IV. Vibración bajo condiciones forzadas generales

Objetivos:

1. Reconocer que existen excitaciones periódicas no harmónicas y no periódicas.
2. Analizar la respuesta de un sistema de primer y de segundo orden bajo una fuerza periódica general.
3. Analizar la respuesta de un sistema de segundo orden bajo una fuerza periódica irregular.
4. Describir el método de transformada de Laplace para resolver la ecuación de movimiento ante una fuerza de excitación arbitraria, la cuál puede ser no periódica.

1. Introducción

Muchos sistemas están sujetos a diferentes tipos de excitación que no son harmónicas. Dichas funciones pueden ser periódicas o no periódicas. Ejemplos de fuerzas no periódicas incluyen fuerzas repentinas constantes (fuerzas tipo escalón), fuerzas lineales (fuerzas tipo rampa), y fuerzas que varían de forma exponencial.

2. Respuesta bajo una fuerza periódica general

Cuando una fuerza externa $F(t)$ es periódica con un periodo $\tau = 2\pi/\omega$, esta puede ser expandida por medio de una serie de Fourier.

$$\boxed{F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t}$$

Donde

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} F(t)dt = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)dt$$

$$a_j = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} F(t)\cos j\omega t\, dt = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\cos j\omega t\, dt$$

$$b_j = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} F(t)\sin j\omega t\, dt = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\sin j\omega t\, dt$$

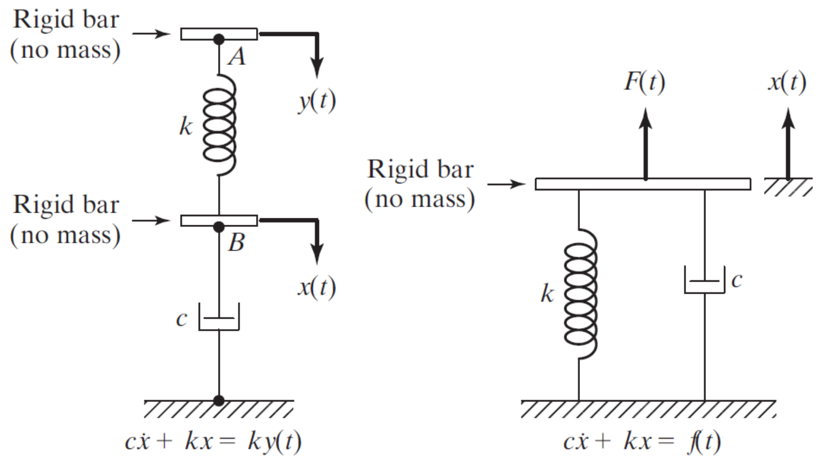
Aquí $j = 1,2,3, \dots$

IV. Vibración bajo condiciones forzadas generales

2. Respuesta bajo una fuerza periódica general

A continuación se considerarán tanto sistemas de primer orden (sistemas de masa despreciable) como sistemas de segundo orden.

Sistemas de primer orden



(a) (b)

Considere el sistema resorte-amortiguador sujeto a una excitación periódica en el punto A tal como se observa en la figura (a). Aquí la ecuación de movimiento del sistema en el punto B estaría dada por:

$$-kx + ky - c\dot{x} = m\ddot{x} = 0$$

$$ky = c\dot{x} + kx$$

$$ay = \dot{x} + ax$$

Donde $a = k/c$. Sí $y(t)$ es una excitación periódica descrita por

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t$$

$$ay(t) = \frac{aa_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} aa_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} ab_j \sin j\omega t$$

$$ay(t) = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin j\omega t$$

Donde: $A_0 = aa_0/2$, $A_j = aa_j$, $B_j = ab_j$

IV. Vibración bajo condiciones forzadas generales

2. Respuesta bajo una fuerza periódica general

Sistemas de primer orden

Por lo tanto la ecuación diferencial podría re escribirse como

$$A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin j\omega t = \dot{x} + ax$$

Puede observarse que el lado izquierdo de la ecuación de movimiento consiste de una constante más la suma líneal de funciones harmónicas. Y la solución particular o en estado estable puede ser encontrada por medio del principio de superposición, al suponer que dicha solución corresponde a la suma de las soluciones en estado estable correspondiente a cada uno de los términos individuales presentes en el lado izquierdo.

La solución asociada al término constante sería

$$A_0 = \dot{x}_0 + ax_0$$

Suponiendo que $x_0(t) = \frac{A_0}{a}$, se encuentra que efectivamente se satisface la ecuación diferencial.

$$A_0 = a\frac{A_0}{a}$$

La solución asociada al término senoidal sería

$$B_j \sin j\omega t = \dot{x}_{j,B} + ax_{j,B}$$

Suponiendo que $x_{j,B} = X_{j,B} \sin j(\omega t - \phi_B)$, donde $X_{j,B}$ y ϕ_B son constantes por determinar.

La solución supuesta es igual a la parte imaginaria de la siguiente solución compleja

$$x_{j,B} = \mathrm{Im}\left[X_{j,B} e^{i\left(j(\omega t - \phi_B)\right)}\right] = \mathrm{Im}\left[X_{j,B} e^{i(j\omega t)} e^{-i(j\phi_B)}\right]$$
$$x_{j,B} = \mathrm{Im}\left[U_{j,B} e^{i(j\omega t)}\right]$$

Donde: $i = \sqrt{-1}$, y $U_{j,B} = X_{j,B} e^{-i(j\phi_B)}$

IV. Vibración bajo condiciones forzadas generales

2. Respuesta bajo una fuerza periódica general

<u>Sistemas de primer orden</u>

Derivando la expresión anterior

$$\dot{x}_{j,B} = \mathrm{Im}\left[i(j\omega)U_{j,B}e^{i(j\omega t)}\right]$$

Expresando la fuerza de excitación en forma compleja, la ecuación diferencial podría re escribirse como (aquí recuerde que solo nos interesa la parte imaginaria de la solución producto de la forma para $\dot{x}_{j,B}$ que ha sido supuesta)

$$\mathrm{Im}\left[B_j e^{i(j\omega t)}\right] = \dot{x}_{j,B} + a x_{j,B}$$

$$B_j e^{i(j\omega t)} = i(j\omega)U_{j,B}e^{i(j\omega t)} + aU_{j,B}e^{i(j\omega t)}$$

$$B_j = [i(j\omega) + a]U_{j,B}$$

$$U_{j,B} = \frac{B_j}{a + i(j\omega)}$$

$$U_{j,B} = B_j\left(\frac{1}{a + i(j\omega)}\right)\left(\frac{a - i(j\omega)}{a - i(j\omega)}\right)$$

$$U_{j,B} = B_j\left(\frac{a - i(j\omega)}{a^2 + (j\omega)^2}\right) = \frac{B_j}{\sqrt{a^2 + (j\omega)^2}}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + (j\omega)^2}} - i\frac{(j\omega)}{\sqrt{a^2 + (j\omega)^2}}\right]$$

$$U_{j,B} = \frac{B_j}{\sqrt{a^2 + (j\omega)^2}}[\cos j\phi_B - i\sin j\phi_B] = \frac{B_j e^{-i(j\phi_B)}}{\sqrt{a^2 + (j\omega)^2}}$$

$$j\phi_B = \tan^{-1}\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

Recordando que

$$U_{j,B} = X_{j,B}e^{-i(j\phi_B)}$$

Entonces

$$\frac{B_j e^{-i(j\phi_B)}}{\sqrt{a^2 + (j\omega)^2}} = X_{j,B}e^{-i(j\phi_B)}$$

$$\boxed{X_{j,B} = \frac{B_j}{\sqrt{a^2 + (j\omega)^2}}}$$

$$\boxed{j\phi_B = \tan^{-1}\left(\frac{j\omega}{a}\right)}$$

IV. Vibración bajo condiciones forzadas generales

2. Respuesta bajo una fuerza periódica general

Sistemas de primer orden

Por último, la solución asociada al término cosenoidal sería

$$A_j \cos j\omega t = \dot{x}_{j,A} + a x_{j,A}$$

Suponiendo que $x_{j,A} = X_{j,A} \cos j(\omega t - \phi_A)$, donde $X_{j,A}$ y ϕ_A son constantes por determinar. Siguiendo un procedimiento análogo al seguido al considerar el término senoidal se tendría

$$X_{j,A} = \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + (j\omega)^2}}$$

$$j\phi_A = \tan^{-1}\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

Por lo tanto la solución particular completa para el sistema de primer orden sería

$$x_p(t) = x_0(t) + x_{j,B}(t) + x_{j,A}(t)$$

$$x_p(t) = \frac{A_0}{a} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + (j\omega)^2}} \cos\left(j\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{j\omega}{a}\right)\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{\sqrt{a^2 + (j\omega)^2}} \sin\left(j\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{j\omega}{a}\right)\right)$$

Una vez se encuentra la solución particular $x_p(t)$, se determina la solución homogénea $x_h(t)$, teniendo presente la condición inicial $x(0) = x_0$ y recordando que

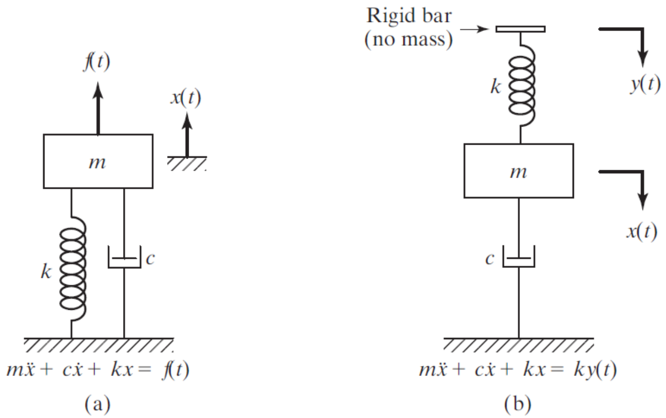
$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Para más detalles vea por favor la sección 4.2.1 de su libro de texto

IV. Vibración bajo condiciones forzadas generales

2. Respuesta bajo una fuerza periódica general

<u>Sistemas de segundo orden</u>



Considere el sistema masa-resorte-amortiguador sujeto a una excitación periódica $f(t)$, figura (a). Aquí la ecuación de movimiento del sistema estaría dada por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

Sí $f(t)$ es una función periódica que se puede expandir en serie de Fourier de la forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t$$

Entonces la ecuación diferencial resultante estaría dada por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t$$

Empleando el principio de superposición, la solución particular de esta ecuación, estaría dada por la suma de las soluciones particulares del siguiente grupo de ecuaciones no homogéneas

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a_j \cos j\omega t$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = b_j \sin j\omega t$$

IV. Vibración bajo condiciones forzadas generales

2. Respuesta bajo una fuerza periódica general

Sistemas de segundo orden

Las cuáles pueden ser resueltas siguiendo un procedimiento análogo al usado en los sistemas de primer orden. Por lo tanto la solución particular estaría dada por

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(a_j/k\right)}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \cos\left(j\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta jr}{1-j^2r^2}\right)\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(b_j/k\right)}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \sin\left(j\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta jr}{1-j^2r^2}\right)\right)$$

Donde $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$, $r = \omega/\omega_n$.

Aquí si $j\omega = \omega_n$, para algún valor de j, se tendrá en dicho punto la mayor amplitud $x_p(t)$ del sistema amortiguado. Puede observarse que a medida que $j \to \infty$ los coeficientes tienden a cero y por lo tanto basta con evaluar los primeros términos de la serie para obtener una resultado con precisión razonable.

3. Respuesta bajo una fuerza periódica irregular

En algunos casos, las fuerzas actuando sobre un sistema pueden ser periódicas pero bastante irregulares y no pueden ser determinadas más que de forma experimental. Ejemplos de dichos tipos de fuerzas que se inducen sobre un sistema, son la fuerza del viento o los movimientos sísmicos.

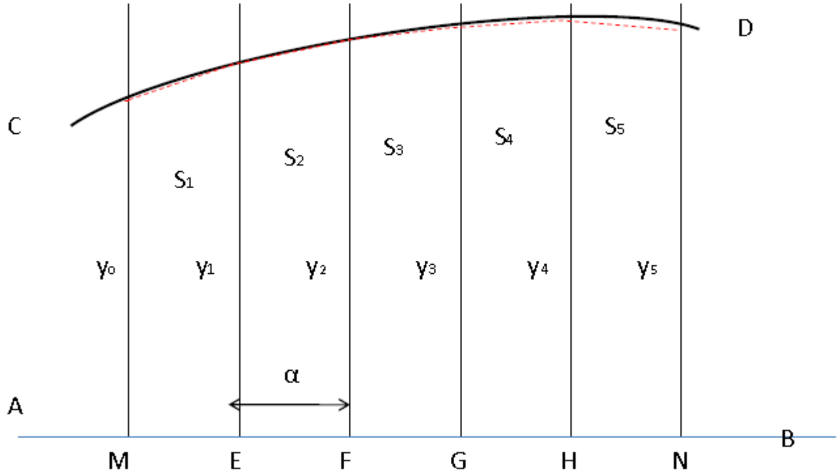
En tales casos, las fuerzas estarán disponibles en forma gráfica, y solo para algunos ciertos puntos discretos de tiempo $t_1, t_2, \ldots, t_N$. En todos estos casos, es posible encontrar los coeficientes de la serie de Fourier que representa a $F(t)$ por medio de métodos de integración numérica (método del trapecio, reglas de Simpson, etc).

IV. Vibración bajo condiciones forzadas generales

3. Respuesta bajo una fuerza periódica irregular

Método de los trapecios

El área limitada por una curva CD se calcula dividiendo la proyección MN de la curva en un numero cualquiera de partes iguales separadas por un intervalo fijo (α). Una vez realizada la división se levantan perpendiculares por los puntos de división y la figura queda dividida en trapecios curvilíneos, cuyas áreas son aproximadamente iguales a la de los trapecios rectilíneos correspondientes. El área total es la suma de todos ellos.



Como se puede observar las áreas (S_i) consisten en un trapecio compuesto por un rectángulo de altura y_i , y un triángulo de altura $y_{i+1} - y_i$. Para ambos la base tiene un valor de α de acuerdo con la figura anterior.

El área por lo tanto se calcularía como

$$S_i = \alpha\left[y_i + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{2}\right)\right] = \alpha\left(\frac{y_{i+1} + y_i}{2}\right)$$

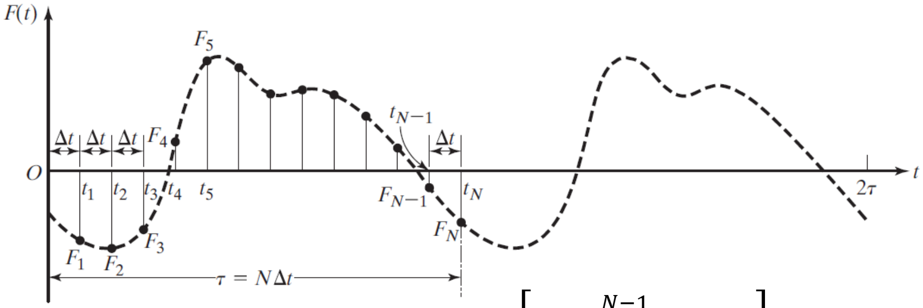
Donde $\alpha = \frac{MN}{n}$; aquí MN se refiere a la longitud total de la sección de interés en la curva, y n al número de divisiones que se desean obtener.

IV. Vibración bajo condiciones forzadas generales

3. Respuesta bajo una fuerza periódica irregular

Método de los trapecios

Considere ahora la fuerza irregular presentada en el grafico mostrado a continuación, donde $F_1, F_2, \dots F_N$ representa el valor de $F(t)$ en $t_1, t_2, \dots t_N$, respectivamente, donde N denota la cantidad de puntos pares equidistantes ($N = 1,2,3 \dots$) considerados en el periodo de la fuerza irregular $\tau = N\Delta t$.



$$a_0 = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)dt \cong \frac{2}{\tau}(\Delta t)\left[\frac{F_0}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} F_i + \frac{F_N}{2}\right]$$

$$a_0 \cong \frac{2}{N}\left[\frac{F_0}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} F_i + \frac{F_N}{2}\right]$$

$$a_j = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\cos j\omega t\, dt$$

$$a_j \cong \frac{2}{\tau}(\Delta t)\left[\frac{F_0}{2}\cos\left(j\frac{2\pi}{\tau}t_0\right) + \sum_{i=1}^{N-1} F_i\cos\left(j\frac{2\pi}{\tau}t_i\right) + \frac{F_N}{2}\cos j\left(\frac{2\pi}{\tau}t_N\right)\right]$$

$$a_j \cong \frac{2}{N}\left[\frac{F_0}{2}\cos\left(\frac{2j\pi t_0}{\tau}\right) + \sum_{i=1}^{N-1} F_i\cos\left(\frac{2j\pi t_i}{\tau}\right) + \frac{F_N}{2}\cos\left(\frac{2j\pi t_N}{\tau}\right)\right]$$

$$b_j = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\sin j\omega t\, dt$$

$$b_j \cong \frac{2}{\tau}(\Delta t)\left[\frac{F_0}{2}\sin\left(j\frac{2\pi}{\tau}t_0\right) + \sum_{i=1}^{N-1} F_i\sin\left(j\frac{2\pi}{\tau}t_i\right) + \frac{F_N}{2}\sin j\left(\frac{2\pi}{\tau}t_N\right)\right]$$

$$b_j \cong \frac{2}{N}\left[\frac{F_0}{2}\sin\left(\frac{2j\pi t_0}{\tau}\right) + \sum_{i=1}^{N-1} F_i\sin\left(\frac{2j\pi t_i}{\tau}\right) + \frac{F_N}{2}\sin\left(\frac{2j\pi t_N}{\tau}\right)\right]$$

IV. Vibración bajo condiciones forzadas generales

3. Respuesta bajo una fuerza periódica irregular

<u>Método de los trapecios</u>

Una vez los coeficientes de la series de Fourier de $F(t)$ son conocidos, la respuesta en estado estable del sistema puede ser encontrada por medio de

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(a_j/k\right)}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \cos\left(j\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta jr}{1-j^2r^2}\right)\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(b_j/k\right)}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2\zeta jr)^2}} \sin\left(j\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta jr}{1-j^2r^2}\right)\right)$$

Donde

$$r = \frac{2\pi}{\tau\omega_n}$$

4. Respuesta bajo una fuerza no periódica

Cuando la fuerza de excitación $F(t)$ es no periódica, se requiere de algún método diferente a la expansión en series de Fourier para calcular la respuesta del sistema.

Existen diferentes métodos que pueden ser utilizados para determinar la respuesta de un sistema a una excitación arbitraría. Algunos de estos métodos son los siguientes:

1. Representación de la excitación por medio de una integral de Fourier.

2. Resolución por medio del método de integral de convolución.

3. Resolución por medio del método de transformada de Laplace.

4. Resolución de la ecuación diferencial por medio de métodos de integración numérica.

De los métodos anteriores solo discutiremos el método de transformada de Laplace. Sí desea comprender el método de integral de convolución puede referirse a la sección 4.5 de su libro de texto.

IV. Vibración bajo condiciones forzadas generales

4. Respuesta bajo una fuerza no periódica

Recuerde que al final del capítulo 3 se presentó el procedimiento general para resolver la ecuación diferencial de un sistema de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso sujeto a una excitación arbitraria $F(t)$ por medio de la transformada y la transformada inversa de Laplace.

Sin embargo, en términos generales, la aplicación del método de transformada de Laplace para encontrar la respuesta de un sistema (de cualquier orden) básicamente involucra los siguientes pasos:

1. Escribir la ecuación de movimiento del sistema.

2. Transformar cada término de la ecuación, usando las condiciones iniciales conocidas.

3. Resolver la ecuación algebraica resultante para la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia (aquí se emplean fracciones parciales).

4. Obtener la solución deseada (respuesta) al usar la transformada de Laplace inversa.

Aquí en la solución general se tendrá tanto la respuesta en estado transitorio como en estado estable. La respuesta en estado transitorio es aquella parte de la solución asociada a las condiciones iniciales y que se desvanece con el tiempo, mientras que la de estado transitorio es aquella que está asociada a la fuerza de excitación externa arbitraria (dicha respuesta puede ser encontrada imponiendo condiciones iniciales iguales a cero).

IV. Vibración bajo condiciones forzadas generales

4. Respuesta bajo una fuerza no periódica

Valor inicial y valor de estado estable de la respuesta

-Valor inicial de la respuesta: Sí la respuesta o solución de un sistema es conocida en el dominio del tiempo, el valor inicial de la respuesta, $x(0)$, puede ser determinado al evaluar la respuesta en $t = 0$. Sí la respuesta del sistema es conocida en el dominio de la frecuencia, el valor inicial puede ser encontrada a partir del teorema de valor inicial:

$$x(t = 0) = \lim_{s \to \infty} [sX(s)]$$

-Valor de la respuesta en estado estable: Sí la respuesta de un sistema es conocida en el dominio del tiempo, el valor de la respuesta en estado estable x_{ss}, puede ser determinado al tomar el límite de la respuesta cuando $t \to \infty$. Sí la respuesta del sistema está dada en el domino de la frecuencia, el valor en estado estable puede ser encontrado por medio del teorema del valor final, al tomar el límite de la respuesta en el dominio de la frecuencia cuando $s \to 0$.

Un ejemplo de lo anterior puede ser visto al analizar la respuesta en estado estable de un sistema de primer orden, a una función impulso unitario $\delta(t)$:

$$c\dot{x} + kx = \delta(t)$$

$$\dot{x} + ax = F\delta(t)$$

Donde $a = k/c$, $F = 1/c$.

$$\mathcal{L}\{\dot{x} + ax\} = \mathcal{L}\{F\delta(t)\}$$

$$sX(s) - x(0) + aX(s) = F$$

Sea $x(0) = 0$

$$X(s) = \frac{F}{s + a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F}{s + a}\right\}$$

$$x(t) = Fe^{-at}$$

IV. Vibración bajo condiciones forzadas generales

4. Respuesta bajo una fuerza no periódica

Valor inicial y valor de estado estable de la respuesta

Valor inicial de la respuesta:

$$x(t=0)=F$$

O bien

$$sX(s)=\frac{Fs}{s+a}$$

$$x(t=0)=\lim_{s\to\infty}[sX(s)]=\lim_{s\to\infty}\left[F\left(\frac{1}{1+\frac{a}{s}}\right)\right]=F$$

Valor de la respuesta en estado estable:

$$x_{ss}=\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}[Fe^{-at}]=0$$

O bien

$$x_{ss}=\lim_{s\to 0}[sX(s)]=\lim_{s\to 0}\left[F\left(\frac{1}{1+\frac{a}{s}}\right)\right]=0$$

La aplicación de la transformada de Laplace para sistemas de primer y segundo orden bajo diferentes funciones de excitación no periódicas puede apreciarla en la sección 4.7 de su libro de texto.