1}$$

$$\lambda[U]\vec{X} = [m]\vec{X}([U]^T)^{-1} = [m]\vec{X}([U]^T)^{-1}[U][U]^{-1}$$

Definiendo al vector $\vec{Y} = [U]\vec{X}$ se tendrá que:

$$\lambda\vec{Y} = [m]\vec{Y}([U]^T)^{-1}[U]^{-1}$$

Recordando que $[D] = [k]^{-1}[m]$ y observando que $[k]^{-1} = ([U]^T)^{-1}[U]^{-1}$

$$\boxed{\lambda\vec{Y} = [D]\vec{Y}}$$

Por lo que $[D] = ([U]^T)^{-1}[U]^{-1}[m]$.

Una vez se obtiene $\vec{Y}$, $\vec{X}$ se determinar de la siguiente forma:

$$\boxed{\vec{X} = \vec{Y}[U]^{-1}}$$

VIII. Determinación de frecuencias naturales y formas modales

3. Problema estándar de eigen valores

Descomposición de Choleski

Cualquier matriz simétrica y positiva $[A]$ de orden $n \times n$ puede ser descompuesta de la siguiente forma:

$$[A] = [U]^T[U]$$

Donde $[U]$ es una matriz triangular superior dada por:

$$[U] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Aquí:

$$u_{11} = (a_{11})^{1/2} \qquad u_{1j} = \frac{a_{1j}}{u_{11}}, \qquad j = 2,3, \dots, n$$

$$u_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} {u_{ki}}^2 \right)^{1/2}, \qquad i = 2,3, \dots, n$$

$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj} \right), \qquad i = 2,3, \dots, n \text{ y } j = i+1, i+2, \dots, n$$

$$u_{ij} = 0, \qquad i > j$$

Con respecto a la inversa de la matriz $[U]$, si denotamos a los elementos de la dicha matriz como α_{ij}, a partir de la relación $[U][U]^{-1} = [I]$ se tendrá que:

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{u_{ii}} \qquad \alpha_{ij} = \frac{-1}{u_{ii}} \left(\sum_{k=i+1}^{j} u_{ik} \alpha_{kj} \right), \qquad i < j$$

$$\alpha_{ij} = 0, \qquad i > j$$

Esta matriz $[U]^{-1}$ también será una matriz triangular superior.

Vea el ejemplo 7.7 de su libro de texto.