III. Análisis de marcos

Objetivo:

1. Efectuar el análisis de estructuras de marcos.

1. Introducción.

Aquellas estructuras constituidas de vigas unidimensionales conectadas en sus extremos de forma pivotada o rígida son conocidas como marcos. Los puntos de conexión son denominados nodos.

En un buque, ensamblajes tridimensionales de vigas de cubiertas, cuadernas de costado, y largueros longitudinales pueden ser modelados como marcos.

2. Conceptos básicos.

<u>Análisis de marcos: desplazamiento nodal.</u>

En el análisis de marcos, todo es expresado en términos de lo que pasa en los nodos. Las fuerzas externas se suponen solo son aplicadas en los nodos, y los desplazamientos de toda la estructura están expresados completamente en términos de desplazamientos nodales.

Además, aquí se considera que los elementos elásticos presentan un comportamiento lineal que permite relacionar la fuerza aplicada en un nodo con el desplazamiento en dicho nodo a través de una constante llamada coeficiente de rigidez del material.

<u>Leyes fundamentales</u>

En el análisis estructural existen tres “leyes” o relaciones que se deben satisfacer:

-Equilibrio de fuerzas (dentro de cada miembro y entre los miembros).

-Compatibilidad de desplazamientos (dentro de cada miembro y entre los miembros).

-Ley del comportamiento del material (ley de esfuerzo-deformación) de cada elemento.

III. Análisis de marcos

2. Conceptos básicos.

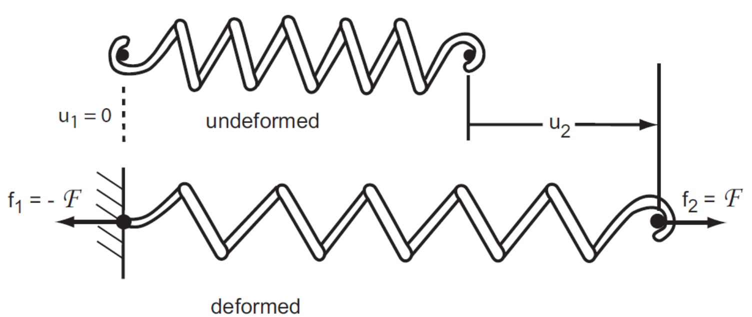
Leyes fundamentales

En una estructura de marcos tridimensional típica puede haber un gran número de desplazamientos nodales, pero la solución de un sistema de ecuaciones lineales, así sea uno de gran tamaño, es una tarea rutinaria para una computadora.

Producto de que hay un gran número de ecuaciones, cualquier discusión asociada a esta teoría y a la manipulación de las ecuaciones se ve facilitada por el uso de notación matricial.

Rigidez de una estructura

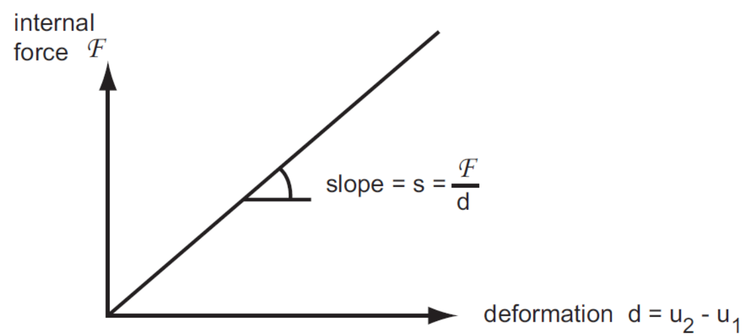
El elemento mecánico que directamente se suele asociar con rigidez es un resorte elástico simple.



Este elemento puede ser considerado como un ejemplo de un miembro estructural pues tiene las mismas características estructurales básicas que una barra cuyo desplazamiento es limitado en un extremo: presenta desplazamiento axial, transmite fuerzas axiales, y exhibe un comportamiento interno lineal (comportamiento material), es decir, existe una relación lineal entre la fuerza interna $\mathcal{F}$ y la deformación interna d que es de la forma:

$$\boxed{\mathcal{F} = sd}$$

Donde s representa la rigidez del resorte y d la elongación del resorte o diferencia entre los desplazamientos extremos (en la figura anterior $d = u_2 - u_1$).

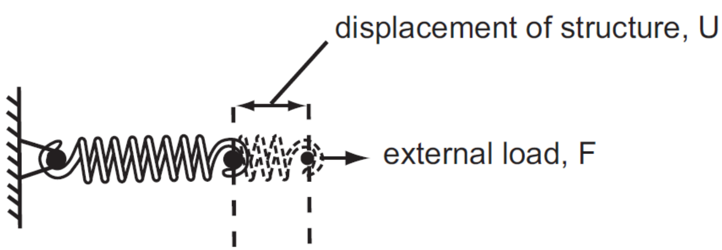


III. Análisis de marcos

2. Conceptos básicos.

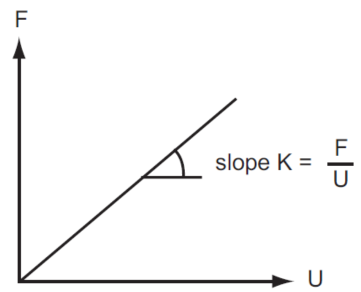
<u>Rigidez de una estructura</u>

Además de ser un miembro estructural, el mismo resorte podría ser considerado como una estructura (una estructura de un solo elemento que está apoyada en un extremo y cargada axialmente en el otro por una carga F).



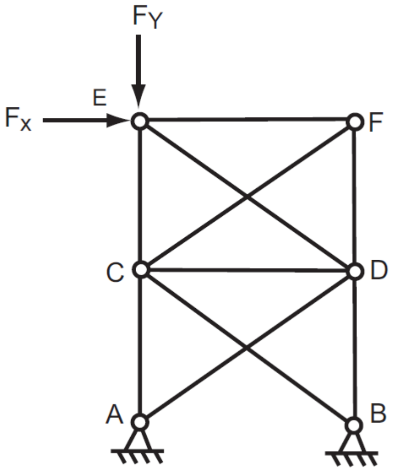
Aquí la carga causa un desplazamiento estructural U el cual es linealmente proporcional a F.

$$\boxed{F = KU}$$



K es la constante de proporcionalidad que representa la rigidez de toda la estructura. En este caso, en vista de que la estructura es igual al elemento, $K = s$. Y a partir de la rigidez y la fuerza aplicada sobre la estructura se puede determinar el desplazamiento U.

En el caso de estructuras más complejas generalmente es necesario determinar el desplazamiento en varios nodos para así poder evaluar deformaciones y fuerzas internas de los miembros.

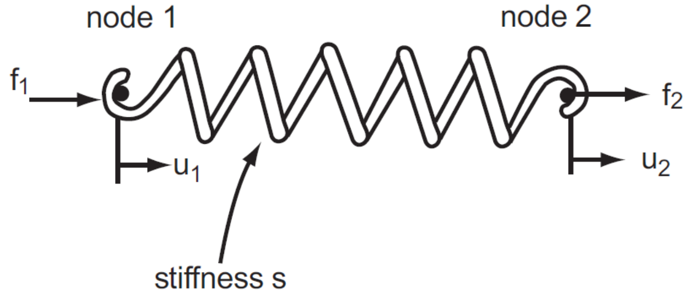


III. Análisis de marcos

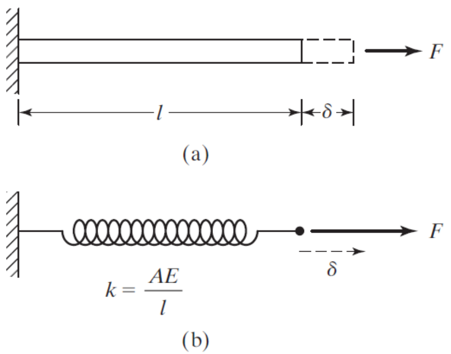
2. Conceptos básicos.

<u>Matriz de rigidez de un elemento de resorte o de una barra sujeta a carga axial</u>

Por simplicidad, considere nuevamente un resorte simple como elemento básico que forma parte de una estructura de múltiples elementos. En este caso, cada uno de los dos nodos estará conectado a otros elementos en la estructura, y en general, cada nodo se verá sujeto a una fuerza nodal que provocará un desplazamiento nodal.



Recuerde que en el caso de barras en cantiléver sujetas a axiales la rigidez está dada por AE/l.



$$F = k_1\delta, \qquad \sigma = \frac{F}{A}, \qquad \varepsilon = \frac{\delta}{l}, \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

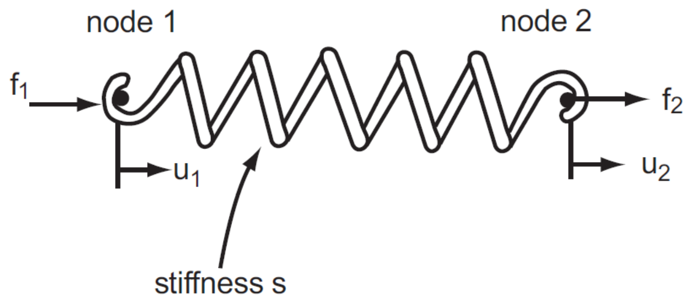
$$\sigma A = k_1 \frac{\sigma l}{E} \rightarrow k_1 = \frac{AE}{l}$$

Donde: σ es el esfuerzo normal, A el área de sección transversal a la dirección de la fuerza F, ε la deformación unitaria, δ el cambio en la longitud de la barra al elongarse, l la longitud no deformada de la barra, y E el módulo de Young.

III. Análisis de marcos

2. Conceptos básicos.

Matriz de rigidez de un elemento de resorte o de una barra sujeta a carga axial



Para el elemento anterior (resorte simple) se puede definir el vector de fuerzas nodales **f** y el vector de desplazamiento nodales **u**:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

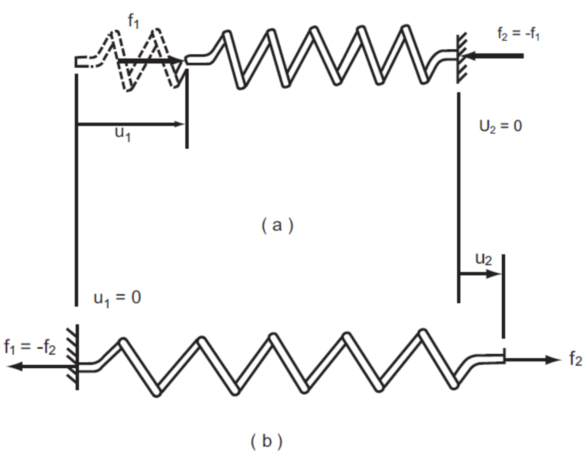
Por lo tanto, la matriz de rigidez para este elemento de resorte es de orden 2×2 y la relación entre fuerzas nodales y desplazamientos nodales es de la forma:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{f} = [\mathbf{k}^{\mathbf{e}}]\mathbf{u}}$$

En donde el superíndice indica que se trata de la matriz de rigidez del elemento individual e.

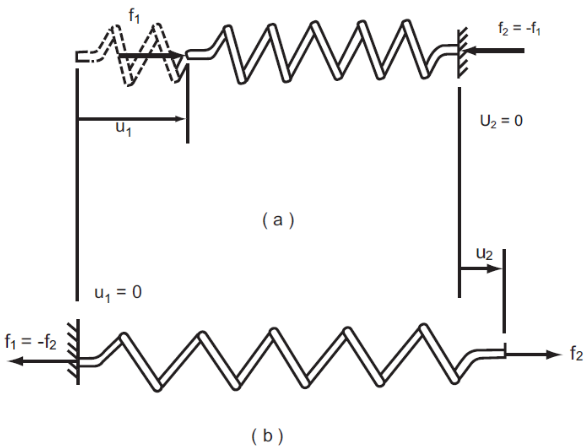
Para determinar la matriz $[\mathbf{k}^{\mathbf{e}}]$ se puede considerar cada desplazamiento nodal de forma aislada (el desplazamiento en los otros nodos es igual a cero en este caso), y se puede emplear la ley del comportamiento del material para evaluar las fuerzas nodales. Lo anterior en conjunto con la condición de equilibrio estático permitirá determinar los coeficientes de $[\mathbf{k}^{\mathbf{e}}]$.



III. Análisis de marcos

2. Conceptos básicos.

Matriz de rigidez de un elemento de resorte o de una barra sujeta a carga axial



Caso (a): $u_2 = 0$.

La fuerza interna $\mathcal{F}$ se opondrá a f_1, y abra una reacción $f_2 = -f_1$; ya que la deformación d será igual a:

$$d = u_2 - u_1 = -u_1$$

$$\mathcal{F} = -su_1$$

$$\begin{Bmatrix} su_1 \\ -su_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$k_{11} = s, \qquad k_{21} = -s$$

Caso (b): $u_1 = 0$.

La fuerza interna $\mathcal{F}$ no se opondrá a f_2, y abra una reacción $f_2 = -f_1$; ya que la deformación d será igual a:

$$d = u_2 - u_1 = u_2$$

$$\mathcal{F} = su_2$$

$$\begin{Bmatrix} -su_2 \\ su_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$k_{12} = -s, \qquad k_{22} = s$$

Por lo tanto:

$$\boxed{[\mathbf{k^e}] = \begin{bmatrix} s & -s \\ -s & s \end{bmatrix}}$$

La matriz anterior como se puede ver es simétrica (matriz que es igual a su traspuesta) y singular (matriz cuyo determinante es cero y que no tiene inversa).

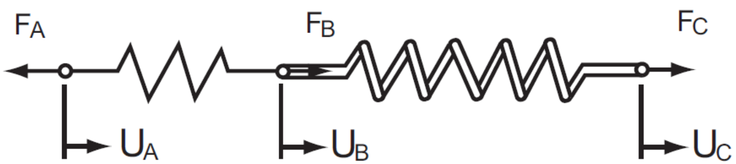
III. Análisis de marcos

2. Conceptos básicos.

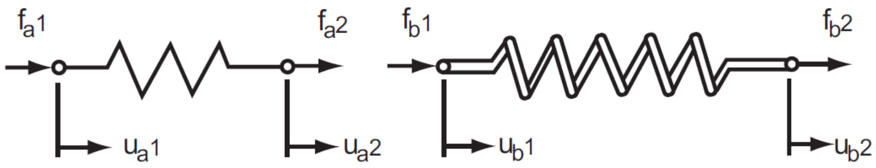
Ensamblaje de la matriz de rigidez de una estructura

Lo siguiente por considerar es como la matriz de rigidez de una estructura se puede obtener a partir de las matrices de rigidez de los elementos estructurales. Aquí para lograr lo anterior, se debe hacer uso de la relación lineal fuerza-desplazamiento en conjunto las leyes estructurales de equilibrio y compatibilidad.

Considere el siguiente ejemplo de dos resortes en serie. Al resorte de la izquierda lo denominaremos como elemento a y al de la derecha como elemento b.



STRUCTURE
Sign convention at structure level:
F and U are positive rightwards



element a   element b

En la figura anterior $U_A = u_{a1}, U_B = u_{a2} = u_{b1}, U_C = u_{b2}$. De igual forma, por equilibrio se requiere que en cada nodo, las fuerzas externas aplicadas en ese nodo (de haber alguna) y la suma de las fuerzas elementales en ese nodo sean iguales: $F_A = f_{a1}, F_B = f_{a2} + f_{b1}, F_C = f_{b2}$.

Para cada uno de estos elementos se puede escribir una ecuación de la forma $\mathbf{f} = [\mathbf{k^e}]\mathbf{u}$.

$$\begin{Bmatrix} f_{a1} \\ f_{a2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_a & -s_a \\ -s_a & s_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} f_{b1} \\ f_{b2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_b & -s_b \\ -s_b & s_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{b1} \\ u_{b2} \end{Bmatrix}$$

$$F_A = s_a u_{a1} - s_a u_{a2}$$

$$F_A = s_a U_A - s_a U_B$$

$$F_B = -s_a u_{a1} + s_a u_{a2} + s_b u_{b1} - s_b u_{b2}$$

$$F_B = -s_a U_A + (s_a + s_b) U_B - s_b U_C$$

III. Análisis de marcos

2. Conceptos básicos.

Ensamblaje de la matriz de rigidez de una estructura

$$F_C = -s_b u_{b1} + s_b u_{b2}$$

$$F_C = -s_b U_B + s_b U_C$$

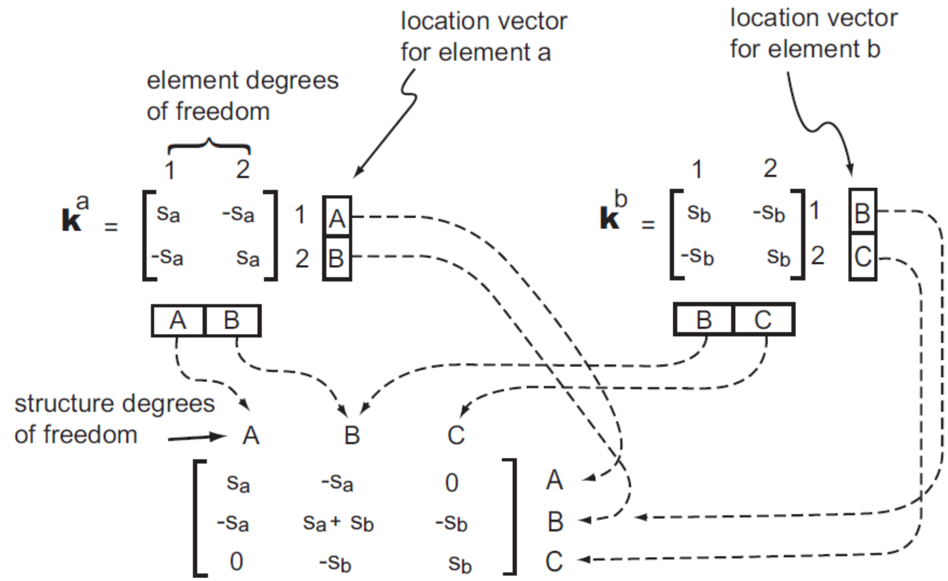
Lo que en forma matricial puede re escribir de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_a & -s_a & 0 \\ -s_a & s_a + s_b & -s_b \\ 0 & -s_b & s_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} s_a & -s_a & 0 \\ -s_a & s_a + s_b & -s_b \\ 0 & -s_b & s_b \end{bmatrix}}$$

Esta matriz como se puede ver también es simétrica y singular; y está constituida por las matrices de rigidez de los elementos individuales.

La observación anterior permite realizar el armado directo a partir de las matrices de los elementos individuales. Vea la siguiente figura.



Solución del sistema lineal **F** = [**K**]**U**

Una vez la matriz de rigidez estructural ha sido ensamblada, surge una aparente paradoja: en cada caso la matriz es singular, lo que hace pensar que las ecuaciones para los desplazamientos nodales no pueden ser resueltas y el sistema es indeterminado. Esta peculiaridad puede ser explicada a partir del hecho de que a este punto la estructura no ha sido limitada ni apoyada en ningún nodo lo que hace que toda la estructura se comporte como un cuerpo rígido.

III. Análisis de marcos

2. Conceptos básicos.

<u>Solución del sistema lineal $\mathbf{F} = [\mathbf{K}]\mathbf{U}$</u>

Si por ejemplo el sistema anterior fuera limitado de forma tal que el nodo A esta apoyado ($U_A = 0$) y se conocieran las fuerzas externas en los nodos B y C, el sistema anterior podría ser resuelto de forma explícita fácilmente:

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_a & -s_a & 0 \\ -s_a & s_a + s_b & -s_b \\ 0 & -s_b & s_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_a + s_b & -s_b \\ -s_b & s_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_B \\ U_C \end{Bmatrix} \rightarrow U_B, U_C$$

Una vez conocido U_B, se puede determinar la reacción F_A:

$$F_A = -s_a U_B$$

Y a partir de los resultados anteriores se pueden determinar las fuerzas internas que actúan sobre los elementos:

$$\mathcal{F}_a = s_a(U_B - U_A), \qquad \mathcal{F}_b = s_b(U_C - U_B)$$

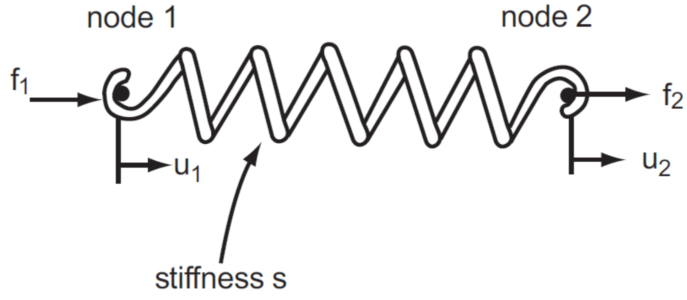
Una vez se tienen los desplazamientos nodales y las fuerzas internas se pueden determinar los esfuerzos y las deformaciones.

Para ver un resumen de los pasos que se deben seguir durante el análisis de marcos vea la tabla 6.1 de su libro de texto.

Un ejemplo numérico puede encontrarlo en la sección 6.1.7 de su libro de texto.

3. Transformación de coordenadas.

Como se comentó en la sección anterior, la rigidez de una barra elástica sujeta a carga axial estará dada por AE/l y la fuerza interna $\mathcal{F}$ será el producto de esta rigidez y la elongación que experimente la barra.



III. Análisis de marcos

3. Transformación de coordenadas.

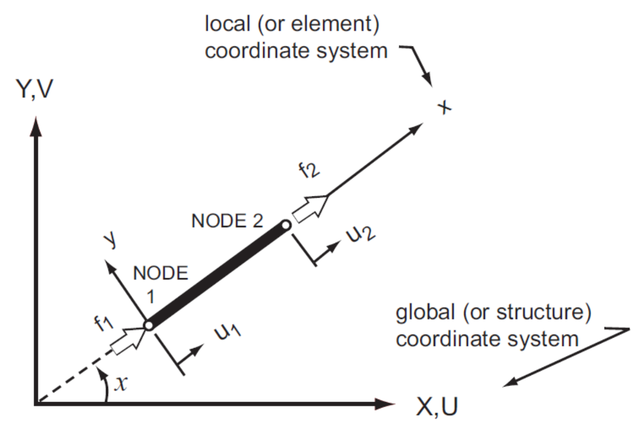
Por lo tanto para el elemento anterior se tendrá una ecuación de la forma:

$$\mathbf{f} = [\mathbf{k^e}]\mathbf{u}$$

Donde la matriz de rigidez del elemento e está dada por:

$$[\mathbf{k^e}] = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación anterior que relaciona fuerzas y desplazamientos es expresada en términos de las coordenadas locales (x, y en la siguiente figura) que siempre están alineadas con el elemento.



Sin embargo, en las estructuras de marcos, los miembros o elementos se suelen encontrar orientados a determinados ángulos unos con respecto a otros; por lo que se hace necesario expresar las coordenadas locales de cada elemento en término de un sistema coordenado global para toda la estructura (X, Y en la figura anterior).

En el caso mostrado en la figura anterior, una barra es inclinada a un ángulo χ con respecto al sistema coordenado global. Y tanto los desplazamientos (u, v) como las fuerzas (f_x, f_y) deben ser expresados en términos de los desplazamiento (U, V) y fuerzas (F_x, F_y) correspondientes al sistema coordenado global.

Para el elemento anterior, la relación lineal de fuerza-desplazamiento quedaría como:

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Donde en este caso en particular en vista de que la carga es axial $f_{y1} = f_{y2} = 0$.

III. Análisis de marcos

3. Transformación de coordenadas.

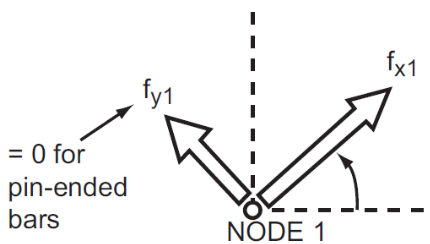
Sí se define al vector de fuerzas nodales locales como **f** y al vector de desplazamiento nodales locales como $\boldsymbol{\delta}$:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

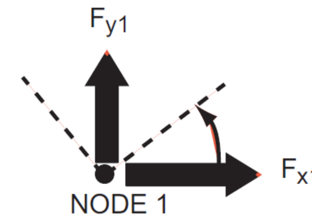
Las fuerzas y desplazamiento anteriores se relacionarían con los de las coordenadas locales de la siguiente forma:

$$f_{x1} = F_{X1}\cos\chi + F_{Y1}\sin\chi\,, f_{x2} = F_{X2}\cos\chi + F_{Y2}\sin\chi$$

$$f_{y1} = -F_{X1}\sin\chi + F_{Y1}\cos\chi\,, f_{y2} = -F_{X2}\sin\chi + F_{Y2}\cos\chi$$



(a) ELEMENT NODAL FORCES AT NODE 1
EXPRESSED IN ELEMENT COORDINATES



(b) ELEMENT NODAL FORCES AT NODE 1
EXPRESSED IN STRUCTURE COORDINATES

Sea $\mu = \sin\chi$ y $\lambda = \cos\chi$:

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \end{Bmatrix}$$

O bien:

$$\boxed{\mathbf{f} = [\mathbf{T}]\mathbf{F}}$$

Donde $[\mathbf{T}]$ es llamada la matriz de transformación. Esta matriz tiene la propiedad de que su inversa es igual a su traspuesta $[\mathbf{T}]^{-1} = [\mathbf{T}]^{T}$.

La transformación entre los desplazamiento locales y globales es igual a la transformación de fuerzas.

III. Análisis de marcos

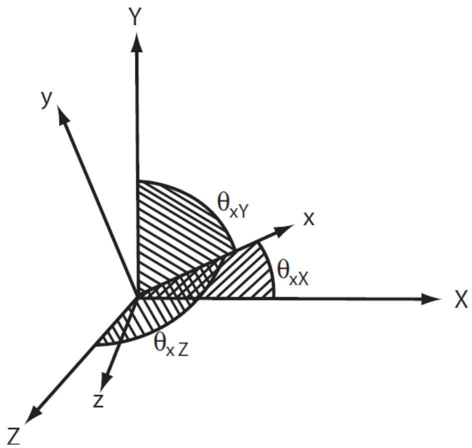
3. Transformación de coordenadas.

$$\boxed{\boldsymbol{\delta} = [\mathbf{T}]\boldsymbol{\Delta}}$$

Donde:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix}$$

En el caso de que se trate de una transformación general, esta involucrará rotación de los tres ejes locales x, y, z con respecto a los ejes globales X, Y, Z.



En la figura anterior solo se muestran los ángulos que forma el eje local x con los tres ejes globales. De forma similar se pueden mostrar los ángulos que forman el resto de los ejes locales con los globales.

Sea $\boldsymbol{\lambda}$, en este caso general, igual a:

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{xX} & \cos\theta_{xY} & \cos\theta_{xZ} \\ \cos\theta_{yX} & \cos\theta_{yY} & \cos\theta_{yZ} \\ \cos\theta_{zX} & \cos\theta_{zY} & \cos\theta_{zZ} \end{bmatrix}}$$

Se tendrá que para un determinado nodo i:

$$\mathbf{f}_i = [\boldsymbol{\lambda}]\mathbf{F}_i, \qquad \boldsymbol{\delta}_i = [\boldsymbol{\lambda}]\boldsymbol{\Delta}_i$$

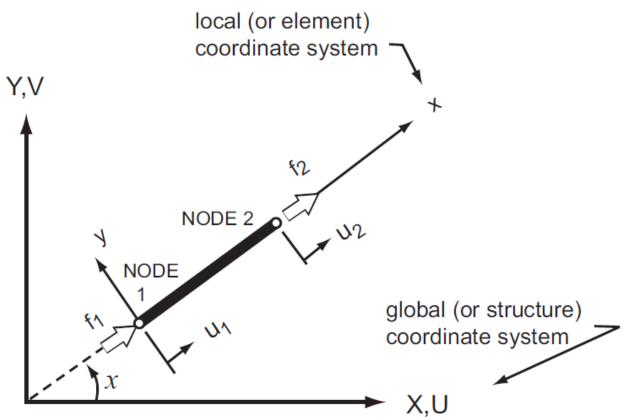
Esta matriz al igual que la matriz $[\mathbf{T}]$ tiene la propiedad de que su inversa es igual a su traspuesta y consecuentemente:

$$\boxed{\mathbf{F}_i = [\boldsymbol{\lambda}]^T\mathbf{f}_i, \qquad \boldsymbol{\Delta}_i = [\boldsymbol{\lambda}]^T\boldsymbol{\delta}_i}$$

Retomando el ejemplo anterior.

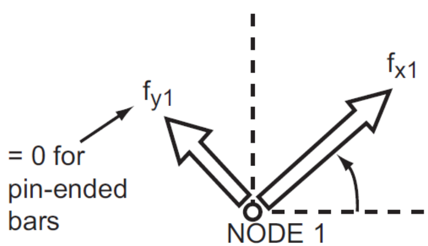
III. Análisis de marcos

3. Transformación de coordenadas.



En este caso el movimiento es planar y por lo tanto la matriz $[\boldsymbol{\lambda}]$ será 2×2.

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{xX} & \cos\theta_{xY} \\ \cos\theta_{yX} & \cos\theta_{yY} \end{bmatrix}$$



(a) ELEMENT NODAL FORCES AT NODE 1
EXPRESSED IN ELEMENT COORDINATES

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{xX} & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{xX}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_{xX}\right) & \cos\theta_{xX} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \cos\chi & \sin\chi \\ -\sin\chi & \cos\chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{bmatrix}$$

Sea $\mathbf{O}$ igual a:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación $[\mathbf{T}]$ podría re escribirse como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}$$

Y consecuentemente:

$$\mathbf{f} = [\mathbf{k^e}]\boldsymbol{\delta} \rightarrow [\mathbf{T}]\mathbf{F} = [\mathbf{k^e}][\mathbf{T}]\Delta$$

Lo cual al multiplicar por la inversa de [T] da como resultado:

$$\boxed{\mathbf{F} = [\mathbf{T}]^{T}[\mathbf{k^e}][\mathbf{T}]\Delta = [\mathbf{K^e}]\Delta}$$

III. Análisis de marcos

3. Transformación de coordenadas.

Donde $[\mathbf{K^e}]$ es la matriz de rigidez del elemento expresada en las coordenadas globales.

4. Estructuras de marcos con juntas pivotadas.

En el caso de estructuras de marcos con juntas pivotadas, el número de grados de libertad de la estructura va a depender de las restricciones que imponen las juntas sobre los nodos de los diferentes elementos. Para más detalles vea el ejemplo de la sección 6.2.2 de su libro de texto.

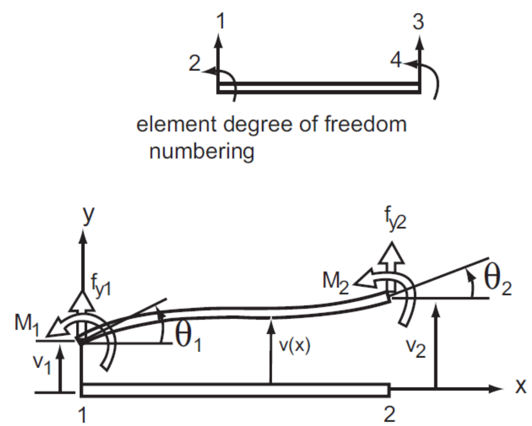
5. Estructuras de marcos con juntas rígidas.

Las estructuras de marcos existentes en buques presentan juntas rígidas en vez de pivotadas. Esto último producto de que existe la necesidad de condiciones estanco, las uniones son por soldadura, y los elementos deben soportar grandes cargas laterales.

En primer lugar se analizara un elemento de viga sujeto a carga lateral, en donde se supondrá no hay deflexiones axiales.

Luego se procederá al estudio de elementos de vigas ordinarios (se toman en cuenta las deflexiones axiales).

<u>Método general para derivar la matriz de rigidez de un elemento: ejemplo de una viga en donde no se consideran cargas axiales</u>

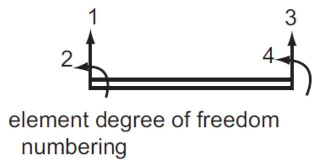


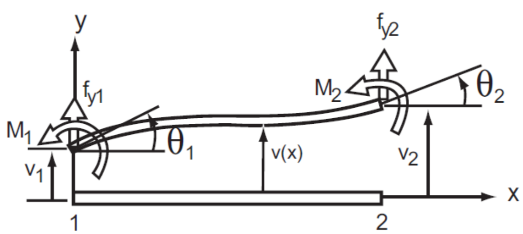
Este método solo es para determinar la matriz de rigidez de los elementos, sus pasos no deben ser confundidos con los que se siguen durante el análisis general de marcos (tabla 6.1 del libro de texto).

III. Análisis de marcos

5. Estructuras de marcos con juntas rígidas.

Método general para derivar la matriz de rigidez de un elemento: ejemplo de una viga en donde no se consideran cargas axiales





Paso 1: Selección de una función de desplazamiento apropiada. Aquí se específica una función de desplazamiento que, de forma única, defina todos los puntos dentro del elemento en términos de los grados de libertad nodales. En el caso de una viga, el desplazamiento dentro del elemento estará dado por $v(x)$ el cuál puede ser representado por un polinomio de tercer orden con cuatro coeficientes desconocidos (uno por cada grado de libertad, vector $\boldsymbol{\delta}$).

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \\ v_2 \\ v_2' \end{Bmatrix}$$

Aquí:

$$v_1' = \frac{dv_1}{dx} \cong \theta_1, \qquad v_2' = \frac{dv_2}{dx} \cong \theta_2$$

Por lo tanto:

$$v(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$$

Lo que en forma matricial puede ser representado como:

$$v(x) = \mathbf{H}(\boldsymbol{x})\mathbf{C}$$

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{x}) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3], \qquad \mathbf{C}^{\boldsymbol{T}} = [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4]$$

De igual forma:

$$v'(x) = \frac{dv(x)}{dx} = C_2 + 2C_3x + 3C_4x^2$$

De manera tal que el vector de desplazamiento generalizado $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x})$ puede ser re escrito como:

III. Análisis de marcos

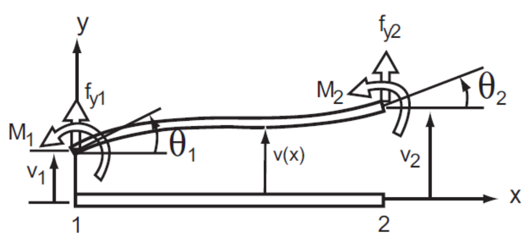
5. Estructuras de marcos con juntas rígidas.

<u>Método general para derivar la matriz de rigidez de un elemento: ejemplo de una viga en donde no se consideran cargas axiales</u>

$$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x}) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}$$

Paso 2: Relacionar $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ con los “desplazamientos” en los puntos nodales $\boldsymbol{\delta}$.

element degree of freedom numbering



En el nodo 1, cuando $x = 0$:

$$v(0) = v_1 = C_1, v'(0) = {v_1}' = C_2$$

Similarmente en el nodo 2, cuando $x = l$:

$$v(l) = v_2 = C_1 + C_2 l + C_3 l^2 + C_4 l^3$$

$$v'(l) = {v_2}' = C_2 + 2C_3 l + 3C_4 l^2$$

Lo que de forma matricial es igual a:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ {v_1}' \\ v_2 \\ {v_2}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\delta} = [\mathbf{A}]\mathbf{C}$$

En vista de que la matriz [A] es conocida los valores de C se pueden encontrar fácilmente:

$$\boxed{\mathbf{C} = [\mathbf{A}]^{-1}\boldsymbol{\delta}}$$

Por lo que:

$$v(x) = \mathbf{H}(\boldsymbol{x})\mathbf{C} = \mathbf{H}(\boldsymbol{x})[\mathbf{A}]^{-1}\boldsymbol{\delta}$$

III. Análisis de marcos

5. Estructuras de marcos con juntas rígidas.

Método general para derivar la matriz de rigidez de un elemento: ejemplo de una viga en donde no se consideran cargas axiales

Paso 3: Expresar las deformaciones internas en términos de los “desplazamientos” en los puntos nodales, $\boldsymbol{\delta}$. La definición de “deformación” de un elemento depende del campo particular de la mecánica de sólidos involucrado. En elasticidad plana la deformación es por ejemplo $\varepsilon_x = \partial u/\partial x$. En el caso de vigas en flexión (pequeñas deflexiones) es representada por la curvatura de la viga $v'' = d^2v/dx^2$.

$$v(x)'' = 2C_3 + 6C_4x$$

Lo que en forma matricial está representado por:

$$v(x)'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{v(x)'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} [\mathbf{A}]^{-1} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}}$$

Paso 4: Expresar las “fuerzas” internas en términos de los “desplazamientos” en los puntos nodales utilizando leyes elementales del comportamiento elástico. Al igual que con las deformaciones internas, la definición de fuerzas internas depende de la clase de problema que este siendo considerado. Para problemas bidimensionales y tridimensionales de elasticidad consiste en las componentes de esfuerzo, en tanto que para problemas de flexión de vigas consiste en los momentos flectores internos de las vigas $\mathcal{M}_z$. El objetivo de este paso es el de relacionar a las fuerzas internas con los “desplazamientos” en los nodos. En el caso de problemas de elasticidad se usa la ley de Hooke.

Para problema de vigas sujetas a flexión existe una relación entre el momento flector interno y la curvatura de la viga:

$$\boxed{\mathcal{M}_z(x) = EIv(x)'' = EI\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}}$$

III. Análisis de marcos

5. Estructuras de marcos con juntas rígidas.

Método general para derivar la matriz de rigidez de un elemento: ejemplo de una viga en donde no se consideran cargas axiales

Paso 5: Obtener la matriz de rigidez del elemento al relacionar las fuerzas nodales con los desplazamientos nodales. Para esto último se utiliza el principio de trabajo virtual (refiérase a algún libro de mecánica de materiales donde se discutan métodos de energía para resolver problemas que implican deflexión).

El principio establece que durante cualquier "desplazamiento" virtual (desplazamiento arbitrario que en realidad no existe, $\boldsymbol{\delta}^*$), el trabajo total externo W_{ext} hecho por las "fuerzas" nodales debe ser igual al trabajo total interno W_{int} hecho por las "fuerzas" internas.

Sea:

$$\boldsymbol{\delta}^* = \begin{Bmatrix} {v_1}^* \\ {v_1}'^* \\ {v_2}^* \\ {v_2}'^* \end{Bmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

$$W_{ext} = \boldsymbol{\delta}^{*T}\mathbf{f} = {v_1}^* f_1 + {v_1}'^* M_1 + {v_2}^* f_2 + {v_2}'^* M_2$$

En tanto que el trabajo interno producto de un "desplazamiento" virtual sería:

$$W_{int} = \int_0^l \left(v(x)''^*\right)^T \mathcal{M}_z(x)dx$$

Si esta curvatura virtual $v(x)''^*$ es expresada en términos del desplazamiento virtual nodal $\boldsymbol{\delta}^*$ la expresión anterior podría re escribirse como:

$$W_{int} = \int_0^l (\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}^*)^T \mathcal{M}_z(x)dx$$

$$W_{int} = \int_0^l \mathbf{B}^T \boldsymbol{\delta}^{*T} (EI\mathbf{B}\boldsymbol{\delta})dx$$

Igualando el trabajo interno y el externo, y considerando un desplazamiento virtual unitario:

$$\mathbf{f} = \left[\int_0^l \mathbf{B}^T (EI\mathbf{B})dx\right]\boldsymbol{\delta}$$

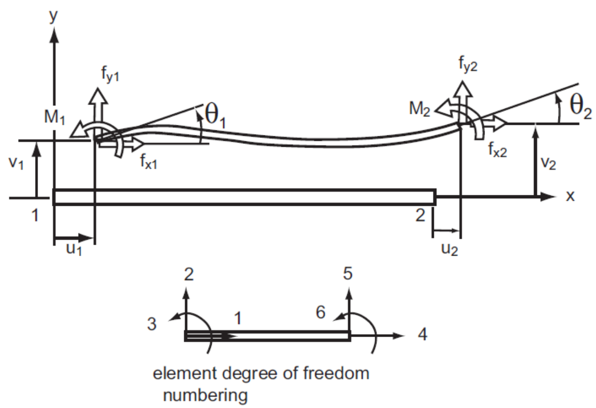
Por lo tanto el término dentro del paréntesis representa la matriz de rigidez del elemento.

III. Análisis de marcos

5. Estructuras de marcos con juntas rígidas.

Elementos de viga ordinarios

Como se comentó, los elementos de viga ordinarios son aquellos no se puede despreciar la deflexión axial.



Para el ejemplo correspondiente a la figura anterior, el vector de “desplazamientos” nodales $\boldsymbol{\delta}$ estaría dado por:

$$\delta = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Acorde a esto se puede esperar una matriz de rigidez de dimensión 6×6. Esta matriz será igual a la suma de la matriz del elemento si solo estuviera sujeto a carga axial y a la matriz del elemento si solo estuviera sujeto a carga lateral. Por otra parte, si se deseará determinar el vector de “fuerzas nodales (reacciones y momentos aplicados de forma externa sobre los nodos)” o el vector de “fuerzas internas (esfuerzos normales, momentos, y fuerzas cortantes internas)” Solo se deben emplear las constantes materiales (módulo de Young, segundo momento de área, longitud de la barra, área de sección transversal) y el vector de “desplazamiento (desplazamientos axiales, laterales, y pendientes de la curva de flexión)” deducido. Vea la sección 6.3.3 para más detalles.

Cargas distribuidas: cargas nodales equivalentes.

En el caso de que se tengan “fuerzas” distribuidas, estás simplemente deben ser llevadas a “fuerzas” nodales equivalentes. Vea la figura 6.17 para algunas condiciones de carga típicas.

III. Análisis de marcos

5. Estructuras de marcos con juntas rígidas.

Cargas distribuidas: cargas nodales equivalentes.

Para ver el proceso completo del análisis de estructuras de marcos cuyos elementos están sujetos de forma rígida, a través de un ejemplo numérico, refiérase a la sección 6.3.6 del libro de texto.