VII. Sistemas con múltiples grados de libertad

Objetivos:

1. Describir que es un sistema de múltiples grados de libertar.
2. Aplicar la segunda ley de Newton y las ecuaciones de Lagrange para derivar las ecuaciones de movimiento.
3. Definir los coeficientes de influencia.
4. Expresar las ecuaciones diferenciales de movimiento en forma matricial, apreciar el problema de valores característicos, y resolver dicho problema para obtener las frecuencias naturales del sistema y los modos de vibración.
5. Analizar la vibración libre de sistemas no amortiguados.
6. Analizar la vibración forzada de sistemas de múltiples grados de libertad no amortiguados y sistemas con amortiguamiento viscoso.

1. Introducción

La mayoría de los sistemas ingenieriles son continuos y tienen un número infinito de grados de libertad. El análisis de vibración de sistemas continuos requiere de la solución de ecuaciones diferenciales parciales; y en muchos casos dichas soluciones no existen.

El análisis de sistemas de múltiples grados de libertad, por otra parte, requiere de la solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, lo cual es relativamente simple y por lo tanto, por simplicidad de análisis, muchos sistemas continuos son aproximados a sistemas de múltiples grados de libertad.

Todos los conceptos introducidos para sistemas de uno y dos grados de libertad, pueden extenderse a sistemas de múltiples grados de libertad.

Existen n frecuencias naturales, cada una asociada a su propio modo, para un sistema que tiene n grados de libertad. El método de determinar las frecuencias naturales a partir de la ecuación característica al igualar el determinante a cero también es aplicable a sistemas de múltiples grados de libertad. Sin embargo, a medida que aumenta el número de grados de libertad, determinar la solución de la ecuación característica es más dificil.

VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

2. Derivación de las ecuaciones de movimiento a partir de la segunda ley de Newton

El siguiente procedimiento puede ser adoptado para derivar las ecuaciones de movimiento de un sistema de múltiples grados de libertad usando la segunda ley de Newton:

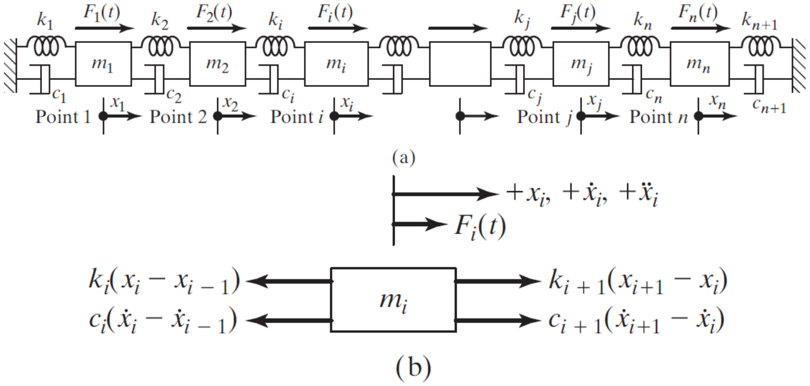
1. Seleccione un conjunto apropiado de coordenadas generalizadas que describan la posición de las varias masas puntuales y cuerpos rígidos del sistema.

2. Determine la configuración de equilibrio estático del sistema y mida el desplazamiento de las masas y cuerpos rígidos de su respectiva posición de equilibrio estático.

3. Dibuje el diagrama de cuerpo libre de cada masa o cuerpo rígido en el sistema. Indique las fuerzas asociadas a los elementos elásticos y disipadores. También las fuerzas externas para cada masa o cuerpo rígido cuando se considera el desplazamiento y velocidad, en dirección positiva, de la masa o cuerpo rígido.

4. Aplique la segunda ley de Newton de movimiento a cada masa o cuerpo rígido mostrado en el diagrama de cuerpo libre.

<u>Ecuación de movimiento de un sistema masa-resorte-amortiguador</u>



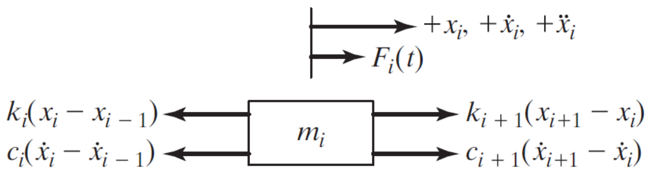
Las ecuaciones de movimiento de las masas m_1 y m_n pueden ser derivadas a partir de la segunda ley de Newton aplicada a masas puntuales o partículas:

$$\sum F_1 = m_1 \ddot{x}_1$$

VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

2. Derivación de las ecuaciones de movimiento a partir de la segunda ley de Newton

<u>Ecuación de movimiento de un sistema masa-resorte-amortiguador</u>



(b)

$$-k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_1 = m_1\ddot{x}_1$$

$$\boxed{F_1 = m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2}$$

Similarmente para la masa m_n:

$$\boxed{F_n = m_n\ddot{x}_n + (c_n + c_{n+1})\dot{x}_n - c_n\dot{x}_{n-1} + (k_n + k_{n+1})x_n - k_nx_{n-1}}$$

Y todo el conjunto de ecuaciones de este sistema de n grados, en traslación, puede ser expresarse de forma matricial:

$$\boxed{[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F}}$$

Donde: $[m]$ es la matriz de masa (vea la expresión 6.4 del libro de texto), $[c]$ es la matriz de amortiguamiento (vea la expresión 6.5 del libro de texto), $[k]$ es la matriz de rigidez (vea la expresión 6.6 del libro de texto), $\vec{x}$ es el vector de desplazamiento (vea la expresión 6.7 del libro de texto), $\dot{\vec{x}}$ es el vector de velocidad (vea la expresión 6.7 del libro de texto), $\ddot{\vec{x}}$ es el vector de aceleración (vea la expresión 6.7 del libro de texto), y $\vec{F}$ es el vector fuerza (vea la expresión 6.7 del libro de texto).

Para un sistema no amortiguado, la expresión anterior se re escribiría como:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F}$$

VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

2. Derivación de las ecuaciones de movimiento a partir de la segunda ley de Newton

<u>Ecuación de movimiento de un sistema masa-resorte-amortiguador</u>

Las formas más generales de las matrices de masa, amortiguamiento, y rigidez para un sistema de n grados de libertad puede apreciarlas en las expresiones 6.9, 6.10, y 6.11 de su libro de texto, de forma respectiva. Recuerde que a menos de que las tres matrices sean diagonales, existirá alguna clase de acoplamiento entre las ecuaciones y las mismas tendrán que ser resueltas de forma simultánea.

3. Coeficientes de influencia

Las ecuaciones de movimiento pueden ser escritas en términos de los coeficientes de influencia. Básicamente un conjunto de coeficientes de influencia puede ser asociado con cada una de las matrices que aparecen en las ecuaciones de movimiento. Los coeficientes de influencia asociados con las matrices de rigidez y de masa son, respectivamente, los coeficientes de influencia de rigidez y de inercia.

Las ecuaciones también se pueden escribir en términos del inverso de la matriz de rigidez (matriz de flexibilidad) o en términos del inverso de la matriz de masa. Los coeficientes de influencia relacionados con la matriz de flexibilidad se conocen como los coeficientes de influencia de flexibilidad, y los que corresponden al inverso de la matriz de masa se conocen como los coeficientes inversos de inercia.

<u>Coeficientes de influencia de rigidez</u>

Para un resorte lineal simple, la fuerza necesaria para causar una elongación unitaria del resorte se conoce como la rigidez del resorte. En sistemas más complejos, se puede expresar la relación existente entre el desplazamiento en un punto y las fuerzas actuando en varios otros puntos del sistema por medio de los coeficientes de influencia de rigidez k_{ij}.

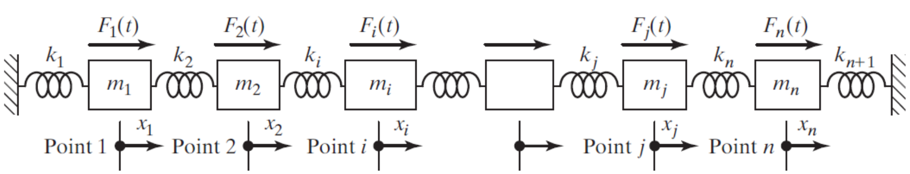
VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

3. Coeficientes de influencia

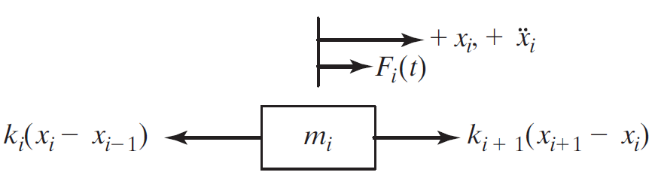
<u>Coeficientes de influencia de rigidez</u>

Aquí k_{ij} es definido como la fuerza actuando en un punto i debido a un desplazamiento unitario de un punto j cuando todos los otros puntos diferentes a j se consideran fijos. Usando esta definición, para el sistema masa-resorte mostrado a continuación, la fuerza total actuando en el punto i, F_i, puede ser encontrada al sumar las fuerzas producto de todos los desplazamientos $x_j (j = 1,2, \ldots, n)$:

$$\boxed{F_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j , \qquad i = 1,2, \ldots, n}$$



(a)



(b)

Lo que de forma matricial puede ser re escrito como:

$$\vec{F} = [k]\vec{x}$$

Donde $\vec{F}$ es el vector de fuerza, $\vec{x}$ es el vector de desplazamiento, y $[k]$ es la matriz de rigidez:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

Algunos aspectos a considerar con respecto a los coeficientes de influencia de rigidez son los siguientes:

VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

3. Coeficientes de influencia

<u>Coeficientes de influencia de rigidez</u>

-En vista de que la fuerza requerida en un punto i para causar una deflexión unitaria en un punto j y deflexión cero en todos los otros puntos, es igual a la fuerza que se requiere en el punto j para causar una deflexión unitaria en un punto i y deflexión cero en todos los otros puntos, $k_{ij} = k_{ji}$.

-Los coeficientes de influencia de rigidez pueden ser calculados al aplicar los principios de estática y de la mecánica de sólidos.

-Los coeficientes de influencia de rigidez para sistemas torsionales pueden ser definidos en términos del desplazamiento unitario angular y del torque que cause el desplazamiento angular.

Los coeficientes de influencia de un sistema de múltiples grados de libertad pueden ser determinados como sigue:

1. Asuma un valor de uno para el desplazamiento x_j y un valor de cero para los demás desplazamiento $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots . x_n$. Por definición, el conjunto de fuerzas $k_{ij}(i = 1,2, \dots, n)$ mantedrán al sistema en a configuración asumida ($x_j = 1, x_1 = x_2 = \cdots = x_{j-1} = x_{j+1} = \cdots x_n = 0$). Luego las ecuaciones de equilibrio estático son escritas para cada masa y el conjunto resultante de n ecuaciones son resueltas para encontrar el conjunto de n coeficientes de influencia $k_{ij}(i = 1,2, \dots, n)$.
2. Después de completar el paso anterior para $j = 1$, el procedimiento se repite para $j = 2,3, \dots, n$.

Vea los ejemplos 6.3 y 6.4 del libro de texto.

VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

3. Coeficientes de influencia

Coeficientes de influencia de flexibilidad

Ocasionalmente, resulta más conveniente la generación de los coeficientes de influencia de flexibilidad que los de rigidez.

Considere que sobre el sistema solo actúa una fuerza F_j, y deje que el desplazamiento en el punto i (donde se encuentra la masa m_i) producto de la fuerza F_j sea x_{ij}. El coeficiente de influencia de flexibilidad, denotado como a_{ij}, es definido como la deflexión en el punto i producto de la aplicación de una fuerza unitaria en el punto j. Para un sistema lineal $x_{ij} = a_{ij}F_j$.

Sí varias fuerzas $F_j (j = 1,2,\dots,n)$ actúan en diferentes puntos de un sistema, la deflexión total en cualquier punto i puede ser encontrada al sumar la contribución de todas las fuerzas F_j:

$$\boxed{x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}F_j\,, \qquad i = 1,2,\dots,n}$$

En forma matricial, la expresión anterior estaría dada por:

$$\vec{x} = [a]\vec{F}$$

Donde $\vec{x}$ y $\vec{F}$ son el vector de desplazamiento y el vector fuerza, respectivamente, y $[a]$ es la matriz de flexibilidad dada por:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Algunas características de los coeficientes de influencia de flexibilidad son las siguientes:

VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

3. Coeficientes de influencia

Coeficientes de influencia de flexibilidad

-Las matrices de flexibilidad y de rigidez están relacionadas de la siguiente forma:

$$\vec{x} = [a]\vec{F} = [a][k]\vec{x}$$

Por lo que $[a][k] = I$, donde I es la matriz identidad, y:

$$[a] = [k]^{-1}$$

-En vista de que la deflexión en un punto i producto de una carga unitaria en un punto j es igual a la deflexión j producto de una carga unitaria en un punto i, se tendrá que $a_{ij} = a_{ji}$.

-Los coeficientes de influencia de flexibilidad de un sistema torsional pueden ser definidos en términos del torque unitario y las deflexiones angulares que este cauce.

Los coeficientes de influencia de flexibilidad de un sistema de múltiples grados de libertad pude ser determinados como sigue:

1. Asuma una carga unitaria en un punto j. Por definición, el desplazamiento de los varios puntos i ($i = 1,2,..n$) resultando de esta carga da los coeficientes de influencia de flexibilidad, $a_{ij}, i = 1,2,\ldots,n$. Estos coeficientes a_{ij} pueden ser encontrados al aplicar los principios de estática y de la mecánica de sólidos.
2. Después de completar el paso anterior para $j = 1$, el procedimiento se repite para $j = 2,3,\ldots,n$.
3. En vez de seguir el paso 1 y 2, la matriz de flexibilidad puede ser determinada al encontrar el inverso de la matriz de rigidez, si dicha matriz se conoce.

Vea el ejemplo 6.5 y 6.6 del libro de texto.

VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

4. Expresiones de energía cinética y potencial en forma matricial

Considere que x_i denota el desplazamiento de la masa m_i y que F_i es la fuerza aplicada en la dirección x_i de la masa m_i en un sistema de n grados de libertad.

La energía potencial elástica (también llamada energía de deformación) del $i$esimo resorte o elemento elástico está dada por:

$$V_i = \frac{1}{2} F_i x_i$$

Y la energía potencial total V puede ser expresada como:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} F_i x_i$$

En vista de que:

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j \right) x_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j x_i$$

Lo que en forma matricial estaría dado por:

$$\boxed{V = \frac{1}{2} \vec{x}^T [k] \vec{x}}$$

Donde $[k]$ es la matriz de rigidez.

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

La energía cinética T_i asociada a la masa m_i estaría dada por:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i{}^2$$

Y la energía cinética total T:

VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

4. Expresiones de energía cinética y potencial en forma matricial

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^{\,2}$$

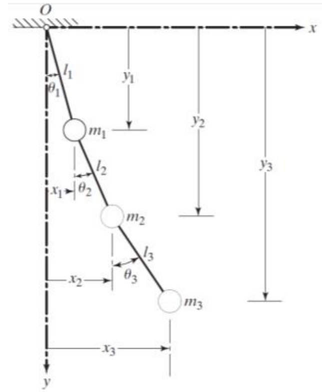
Lo que en forma matricial estaría dado por:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \dot{\vec{x}}^T [m] \dot{\vec{x}}}$$

Donde $[m]$ es la matriz de masa.
Dependiendo de cuales sean las coordenadas generalizadas seleccionadas dicha matriz podría o no ser diagonal.

5. Coordenadas generalizadas y fuerzas generalizadas

Como se ha comentado previamente, cualquier conjunto de n coordenadas independientes requeridas para describir el movimiento de un sistema de n grados de libertas se conocen como coordenadas generalizas.



Cuando fuerzas externas actúan sobre un sistema, su configuración cambia. La nueva configuración del sistema puede ser obtenida al cambiar las coordenadas generalizas v_i por $\delta v_i, i = 1,2, \ldots, n$. Donde n denota el número de coordenadas generalizadas del sistema. Sí U_i denota el trabajo hecho en cambiar las coordenadas generalizas de v_i a δv_i, la correspondiente fuerza generalizada Q_i puede ser definida como:

$$\boxed{Q_i = \frac{U_i}{\delta v_i}, \qquad i = 1,2, \ldots, n}$$

VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

5. Coordenadas generalizadas y fuerzas generalizadas

Donde Q_i será una fuerza o momento dependiendo si v_i es un desplazamiento lineal o angular.

6. Uso de las ecuaciones de Lagrange para derivar las ecuaciones de movimiento.

Como se vio anteriormente, las ecuaciones de movimiento para un sistema de n grados de libertad para un conjunto de n coordenadas generalizadas pueden ser derivadas fácilmente por medio de las ecuaciones de Lagrange.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial v_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \dot{v}_i} = Q_{i,otro}, \qquad i = 1,2,\dots,n}$$

Donde:

$$L = T - V$$

$$P = -\frac{dW_{n.c.,viscoso}}{dt}$$

Y la fuerza generalizada no conservativas diferente a la viscosa, si sobre el sistema actuasen en las direcciones x, y, z las fuerzas F_{xk}, F_{yk}, F_{zk} sobre el k esimo elemento del sistema, por ejemplo, la fuerza generalizada estaría dada por:

$$Q_{i,otro} = \sum_k \left(F_{xk}\frac{\partial x_k}{\partial v_i} + F_{yk}\frac{\partial y_k}{\partial v_i} + F_{zk}\frac{\partial z_k}{\partial v_i}\right)$$

Donde x_k, y_k, z_k serían los desplazamientos de la $k$esima masa en las direcciones x, y, z, respectivamente.

7. Ecuaciones de movimiento de sistemas no amortiguados en forma matricial

Las ecuaciones de movimiento de un sistema no amortiguado de múltiples grados de libertad, como ya se ha visto, puede ser escrita en forma matricial:

$$\boxed{[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F}}$$

Y sí se tratase de vibración libre:

$$\boxed{[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = 0}$$

VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

8. Problema de Eigenvalores

La solución de la ecuación $[m]\ddot{\vec{x}}+[k]\vec{x}=0$, corresponde a la vibración libre no amortiguada del sistema. En este caso, si al sistema se le da energía en la forma de desplazamiento inicial y/o velocidad inicial, este vibrará infinitamente, ya que no hay disipación de energía.

Asumiendo una solución de la forma:

$$x_i(t)=X_iT(t), \qquad i=1,2,\dots,n$$

Donde X_i es una constante y T es una función del tiempo. La solución supuesta muestra que la razón de amplitudes entre dos coordenadas será independiente del tiempo

$$\frac{x_i(t)}{x_j(t)}=\frac{X_iT(t)}{X_jT(t)}=\frac{X_i}{X_j}$$

Esto último lo que implica es que, físicamente, todas las coordenadas tienen movimiento sincrónico; la configuración del sistema no cambia de forma durante el movimiento, pero sí de amplitud.

El vector $\vec{X}$ es conocido como la forma de modo del sistema.

$$\vec{X}=\begin{Bmatrix} X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n \end{Bmatrix}$$

Remplazando en las ecuaciones de movimiento expresadas en forma matricial se tendrá:

$$[m]\vec{X}\ddot{T}(t)+[k]\vec{X}T(t)=0$$

En forma escalar, se tendría n cantidad de ecuaciones para el sistema de n grados de libertad.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}X_J\right)\ddot{T}(t)+\sum_{j=1}^{n}\left(k_{ij}X_J\right)T(t)=0, \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(k_{ij}X_J\right)\right)\Bigg/\left(\sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}X_J\right)\right), \qquad i=1,2,\dots,n$$

VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

8. Problema de Eigenvalores

En vista de que la razón de la izquierda solo depende del tiempo y la de la derecha del incide i, estas expresiones deben ser iguales a una constante. Si suponemos esa constante es ω^2.

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0$$

Cuya solución puede ser expresada como:

$$\boxed{T(t) = C_1 \cos(\omega t + \phi)}$$

Donde C_1 y ϕ son constante que recordará son conocidas como amplitud y ángulo de fase. Aquí el valor tomado para ω debe también satisfacer la siguiente expresión:

$$\sum_{j=1}^{n} (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) X_J = 0, \qquad i = 1,2, \dots, n$$

O de forma matricial

$$\boxed{[[k] - \omega^2 [m]]\vec{X} = 0}$$

Esta ecuación representa lo que se conoce como eigenvalor o valor característico del problema.

En vista de que la expresión anterior representa un conjunto de n ecuaciones homogéneas con las incógnitas $X_1, X_2, \dots, X_n$, para una solución no trivial, el determinante Δ de los coeficientes de la matriz que acompaña a $\vec{X}$ debe ser cero:

$$\Delta = |(k_{ij} - \omega^2 m_{ij})| = |[[k] - \omega^2 [m]]|$$

Esta ecuación es llamada la ecuación característica, ω^2 se conoce como el eigenvalor o el valor característico, y ω es llamado la frecuencia natural del sistema. La expansión de la ecuación característica lleva a un polinomio de orden n en términos de ω^2, lo que tras ser resuelto dará n valores de ω^2. Sí ${\omega^2}_1, {\omega^2}_2, \dots {\omega^2}_n$ denota las n raíces en orden ascendente de magnitud, el valor positivo de la raíz cuadrada da las n frecuencias naturales del sistema $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_n$. El menor valor ω_1 es conocido como la frecuencia fundamental natural o la primera frecuencia natural.

VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

9. Solución del problema de Eigenvalores

<u>Solución de la ecuación característica</u>

Considere que $\lambda = {}^{1}/_{\omega^2}$, entonces:

$$[\lambda[k] - [m]]\vec{X} = 0$$

Al multiplicar a ambos lados $[k]^{-1}$:

$$[\lambda[I] - [D]]\vec{X} = 0$$

$$\lambda[I]\vec{X} = [D]\vec{X}$$

Donde $[I]$ es la matriz identidad y $[D] = [k]^{-1}[m] = [a][m]$ es la matriz dinámica.

Para la solución no trivial de $\vec{X}$, el determinante de la ecuación característica debe ser cero:

$$\boxed{\Delta = |\lambda[I] - [D]| = 0}$$

10. Vibración libre de sistemas no amortiguados

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = 0$$

Producto de la ortogonalidad existente entre los modos normales, la solución más general al problema de vibración libre de un sistema no amortiguado se puede expresar como una combinación lineal de todas las posibles soluciones:

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{X}^{(i)} C_i \cos(\omega_i t + \phi_i)}$$

Donde $\vec{X}^{(i)}$ es el iesimo vector modal y ω_i es la correspondiente frecuencia natural. C_i y ϕ_i son constantes que dependen de las condiciones iniciales específicas del sistema.

$$\vec{x}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{Bmatrix}, \qquad \dot{\vec{x}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(0) \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto las constantes pueden ser encontradas al considerar el siguiente conjunto de ecuaciones:

VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

10. Vibración libre de sistemas no amortiguados

$$\vec{x}(0) = \sum_{i=1}^{n} \vec{X}^{(i)} C_i \cos\phi_i\,, \qquad \dot{\vec{x}}(0) = -\sum_{i=1}^{n} \vec{X}^{(i)} C_i \omega_i \operatorname{sen}\phi_i$$

11.Vibración forzada de sistemas no amortiguados empleando análisis modal

Cuando fuerzas externas actúan sobre un sistema de múltiples grados de libertad, el sistema estará sujeto a vibración forzada. Para un sistema de n grados de libertad, las ecuaciones que gobiernan el movimiento son un conjunto de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden acopladas. Las soluciones de estas ecuaciones pueden ser encontradas por medio del análisis modal.

La ecuación de movimiento en forma matricial estaría dada por:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F}$$

Donde $\vec{F}$ es el vector de fuerzas externas. Para resolver la ecuación anterior por medio de análisis modal, primero es necesario resolver el problema de eigenvalores y encontrar las frecuencias naturales y los correspondientes modos normales.

$$\Delta = |\lambda[I] - [D]| = 0$$

De acuerdo al teorema de expansión (ver sección 6.11 del libro de texto), la solución del problema de vibración forzada puede ser expresada como una combinación lineal de los modos normales:

$$\boxed{\vec{x}(t) = q_1(t)\vec{X}^{(1)} + q_2(t)\vec{X}^{(2)} + \cdots + q_n(t)\vec{X}^{(n)}}$$

Donde $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)$ son coordenadas generalizadas dependientes del tiempo, conocidas como coordenadas principales o coeficientes de participación modal.

Si definimos a $[X] = \left[\vec{X}^{(1)}\,\vec{X}^{(2)} \ldots \vec{X}^{(n)}\right]$, la expresión anterior puede ser re escrita como:

$$\vec{x}(t) = [X]\vec{q}(t)$$

VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

11.Vibración forzada de sistemas no amortiguados empleando análisis modal

$$\vec{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix}$$

Con esta solución supuesta, las ecuaciones de movimiento en forma matricial pueden re escribirse como:

$$[m][X]\ddot{\vec{q}}(t) + [k][X]\vec{q}(t) = \vec{F}$$

Multiplicando por la traspuesta de $[X]$ a ambos lados:

$$[X]^T[m][X]\ddot{\vec{q}}(t) + [X]^T[k][X]\vec{q}(t) = [X]^T\vec{F}$$

Sí normalizamos los modos normales (ver sección 6.10.2 del libro de texto) de manera tal que:

$$[X]^T[m][X] = [I]$$

Y consecuentemente, recordando que del problema de vibración libre:

$$\left[[k] - {\omega_i}^2[m]\right]\vec{X}^{(i)} = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$$[k]\vec{X}^{(i)} = {\omega_i}^2[m]\vec{X}^{(i)}$$

O expresando $\vec{X}^{(i)}$ en forma matricial:

$$[k][X] = {\omega_i}^2[m][X]$$

Lo cual tras multiplicar por $[X]^T$ a ambos lados

$$[X]^T[k][X] = {\omega_i}^2[m][X][X]^T = {\omega_i}^2[I]$$

Consecuentemente las ecuaciones diferenciales de movimiento en forma matricial pueden ser re escritas como:

$$[I]\ddot{\vec{q}}(t) + {\omega_i}^2[I]\vec{q}(t) = \vec{Q}(t)$$

Donde $\vec{Q}(t) = [X]^T\vec{F}$.

Lo que en forma escalar, constituye un conjunto de n ecuaciones diferenciales no acopladas de segundo orden.

$$\boxed{\ddot{q}_i(t) + {\omega_i}^2 q_i(t) = Q_i(t), \qquad i = 1,2,\dots,n}$$

VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

11.Vibración forzada de sistemas no amortiguados empleando análisis modal

Las cuales pueden ser resueltas por medio del método de integrales de convolución o por el método de transformada de Laplace.

Donde las condiciones iniciales para resolver la expresión anterior estarían dada por:

$$\vec{x}(t) = [X]\vec{q}(t)$$

$$[X]^T[m]\vec{x}(t) = [X]^T[m][X]\vec{q}(t)$$

Recordando que:

$$[X]^T[m][X] = [I]$$

$$[X]^T[m]\vec{x}(t) = [I]\vec{q}(t)$$

$$[X]^T[m]\vec{x}(0) = \vec{q}(0)$$

$$[X]^T[m]\dot{\vec{x}}(0) = \dot{\vec{q}}(0)$$

Una vez se cuenta con $q_i(t), i = 1,2, \dots, n$, $\vec{x}(t)$ se encontraría por medio de:

$$\vec{x}(t) = q_1(t)\vec{X}^{(1)} + q_2(t)\vec{X}^{(2)} + \cdots + q_n(t)\vec{X}^{(n)}$$

12. Vibración forzada de sistemas amortiguados

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F}$$

Para resolver las ecuaciones de movimiento expresadas en forma matricial por medio del método de análisis modal, se supondrá por simplicidad que:

$$\boxed{[c] = \alpha[m] + \beta[k]}$$

Donde α y β son constantes. A esto se le conoce como amortiguamiento proporcional, ya que $[c]$ es proporcionalmente lineal a $[m]$ y a $[k]$.

Las ecuaciones de movimiento se podrían re escribir como:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + \alpha[m]\dot{\vec{x}} + \beta[k]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F}$$

Si suponemos que $\vec{x}(t) = [X]\vec{q}(t)$, entonces:

$$[m][X]\ddot{\vec{q}} + \alpha[m][X]\dot{\vec{q}} + \beta[k][X]\dot{\vec{q}} + [k][X]\vec{q}(t) = \vec{F}$$

VII. Sistemas de múltiples grados de libertad

12. Vibración forzada de sistemas amortiguados

Multiplicando por la traspuesta de $[X]$:

$$[X]^T[m][X]\ddot{\vec{q}} + \alpha[X]^T[m][X]\dot{\vec{q}} + \beta[X]^T[k][X]\dot{\vec{q}} + [X]^T[k][X]\vec{q}(t) = \vec{F}[X]^T$$

Y consecuentemente:

$$[I]\ddot{\vec{q}} + \alpha[I]\dot{\vec{q}} + \beta{\omega_i}^2[I]\dot{\vec{q}} + {\omega_i}^2[I]\vec{q}(t) = \vec{Q}(t)$$

Lo que en forma escalar puede ser expresado como:

$$\ddot{q}_i(t) + (\alpha + \beta{\omega_i}^2)\dot{q}_i(t) + {\omega_i}^2 q_i(t) = Q_i(t), \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Donde ω_i es la iesima frecuencia natural y $\vec{Q}(t) = [X]^T\vec{F}$.

Se redefinimos a $\alpha + \beta{\omega_i}^2$ como $2\zeta_i\omega_i$, las ecuaciones de movimiento podría ser expresadas como:

$$\boxed{\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i(t) + {\omega_i}^2 q_i(t) = Q_i(t), \qquad i = 1,2,\dots,n}$$

Donde ζ_i es la razón de amortiguamiento modal del iesimo modo normal.

Este conjunto de ecuaciones no están acopladas y la respuesta $q_i(t)$ puede ser encontrada por medio de los métodos tradicionales sí la fuerza de excitación es harmónica (capítulo 3) o bien por medio de transformada de Laplace.

Y la solución $\vec{x}(t)$ estará dada por:

$$\vec{x}(t) = q_1(t)\vec{X}^{(1)} + q_2(t)\vec{X}^{(2)} + \cdots + q_n(t)\vec{X}^{(n)}$$