

# IV. Pandeo y resistencia última de columnas

## Objetivos:

1. Análisis de columnas sujetas a cargas axiales y/o a cargas laterales.

## 1. Revisión de la teoría básica.

### Columnas ideales

“La carga última  $P_{ult}$  es la carga máxima que una columna puede soportar, y depende de la excentricidad inicial de la columna, de la excentricidad de la carga, de las cargas transversales, de las condiciones de frontera, del pandeo local o lateral, y de los esfuerzos residuales.

La carga de pandeo de Euler  $P_E$ , por otro lado, es una cantidad idealizada que no toma en cuenta los factores antes mencionados con excepción de los diferentes tipos de condiciones de frontera que se contabilizan al utilizar una longitud efectiva  $L_e$ :

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

La expresión anterior es el valor característico en la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{Pw}{EI} = 0$$

Donde  $w$  representa la deflexión,  $E$  el modulo de Young, e  $I$  el segundo momento de área con respecto a la sección transversal.

Producto de los factores mencionados, la carga última de una columna real será inferior a la carga de pandeo de Euler. Y estrictamente hablando, una transición repentina a una forma flexionada solo ocurre en el caso de columnas ideales.

# IV. Pandeo y resistencia última de columnas

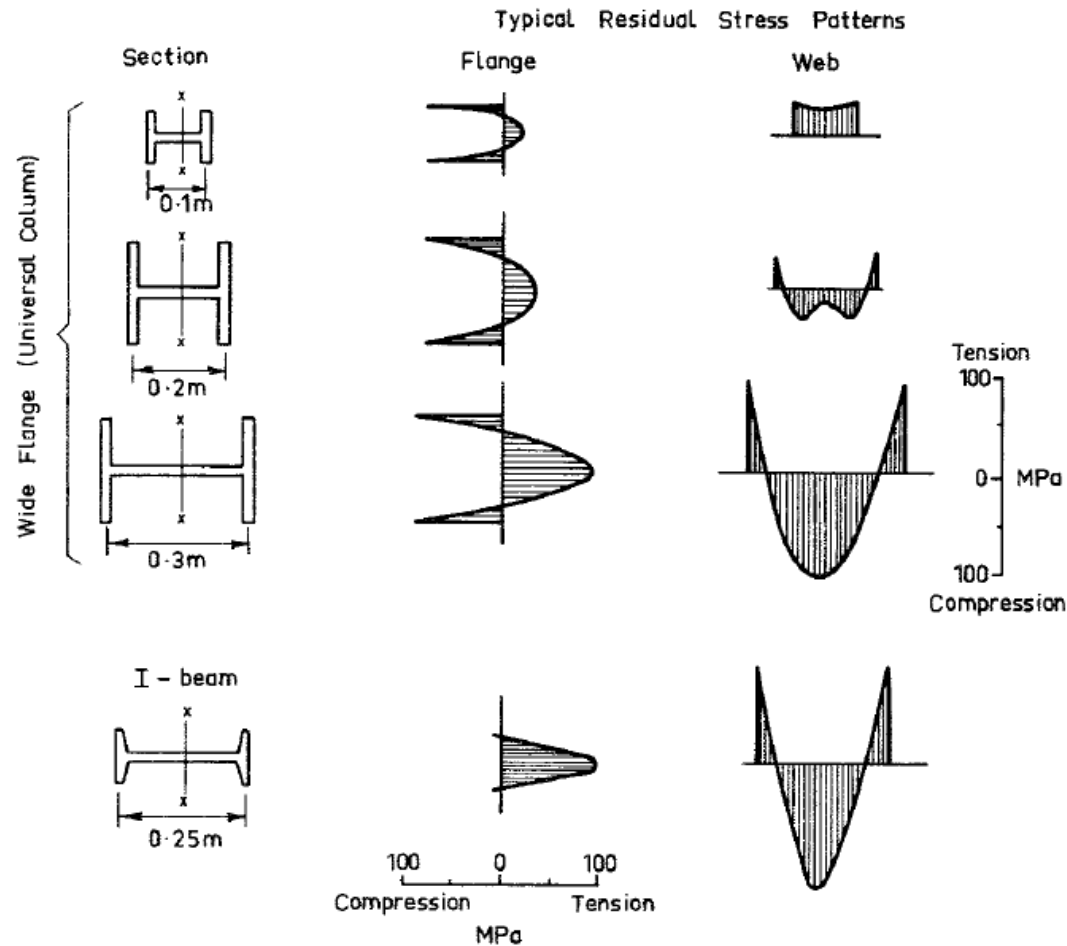
## 1. Revisión de la teoría básica.

### Esfuerzos residuales

-Secciones roladas.

En secciones roladas al caliente, el enfriamiento desproporcional entre la raíz del patín y la punta del patín produce esfuerzos residuales en el primer caso de tensión y en el segundo de compresión. Este efecto depende principalmente de la geometría.

Las partes de sección transversal que tienen un esfuerzo residual de compresión comienzan a ceder cuando el esfuerzo promedio aplicado alcanza un valor de  $\sigma_y - \sigma_r$ , lo que reduce considerablemente a  $\sigma_{ult}$ . Donde  $\sigma_y$  es el esfuerzo de cedencia,  $\sigma_r$  el residual de compresión, y  $\sigma_{ult}$  el correspondiente a la carga última aplicada.



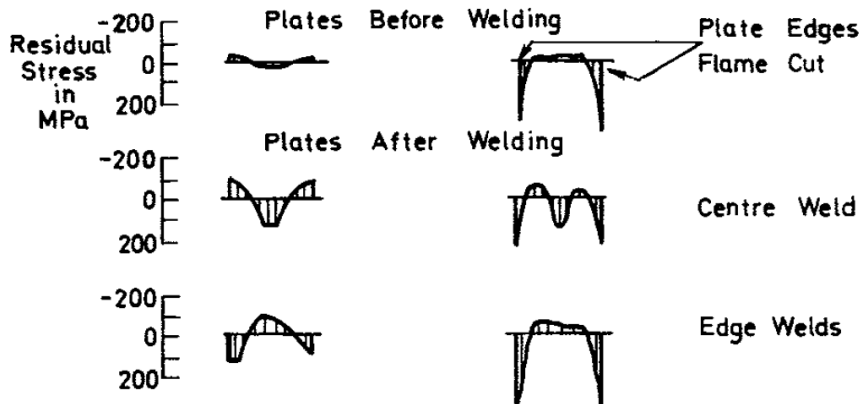
# IV. Pandeo y resistencia última de columnas

## 1. Revisión de la teoría básica.

### Esfuerzos residuales

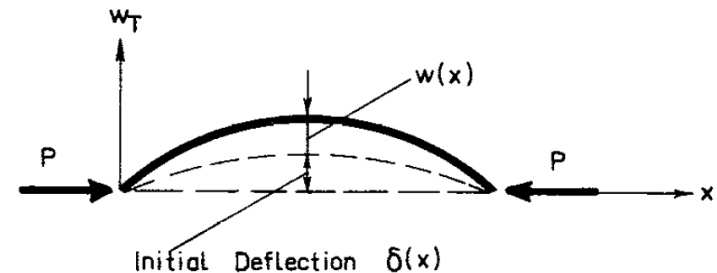
-Secciones soldadas.

La distribución de esfuerzos residuales producto de la soldadura es en general bastante distinta a la que se tiene producto de rolado caliente, a pesar que ambas dependen de gradientes de temperatura. Durante la soldadura el metal está en un estado perfectamente plástico. Cerca de la soldadura se tendrá esfuerzo residual de tensión aproximadamente igual al esfuerzo de cedencia del material.



### Excentricidad: factor magnificador

En la práctica las columnas no son perfectamente rectas ni presentan una carga actuando de forma perfecta axialmente.



En la figura anterior se muestra una columna pivotada con una deflexión inicial  $\delta(x)$  y una deflexión adicional  $w(x)$  producto de la carga axial. Para deflexiones pequeñas la ecuación que gobierna el movimiento sería:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{P}{EI} (\delta + w) = 0$$

Y para esta ecuación diferencial, se puede demostrar que existe un factor magnificador  $\phi$  de manera tal que la deflexión total  $w_T$  sea igual a:

# IV. Pandeo y resistencia última de columnas

## 1. Revisión de la teoría básica.

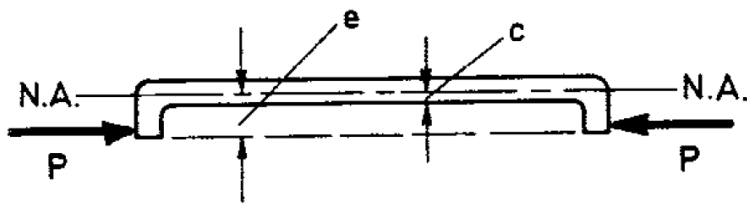
Excentricidad: factor magnificador

$$w_T = w + \delta = \phi \delta$$

Donde  $\phi$ :

$$\phi = \frac{P_E}{P_E - P}$$

De igual forma, pueden darse excentricidades de la carga que está siendo aplicada.

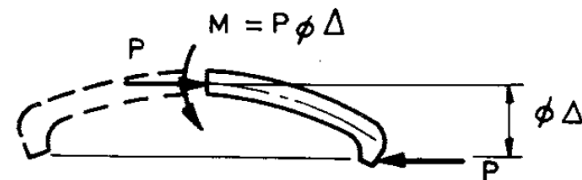
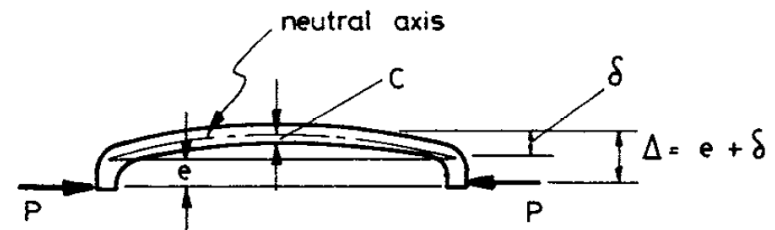


En este caso el factor magnificador será igual a:

$$\phi = \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right)$$

Los dos tipos de excentricidades (aplicación de carga y geometría inicial de la columna) pueden ser superpuestas siempre y cuando se utilice el factor magnificador apropiado para cada una.

Si los factores magnificadores se graficarán para valores de  $P/P_E < 0.5$  se observaría que dichos factores difieren en menos del 12% y por lo tanto es más simple hacer el análisis para deflexiones iniciales empleando la excentricidad total  $\Delta = \delta + e$ .



# IV. Pandeo y resistencia última de columnas

## 1. Revisión de la teoría básica.

### Excentricidad: factor magnificador

De la figura anterior, también puede deducirse que el esfuerzo máximo de compresión  $\sigma_{max}$  será igual a:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{P\phi\Delta}{Z}$$

Donde  $Z$  es el módulo de sección de la parte sujeta a compresión.

La expresión anterior, también puede ser re escrita como:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \left( 1 + \phi \frac{\Delta}{r_c} \right)$$

Donde  $r_c = Z/A$  es la razón del núcleo y  $\Delta/r_c$  la razón de excentricidad.

Si la excentricidad es lo suficientemente grande causará esfuerzos de flexión lo suficientemente significativos como para eclipsar los esfuerzos residuales.

La selección de  $\Delta$  para propósitos de diseño es importante, y se suele relacionar la razón de excentricidad en función de la razón de esbeltez.

$$\frac{\Delta}{r_c} = \alpha \frac{L}{\rho}$$

Donde  $\rho = \sqrt{I/A}$  es el radio de giro. Aquí  $L$  debe ser remplazada por  $L_e$  en caso tal de que la columna no este simplemente apoyada en uno de sus extremos.

## 2. Fórmulas de diseño de columnas.

### Fórmula de Perry-Robertson

Esta fórmula se basa en que la columna fallará cuando el esfuerzo máximo de compresión alcance el esfuerzo de cedencia.

$$\sigma_{max} = \sigma_Y = \frac{P_{ult}}{A} \left[ 1 + \left( \frac{P_E}{P_E - P_{ult}} \right) \left( \alpha \frac{L}{\rho} \right) \right]$$

# IV. Pandeo y resistencia última de columnas

## 2. Fórmulas de diseño de columnas.

### Fórmula de Perry-Robertson

Lo que en función de esfuerzo estaría dado por:

$$\sigma_Y = \sigma_{ult} \left[ 1 + \left( \frac{1}{1 - \frac{\sigma_{ult}}{\sigma_E}} \right) \left( \alpha \frac{L}{\rho} \right) \right]$$

Sí se define la razón de resistencia de la columna  $R$ , la razón de excentricidad de la columna como  $\eta$ , y el parámetro de esbeltez de la columna como  $\lambda$ :

$$R = \frac{\sigma_{ult}}{\sigma_y}, \quad \eta = \alpha \frac{L}{\rho}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_E}} = \frac{L}{\pi \rho} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}}$$

La expresión anterior podría re escribirse en forma adimensional:

$$1 = R \left[ 1 + \left( \frac{1}{1 - R\lambda^2} \right) (\eta) \right]$$

$$\frac{1}{R} - 1 = \left( \frac{\eta}{1 - R\lambda^2} \right) \rightarrow \frac{1 - R}{R} = \frac{\eta}{1 - R\lambda^2}$$

$$(1 - R)(1 - R\lambda^2) = \eta R$$

La cual es una función cuadrática de  $R$  y cuya solución general estaría dada por:

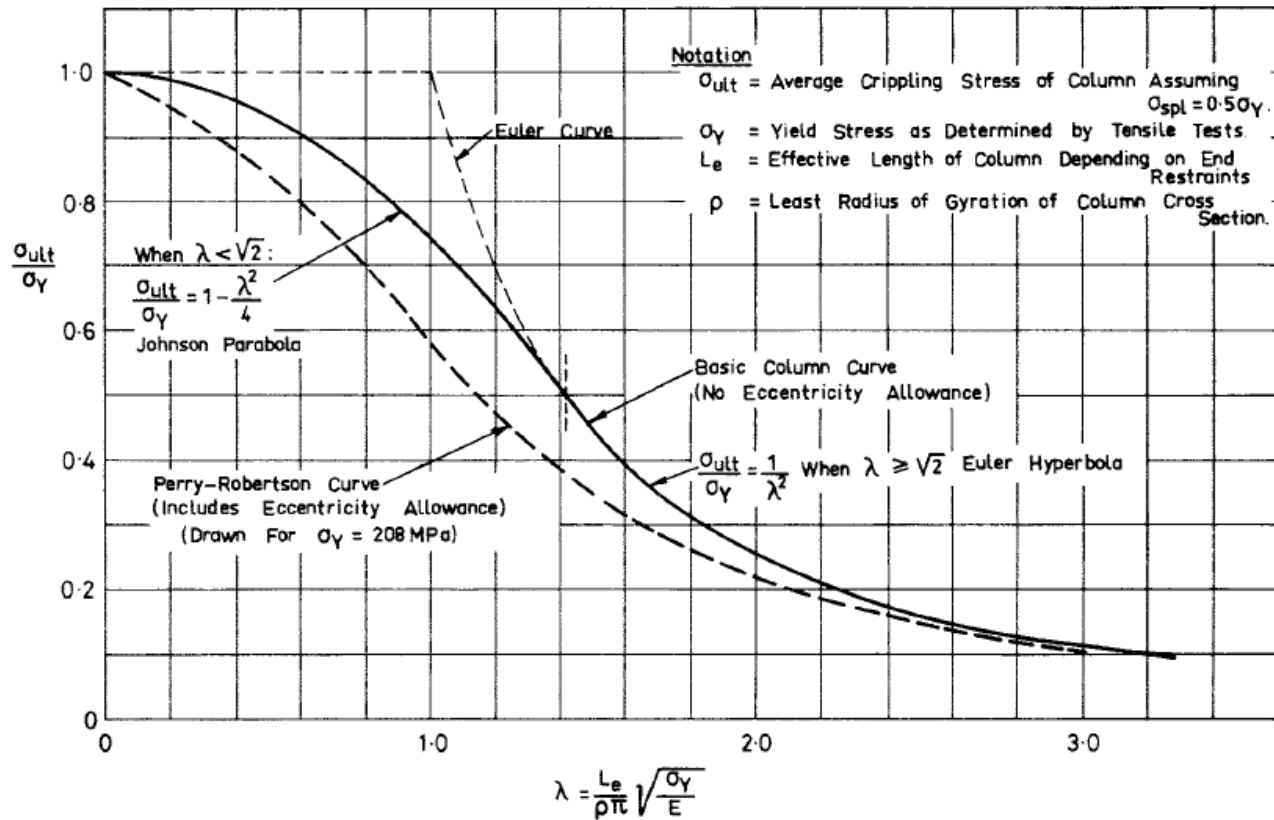
$$R = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1 + \eta}{\lambda^2} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1 + \eta}{\lambda^2} \right)^2 - \frac{1}{\lambda^2}}$$

En la siguiente figura se muestra el caso de la fórmula de Perry-Robertson en donde  $\alpha = 0.003$  y se tiene acero comercial ( $E/\sigma_y = 1000$ )

### Curvas de diseño precisas

Extensiva investigación experimental ha demostrado que diferentes secciones significativamente difieren en su curva de colapso, parcialmente debido a geometría y parcialmente debido a esfuerzos residuales.

# IV. Pandeo y resistencia última de columnas



# IV. Pandeo y resistencia última de columnas

## 2. Fórmulas de diseño de columnas.

### Curvas de diseño precisas

Los resultados han mostrado que una sola curva de diseño como la de Perry-Robertson no puede representar con precisión todos los tipos de sección. En cambio es necesario tener diferentes conjuntos de curvas para cada tipo de sección, cada curva correspondiente a un grado particular del acero. Por ejemplo una viga universal (en “I” o en “H”) tiene un conjunto de curvas diferentes a las de un tubo de pared delgada y debe ser tratada acordeamente.

La fórmula de Perry-Robertson aún puede ser usada como base para estas curvas, solo que se emplean diferentes valores de  $\alpha$  para los diferentes tipos de secciones. Vea la sección 11.2 de su libro de texto para más detalles.

## 3. Efecto de las cargas laterales: columnas-vigas.

### Uso del factor magnificador

Se puede demostrar que para una columna pivotada sujeta a una carga lateral uniforme  $q(x)$  y a una carga axial  $P$  la solución exacta para la deflexión máxima  $w_{max}$  estaría dada por:

$$w_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \left[ \frac{24}{5\xi^4} \left( \sec \xi - 1 - \frac{\xi^2}{2} \right) \right]$$

Donde  $\xi$ :

$$\xi = \left( \frac{L}{2} \right) \sqrt{\left( \frac{P}{EI} \right)}$$

Para ver la deducción de la ecuación anterior refiérase a la sección 1.5 del libro Theory of Elastic Stability de S.P. Timoshenko y J.M. Gere.

El primer factor,  $\delta_0 = (5qL^4)/384EI$ , es la deflexión central de un miembro cargado lateralmente con extremos pivotados y sin carga axial. Por lo tanto el segundo término da el efecto que tiene la carga axial sobre la deflexión central. Es el factor magnificador para la deflexión de la condición de carga y de extremos considerada. 8



# IV. Pandeo y resistencia última de columnas

## 3. Efecto de las cargas laterales: columnas-vigas.

### Uso del factor magnificador

De igual forma, el momento flector máximo  $M_{max}$  para este caso estaría dado por:

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} \left[ \frac{2(1 - \sec \xi)}{\xi^2} \right]$$

Nuevamente el factor  $(qL^2)/8$  es el momento flector máximo sin la presencia de carga lateral, y el término en paréntesis representa al factor magnificador en este caso. Este factor es diferente al de deflexión y se puede demostrar que para cada combinación de carga y condición de los extremos abra un factor magnificador diferente.

Por lo tanto, y por simplicidad, el enfoque usual al tratar con columnas cargadas lateralmente es utilizar el factor magnificador derivado previamente  $\phi$ .

$$\phi = \frac{P_E}{P_E - P}$$

En una viga-columna supondremos el momento flector máximo  $M_{max}$  es la suma del momento flector producto de la carga lateral  $M_0$  más aquel momento flector producto de la excentricidad (que incluye la deflexión producto de la carga lateral  $\delta_0$ ):

$$M_{max} = M_0 + P\phi(\delta_0 + \Delta)$$

Y el esfuerzo máximo de compresión respectivo sería:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{max}}{Z}$$

Para comprobar lo anterior, considere que la columna soporta una carga lateral  $q$  y que la carga axial  $P = 0.5P_E$ . Consideraremos que no hay excentricidad  $\Delta = 0$  para así comparar la solución exacta del caso considerado.

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} \left[ \frac{2(1 - \sec \xi)}{\xi^2} \right]$$

Sea  $M_0 = (qL^2)/8$ .

# IV. Pandeo y resistencia última de columnas

## 3. Efecto de las cargas laterales: columnas-vigas.

Uso del factor magnificador

$$\xi = \left(\frac{L}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{P}{EI}\right)} = \left(\frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{P}{P_E}}$$

$$\xi = \left(\frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{0.5P_E}{P_E}} \cong 1.11072$$

Consecuentemente:

$$|M_{max}| = \left| M_0 \left[ \frac{2(1 - \sec \xi)}{\xi^2} \right] \right| \cong 2.02994 M_0$$

Empleando la suposición considerada:

$$M_{max} = M_0 + P\phi(\delta_0 + \Delta)$$

$$\phi = \frac{P_E}{P_E - 0.5P_E} = 2$$

$$\delta_0 = \frac{5qL^4}{384EI} = \left(\frac{qL^2}{8}\right) \left(\frac{5L^2}{48EI}\right)$$

$$\delta_0 = \frac{5L^2}{48EI} M_0$$

$$P = 0.5P_E = 0.5 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI$$

$$M_{max} = M_0 + \left(0.5 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI\right) 2 \left(\frac{5L^2}{48EI} M_0\right)$$

$$|M_{max}| \cong 2.02808 M_0$$

Lo que da un resultado similar al calculado por medio de la solución exacta.

Similar al caso en donde no se tenían cargas laterales, se supondrá la columna fallara una vez el esfuerzo máximo de compresión alcance la cedencia.

$$\sigma_{max} = \sigma_Y = \frac{P_{ult}}{A} + \frac{M_0}{Z} + \frac{P_{ult}\phi(\delta_0 + \Delta)}{Z}$$

Lo que tras definir los parámetros adimensionales:

$$R = \frac{\sigma_{ult}}{\sigma_Y}, \eta = \alpha \frac{L}{\rho}, \lambda = \sqrt{\frac{\sigma_Y}{\sigma_E}} = \frac{L}{\pi\rho} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}}, \mu = \frac{M_0}{Z\sigma_Y}$$

# IV. Pandeo y resistencia última de columnas

## 3. Efecto de las cargas laterales: columnas-vigas.

### Uso del factor magnificador

Lleva a una expresión análoga a la de Perry-Robertson que puede ser resuelta para  $R$ :

$$(1 - R - \mu)(1 - R\lambda^2) = \eta R$$

Vea las figuras 11.14a-11.14c del libro de texto.

### Viga-columna empotrada

Si los extremos de la viga-columna están restringidos rotacionalmente abra un momento flector en dichos extremos  $M_e$  y el esfuerzo debe ser calculado tanto en los extremos como en el centro, ya que es posible que la cedencia por compresión en un patín ocurra primero en los extremos. Esto es particularmente probable en el caso de vigas de cubierta y cuadernas de costado. El análisis no es significativamente distinto al presentado en la subsección de uso de factor magnificador. Para más detalles refiérase al final de la sección 11.3 de su libro de texto.